

Dirk Fabian

# Regelung periodischer Prozesse



Cuvillier Verlag Göttingen

Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

# Regelung periodischer Prozesse

Vom Fachbereich Elektrotechnik der Universität Kassel zur  
Erlangung der Würde des Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing.

Dirk Harry Fabian

Eingereicht am 1. Dezember 2008

Gutachter:

1. Univ. Prof. Dr.-Ing. Heinz J. Theuerkauf
2. Univ. Prof. Dr.-Ing. Gunter Knoll

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2009

Zugl.: Kassel, Univ., Diss., 2009

978-3-86727-945-1

Datum der Disputation: 19. März 2009

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2009

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

[www.cuvillier.de](http://www.cuvillier.de)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2009

Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86727-945-1

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Energietechnik – Fachgebiet Antriebstechnik (IEE-AT) der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Heinz J. Theuerkauf für die großzügige Förderung der Arbeit, für seine stete Bereitschaft zu Diskussionen sowie für die wertvollen Erfahrungen, die ich während meiner Tätigkeiten an seinem Institut sammeln konnte. Seine Weise, das Institut zu leiten, ist unter anderem durch die sehr erfolgreiche Verknüpfung von Wissenschaft und industrieller Anwendung geprägt. Die daraus resultierende erhöhte Relevanz der Arbeit empfand ich als sehr motivierend.

Herrn Professor Dr.-Ing. Gunter Knoll, Leiter des Instituts für Maschinenelemente und Konstruktionstechnik der Universität Kassel, danke ich für sein Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Ich bedanke mich außerdem bei den Herren Professor Knoll und Professor Theuerkauf für ihre Initiative zur Zusammenarbeit, durch die ich eine industrielle Anwendung – die Regelung periodischer, hochdynamischer Kraftprofile an einem Gleitlagerprüfstand – des im Rahmen meiner Arbeit entwickelten Regelungsverfahrens realisieren konnte.

Allen Kolleginnen und Kollegen des IEE-AT danke ich für die gute Zusammenarbeit und für das freundschaftliche Arbeitsklima.

Herrn Dipl.-Ing. Christian Spieker danke ich besonders für seine engagierte und kompetente Mitarbeit bei der technischen Umsetzung des Regelungsverfahrens zum Einsatz am Gleitlagerprüfstand.

Für die gute Zusammenarbeit bei der Betriebnahme der Kraftregelung am Gleitlagerprüfstand am Institut für Maschinenelemente und Konstruktionstechnik der Universität Kassel danke ich den Herren Dr.-Ing. Elmar Busche und Dipl.-Ing. Sascha Umbach.

Bei den Herren Dr.-Ing. Hans-Georg Nitzke, Dr.-Ing. Thorsten Rebohl und Dr.-Ing. Uwe Waschatz von der Volkswagen AG bedanke ich mich für die Bereitstellung eines Versuchsfahrzeugs, mit dem ich umfangreiche Untersuchungen zu dem im Rahmen der Arbeit entwickelten

---

Regelungsverfahren durchführen durfte, und für die Unterstützung bei der Anpassung des Rapid-Prototyping-Systems an das Fahrzeug.

Abschließend möchte ich bemerken, dass es mich wundert, wie schnell vier Jahre vergehen können.

Dirk Fabian

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	ix
Symbole und Bezeichnungen	xv
<b>I Entwurf, Darstellung und systemtheoretische Analyse des Regelungsverfahrens <i>ZykloRegler</i></b>	<b>1</b>
<b>1 Entwurf des <i>ZykloRegler</i></b>	<b>3</b>
1.1 Vorausgreifende Skizzierung . . . . .	3
1.2 Abtastperiode des Regelkreises und Periodendauer des Prozesses . . . . .	5
1.3 Anforderung an das Führungsverhalten . . . . .	6
1.4 Periodische Integration der Regelabweichung . . . . .	7
1.4.1 Die Übertragungsfunktion $I^{\circ}$ . . . . .	9
1.4.2 Deutung des Übertragungsverhaltens von $I^{\circ}$ . . . . .	9
1.5 Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises . . . . .	17
1.5.1 Die periodische Regelabweichung $e_i^{\circ}$ . . . . .	18
1.5.2 Die Übertragungsfunktion $F^{\circ}$ . . . . .	21
<b>2 Der <i>ZykloRegler</i> im Überblick</b>	<b>23</b>
2.1 Reglerstruktur . . . . .	23
2.1.1 Übertragungsfunktion zur Erzeugung des zyklischen Stellgrößenanteils . . . . .	24
2.1.2 Übertragungsfunktion zur Erzeugung des parallelen Stellgrößenanteils . . . . .	25
2.1.3 Gesamte Übertragungsfunktion des <i>ZykloRegler</i> . . . . .	26
2.2 Allgemeingültige Parametrierung . . . . .	26
2.2.1 Anpassung des Reglers an die Periodendauer des periodischen Prozesses . . . . .	27
2.2.2 Maximale Ordnungszahl der regelbaren Harmonischen . . . . .	27

2.2.3	Auslegungsvorschrift für die Phasenwinkel . . . . .	28
2.2.4	Frequenzselektive Verstärkungen . . . . .	28
2.3	Beispiel zur Ausführung des <i>ZyloRegler</i> : Der <i>ZPI-Regler</i>	29
2.4	Simulationsbeispiel: Regelung einer Strecke mit I-Verhalten	30
2.4.1	Parametrierung des Reglers . . . . .	30
2.4.2	Regelung einer periodischen Führungsgröße . . . . .	32
2.4.3	Ausregeln einer periodischen Störgröße . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Systemtheoretische Analyse des <i>ZyloRegler</i></b>	<b>43</b>
3.1	Stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises . .	43
3.1.1	Stationäres Führungsverhalten . . . . .	45
3.1.2	Stationäres Störverhalten . . . . .	48
3.1.3	Charakteristischer Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regel- kreises . . . . .	49
3.2	Kriterien zur Parametrierung der Phasenwinkel von $F^\circ$ .	52
3.2.1	Notwendige Bedingung für die Stabilität des ge- schlossenen Regelkreises . . . . .	55
3.2.2	Phasenwinkel für maximale Dämpfung bei minima- ler Verstärkung . . . . .	71
<b>II</b>	<b>Anwendung des <i>ZyloRegler</i></b>	<b>73</b>
<b>4</b>	<b>Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüf- stand</b>	<b>75</b>
4.1	Prüfunggebung des Gleitlagers . . . . .	75
4.2	Elektrohydraulisches System des Gleitlagerprüfstands . .	76
4.3	Kraftregelkreis zur Erzeugung des Belastungsprofils . . . .	79
4.4	Technische Realisierung des <i>ZyloRegler</i> für den Betrieb des Prüfstands . . . . .	80
4.5	Messergebnisse aus dem Betrieb des Prüfstands . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Drehzahl- und Laufruheregung eines Dieselmotors</b>	<b>91</b>
5.1	Drehzahlregelkreis im Versuchsfahrzeug . . . . .	93

5.2 Implementierung des <i>ZykloRegler</i> im Versuchsfahrzeug .	93
5.3 Messergebnisse aus dem Betrieb des Versuchsfahrzeugs . .	96
<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>



## Einleitung

Bei vielen regelungstechnischen Anwendungen wird gefordert, dass die Regelgröße einer periodischen Führungsgröße folgt oder dass der Einfluss einer periodischen Störgröße kompensiert wird. Oft werden auch beide Forderungen gleichzeitig gestellt.

Die Regelung eines in diesem Sinn periodischen Prozesses erfordert einen Regler, der stationäre Genauigkeit bei periodischen Führungs- und Störgrößen leistet, damit die Regelgröße im eingeschwungenen Zustand exakt der periodischen Führungsgröße entspricht, auch unter Einfluss einer periodischen Störgröße.

### Gegenstand der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur digitalen Regelung periodischer Prozesse entworfen und in zwei industriellen Anwendungen erfolgreich zur Lösung von Regelungsproblemen eingesetzt.

Das Verfahren erhielt den Namen *Zyklusregler*.

Der *Zyklusregler* leistet stationäre Führungsgenauigkeit bei periodischen Sollwertverläufen und kompensiert periodische Störgrößen vollständig. Er ist sowohl zur Regelung stabiler als auch instabiler Regelstrecken geeignet. Die Parametrierung des Reglers ist gemäß einer einfachen, allgemeingültigen Vorschrift durchzuführen, wobei nur wenige Kenntnisse über das Verhalten der Regelstrecke einfließen müssen. Es wird kein mathematisches Modell der Regelstrecke benötigt. Das Verfahren erfordert für seine Verwendung kein vertieftes Wissen aus der Regelungstheorie. So erfordert die Parametrierung des *Zyklusreglers* nur wenig mehr Aufwand als die Parametrierung eines PID-Reglers.

### Motivation

Die Notwendigkeit, ein digitales Verfahren zur Regelung periodischer Prozesse zu entwerfen, resultierte aus der regelungstechnischen Problemstellung, die es bei einer industriellen Anwendung zu lösen galt. Am elektrohydraulischen System eines Gleitlagerprüfstands [3] musste die Regelung der hydraulischen Kraft, mit der die Gleitlager zur Untersu-

chung ihres Verschleißverhaltens zu belasten sind, realisiert werden. Dabei sollten die Führungsgrößen periodisch und hochdynamisch verlaufen. Zusätzlich war der Einfluss periodischer Störungen zu kompensieren. Die Regelung sollte mit wenig Aufwand an das elektrohydraulische System anzupassen sein. Der Entwurf und die Auslegung des Reglers sollten keine Modellbildung des elektrohydraulischen Systems erfordern. Damit könnten auch Anwender mit geringen Kenntnissen der System- und Regelungstheorie die Kraftregelung am Prüfstand erfolgreich parametrieren und in Betrieb nehmen.

Der *ZyklusRegler* sollte außerdem in einer zweiten industriellen Anwendung der Lösung eines Regelungsproblems dienen. Hier bestand die Aufgabe in der Leerlauf- und Laufruheregelung eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung. Um die mittlere Kurbelwellendrehzahl stationär genau auf ihrem konstanten Sollwert halten zu können, müssen periodische Störanteile, die überwiegend aus Fertigungstoleranzen des Einspritzsystems resultieren, kompensiert werden. Die Kompensation der Störanteile wird in aktuellen Motorsteuerungssystemen mit einer zusätzlichen, dem Leerlaufregler überlagerten Funktion, oft als Laufruheregelung oder Zylindergleichstellung bezeichnet, realisiert. Der *ZyklusRegler* sollte diese Kombination aus Leerlaufregler und zusätzlicher Funktion zur Laufruheregelung ersetzen.

### Einordnung des Regelungsverfahrens

Als sich der *ZyklusRegler* bereits erfolgreich im Einsatz befand, wurde – zur Einordnung und gegebenenfalls zum Vergleich – nach alternativen Verfahren gesucht, die sich ebenso zur Lösung der in den beiden industriellen Anwendungen vorliegenden Regelungsprobleme eignen würden.

Zur Regelung periodischer Führungsgrößen oder zur Kompensation periodischer Störungen wird häufig das als *Repetitive Control* bezeichnete und umfassend in [4] dargestellte Verfahren eingesetzt. *Repetitive Control* kann nach zwei verschiedenen Prinzipien ausgeführt werden. Die Ausführungen, bei denen auch die periodischen Stellgrößenanteile im geschlossenen Regelkreis erzeugt werden, basieren auf dem sogenannten Inneren-Modell-Prinzip [11, 8]. Ein anderes Prinzip ist die Verwendung eines externen Modells periodischer Stör- und Führungsgrößen [4]. Dabei

---

werden die periodischen Stellgrößenanteile außerhalb des geschlossenen Regelkreises erzeugt.

Da sich der *ZykloRegler* im geschlossenen Regelkreis befindet, wurden die Ausführungen von *Repetitive Control* zum Vergleich in Betracht gezogen, die dem Inneren-Modell-Prinzip gerecht werden, das nachfolgend kurz erläutert wird.

Allgemein kann ein Regler die Forderung der stationären Genauigkeit nur für bestimmte Signale erfüllen. Dabei sind die Polstellen der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises entscheidend.

Wenn sämtliche Polstellen einer in den Frequenzbereich transformierten Führungs- oder Störgröße auch Polstellen des offenen Regelkreises darstellen, so wird die Führungsgröße stationär genau eingeregelt beziehungsweise der Einfluss der Störgröße vollständig kompensiert. Der offene Regelkreis muss also ein Modell der Führungs- und Störgrößen enthalten, damit der Regelfehler im stationären Zustand Null ist. Dieser Zusammenhang wird in der Literatur als Inneres-Modell-Prinzip geführt. Das Innere-Modell-Prinzip gilt gleichermaßen für kontinuierliche und für diskrete Systeme.

Wie in [4] erörtert wird, benötigt *Repetitive Control* in den Ausführungen, die dem Inneren-Modell-Prinzip gerecht werden, zur Reglerauslegung eines digitalen Reglers eine Übertragungsfunktion der Regelstrecke. Dies erfordert die Modellbildung der Regelstrecke, was in vielen Fällen sehr aufwendig ist<sup>1</sup>. Zudem muss eine instabile Regelstrecke zunächst mit einem zusätzlichen Regler stabilisiert werden.

Der *ZykloRegler* wird dem Inneren-Modell-Prinzip gerecht, so dass die Regelabweichung bei periodischen Führungs- und Störgrößen stationär exakt Null ist. Er kann damit als eine weitere Ausführung von *Repetitive Control* betrachtet werden. Im Vergleich besitzt er einen wesentlichen Vorteil darin, dass er sehr einfach zu parametrieren ist, ohne dass eine Übertragungsfunktion der Regelstrecke benötigt wird. Außerdem lässt er sich direkt zur Regelung instabiler Systeme einsetzen, wodurch mit

---

<sup>1</sup>Es gibt modifizierte *Repetitive Control* - Verfahren, die kein Modell der Regelstrecke benötigen [4]. Diese Regler leisten jedoch dem Inneren-Modell-Prinzip entsprechend nur noch annähernd stationäre Genauigkeit bei periodischen Führungs- und Störgrößen.

dem *Zyklusregler* ein schnelleres Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises erreicht werden kann als mit *Repetitive Control*.

Der *Zyklusregler* stellt für jede Anwendung, in der *Repetitive Control* als Regelungsverfahren zum Einsatz kommt, eine einfach zu realisierende Alternative dar. Umgekehrt wäre bei den in dieser Arbeit realisierten Anwendungen *Repetitive Control* als Alternative zum *Zyklusregler* nur unter vergleichsweise stark erhöhtem Aufwand einsetzbar, da die Auslegung der Regler jeweils ein Modell der Regelstrecke erfordern würde.

### **Gliederung der Arbeit**

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert.

Der erste Teil enthält drei Kapitel, die sich mit der Entwicklung, der Darstellung und der Systemtheorie des Regelungsverfahrens *Zyklusregler* befassen.

In Kapitel 1 werden schrittweise zwei Übertragungselemente des *Zyklusregler* entwickelt, mit denen die stabile, stationär genaue Regelung periodischer Führungsgrößen realisiert wird. Dabei bietet das Kapitel einen anschaulichen Zugang zur Regelung periodischer Prozesse.

In Kapitel 2 wird die Struktur des *Zyklusregler* dargestellt. Es werden die Übertragungsfunktion des Reglers sowie allgemeingültige Kriterien zur Parametrierung genannt. An einem Simulationsbeispiel wird das Verhalten des Reglers demonstriert.

In Kapitel 3 wird der *Zyklusregler* systemtheoretisch analysiert. Es wird gezeigt, dass der Regler die geforderte stationäre Genauigkeit bei periodischen Führungs- und Störsignalen leistet. Außerdem wird ermittelt, unter welchen Bedingungen die zur stationären Genauigkeit benötigten grenzstabilen Polstellen des offenen Regelkreises beim Schließen des Regelkreises in das Innere des Einheitskreises der  $z$ -Ebene überführt werden, was eine notwendige Bedingung für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist. Daraus resultiert eine Vorschrift für die Parametrierung des Reglers.

Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie der *Zyklusregler* in zwei technischen Anwendungen zur Lösung regelungstechnischer Probleme erfolgreich eingesetzt wurde.

In Kapitel 4 wird der Einsatz des *Zyklusregler* am Gleitlagerprüf-

---

stand dargestellt. Hier galt es, zur außermotorischen Erprobung der Verschleißsicherheit von Motorengleitlagern hochdynamische, periodische Belastungsprofile stationär genau und stabil zu führen.

In Kapitel 5 wird dargestellt, wie der *ZykloRegler* zur gleichzeitigen Leerlauf- und Laufruheregung eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung verwendet wurde.

### **Anmerkungen**

Zum Verständnis der theoretischen Ausführungen in dieser Arbeit werden Grundkenntnisse aus der Systemtheorie und der Regelungstechnik benötigt, wie sie beispielsweise in [7, 11, 16, 12, 17, 9, 10] vermittelt werden.

Da es zu den meisten Themen eine Fülle an Literaturquellen gibt, werden in dieser Arbeit Literaturverweise überwiegend stellvertretend für das jeweilige Themengebiet gegeben, was einem übersichtlichen Literaturverzeichnis dient.



## Symbole und Bezeichnungen

Die Bedeutungen der im Text und in den Formeln verwendeten Symbole und Bezeichnungen gehen aus dem Kontext der dargestellten Zusammenhänge hervor.

Nachfolgend werden einige der wesentlichen Symbole und Bezeichnungen mit ihren Bedeutungen aufgelistet.

### Allgemeine Signale und Übertragungsfunktionen des Regelkreises

#### Kontinuierliche Signale der Zeit

---

$t$	Kontinuierliche Zeitvariable
$w = w(t)$	Führungsgröße (oder Sollwertverlauf)
$y = y(t)$	Regelgröße
$e = e(t) = w - y$	Regelabweichung
$u = u(t)$	Stellgröße
$d = d(t)$	Störgröße (der Stellgröße überlagert)

#### Abtastsignale (Zeitdiskrete Signale)

---

$i$	Zähler der Abtastschritte
$T_A$	Abtastperiode (oder Abtastintervall)
$t_i$	Zeitpunkt $t = i \cdot T_A$ , zu dem die $i$ -te Abtastung erfolgt
$w_i = w(t_i)$	Abtastsignal der Führungsgröße
$y_i = y(t_i)$	Abtastsignal der Regelgröße

## Symbole und Bezeichnungen

---

$e_i = e(t_i) = w_i - y_i$	Abtastsignal der Regelabweichung
$u_i = u(t_i)$	Abtastsignal der Stellgröße
$d_i = d(t_i)$	Abtastsignal der Störgröße

### Abtastsignale im Frequenzbereich

---

$z$	Frequenzvariable der z-Transformation
$W(z)$	z-Transformierte der Führungsgröße
$Y(z)$	z-Transformierte der Regelgröße
$E(z)$	z-Transformierte der Regelabweichung
$U(z)$	z-Transformierte der Stellgröße
$D(z)$	z-Transformierte der Störgröße

### Übertragungsfunktionen des digitalen Regelkreises

---

$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$	Übertragungsfunktion der Regelstrecke
$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$	Übertragungsfunktion des Reglers
$G_k(z) = G(z)K(z)$	Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises
$G_g(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$	Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises
$G_d(z) = \frac{Y(z)}{D(z)}$	Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Den Frequenzgang eines Systems erhält man aus der zugehörigen Übertragungsfunktion mit  $z = e^{j\omega T_A}$ .

---

## Kenngrößen periodischer Prozesse

### Periodendauer und Frequenzen

---

$T_p$	Periodendauer des Prozesses
$f_n = \frac{n}{T_p}$	Frequenz der n-ten Harmonischen ( $n = 1, 2, \dots, N \in \mathbb{N}$ )
$N$	Höchste Ordnungszahl der Harmonischen
$\omega_g = \frac{2\pi}{T_p} = 2\pi f_1$	Grundkreisfrequenz

### Fourierkoeffizienten

---

$a_n^w, b_n^w$	Zur Ordnung n zugehörige Fourierkoeffizienten der Führungsgröße
$a_n^y, b_n^y$	Zur Ordnung n zugehörige Fourierkoeffizienten der Regelgröße
$a_n^e, b_n^e$	Zur Ordnung n zugehörige Fourierkoeffizienten der Regelabweichung
$a_n^u, b_n^u$	Zur Ordnung n zugehörige Fourierkoeffizienten der Stellgröße
$a_n^d, b_n^d$	Zur Ordnung n zugehörige Fourierkoeffizienten der Störgröße

## Spezielle Signale und Übertragungsfunktionen des mit dem *ZykloRegler* geschlossenen Regelkreises

### Abtastsignale

---

$u_{zyk} = u_{zyk}(t_i)$       Zyklischer Stellgrößenanteil (periodisch im eingeschwungenen Zustand)

$u_{par} = u_{par}(t_i)$       Paralleler Stellgrößenanteil

$e_i^{\circ} = e^{\circ}(t_i)$       Periodische Regelabweichung

### Übertragungsfunktionen

---

$K_{zyk} = K_{zyk}(z)$       Übertragungsfunktion zur Erzeugung des zyklischen, im eingeschwungenen Zustand periodischen, Stellgrößenanteils

$K_{par} = K_{par}(z)$       Übertragungsfunktion zur Erzeugung des parallelen Stellgrößenanteils

$F^{\circ} = F^{\circ}(z)$       Übertragungsfunktion zur Erzeugung der periodischen Regelabweichung

$I^{\circ} = I^{\circ}(z)$       Übertragungsfunktion zur periodischen Integration der periodischen Regelabweichung

$K_{par}^{\circ} = K_{par}^{\circ}(z)$       Übertragungsfunktion zur Verarbeitung der periodischen Regelabweichung parallel zur periodischen Integration

Entwurf, Darstellung und  
systemtheoretische Analyse  
des Regelungsverfahrens  
*ZykloRegler*



## Entwurf des *Zyklusregler*

Der *Zyklusregler* wird als digitales Regelungsverfahren entworfen. Es werden spezielle Differenzgleichungen entwickelt, die das Verhalten der Regelung im Zeitbereich beschreiben. Durch Anwendung der z-Transformation auf diese Differenzgleichungen entstehen die Übertragungsfunktionen, die das Verhalten der Regelung im Frequenzbereich beschreiben.

Zunächst werden zur Orientierung in Abschnitt 1.1 vorausgreifend die prinzipielle Struktur sowie einige wesentliche Eigenschaften des *Zyklusregler* skizziert, bevor in den übrigen Abschnitten dieses Kapitels der Entwurf des Regelungsverfahrens detailliert und schrittweise vollzogen wird. Beim Entwurf besteht die Zielsetzung insbesondere darin, dass ein mit dem *Zyklusregler* geschlossener Regelkreis stationär genaues Folgeverhalten bei periodischen Führungsgrößen leisten soll.

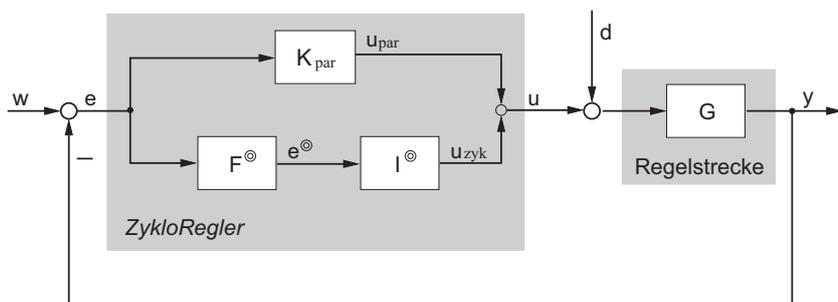
### 1.1 Vorausgreifende Skizzierung

Wie das in Abbildung 1.1 dargestellte Blockschaltbild zeigt, befindet sich der *Zyklusregler* im geschlossenen Regelkreis.

Die Stellgröße  $u$  wird, entsprechend der prinzipiellen Wirkungsweise einer Regelung, abhängig von der Regelabweichung

$$e = w - y, \quad (1.1)$$

der Differenz aus Führungsgröße  $w$  und Regelgröße  $y$ , gemäß dem Über-



**Abbildung 1.1:** Blockschaltbild mit Übertragungsfunktionen und Signalen eines mit dem *Zyklusregler* geschlossenen Regelkreises

tragungsverhalten des Reglers gebildet.

Entscheidend für das charakteristische Verhalten des *Zyklusregler* ist das Zusammenschalten der beiden Übertragungsfunktionen  $F^\circ(z)$  und  $I^\circ(z)$ .

Die Hintereinanderschaltung

$$K_{\text{zyk}}(z) = I^\circ(z) \cdot F^\circ(z) \quad (1.2)$$

der Übertragungsfunktionen  $F^\circ(z)$  und  $I^\circ(z)$  bewirkt einen stabilen, geschlossenen Regelkreis mit stationär genauem Führungsverhalten bei einer periodischen Führungsgröße  $w$ . Außerdem werden periodische Störgrößen  $d$  stationär genau kompensiert.

Die Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  extrahiert Informationen aus der unmittelbar zurückliegenden Periode des zu regelnden, periodischen Prozesses. Sie analysiert den Verlauf der Regelabweichung  $e$  und synthetisiert die periodische Regelabweichung  $e^\circ$  (siehe Abschnitt 1.5).

Die Übertragungsfunktion  $I^\circ(z)$  führt eine periodische Integration der periodischen Regelabweichung  $e^\circ$  durch, so dass sich im stationären Zustand gerade der periodische Stellgrößenverlauf einstellt, der benötigt wird, um am Ausgang der Regelstrecke den gewünschten periodischen Verlauf der Regelgröße zu erhalten (siehe Abschnitt 1.4).

Zum Stabilisieren bei instabilen Regelstrecken sowie zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens des geschlossenen Regelkreises ist parallel

## 1.2 Abtastperiode des Regelkreises und Periodendauer des Prozesses

---

zur Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$  die Übertragungsfunktion  $K_{par}(z)$  geschaltet. Das heißt, die Summe der Ausgangssignale  $u_{zyk}$  und  $u_{par}$  der Übertragungselemente  $K_{zyk}$  beziehungsweise  $K_{par}$  bildet die Stellgröße  $u$  des *Zyklusregler*.

Die Übertragungsfunktion  $K_{par}(z)$  kann zum Beispiel als PD-Regler ausgeführt werden.

Die beiden Übertragungsfunktionen  $I^\circ(z)$  und  $F^\circ(z)$  werden in den Abschnitten 1.4 und 1.5 entwickelt.

## 1.2 Abtastperiode des Regelkreises und Periodendauer des Prozesses

Der offene sowie der geschlossene Regelkreis werden als Abtastsysteme behandelt, da der *Zyklusregler* als digitales Regelungsverfahren entworfen wird.

Die Abtastungen werden mit dem Index

$$i \geq 0 \quad (1.3)$$

gezählt und jeweils zu den Zeitpunkten

$$t_i = i \cdot T_A \quad (1.4)$$

durchgeführt, wobei  $T_A$  die Abtastperiode des digitalen Regelkreises ist.

Die Periodendauer

$$T_p = R \cdot T_A \quad (R \in \mathbb{N}) \quad (1.5)$$

eines zu regelnden periodischen Prozesses wird als Vielfaches der Abtastperiode dargestellt.

Die Grundkreisfrequenz des periodischen Prozesses lautet damit

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{RT_A}. \quad (1.6)$$

### 1.3 Anforderung an das Führungsverhalten

Das zu entwerfende Regelungsverfahren soll die Eigenschaft besitzen, bei einer periodischen Führungsgröße

$$\begin{aligned} w(t) &= w(t + m \cdot T_p) \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= \frac{a_0^w}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^w \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) + b_n^w \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

die sich aus einem Mittelwert und  $N$  Harmonischen mit den Frequenzen

$$f_n = \frac{n}{T_p} \stackrel{(1.5)}{=} \frac{n}{RT_A} \stackrel{(1.6)}{=} n \frac{\omega_g}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.8)$$

zusammensetzt, stationär genaues Führungsverhalten zu leisten.

Das Abtastsignal  $w_i$  der periodischen Führungsgröße erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (1.4) und (1.5) in Gleichung (1.7):

$$\begin{aligned} w_i &= w(t_i) \\ &= \frac{a_0^w}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^w \cdot \cos\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) + b_n^w \cdot \sin\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) \\ &= w_{i+m \cdot R} \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Im eingeschwungenen Zustand sollen die Abtastwerte  $y_i = y(t_i)$  der Regelgröße und die Abtastwerte  $w_i$  der Führungsgröße identisch sein. Das heißt, für die Abtastwerte

$$e_i = w_i - y_i \quad (1.10)$$

der Regelabweichung soll

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e_i = 0 \quad (1.11)$$

gelten.

Dann ist die Regelgröße wie die Führungsgröße (1.9) als Fourierreihe darstellbar und es gilt

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{a_0^y}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^y \cdot \cos\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) + b_n^y \cdot \sin\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) \\ &= w_i \end{aligned} \quad (1.12)$$

mit identischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0^y &= a_0^w, \\ a_n^y &= a_n^w, \\ b_n^y &= b_n^w. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die einzelnen Schwingungsanteile von Führungs- und Regelgröße sind dann in Phase und besitzen identische Amplituden. Außerdem sind die Mittelwerte identisch, so dass auch konstante Sollwerte,

$$w_i = \frac{a_0^w}{2}, \quad (1.14)$$

stationär genau geregelt werden.

## 1.4 Periodische Integration der Regelabweichung

Im Fall einer Regelstrecke, die auf ein Eingangssignal der Form

$$u = \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(\omega_n t + \theta_n) \quad (1.15)$$

stationär mit einem Ausgangssignal der Form

$$y = \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (1.16)$$

reagiert, das heißt, das Ausgangssignal enthält nur die im Eingangssignal enthaltenen Frequenzen  $\omega_n$ , muss ein Regler, der die Forderung stationär genauer Sollwertfolge bei einer periodischen Führungsgröße erfüllt, im eingeschwungenen Zustand ein periodisches Stellsignal ausgeben.

Das Abtastsignal der Stellgröße ist dann als Fourierreihe

$$u_i = u(t_i) = \frac{a_0^u}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^u \cdot \cos\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) + b_n^u \cdot \sin\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) \quad (1.17)$$

darstellbar und es gilt

$$u_i = u_{i-R}. \quad (1.18)$$

Ein wesentliches Wirkungsprinzip des Regelungsverfahrens wird nun in Anlehnung an das Verhalten eines Reglers mit integral wirkendem Stellgrößenanteil, wie ihn beispielsweise ein PI-Regler besitzt, entworfen.

Der integral wirkende Stellgrößenanteil eines digitalen Reglers kann im Zeitbereich zum Beispiel gemäß der folgenden Differenzgleichung gebildet werden:

$$u_i = u_{i-1} + K_I \cdot T_A \cdot e_i. \quad (1.19)$$

Ein Übertragungselement eines digitalen Reglers, dessen Verhalten im Zeitbereich durch Gleichung (1.19) beschrieben werden kann, wird in der Regelungstechnik üblicherweise als digitaler Integrator oder auch als digitaler Integrierer bezeichnet.

Ein Integrator als Übertragungselement eines Reglers stellt einen Stellgrößenspeicher dar.

Die Übertragungsfunktion des Integrators lautet

$$\frac{U(z)}{E(z)} = K_I T_A \cdot \frac{z}{z-1}, \quad (1.20)$$

wobei  $U(z)$  und  $E(z)$  die  $z$ -Transformierten der Stellgröße  $u_i$  beziehungsweise der Regelabweichung  $e_i$  darstellen.

Mit dem Integrator des Reglers erhält der offene Regelkreis in der  $z$ -Ebene eine Polstelle bei Eins, so dass, unter der Voraussetzung eines stabilen geschlossenen Regelkreises, stationär genaues Führungsverhalten bei konstanten Führungsgrößen gegeben ist. Dies entspricht dem Inneren-Modell-Prinzip [11].

Dann ist im eingeschwungenen Zustand die Regelabweichung Null und die Stellgröße (1.19) ist konstant:

$$u_i = u_{i-1}. \quad (1.21)$$

Der integral wirkende Algorithmus gemäß Gleichung (1.19) leistet also nur dann stationäre Genauigkeit, wenn im eingeschwungenen Zustand eine konstante Stellgröße benötigt wird.

Wie oben erläutert wurde, wird jedoch für das stationär genaue Regeln einer periodischen Führungsgröße ein dynamischer Stellgrößenverlauf benötigt, wobei Gleichung (1.18) erfüllt sein muss. Das bedeutet, im

eingeschwungenen Zustand ist eine Folge von  $R$  jeweils konstanten Stellgrößenwerten  $u_r$  ( $r = 0, 1, \dots, R - 1$ ) periodisch auf die Regelstrecke zu schalten.

Der Regler muss also über  $R$  Stellgrößenspeicher verfügen.

Ein Vergleich der Gleichungen (1.18) und (1.21) motiviert nun zu der Annahme, dass der in Gleichung (1.19) dargestellte integral wirkende Stellgrößenanteil folgendermaßen zu modifizieren ist, um stationär genaues Regeln einer periodischen Führungsgröße zu ermöglichen:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i-R} + K_I \cdot R \cdot T_A \cdot e_i \\ &= u_{i-R} + K_I \cdot T_p \cdot e_i. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Während ein Regler mit Integrator, dessen Verhalten im Zeitbereich gemäß Gleichung (1.19) beschrieben wird, nur einen Stellgrößenspeicher besitzt, stehen dem Regler mit einem Übertragungselement, dessen Verhalten im Zeitbereich durch Gleichung (1.22) beschrieben wird,  $R$  Stellgrößenspeicher zur Verfügung.

#### 1.4.1 Die Übertragungsfunktion $I^\circ$

Durch  $z$ -Transformation der Differenzgleichung (1.22) erhält man die Übertragungsfunktion

$$I^\circ(z) = K_I T_p \cdot \frac{z^R}{z^R - 1}. \quad (1.23)$$

Sie ermöglicht die stationär genaue Regelung periodischer Signale, wie in Abschnitt 3.1 nachgewiesen wird.

Wie sie in die gesamte Übertragungsfunktion des *ZykloRegler* einzubinden ist, wird in Abschnitt 2.1 beschrieben.

Im folgenden Abschnitt wird erörtert, wie ihr Übertragungsverhalten zu deuten ist.

#### 1.4.2 Deutung des Übertragungsverhaltens von $I^\circ$

Es sei an einer Regelstrecke,

$$G(z) = V, \quad (1.24)$$

mit reinem Proportionalverhalten eine periodische Führungsgröße  $w(t) = w(t + mT_p)$ , mit der Periodendauer  $T_p$  gemäß Gleichung (1.5), stationär genau zu regeln.

Das Abtastsignal  $w_i$  der Führungsgröße (1.9) wird aus der periodischen Wiederholung einer Folge

$$[{}^r w] = [{}^0 w, {}^1 w, \dots, {}^{R-1} w] \quad (1.25)$$

von  $R$  diskreten Sollwerten

$${}^r w = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nr \frac{2\pi}{R}) + b_n \sin(nr \frac{2\pi}{R}) \quad (1.26)$$

erzeugt.

Dabei gilt

$$w_i = {}^r w \quad (1.27)$$

mit

$$r = r(i) = i \bmod R. \quad (1.28)$$

Die höchste Ordnungszahl  $n = N$  der Harmonischen in (1.26) ist dem Abtasttheorem von Shannon [9, 10] entsprechend zu begrenzen, wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert wird.

Es gilt

$$N < \frac{R}{2}. \quad (1.29)$$

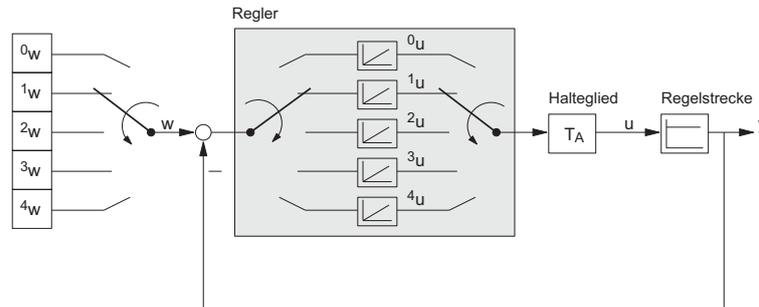
Wie in Abbildung 1.2 am Beispiel  $R = 5$  schematisch dargestellt, werden nun zur Regelung  $R$  Integratoren verwendet.

Die Integratoren werden durchnummeriert  $(0, 1, \dots, R - 1)$  und es ist stets nur derjenige Integrator aktiv, dessen Nummer gerade mit  $r$  gemäß Gleichung (1.28) übereinstimmt. Das heißt, die Integratoren werden im Abtastschritt  $i$  mit  $r$  gemäß Gleichung (1.28) adressiert.

Die Ausgänge  ${}^r u$  der Integratoren werden also nacheinander auf die Regelstrecke geschaltet, wobei ein Integrator jeweils vom nächsten Integrator abgelöst wird. Dies geschieht periodisch, synchron zur periodischen Wiederholung der Sollwertfolge (1.25).

Damit ist jeder der  $R$  Integratoren für die Regelung eines bestimmten Sollwerts  ${}^r w$  (1.26) zuständig. Dem Sollwert  ${}^0 w$  ist der Integrator mit

## 1.4 Periodische Integration der Regelabweichung



**Abbildung 1.2:** Periodische Regelung (Periodendauer  $T_p = 5T_A$ ) mit fünf Integratoren  $[{}^0u, {}^1u, {}^2u, {}^3u, {}^4u]$ .

dem Ausgang  ${}^0u$  zugeordnet, dem Sollwert  ${}^1w$  ist der Integrator mit dem Ausgang  ${}^1u$  zugeordnet und so weiter.

Für jeden der Integratoren gilt, dass er zur Berechnung seines Ausgangs mit einer Abtastperiode arbeitet, die der Periodendauer  $T_p$  des Sollwertverlaufs entspricht. Sein Ausgang ist innerhalb einer Periode jedoch nur für die Dauer  $T_A$ , der Abtastperiode des Regelkreises, als Stellgröße an der Regelstrecke aktiv.

Die Differenzgleichung eines Integrators mit dem Ausgang  ${}^r u$  lautet

$$\begin{aligned} {}^r u(t_{i_r}) &= {}^r u(t_{i_r-1}) + K_I \cdot T_p \cdot ({}^r w - y(t_{i_r})) \\ &= {}^r u_{i_r-1} + K_I \cdot T_p \cdot e_{i_r} = {}^r u_{i_r}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Die  $R$  Integratoren besitzen alle dieselbe Verstärkung  $K_I$ .

Mit

$$i_r = i_r(i) = \frac{i - r}{R} \quad (1.31)$$

werden jeweils die Abtastschritte der mit  $r$  adressierten Integratoren gezählt.

Zu Beginn des Regeltakts  $i$  wird ausschließlich derjenige Integrator neu berechnet, der mit  $r$  gemäß Gleichung (1.28) adressiert wird. Der Abtastzähler  $i_r$  dieses Integrators wird um Eins erhöht. Synchron zur Inkrementierung des Abtastzählers wird der Ausgang  ${}^r u$  des Integrators auf die Regelstrecke geschaltet und für die Dauer  $T_A$  gehalten, so lange,

bis er zu Beginn des nächsten Regeltakts ( $i+1$ ) vom Ausgang des nächsten Integrators ( $r+1$  oder 0) abgelöst wird.

Dass jeder der Integratoren mit einer Abtastperiode arbeitet, die der Periodendauer  $T_p$  des zu regelnden periodischen Prozesses entspricht, wird formal mit den individuellen Abtastzählern  $i_r$  (1.31) der Integratoren dargestellt.

Die Abtastzähler werden jeweils im zeitlichen Abstand von  $R$  Takten, entsprechend einer Periodendauer  $T_p = RT_A$ , um Eins erhöht:

$$\begin{aligned} i_r(i) - i_r(i-R) &= \frac{i-r}{R} - \frac{i-R-r}{R} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Die Abtastung der Regelabweichung  $e_{i_r} = {}^r w - y_{i_r}$  sowie die Berechnung und daran anschließend das Anlegen von  ${}^r u$  an die Regelstrecke werden zu den Zeitpunkten

$$\begin{aligned} t_{i_r} &= i_r \cdot T_p + r \cdot T_A \\ &= (i_r \cdot R + r) \cdot T_A \end{aligned} \quad (1.33)$$

ausgelöst, mit  $r(i)$  aus Gleichung (1.28) und mit  $i_r(i)$  aus Gleichung (1.31), so dass die Abtastperiode  $T_{int}$  des Integrators tatsächlich der Periodendauer  $T_p = RT_A$  entspricht:

$$\begin{aligned} T_{int} &= t_{i_r} - t_{i_r-1} \\ &= T_p. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Die Stellgröße  $u_i = u(iT_A)$  des aus  $R$  Integratoren bestehenden digitalen Reglers wird also in zwei Schritten ermittelt:

1. Mittels Gleichung (1.28) feststellen, welcher der  $R$  Integratoren im aktuellen Takt  $i$  die Stellgröße zu liefern hat (nur dessen Zähler  $i_r$  ist zu inkrementieren).
2. Regelabweichung  $e_{i_r} = e_i$  abtasten und Stellgröße

$$u_i = {}^r u_{i_r} \quad (1.35)$$

gemäß Gleichung (1.30) berechnen.

Die Stellgröße  $u_i$  wird nun für die Dauer  $T_A$  an die Regelstrecke angelegt. Sie wird im aktuell aktiven Integrator gespeichert und nach Verstreichen von  $R$  Regeltakten, also im Takt  $i+R$ , der mit dem nächsten Abtastschritt  $i_r + 1$  dieses Integrators zusammenfällt, zur Berechnung von  $u_{i+R} = u_{i_r+1}$  gemäß Gleichung (1.30) weiter verarbeitet.

Die Regelung mit  $R$  Integratoren, wie sie oben beschrieben wurde, wird nun mit einer einzigen Differenzgleichung formuliert.

Gemäß Gleichung (1.31) gilt

$$i = i_r \cdot R + r. \quad (1.36)$$

Daraus folgt mit (1.4) und mit (1.33)

$$t_{i_r} = t_i \quad (1.37)$$

beziehungsweise

$$t_{i_r-1} = t_{i-R}, \quad (1.38)$$

so dass man in Gleichung (1.30)  $i_r$  durch  $i$  ausdrücken kann.

Damit und mit Gleichung (1.35) werden die  $R$  Differenzgleichungen der Integratoren zu einer Gleichung zusammengefasst, die gerade der Differenzgleichung (1.22) entspricht:

$$u_i = u_{i-R} + K_I \cdot T_p \cdot e_i.$$

Man kann sich das Verhalten der Übertragungsfunktion  $I^{\circ}(z)$  gemäß Gleichung (1.23) also so vorstellen, dass  $R$  Integratoren gleichmäßig über der Periode des Sollwertverlaufs verteilt werden.

Der Integrator mit dem Ausgang  $r$ u ist dafür zuständig, den zur Phase

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \omega_g \cdot t_{i_r} \\ &= \frac{2\pi}{T_p} \cdot t_{i_r} \\ &= \frac{2\pi}{RT_A} \cdot (i_r \cdot R + r) \cdot T_A \\ &= 2\pi \cdot i_r + r \cdot \frac{2\pi}{R} \end{aligned} \quad (1.39)$$

zugehörigen Ausgang  $y$  der Regelstrecke auf den Sollwert  $w$  zu führen. Die Phase  $\Phi_r$  ist bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  konstant.

Anhand des folgenden Simulationsbeispiels wird gezeigt, dass man das Übertragungsverhalten von  $I^\circ(z)$  anschaulich wie oben beschrieben interpretieren kann und dass mit  $I^\circ(z)$  als Regler bei einem periodischen Sollwertverlauf stationär genaues Folgeverhalten der Regelgröße ( $\lim_{i \rightarrow \infty} [w_i - y_i] = 0$ ) erreicht wird.

### Simulationsbeispiel

Für die Regelstrecke (1.24) gilt  $V = 0.5$ . Die Periodendauer des zu regelnden Sollwertverlaufs ist  $T_p = 5T_A$ , das heißt  $R = 5$ . Entsprechend Gleichung (1.29) gilt  $N = 2$ . Die Koeffizienten der Sollwertfolge  $[r_w]$  lauten

$$\begin{aligned} a_0 &= 10, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= -2.1, \\ b_1 &= 0.5, \\ b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

In Abbildung 1.3 wird der Verlauf der Führungsgröße  $w_i$  (1.27) gezeigt, der sich mit diesen Koeffizienten ergibt.

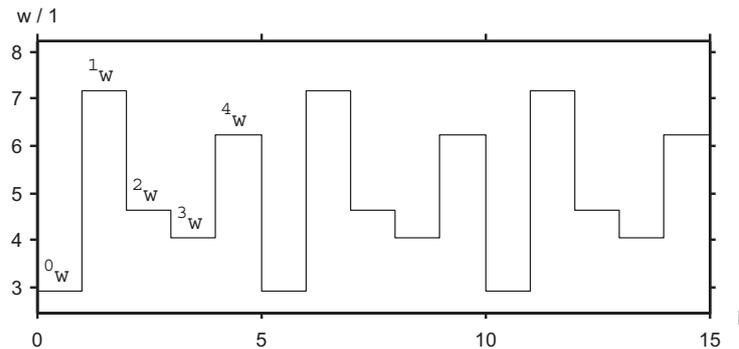
Als Regler wird  $I^\circ(z)$  (1.23) mit  $K_I = 1$  und  $R = 5$  verwendet. Die Abtastperiode der Regelung beträgt  $T_A = 0.1$  s, das heißt  $T_p = 0.5$  s.

Die Übertragungsfunktion des Reglers lautet also

$$K(z) = 0.5 \cdot \frac{z^5}{z^5 - 1}. \tag{1.41}$$

Damit gilt für die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned} G_g(z) &= \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)G(z)} \\ &= \frac{0.25z^5}{1.25z^5 - 1}. \end{aligned} \tag{1.42}$$



**Abbildung 1.3:** Erzeugen der Führungsgröße durch periodische Wiederholung der Folge  $[{}^0w, {}^1w, {}^2w, {}^3w, {}^4w]$  diskreter Sollwerte ( $T_p = 5T_A$ )

Die Polstellen der Führungsübertragungsfunktion lauten

$$\begin{aligned}
 z_{p1} &= -0.7737 + j0.5621, \\
 z_{p2} &= -0.7737 - j0.5621, \\
 z_{p3} &= 0.2955 + j0.9095, \\
 z_{p4} &= 0.2955 - j0.9095, \\
 z_{p5} &= 0.9564.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

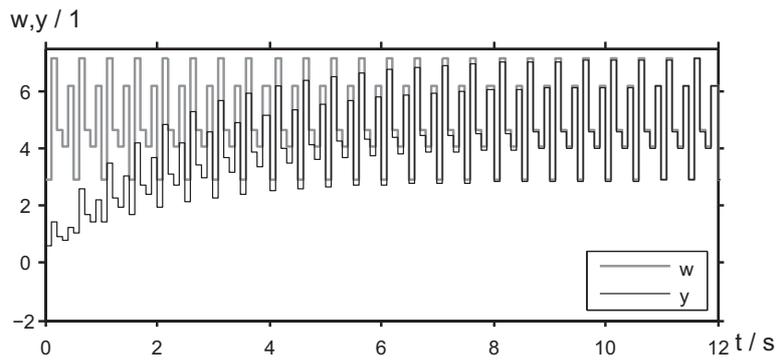
Die Beträge sämtlicher Polstellen (1.43) sind kleiner als Eins. Das heißt, der geschlossene Regelkreis ist stabil.

In Abbildung 1.4 ist der Einschwingvorgang der Regelgröße  $y$  zu sehen. Man erkennt, dass sie sich dem Sollwertverlauf stationär genau annähert.

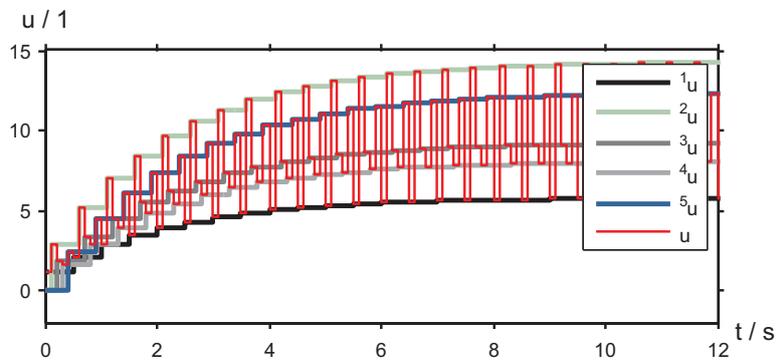
Abbildung 1.5 zeigt das Einschwingverhalten der Stellgröße  $u$  und wie sie aus  $R = 5$  Integratoren erzeugt wird.

Abbildung 1.6 zeigt dies noch einmal in einem kürzeren Zeitabschnitt.

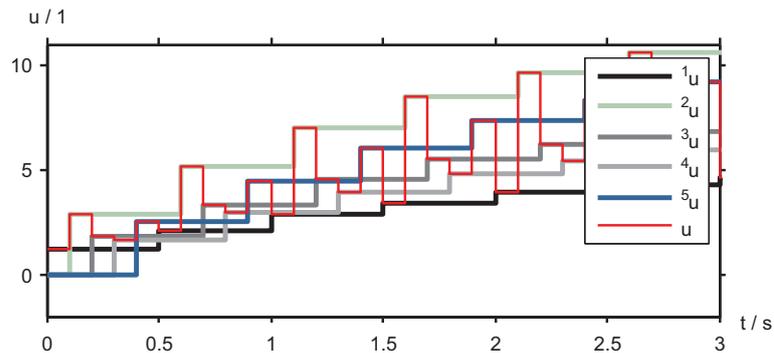
Im vorangegangenen Beispiel wurde die Übertragungsfunktion  $I^{\circledast}(z)$  zur Regelung einer periodischen Führungsgröße an einer Regelstrecke mit



**Abbildung 1.4:** Einschwingvorgang der Regelgröße  $y(t)$  nach Anlegen der periodischen Führungsgröße  $w(t)$  bei Regelung mit fünf Integratoren.



**Abbildung 1.5:** Einschwingvorgang der Stellgröße  $u(t)$  bei periodischer Regelung (Periodendauer  $T_p = 5T_A$ ) mit fünf Integratoren  $[^0u, ^1u, ^2u, ^3u, ^4u]$ .



**Abbildung 1.6:** Einschwingvorgang der Stellgröße  $u(t)$  bei periodischer Regelung (Periodendauer  $T_p = 5T_A$ ) mit fünf Integratoren (kürzerer Zeitabschnitt).

reinem Proportionalverhalten eingesetzt. Der geschlossene Regelkreis war stabil. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass die Regelgröße stationär genau auf den Verlauf der Führungsgröße einschwingt, was in Abschnitt 3.1 analytisch nachgewiesen wird.

Bei den meisten Regelstrecken kann man aufgrund ihres dynamischen Verhaltens mit  $I^\circ(z)$  als Regler keinen stabilen geschlossenen Regelkreis erhalten. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt ein zusätzliches Übertragungselement  $F^\circ(z)$  zur Erweiterung des Reglers entworfen, womit ein stabiler geschlossener Kreis bei Einsatz von  $I^\circ(z)$  erreicht werden kann, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wird.

## 1.5 Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises

Da es periodische Prozesse zu regeln gilt, ist es naheliegend die Stellgröße  $u_i$  nicht allein nach Maßgabe der aktuellen Regelabweichung  $e_i$  zu berechnen, sondern auch geeignet aufbereitete Informationen einfließen zu

lassen, die im Verlauf der Regelabweichung aus der gesamten, unmittelbar zurückliegenden Periode enthalten sind.

Deshalb wird in diesem Abschnitt die Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  als ein weiteres, insbesondere der Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises dienendes, Übertragungselement des *Zyklusregler* entworfen. Sie soll in jedem Regeltakt  $i$  den Verlauf der Regelabweichung aus der jeweils aktuell zurückliegenden Periode analysieren und die im Folgenden als *periodische Regelabweichung* bezeichnete Größe  $e_i^\circ$  synthetisieren.

Die periodische Regelabweichung  $e_i^\circ$  soll ein Maß für die Nichterfüllung von Gleichung (1.13) darstellen.

### 1.5.1 Die periodische Regelabweichung $e_i^\circ$

Im aktuellen Regeltakt  $i$  wird die aus den letzten  $R$  Abtastwerten bestehende Folge

$$[e]_i = [e_{i-R+1}, e_{i-R+2}, \dots, e_i] \quad (1.44)$$

der Regelabweichung einer Fourieranalyse unterzogen. Das heißt, es wird der im Zeitintervall

$$(i - R) \cdot T_A < t \leq i \cdot T_A, \quad (1.45)$$

das eine Periodendauer  $T_p$  breit ist, zurückliegende Verlauf der Regelabweichung verarbeitet.

Zunächst wird die Folge (1.44) über einer gegenüber der Zeitachse  $t$  verschobenen Zeitachse  $\tilde{t}$  dargestellt.

Die  $R$  Abtastwerte der Regelabweichung werden entlang der verschobenen Zeitachse mit  $k = 1, \dots, R$  gezählt und den Zeitpunkten

$$\tilde{t}(k) = kT_A \quad (1.46)$$

zugeordnet, die den Zeitpunkten

$$t(k) = t_i - RT_A + \tilde{t}(k) \quad (1.47)$$

auf der Zeitachse  $t$  entsprechen.

Die Verschiebung erfolgt gemäß

$$\begin{aligned}\tilde{e}_k &= \tilde{e}(\tilde{t}(k)) \\ &= e(t(k)) \\ &= e_{i-R+k}.\end{aligned}\tag{1.48}$$

Die zurückliegende Periode der Regelabweichung, das heißt der Verlauf der Regelabweichung aus dem Intervall (1.45), wird damit auf der verschobenen Achse  $\tilde{t}$  in das Intervall

$$0 < \tilde{t} \leq T_p\tag{1.49}$$

gelegt, also in die erste Periode von  $\tilde{t}$ .

Die im aktuellen Regeltakt  $i$  gültigen Fourierkoeffizienten der über der verschobenen Zeitachse  $\tilde{t}$  dargestellten Regelabweichung werden wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned}a_n^e &= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R \tilde{e}_k \cos\left(n \frac{2\pi}{T_p} \tilde{t}_k\right), \\ b_n^e &= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R \tilde{e}_k \sin\left(n \frac{2\pi}{T_p} \tilde{t}_k\right).\end{aligned}\tag{1.50}$$

Setzt man die Gleichungen (1.46), (1.48) und (1.5) in Gleichung (1.50) ein, so ergeben sich die Koeffizienten gemäß

$$\begin{aligned}a_n^e &= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k\right), \\ b_n^e &= \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \sin\left(n \frac{2\pi}{R} k\right).\end{aligned}\tag{1.51}$$

Die einzelnen harmonischen Anteile  $e_n$  der Regelabweichung, wie sie im zurückliegenden Intervall (1.45) der Zeit  $t$  ausgeprägt waren, können nun als Summanden einer Fourierreihe mit den Koeffizienten (1.51) über der verschobenen Zeitachse  $\tilde{t}$  oder über dem Winkel

$$\varphi(\tilde{t}) = \frac{2\pi}{T_p} \tilde{t}\tag{1.52}$$

rekonstruiert werden:

$$\begin{aligned}
 e_n(\tilde{t}) &= a_n^e \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T_p} \tilde{t}\right) + b_n^e \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T_p} \tilde{t}\right) \\
 &= a_n^e \cdot \cos(n\varphi(\tilde{t})) + b_n^e \cdot \sin(n\varphi(\tilde{t})) \\
 &= e_n(\varphi(\tilde{t})).
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Die aktuell gültige periodische Regelabweichung wird nun wie folgt erzeugt:

$$\begin{aligned}
 e_i^\circledast &= e^\circledast(t = iT_A) \\
 &= \frac{a_0^e}{2} + \sum_{n=1}^N g_n \cdot (a_n^e \cdot \cos(\varphi_n) + b_n^e \cdot \sin(\varphi_n)) \\
 &= \frac{a_0^e}{2} + \sum_{n=1}^N g_n \cdot e_n(\varphi_n) \\
 &= \frac{a_0^e}{2} + g_1 e_1(\varphi_1) + g_2 e_2(\varphi_2) + \dots + g_N e_N(\varphi_N)
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

mit

$$0 \leq \varphi_n < 2\pi \tag{1.55}$$

und mit  $N < \frac{R}{2}$  gemäß (1.29).

Jeder der harmonischen Anteile  $e_n$  (1.53) des Verlaufs (1.44) der Regelabweichung  $e$  aus der zurückliegenden Periode, das heißt aus dem Zeitintervall (1.45), trägt an einer bestimmten Stelle innerhalb dieser Periode, gekennzeichnet durch den Phasenwinkel  $\varphi_n$ , zur periodischen Regelabweichung  $e_i^\circledast$  bei. Damit wird eine gezielte, frequenzselektive Phasenverschiebung der Regelabweichung durchgeführt. Die systemtheoretische Bedeutung der Phasenwinkel  $\varphi_n$  wird in Abschnitt 3.2 erörtert.

Mit Einführung der Verstärkungsparameter  $g_n$  in Gleichung (1.54) wird eine frequenzselektive Gewichtung der periodischen Regelabweichung  $e^\circledast$  möglich. Der *ZykloRegler* kann damit optimiert werden, zum Beispiel indem die Verstärkungsparameter  $g_n$  an den Amplitudengang der Regelstrecke angepasst werden (Abschnitt 2.2.4).

Setzt man Gleichung (1.51) in Gleichung (1.54) ein, so ergibt sich die folgende Differenzgleichung, mit der im Zeitbereich die Beziehung

zwischen den Abtastsignalen der periodischen Regelabweichung  $e_i^\circledast$  und der Regelabweichung  $e_i$  beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 e_i^\circledast &= \frac{a_0^e}{2} + \sum_{n=1}^N g_n (a_n^e \cdot \cos(\varphi_n) + b_n^e \cdot \sin(\varphi_n)) \\
 &= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} + \sum_{n=1}^N g_n \left( \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k\right) \right) \cos(\varphi_n) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N g_n \left( \frac{2}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \sin\left(n \frac{2\pi}{R} k\right) \right) \sin(\varphi_n) \\
 &= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^N g_n \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \\
 &= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R e_{i-R+k} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right]. \quad (1.56)
 \end{aligned}$$

### 1.5.2 Die Übertragungsfunktion $F^\circledast$

Durch  $z$ -Transformation der Differenzgleichung (1.56) erhält man die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
 F^\circledast(z) &= \frac{E^\circledast(z)}{E(z)} \\
 &= \frac{1}{R} \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^{k-1}}{z^{R-1}}. \quad (1.57)
 \end{aligned}$$

$E^\circledast(z)$  und  $E(z)$  stellen die  $z$ -Transformierten der periodischen Regelabweichung  $e^\circledast$  beziehungsweise der Regelabweichung  $e$  dar.

Die wesentliche Aufgabe der Übertragungsfunktion  $F^\circledast(z)$  als Übertragungselement des *Zyklusregler* besteht in der Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises. In Abschnitt 3.2 wird nachgewiesen, dass sie diese Aufgabe bei geeigneter Parametrierung zu erfüllen vermag.

Wie sie in die gesamte Übertragungsfunktion des *Zyklusregler* einzubinden ist, wird in Abschnitt 2.1 beschrieben.



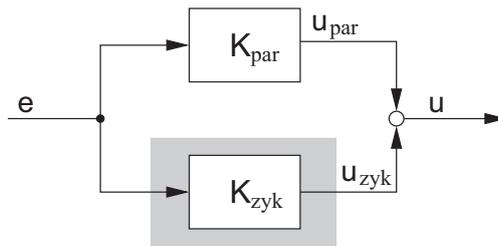
## Der *ZykloRegler* im Überblick

Dieses Kapitel stellt den *ZykloRegler* im Überblick dar. Es wird die Struktur beschrieben und es werden die Übertragungsfunktionen sowie die allgemeingültigen Kriterien zur Auslegung der Reglerparameter erläutert.

Außerdem wird ein Beispiel zur Ausführung des *ZykloRegler* gegeben. Anhand der Simulation eines Regelungsproblems werden die Eigenschaften des Regelungsverfahrens demonstriert.

### 2.1 Reglerstruktur

Wie in Abbildung 2.1 gezeigt wird, besteht der *ZykloRegler* aus zwei Übertragungsfunktionen  $K_{\text{zyk}}$  und  $K_{\text{par}}$ .



**Abbildung 2.1:** Prinzipielle Struktur des *ZykloRegler*: Zwei parallel geschaltete Übertragungsfunktionen zur Generierung eines zyklischen Stellgrößenanteils  $u_{\text{zyk}}(t_i)$  sowie eines dazu parallelen Stellgrößenanteils  $u_{\text{par}}(t_i)$

$K_{zyk}$  erzeugt aus der Regelabweichung  $e_i$  einen zyklischen Stellgrößenanteil  $u_{zyk}(t_i)$ . Parallel dazu erzeugt  $K_{par}$ , ebenfalls aus der Regelabweichung  $e_i$ , einen zusätzlichen Stellgrößenanteil  $u_{par}(t_i)$ .

Die Summe dieser beiden Stellgrößenanteile bildet die gesamte Stellgröße des Reglers:

$$u_i = u_{zyk}(t_i) + u_{par}(t_i). \quad (2.1)$$

### 2.1.1 Übertragungsfunktion zur Erzeugung des zyklischen Stellgrößenanteils

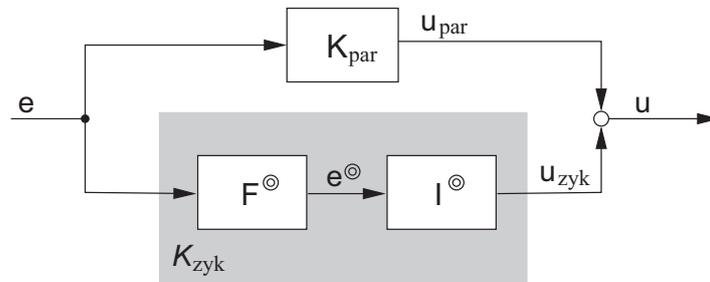
Mit dem Algorithmus zur Erzeugung des zyklischen Stellgrößenanteils  $u_{zyk}(t_i)$ , der im eingeschwungenen Zustand periodisch ist, wird das stationär genaue Verhalten des *ZykloRegler* bei periodischen Führungs- und Störgrößen realisiert, wie in Abschnitt 3.1 nachgewiesen wird.

Er wird im Frequenzbereich in Form der Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$  repräsentiert und besteht in der einfachsten Ausführungsform aus der Hintereinanderschaltung der beiden Übertragungsfunktionen  $F^\odot(z)$  (1.57) und  $I^\odot(z)$  (1.23), gemäß Gleichung (1.2), wie in Abbildung 2.2 gezeigt wird.

Mit den Gleichungen (1.23), (1.57) und (1.5) gilt dann

$$\begin{aligned} K_{zyk}(z) &= I^\odot(z) \cdot F^\odot(z) \\ &= K_I T_p \cdot \frac{z^R}{z^R - 1} \cdot \frac{1}{R} \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^{k-1}}{z^{R-1}} \\ &= K_I T_p \cdot \frac{z^R}{z^R - 1} \cdot \frac{1}{R} \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^k}{z^R} \\ &= \frac{K_I T_p}{R} \cdot \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^k}{z^R - 1} \\ &= K_I T_A \cdot \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^k}{z^R - 1}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion  $F^\odot(z)$  verarbeitet in jedem Regeltakt  $i$  den Verlauf der Regelabweichung  $e_i$  aus dem unmittelbar zurückliegenden,



**Abbildung 2.2:**  $K_{zyk}$  bestehend aus der Hintereinanderschaltung der Übertragungsfunktionen  $F^{\odot}$  und  $I^{\odot}$

eine Periodendauer  $T_p$  breiten Zeitintervall (1.45). Sie extrahiert Informationen aus einer ganzen Periode und erzeugt daraus die periodische Regelabweichung  $e^{\odot}$  (1.56). Diese wird gemäß dem Übertragungsverhalten von  $I^{\odot}(z)$  durch  $R$  Integratoren weiter verarbeitet, die nacheinander, jeweils für die Dauer  $T_A$  der Abtastperiode des Regelkreises, zur Stellgröße beitragen, wie in Abschnitt 1.4.2 dargestellt wurde.

Um das Optimierungspotenzial zu erhöhen kann  $K_{zyk}$  aus der Hintereinanderschaltung der Übertragungsfunktion  $F^{\odot}$  und der Parallelschaltung von  $I^{\odot}$  und einer zusätzlichen Übertragungsfunktion  $K_{par}^{\odot}$  gebildet werden, wie in Abbildung 2.3 dargestellt wird.

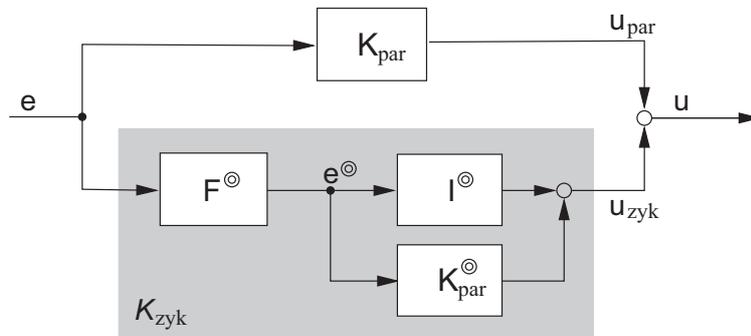
Für die Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$  gilt dann

$$K_{zyk}(z) = (I^{\odot}(z) + K_{par}^{\odot}(z)) \cdot F^{\odot}(z). \quad (2.3)$$

$K_{par}^{\odot}$  kann zum Beispiel als P-Regler ausgeführt werden.

### 2.1.2 Übertragungsfunktion zur Erzeugung des parallelen Stellgrößenanteils

Die zu  $K_{zyk}$  parallel geschaltete Übertragungsfunktion  $K_{par}$  dient zur Stabilisierung und zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens des geschlossenen Regelkreises. In vielen Fällen kann sie zum Beispiel als PD-Regler ausgeführt werden. Der *ZykloRegler* verhält sich dann ähnlich



**Abbildung 2.3:**  $K_{zyk}$  bestehend aus der Hintereinanderschaltung der Übertragungsfunktionen  $F^{\circledast}$  und  $(I^{\circledast} + K_{par}^{\circledast})$

wie ein PID-Regler, wobei er jedoch zusätzlich die Eigenschaft besitzt, stationäre Genauigkeit bei periodischen Signalen zu leisten.

### 2.1.3 Gesamte Übertragungsfunktion des *ZykloRegler*

Durch Addition der beiden Übertragungsfunktionen  $K_{par}(z)$  und  $K_{zyk}(z)$  erhält man die Übertragungsfunktion des *ZykloRegler*:

$$K(z) = K_{par}(z) + K_{zyk}(z). \quad (2.4)$$

## 2.2 Allgemeingültige Parametrierung

Die Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$ , zur Erzeugung des zyklischen Stellgrößenanteils  $u_{zyk}$  des *ZykloRegler*, wird entweder entsprechend Gleichung (2.2), das heißt  $K_{par}^{\circledast}(z) = 0$ , oder gemäß Gleichung (2.3) ausgeführt. In jedem Fall besitzt sie die Parameter

- $R$ ,
- $N$ ,
- $\varphi_n$  und
- $g_n$

mit  $n = 1 \dots N$ .

Die Kriterien und Vorschriften zur Parametrierung von  $K_{zyk}(z)$  werden in den folgenden drei Unterabschnitten genannt.

### 2.2.1 Anpassung des Reglers an die Periodendauer des periodischen Prozesses

Der *Zyklusregler* leistet stationäre Genauigkeit bei jenen periodischen Führungs- und Störgrößen, deren Periodendauer  $T_p$  gemäß Gleichung (1.5) das  $R$ -fache der Abtastperiode  $T_A$  beträgt, wie in Abschnitt 3.1 nachgewiesen wird.

Das heißt, bei gegebener Abtastperiode  $T_A$  passt man mit dem Parameter  $R$ , der ursprünglich der Übertragungsfunktion  $I^\circ(z)$  (1.23) entstammt, den Regler an die Periodendauer  $T_p$  des zu regelnden Prozesses an.

Wie beispielsweise aus Gleichung (2.2) hervorgeht, hängt die Ordnung der Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$  von  $R$  ab.

### 2.2.2 Maximale Ordnungszahl der regelbaren Harmonischen

In Abschnitt 1.2 wurde festgelegt, dass im Regelkreis die Abtastung der Signale im zeitlichen Abstand der Abtastperiode  $T_A$  wiederholt wird.

Dem Abtasttheorem von Shannon entsprechend dürfen die Spektren der Signale nur Anteile besitzen, deren Frequenzen die folgende Ungleichung erfüllen:

$$f < \frac{1}{2T_A}. \quad (2.5)$$

Die Frequenzen  $f_n = n/T_p$  (1.8) der Harmonischen periodischer Signale im Regelkreis müssen also die Ungleichung (2.5) erfüllen.

Daraus folgt für die maximale Ordnungszahl  $n = N$  der Harmonischen:

$$N < \frac{R}{2}. \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Auslegungsvorschrift für die Phasenwinkel

Die Parametrierung der Phasenwinkel  $\varphi_n$ , die ursprünglich der Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  (1.57) entstammen, ist entscheidend für die Stabilität des geschlossenen Kreises, wie in Abschnitt 3.2 erörtert wird. Für sie kann eine einfache Vorschrift zur Parametrierung angegeben werden.

Sei

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\arg[G(j\omega)]} \\ &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\Phi_G(j\omega)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

der Frequenzgang der Regelstrecke, so sind die Phasenwinkel  $\varphi_n$  folgendermaßen zu parametrieren:

$$\varphi_n = -\Phi_G(jn\omega_g), \quad (2.8)$$

mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  (1.6).

Die Phasenwinkel  $\varphi_n$  sind also dem negativen Phasengang

$$-\Phi_G(j\omega) = -\arg[G(j\omega)] \quad (2.9)$$

der Regelstrecke zu entnehmen, jeweils bei der zur Frequenz  $f_n$  (1.8) der Harmonischen mit der Ordnung  $n$  zugehörigen Kreisfrequenz  $\omega = n\omega_g = 2\pi f_n$ .

Die systemtheoretische Begründung für diese Auslegungsvorschrift wird in Abschnitt 3.2.2 erörtert.

### 2.2.4 Frequenzselektive Verstärkungen

Man kann die frequenzselektiven Verstärkungsparameter  $g_n$  der Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  (1.57) zunächst für alle  $n$  auf Eins setzen, um die anderen Parameter so einzustellen, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. In der Regel erhält man so bereits ein gutes dynamisches Verhalten des geschlossenen Regelkreises.

Das dynamische Verhalten des Regelkreises lässt sich jedoch durch geeignete Variation der Verstärkungen  $g_n$  optimieren.

So erreicht man beispielsweise ein schnelleres Abklingen der Regelabweichung im Einschwingvorgang, wenn man den Amplitudengang

$|G(j\omega)|$  (2.7) der Regelstrecke bei den Kreisfrequenzen  $\omega = n\omega_g$  kompensiert.

Dazu sind die Verstärkungen wie folgt zu parametrieren:

$$g_n = \frac{1}{|G(jn\omega_g)|}, \quad (2.10)$$

mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  (1.6).

Damit und mit der Parametrierung der Phasenwinkel  $\varphi_n$  gemäß Gleichung (2.8) gilt

$$F^\ominus(z = e^{jn\omega_g T_A}) \cdot G(z = e^{jn\omega_g T_A}) = 1. \quad (2.11)$$

Die frequenzselektiven Verstärkungen ermöglichen auch ein gezieltes Ausblenden bestimmter Frequenzen. Sind bei einer Regelungsaufgabe einige der Frequenzen  $f_n$  (1.8) irrelevant, so können die zugehörigen frequenzselektiven Verstärkungen zu Null gesetzt werden. Dann brauchen auch die zugehörigen Phasenwinkel nicht parametrierung zu werden.

### 2.3 Beispiel zur Ausführung des *ZykloRegler*: Der *ZPI-Regler*

Setzt man in der allgemeinen, linearen Übertragungsfunktion (2.4) des *ZykloRegler*  $K_{par}^\ominus(z) = 0$ , so dass  $K_{zyk}$  der Ausführung gemäß Gleichung (2.2) entspricht, und führt man  $K_{par}(z)$  als proportional wirkenden Regler

$$K_{par}(z) = K_p \quad (2.12)$$

aus, so erhält man den Regler mit der Übertragungsfunktion

$$K_R^{PI}(z) = K_p + K_I T_A \cdot \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n) \right] \cdot z^k}{z^R - 1} \quad (2.13)$$

als eine beispielhafte Ausführung des *ZykloRegler*.

Die Struktur von  $K_R^{PI}(z)$  ähnelt der Struktur eines digitalen PI-Reglers, der beispielsweise als Parallelschaltung eines Proportionalreglers gemäß

Gleichung (2.12) und eines Integrators gemäß Gleichung (1.20) ausgeführt sein kann:

$$K^{PI}(z) = K_p + K_I T_A \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (2.14)$$

Für den Fall  $R = 1$ , in dem die Periodendauer  $T_p$  der Abtastperiode  $T_A$  entspricht und die Folge (1.44) lediglich aus dem aktuellen Abtastwert  $e_i$  der Regelabweichung besteht, geht der PI-Regler (2.14) aus dem nach Gleichung (2.13) ausgeführten *ZykloRegler* hervor.

Der *ZykloRegler* in der Ausführung gemäß (2.13) wird im Folgenden als *Zyklischer PI-Regler*, kurz *ZPI-Regler*, bezeichnet.

### 2.4 Simulationsbeispiel: Regelung einer Strecke mit I-Verhalten

Der *ZykloRegler* soll nun, ausgeführt als *ZPI-Regler* (2.13), an einer Regelstrecke

$$G(z) = \frac{1}{T} \cdot \frac{T_A}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \quad (2.15)$$

mit integrierendem Verhalten zum Einsatz kommen.

Die Regelungsaufgabe besteht darin, einer periodischen Führungsgröße mit der Periodendauer

$$T_p = 0.05 \text{ s} \quad (2.16)$$

stationär genau zu folgen.

Außerdem treten am Eingang der Regelstrecke periodische Störsignale mit der selben Periodendauer  $T_p$  auf, die es zu kompensieren gilt.

#### 2.4.1 Parametrierung des Reglers

Die Anpassung des Reglers an die Periodendauer  $T_p$  geschieht durch die Parametrierung von  $R$  (Abschnitt 2.2.1).

Die höchste Ordnungszahl der Harmonischen von Führungs- und Störgrößen ist

$$N = 10. \quad (2.17)$$

Wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde, muss der Parameter  $R$  demnach mindestens auf 21 gesetzt werden.

Es gilt also

$$R \geq 21. \quad (2.18)$$

Als Abtastperiode des Regelkreises wird

$$T_A = 2.381 \text{ ms} \quad (2.19)$$

gewählt. Das heißt, mit

$$R = 21 \quad (2.20)$$

ist die Anpassung des Reglers an die Periodendauer gegeben und Gleichung (2.18) ist erfüllt.

Mit der Integrationszeitkonstanten

$$T = 0.01 \text{ s} \quad (2.21)$$

und mit der Abtastperiode  $T_A$  (2.19) lautet die Übertragungsfunktion (2.15) der Regelstrecke

$$G(z) = 0.119 \cdot \frac{z+1}{z-1}. \quad (2.22)$$

Die Verstärkungsparameter des Reglers werden folgendermaßen ausgelegt:

$$K_p = 2, \quad (2.23)$$

$$K_I = 20 \frac{1}{\text{s}}. \quad (2.24)$$

Der Phasengang der Regelstrecke  $G(z)$  ist konstant

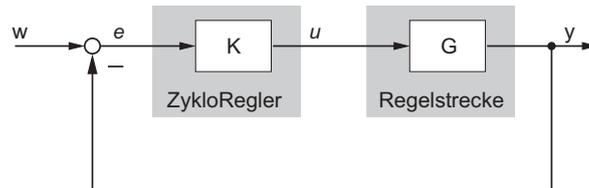
$$\Phi_G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad (2.25)$$

so dass die Phasenwinkel  $\varphi_n$  gemäß Gleichung (2.8) für alle  $n$  auf

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} \quad (2.26)$$

zu setzen sind.

Um ein gutes Einschwingverhalten des geschlossenen Kreises zu erzielen, werden die frequenzselektiven Verstärkungen  $g_n$  an die mit steigender



**Abbildung 2.4:** Blockschaltbild zur Darstellung der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Frequenz einhergehende Abschwächung des Amplitudengangs der Regelstrecke angepasst:

$$g_n = n. \quad (2.27)$$

Die Übertragungsfunktion des *ZPI-Regler* lautet nun

$$\begin{aligned} K_R^{PI}(z) &= K_p + K_I T_A \cdot \frac{\sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^k}{z^R - 1} \\ &= 2 + 0.0357 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{21} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{10} n \cos\left(n \frac{2\pi}{21} k - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot z^k}{z^{21} - 1} \\ &= K_{21}^{PI}(z). \end{aligned} \quad (2.28)$$

#### 2.4.2 Regelung einer periodischen Führungsgröße

Das in Abbildung 2.4 gezeigte Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises stellt dar, wie die Führungsgröße  $w$  zur Regelgröße  $y$  übertragen wird.

Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises erhält man gemäß

$$\begin{aligned} G_g(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} \\ &= \frac{G(z)K(z)}{1 + G(z)K(z)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$W(z)$  und  $Y(z)$  sind die  $z$ -Transformierten der Führungsgröße  $w(t)$  beziehungsweise der Regelgröße  $y(t)$ .

In die Führungsübertragungsfunktion (2.29) werden nun die Übertragungsfunktion des Reglers  $K(z) = K_{21}^{PI}(z)$  aus Gleichung (2.28) und die Übertragungsfunktion  $G(z)$  der Regelstrecke aus Gleichung (2.22) eingesetzt.

Die Führungsgröße lautet

$$w(t) = \sin(\omega_g t) - 1.5 \left( \frac{1}{3} \cos(2\omega_g t) + \frac{1}{15} \cos(4\omega_g t) + \frac{1}{30} \cos(6\omega_g t) + \frac{1}{63} \cos(8\omega_g t) + \frac{1}{99} \cos(10\omega_g t) \right) \quad (2.30)$$

mit der Grundkreisfrequenz

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T_p} \stackrel{(2.16)}{=} 40\pi \frac{1}{s}. \quad (2.31)$$

Das für die digitale Regelung relevante, für  $t \geq 0$  s gültige, Abtastsignal  $w_i$  der Führungsgröße  $w(t)$  erhält man, wie in Abschnitt 1.3 beschrieben wurde, durch Einsetzen der Gleichungen (1.4), (1.6) und (2.20) in Gleichung (2.30):

$$w_i = \sin\left(\frac{2\pi}{21}i\right) - 1.5 \left( \frac{1}{3} \cos\left(2\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{15} \cos\left(4\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{30} \cos\left(6\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{63} \cos\left(8\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{99} \cos\left(10\frac{2\pi}{21}i\right) \right). \quad (2.32)$$

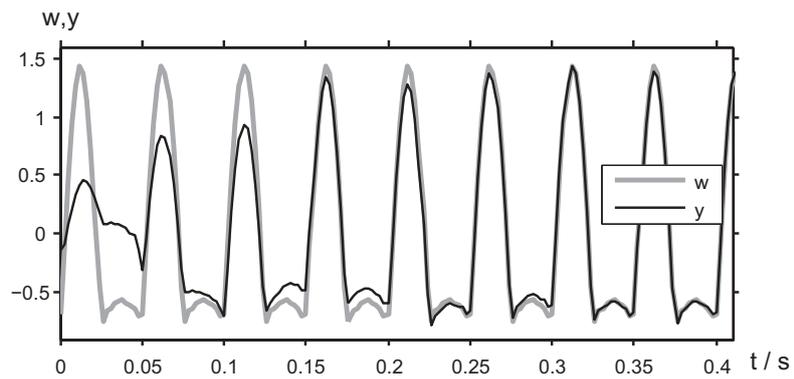
Die Führungsgröße  $w$  (2.32) wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  s auf den Eingang des Regelkreises geschaltet, dessen Führungsverhalten im Frequenzbereich durch die Übertragungsfunktion (2.29) beschrieben wird. Die Regelgröße  $y$  schwingt daraufhin stationär genau auf den Verlauf der Führungsgröße ein, wie die nachfolgend dargestellten Simulationsergebnisse zeigen (sämtliche Zustandsgrößen des Regelkreises sind für  $t \leq 0$  s zu Null angenommen).

### Simulationsergebnisse

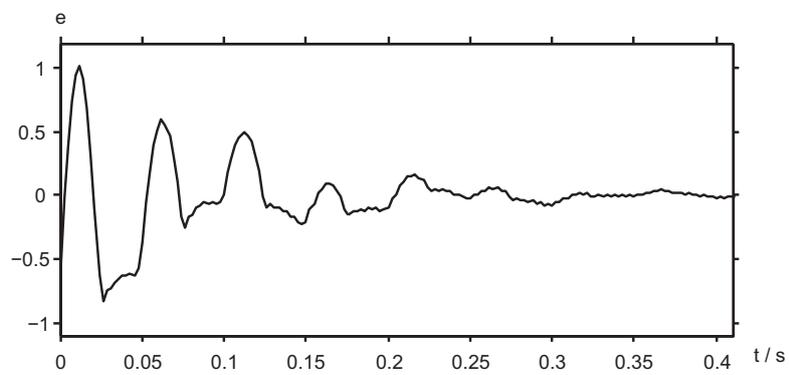
In Abbildung 2.5 wird der Verlauf der Regelgröße  $y(t)$  zusammen mit dem Verlauf der Führungsgröße  $w(t)$  in den ersten 0.41 s des Einschwingvor-

## 2 Der ZyκλοRegler im Überblick

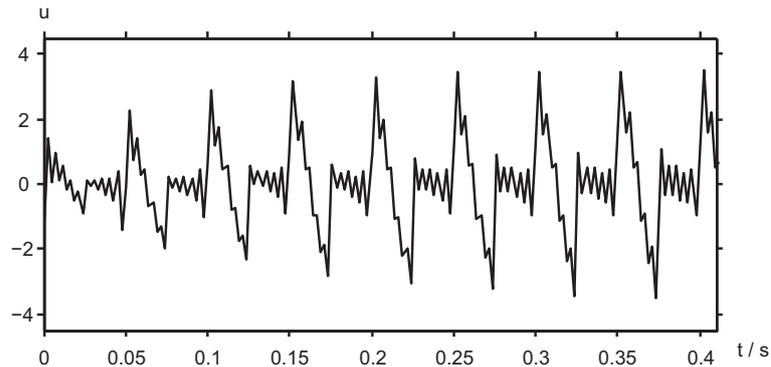
---



**Abbildung 2.5:** Verlauf der Regelgröße  $y$  und Verlauf der Führungsgröße  $w$  in den ersten 0.41 s des Einschwingvorgangs



**Abbildung 2.6:** Verlauf der Regelabweichung  $e$  in den ersten 0.41 s des Einschwingvorgangs



**Abbildung 2.7:** Verlauf der Stellgröße  $u$  in den ersten 0.41 s des Einschwingvorgangs

gangs dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich der Verlauf der Regelgröße dem Verlauf der Führungsgröße stationär genau annähert.

Das bedeutet, die Regelabweichung  $e$  strebt gegen Null, wie in Abbildung 2.6 gezeigt wird.

In Abbildung 2.7 wird der Verlauf der Stellgröße  $u(t)$  im Einschwingvorgang gezeigt. Es ist zu sehen, dass sich ein dynamischer, periodischer Verlauf der Stellgröße einstellt.

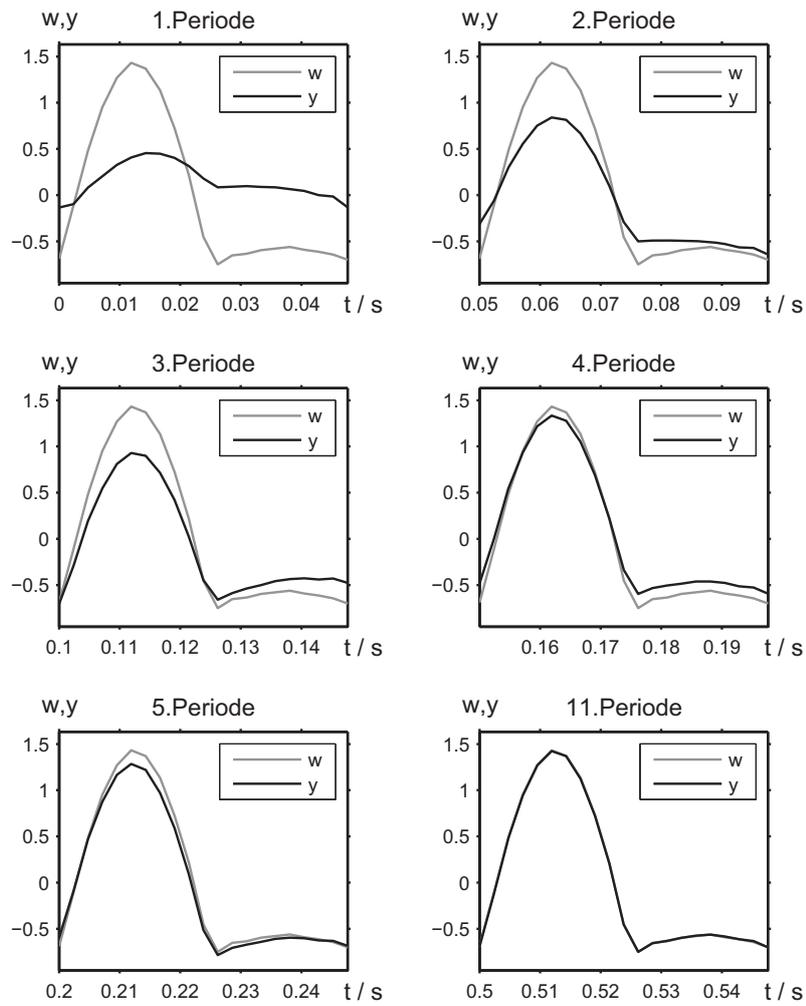
In Abbildung 2.8 wird der Einschwingvorgang durch die Aneinanderreihung zeitlich aufeinander folgender Perioden dargestellt. Hier kann man besonders gut erkennen, wie sich der innerhalb einer Periode liegende Verlauf der Regelgröße an die Form der Führungsgröße anpasst.

Zum Vergleich wird nun für die Regelungsaufgabe ein PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

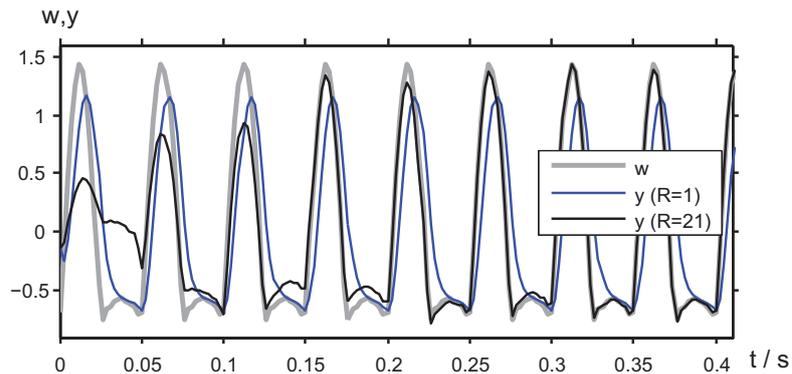
$$\begin{aligned} K(z) &= K_p + K_I T_A \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= 2 + 0.0357 \cdot \frac{z}{z-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2 Der Zyklusregler im Überblick

---



**Abbildung 2.8:** Regelung mit ZPI-Regler: Betrachtung ganzer Perioden im Einschwingvorgang



**Abbildung 2.9:** Einschwingvorgang, Verlauf der Regelgröße: Vergleich von PI-Regler (entspricht *ZPI-Regler* mit  $R=1$ ) und *ZPI-Regler* ( $R=21$ ).

eingesetzt.

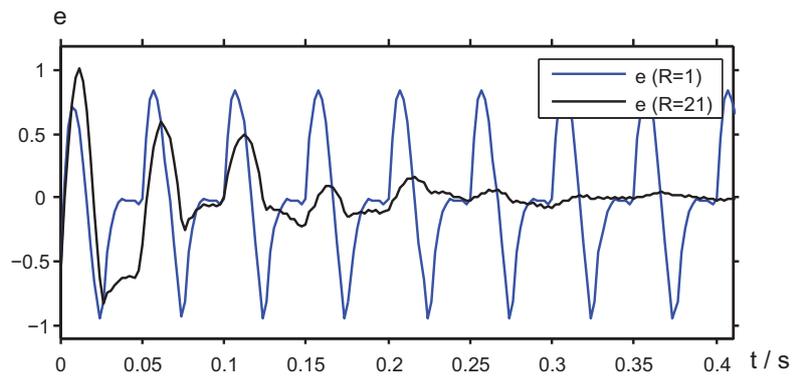
In Abbildung 2.9 wird der Verlauf der Regelgröße sowohl im Fall der Regelung mit dem *ZPI-Regler* als auch im Fall der Regelung mit dem PI-Regler, jeweils über den ersten 0,41 s des Einschwingvorgangs, zusammen mit dem Verlauf der Führungsgröße dargestellt.

Abbildung 2.10 zeigt die zugehörigen Verläufe der Regelabweichung.

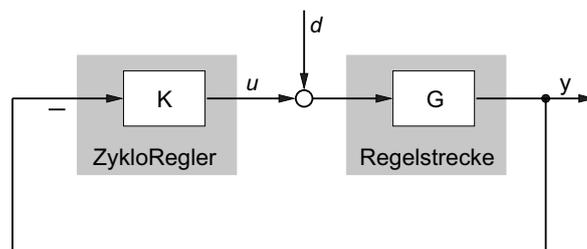
Es ist zu erkennen, dass der PI-Regler die Regelgröße dem Verlauf der Führungsgröße nicht anzunähern vermag. Das heißt, der PI-Regler leistet, im Gegensatz zum *ZPI-Regler*, keine stationäre Führungsgenauigkeit bei periodischen Führungsgrößen.

### 2.4.3 Ausregeln einer periodischen Störgröße

Das in Abbildung 2.11 gezeigte Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises stellt dar, wie die Störgröße  $d$  zur Regelgröße  $y$  übertragen wird.



**Abbildung 2.10:** Einschwingvorgang, Verlauf der Regelabweichung: Vergleich von PI-Regler (entspricht *ZPI-Regler* mit  $R=1$ ) und *ZPI-Regler* ( $R=21$ ).



**Abbildung 2.11:** Blockschaltbild zur Darstellung der Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet

$$\begin{aligned} G_d(z) &= \frac{Y(z)}{D(z)} \\ &= \frac{G(z)}{1 + G(z)K(z)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

$D(z)$  und  $Y(z)$  sind die  $z$ -Transformierten der Störgröße  $d(t)$  beziehungsweise der Regelgröße  $y(t)$ .

In die Störübertragungsfunktion (2.34) werden nun die Übertragungsfunktion des Reglers  $K(z) = K_{21}^{PI}(z)$  aus Gleichung (2.28) und die Übertragungsfunktion  $G(z)$  der Regelstrecke aus Gleichung (2.22) eingesetzt.

Das Abtastsignal der periodischen Störgröße  $d(t)$  lautet

$$d_i = d(t_i = iT_A) = \begin{cases} 0 & t_i < 1 \text{ s}, \\ \tilde{d}_i & t_i \geq 1 \text{ s} \end{cases} \quad (2.35)$$

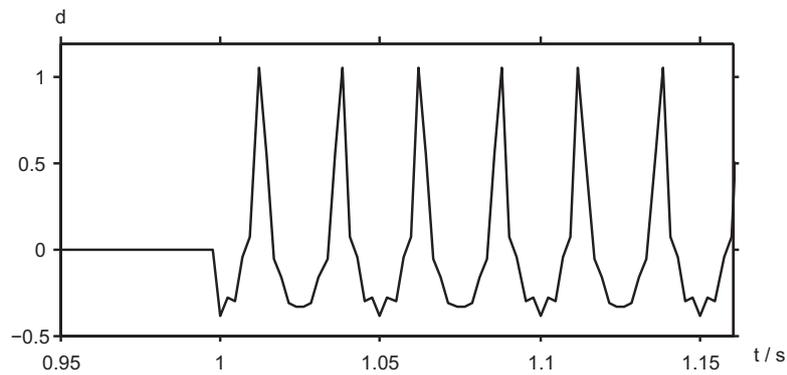
mit

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i &= \frac{1}{2} \cos\left(2\frac{2\pi}{21}i\right) - \frac{1}{4} \cos\left(4\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{6} \cos\left(6\frac{2\pi}{21}i\right) \\ &\quad - \frac{1}{8} \cos\left(8\frac{2\pi}{21}i\right) + \frac{1}{10} \cos\left(10\frac{2\pi}{21}i\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Für das Abtastsignal  $w_i$  der Führungsgröße gilt nun

$$w_i = 0. \quad (2.37)$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  wird die Störgröße  $d$  (2.35) auf den Eingang der Regelstrecke geschaltet. Nach einer Sekunde wird sie von Null verschieden. Die Regelgröße  $y$  schwingt daraufhin zunächst aus ihrem Sollwert  $w_i$  (2.37) heraus. Der Einfluss der Störgröße auf die Regelgröße wird jedoch stationär genau kompensiert, das heißt, die Regelgröße schwingt wieder exakt auf die Führungsgröße ein, wie die nachfolgend dargestellten Simulationsergebnisse zeigen (sämtliche Zustandsgrößen des Regelkreises sind für  $t \leq 0 \text{ s}$  zu Null angenommen).



**Abbildung 2.12:** An der Regelstrecke (ab  $t = 1$  s permanent) anliegendes Störsignal  $d$

### Simulationsergebnisse

Abbildung 2.12 zeigt einen Ausschnitt des zeitlichen Verlaufs der Störgröße  $d$ .

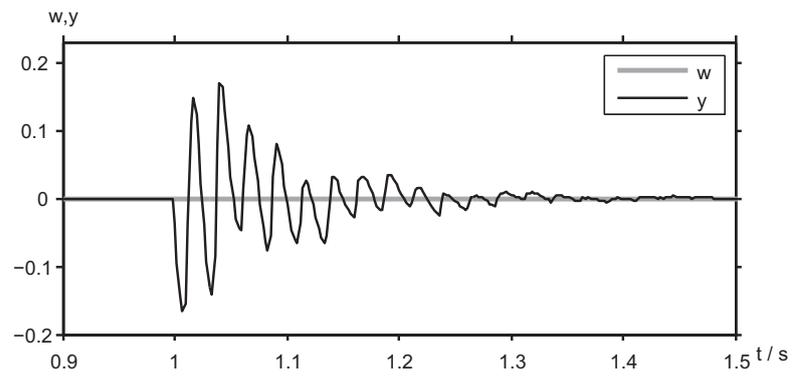
In Abbildung 2.13 sind die Verläufe der Regelgröße  $y$  und der Führungsgröße  $w$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Auswirkung der Störung gegen Null geht. Die Störung wird offensichtlich stationär genau ausgeregelt.

Zum Vergleich wurde auch hier wieder für die Regelungsaufgabe der PI-Regler mit der Übertragungsfunktion (2.33) eingesetzt.

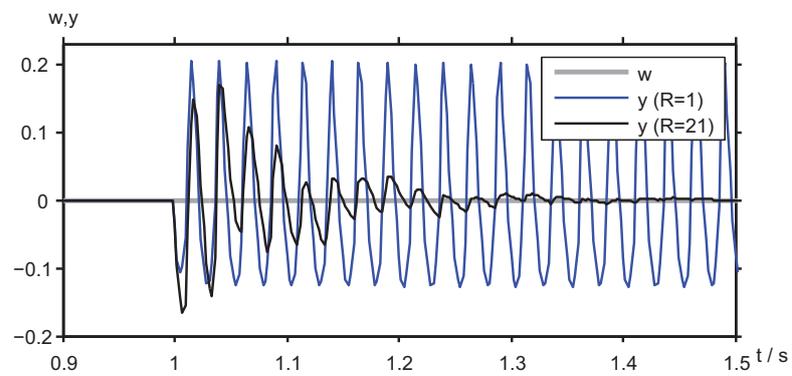
In Abbildung 2.14 wird der Verlauf der Regelgröße sowohl im Fall der Regelung mit dem *ZPI-Regler* als auch im Fall der Regelung mit dem PI-Regler zusammen mit dem Verlauf der Führungsgröße dargestellt.

Wie zu sehen ist, leistet der PI-Regler, im Gegensatz zum *ZyklusRegler*, keine stationäre Störgenauigkeit bei periodischen Störsignalen.

## 2.4 Simulationsbeispiel: Regelung einer Strecke mit I-Verhalten



**Abbildung 2.13:** Auswirkung der Störung am Ausgang der Regelstrecke



**Abbildung 2.14:** Auswirkung der Störung am Ausgang der Regelstrecke, Vergleich von PI-Regler (entspricht *ZPI-Regler* mit  $R=1$ ) und *ZPI-Regler* ( $R=21$ ).



## Systemtheoretische Analyse des *Zyklusregler*

In diesem Kapitel wird der mit dem *Zyklusregler* geschlossene Regelkreis hinsichtlich seines stationären Verhaltens bei periodischen Signalen analysiert.

Außerdem wird eine Vorschrift für die Parametrierung der Phasenwinkel  $\varphi_n$  der Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  (1.57) als notwendige Bedingung für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises abgeleitet. Es wird erörtert, auf welche Weise die Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  zur Stabilität des geschlossenen Regelkreises beiträgt.

Abschließend wird das in Abschnitt 2.2.3 genannte Auslegungskriterium (2.8) für die Phasenwinkel  $\varphi_n$  begründet.

### 3.1 Stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises

Die Übertragungsfunktion  $K(z)$  (2.4) des *Zyklusregler* lässt sich als Quotient

$$K(z) = \frac{Z_K(z)}{N_K(z)} \quad (3.1)$$

zweier Polynome  $Z_K(z)$ ,  $N_K(z)$  darstellen, wobei das Nennerpolynom

$$N_K(z) = p(z) \cdot (z^R - 1) \quad (3.2)$$

lautet.

Das Polynom  $p(z)$  ergibt sich in Abhängigkeit von den beiden Übertragungsfunktion  $K_{par}(z)$  und  $K_{par}^{\odot}(z)$ . Es gilt zum Beispiel  $p(z) = 1$ , wenn die Übertragungsfunktion  $K_{zyk}(z)$  gemäß Gleichung (2.2) ausgeführt wird, das heißt  $K_{par}^{\odot}(z) = 0$ , und  $K_{par}(z)$  einen P-Regler darstellt.

Das im Nenner  $N_K(z)$  der Übertragungsfunktion  $K(z)$  enthaltene Polynom

$$I(z) = z^R - 1 \quad (3.3)$$

entstammt der Übertragungsfunktion  $I^{\odot}(z)$  (1.23), die ein Übertragungselement des *Zyklusregler* darstellt, wie in Abschnitt 2.1 dargestellt wurde.

Die faktorisierte Form des Polynoms  $I(z)$  lautet

$$I(z) = \prod_{k=0}^{R-1} \left( z - e^{jk \frac{2\pi}{R}} \right). \quad (3.4)$$

$I(z)$  besitzt die Nullstellen

$$\begin{aligned} z_p &= e^{jp \frac{2\pi}{R}} \\ &= e^{j\Phi_p} \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$\Phi_p = \arg[z_p] = p \frac{2\pi}{R} \quad (3.6)$$

und mit

$$p = 0, 1, \dots, R-1. \quad (3.7)$$

Sie stellen Polstellen des offenen Regelkreises

$$\begin{aligned} G_k(z) &= G(z) \cdot K(z) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} G(z) \cdot \frac{Z_K(z)}{N_K(z)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dar, da auch für das Polynom  $N_K(z)$  (3.2) im Nenner der Übertragungsfunktion des Reglers

$$N_K(z = z_p) = 0 \quad (3.9)$$

gilt.

Die stationäre Genauigkeit des mit dem *Zyklusregler* geschlossenen Regelkreises, bei periodischen Führungs- und Störsignalen, beruht darauf, dass der offene Regelkreis die von der Übertragungsfunktion  $I^{\circ}(z)$  (1.23) eingebrachten Polstellen  $z_p$  (3.5) besitzt.

Dabei gilt das Innere-Modell-Prinzip, das besagt, dass der geschlossene, stabile Regelkreis stationäre Führungs- und Störgenauigkeit besitzt, wenn die Pole der transformierten Führungs- beziehungsweise Störgröße im offenen Regelkreis enthalten sind.

In Abschnitt 3.1.1 und in Abschnitt 3.1.2 wird das stationär genaue Führungs- beziehungsweise Störverhalten des mit dem *Zyklusregler* geschlossenen Regelkreises nachgewiesen.

### 3.1.1 Stationäres Führungsverhalten

Mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  der Regelstrecke und mit der Übertragungsfunktion  $K(z)$  (3.1) des *Zyklusregler* ergibt sich die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gemäß

$$\begin{aligned}
 G_g(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} \\
 &= \frac{G(z) \cdot K(z)}{1 + G(z) \cdot K(z)} \\
 &= \frac{G(z) \cdot \frac{Z_K(z)}{N_K(z)}}{1 + G(z) \cdot \frac{Z_K(z)}{N_K(z)}} \\
 &= \frac{G(z) \cdot Z_K(z)}{N_K(z) + G(z) \cdot Z_K(z)}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$Y(z)$  und  $W(z)$  sind die  $z$ -Transformierten der Regelgröße  $y(t)$  beziehungsweise der Führungsgröße  $w(t)$ .

Es wird nun vorausgesetzt, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. Setzt man in Gleichung (3.10)

$$z = e^{j\omega T_A}, \tag{3.11}$$

so erhält man den Frequenzgang  $G_g(j\omega)$  der diskreten, linearen Übertra-

gungsfunktion  $G_g(z)$ :

$$\begin{aligned} G_g(j\omega) &= G_g(z = e^{j\omega T_A}) \\ &= \frac{G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})}{N_K(e^{j\omega T_A}) + G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})} \quad (3.12) \\ &= |G_g(j\omega)| \cdot e^{j\Phi_{G_g}(j\omega)} \end{aligned}$$

mit

$$\Phi_{G_g}(j\omega) = \arg [G_g(j\omega)]. \quad (3.13)$$

Der Frequenzgang  $G_g(j\omega)$  beschreibt, wie im eingeschwungenen Zustand eine sinusförmige Führungsgröße  $w$  zum Ausgang  $y$  übertragen wird. Er stellt das stationäre Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises bei sinusförmigen Führungsgrößen dar.

Das stationäre Führungsverhalten besteht in einer frequenzabhängigen Amplitudenverstärkung  $|G_g(j\omega)|$  sowie in einer frequenzabhängigen Phasenverschiebung  $\Phi_{G_g}(j\omega)$ .

Lautet die Führungsgröße

$$w_i = A \cdot \sin(\omega t_i + \Phi_w), \quad (3.14)$$

so gilt im eingeschwungenen Zustand ( $t_i = iT_A \rightarrow \infty$ ) für die Regelgröße

$$y_i = |G_g(j\omega)| \cdot A \cdot \sin(\omega t_i + \Phi_w + \Phi_{G_g}(j\omega)). \quad (3.15)$$

Mit  $G_g(j\omega) = 1$  wären die Regelgröße (3.15) und die Führungsgröße (3.14) stationär identisch. Stationäre Führungsgenauigkeit ist also für diejenigen sinusförmigen Signale gegeben, bei deren Kreisfrequenzen der Frequenzgang den Wert Eins annimmt.

Der Frequenzgang  $G_g(j\omega)$  (3.12) der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises nimmt den Wert Eins bei den Kreisfrequenzen an, für die die Gleichung (3.9) erfüllt ist, das heißt für  $N_K = 0$ :

$$\begin{aligned} G_g(z = e^{j\omega T_A}) &= \frac{G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})}{N_K(e^{j\omega T_A}) + G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})} \\ &= \frac{G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})}{0 + G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})} \quad (3.16) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Nullstellen  $z_p$  (3.5) von  $N_K(z)$  mit  $z$  gemäß Gleichung (3.11) ergeben sich die Kreisfrequenzen  $\omega$ , für die die Gleichung (3.16) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \omega T_A &= p \frac{2\pi}{R} \\ \Leftrightarrow \\ \omega &= p \frac{2\pi}{R T_A} \\ &= p \omega_g \\ &= \omega_p \end{aligned} \tag{3.17}$$

mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  (1.6).

Es gilt also

$$G_g(j\omega_p) = 1. \tag{3.18}$$

Daraus folgt zusammen mit Gleichung (2.6), mit deren Erfüllung dem Abtasttheorem von Shannon Folge geleistet wird, dass der *Zyklusregler* stationäre Führungsgenauigkeit bei sinusförmigen Führungssignalen mit den Kreisfrequenzen

$$\omega = n\omega_g, \tag{3.19}$$

mit  $n = 1, 2, \dots, N < R/2$ , leistet.

Die Regelgröße  $y_i$  folgt also Führungssignalen der Form

$$w_{ni} = A_n \sin(n\omega_g i T_A + \Phi_n) \tag{3.20}$$

stationär genau. Ebenso werden konstante Führungsgrößen stationär genau eingeregelt, denn auch  $z_p = 1$  ( $p = 0$ ) ist eine Nullstelle von  $N_K$ .

Aufgrund des Superpositionsprinzips werden somit periodische Führungsgrößen  $w_i$  gemäß Gleichung (1.9), die aus der Überlagerung ( $w_i = \bar{w} + \sum_n w_{ni}$ ) mehrerer Signale der Form  $w_{ni}$  (3.20) und einem Mittelwert  $\bar{w}$  bestehen, stationär genau eingeregelt.

Damit wird die in Abschnitt 1.3 an das Führungsverhalten des *Zyklusregler* gestellte Anforderung  $\lim_{i \rightarrow \infty} e_i = 0$  (1.11) erfüllt.

### 3.1.2 Stationäres Störverhalten

Mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  der Regelstrecke und mit der Übertragungsfunktion  $K(z)$  (3.1) des *Zyklusregler* ergibt sich, für den Fall, dass die Störgröße  $d$  am Eingang der Regelstrecke angreift, die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises gemäß

$$\begin{aligned}
 G_d(z) &= \frac{Y(z)}{D(z)} \\
 &= \frac{G(z)}{1 + G(z) \cdot K(z)} \\
 &= \frac{G(z) \cdot \frac{Z_K(z)}{N_K(z)}}{1 + G(z) \cdot \frac{Z_K(z)}{N_K(z)}} \\
 &= \frac{G(z) \cdot N_K(z)}{N_K(z) + G(z) \cdot Z_K(z)}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$Y(z)$  und  $D(z)$  sind die  $z$ -Transformierten der Regelgröße  $y(t)$  beziehungsweise der Störgröße  $d(t)$ .

Durch Einsetzen von Gleichung (3.11) in Gleichung (3.21) erhält man den Frequenzgang  $G_d(j\omega)$  der diskreten Störübertragungsfunktion  $G_d(z)$ :

$$\begin{aligned}
 G_d(j\omega) &= G_d(e^{j\omega T_A}) \\
 &= \frac{G(e^{j\omega T_A}) \cdot N_K(e^{j\omega T_A})}{N_K(e^{j\omega T_A}) + G(e^{j\omega T_A}) \cdot Z_K(e^{j\omega T_A})} \\
 &= N_K(e^{j\omega T_A}) \cdot \frac{1}{\frac{N_K(e^{j\omega T_A})}{G(e^{j\omega T_A})} + Z_K(e^{j\omega T_A})}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Es werden diejenigen sinusförmigen Störungen stationär genau kompensiert, bei deren Kreisfrequenzen  $\omega$  der Frequenzgang der Störübertragungsfunktion Null ist. Wie aus Gleichung (3.22) hervorgeht, ist  $G_d(j\omega)$  dann Null, wenn  $N_K$  Null ist, das heißt wenn Gleichung (3.9) erfüllt ist.

Der *Zyklusregler* leistet stationäre Störgenauigkeit bei sinusförmigen Störsignalen mit den Kreisfrequenzen  $n\omega_g$  gemäß Gleichung (3.19), denn es gilt

$$G_d(j\omega_p) = 0 \tag{3.23}$$

und außerdem muss das Abtasttheorem von Shannon eingehalten werden.

Wegen des Superpositionsprinzips werden somit auch periodische Störsignale

$$\begin{aligned} d(t) &= d(t + m \cdot T_p) \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ &= \frac{a_0^d}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^d \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right) + b_n^d \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T_p} \cdot t\right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

deren Abtastsignale mit den Gleichungen (1.4) und (1.5)

$$\begin{aligned} d_i &= d(t_i) \\ &= \frac{a_0^d}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^d \cdot \cos\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) + b_n^d \cdot \sin\left(n \cdot i \cdot \frac{2\pi}{R}\right) \\ &= d_{i+m \cdot R} \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

lauten, stationär genau zu Null geregelt.

### 3.1.3 Charakteristischer Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

Der Amplitudengang und der Phasengang der Führungsübertragungsfunktion  $G_g(z)$  des mit dem *ZykloRegler* geschlossenen Regelkreises besitzen jeweils charakteristische Ausprägungen aufgrund der Gültigkeit von Gleichung (3.18), womit sie gemeinsam die stationäre Führungsgenauigkeit bei periodischen Signalen mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  (1.6) repräsentieren.

Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft den Amplitudengang  $|G_g(j\omega)|$  und den Phasengang  $\Phi_{G_g}(\omega) = \arg[G_g(j\omega)]$  von

$$G_g(z) = \frac{G(z)K(z)}{1 + G(z)K(z)}$$

mit der Regelstrecke

$$G(z) = 0.5 \cdot V \cdot T_A \cdot \frac{z+1}{z-1} \quad (3.26)$$

und mit dem *ZPI-Regler* (2.13)

$$K(z) = K_R^{\text{PI}}(z). \quad (3.27)$$

Die Parameter des Reglers und der Regelstrecke lauten

$$\begin{aligned} V &= 2, \\ R &= 9, \\ T_p &= 0.1 \text{ s}, \\ T_A &= \frac{T_p}{R} = \frac{0.1}{9} \text{ s}, \\ K_p &= 40, \\ K_I &= 4 \frac{1}{\text{s}}, \\ N &= 4 < \frac{R}{2}, \\ \varphi_n &= \frac{\pi}{2}, \\ g_n &= n. \end{aligned} \quad (3.28)$$

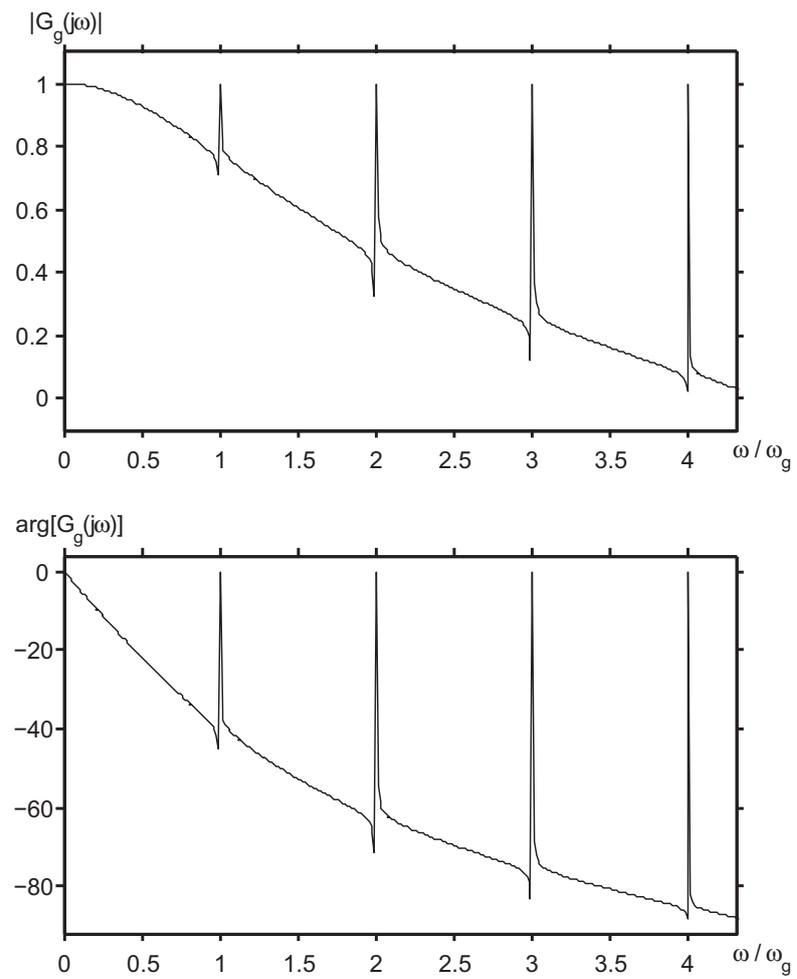
Auch der Amplitudengang der Störübertragungsfunktion

$$G_d(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)K(z)}$$

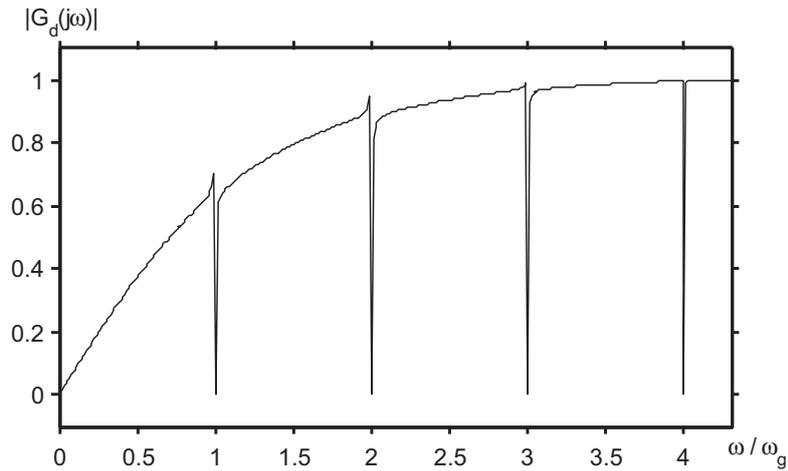
des mit dem *ZykloRegler* geschlossenen Regelkreises weist charakteristische Ausprägungen auf. Sie stellen gemäß Gleichung (3.23) das stationäre Störverhalten bei periodischen Signalen mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  (1.6) dar.

Abbildung 3.2 zeigt beispielhaft den Amplitudengang von  $G_d(z)$  mit der Regelstrecke  $G(z)$  und dem Regler  $K(z)$  aus Gleichung (3.26) beziehungsweise Gleichung (3.27) und mit den Strecken- und Reglerparametern aus (3.28).

### 3.1 Stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises



**Abbildung 3.1:** Beispiel (mit  $R = 9$ ): Amplitudengang  $|G_g(j\omega)|$  und Phasengang  $\arg[G_g(j\omega)]$  der Führungsübertragungsfunktion  $G_g(z)$ .



**Abbildung 3.2:** Beispiel (mit  $R = 9$ ): Amplitudengang  $|G_d(j\omega)|$  der Störübertragungsfunktion  $G_d(z)$ .

### 3.2 Kriterien zur Parametrierung der Phasenwinkel der Übertragungsfunktion $F^\circ$

Aus den Gleichungen (2.4) und (2.3) ergibt sich die Übertragungsfunktion des *ZykloRegler* gemäß

$$K(z) = K_{\text{par}}(z) + F^\circ(z) \cdot (I^\circ(z) + K_{\text{par}}^\circ(z)). \quad (3.29)$$

Setzt man die Übertragungsfunktionen  $I^\circ(z)$  (1.23) und  $F^\circ(z)$  (1.57) in Gleichung (3.29) ein, so kann man die Übertragungsfunktion des Reglers folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} K(z) &= K_{\text{I}T_A} \cdot \frac{(z^R - 1) \cdot F_{\text{par}}(z) + f^\circ(z)}{z^R - 1} \\ &= K_k \cdot \frac{I(z) \cdot F_{\text{par}}(z) + f^\circ(z)}{I(z)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

mit

$$K_k = K_I T_A, \quad (3.31)$$

$$F_{\text{par}}(z) = \frac{1}{K_I T_A} \cdot (K_{\text{par}}(z) + F^\circledast(z) \cdot K_{\text{par}}^\circledast(z)), \quad (3.32)$$

$$f^\circledast(z) = \sum_{k=1}^R \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(n \frac{2\pi}{R} k - \varphi_n\right) \right] \cdot z^k \quad (3.33)$$

und mit dem Polynom  $I(z)$  gemäß den Gleichungen (3.3) oder (3.4).

Mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  der Regelstrecke und mit der Übertragungsfunktion  $K(z)$  (3.30) des Reglers lautet die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$\begin{aligned} G_k(z) &= G(z) \cdot K(z) \\ &= K_k \cdot G(z) \cdot \frac{I(z) \cdot F_{\text{par}}(z) + f^\circledast(z)}{I(z)} \\ &= K_k \cdot \tilde{G}_k(z) \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit

$$\tilde{G}_k(z) = G(z) \cdot \frac{I(z) \cdot F_{\text{par}}(z) + f^\circledast(z)}{I(z)}. \quad (3.35)$$

Die Wurzeln (Lösungen) der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_k(z) = 0 \quad (3.36)$$

sind die Polstellen des geschlossenen Regelkreises. Sie sind abhängig von den Parametern der Übertragungsfunktion des Reglers. Wenn sämtliche Polstellen des geschlossenen Regelkreises im Inneren des Einheitskreises liegen, das heißt, die Beträge der Polstellen sind kleiner als Eins, so ist der geschlossene Regelkreis stabil [12, 17].

Die Wurzelortskurve stellt die Polstellen des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit eines Vorfaktors  $V_k$  des offenen Regelkreises dar, wobei der Vorfaktor von Null bis Unendlich variiert ( $0 \leq V_k \leq \infty$ ).

Stellt man die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises gemäß

$$G_k(z) = V_k \cdot \frac{\prod_m^M (z - z_m)}{\prod_l^L (z - z_l)} \quad (3.37)$$

dar, so lautet die charakteristische Gleichung (3.36)

$$V_k \cdot \prod_m^M (z - z_m) + \prod_l^L (z - z_l) = 0 \quad (3.38)$$

oder

$$\prod_m^M (z - z_m) + \frac{1}{V_k} \prod_l^L (z - z_l) = 0. \quad (3.39)$$

Für  $V_k = 0$  lösen die Polstellen  $z_l$  des offenen Regelkreises die charakteristische Gleichung, wie aus Gleichung (3.38) unmittelbar hervorgeht. Die Wurzelortskurve besitzt also  $L$  Äste, die aus den Polstellen  $z_l$  herauswachsen. Wie aus Gleichung (3.39) hervorgeht, enden mit  $V_k \rightarrow \infty$   $M$  Äste in den Nullstellen des offenen Regelkreises.  $L - M$  Äste enden im Unendlichen.

Die von der Übertragungsfunktion  $I^\circ(z)$  (1.23) in den offenen Regelkreis  $G_k(z)$  (3.34) eingebrachten Polstellen  $z_p$  (3.5) werden zur Realisierung der stationären Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises benötigt, wie in Abschnitt 3.1 dargestellt wurde. Sie erfordern jedoch Maßnahmen zur Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises, da sie auf dem Einheitskreis in der komplexen  $z$ -Ebene liegen. Es besteht die Gefahr, dass die mit  $K_k = 0$  in den Polstellen  $z_p$  beginnenden Äste der Wurzelortskurve unmittelbar aus dem Einheitskreis heraustreten, sobald  $K_k > 0$  gilt. Damit wäre der geschlossene Regelkreis instabil, da ein lineares Abtastsystem nur dann stabil ist, wenn sämtliche Polstellen der  $z$ -Übertragungsfunktion, die das Abtastsystem repräsentiert, im Inneren des Einheitskreises liegen.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die im Abschnitt 1.5 entwickelte Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  der Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises dient. Sie ermöglicht nämlich, dass die in den Polstellen  $z_p$  (3.5) mit  $p = 1, 2, \dots, R - 1$  beginnenden Äste der Wurzelortskurve unmittelbar in das Innere des Einheitskreises hineintreten, sobald  $K_k$  größer Null wird (und damit der Regelkreis geschlossen wird). Dazu muss eine bestimmte Parametrierungsvorschrift für die Phasenwinkel  $\varphi_n$ , die als Parameter in  $F^\circ(z)$  eingehen, eingehalten werden. Die Einhaltung dieser Parametrierungsvorschrift stellt eine notwendige Bedingung für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises dar.

### 3.2.1 Notwendige Bedingung für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Setzt man Gleichung (3.34) in Gleichung (3.36) ein, so erhält man die charakteristische Gleichung des mit dem *ZykloRegler* geschlossenen Regelkreises:

$$1 + K_k \cdot \tilde{G}_k(z) = 0 \quad (3.40)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tilde{G}_k(z) = -\frac{1}{K_k}. \quad (3.41)$$

Die vom Vorfaktor  $K_k$  ( $0 \leq K_k \leq \infty$ ) des offenen Regelkreises abhängigen komplexen Zahlen  $z = z(K_k)$ , die die charakteristische Gleichung (3.40) lösen und damit die Pole des geschlossenen Regelkreises darstellen, bilden die Wurzelortskurve.

Wie aus Gleichung (3.41) hervorgeht, liegt jede komplexe Zahl  $z$ , die die Phasenbedingung

$$\arg [\tilde{G}_k(z)] = (2m + 1) \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.42)$$

erfüllt, auf der Wurzelortskurve.

Aus der Phasenbedingung kann abgeleitet werden, unter welchen Winkeln die Wurzelortskurve jeweils aus den Polstellen des offenen Regelkreises austritt.

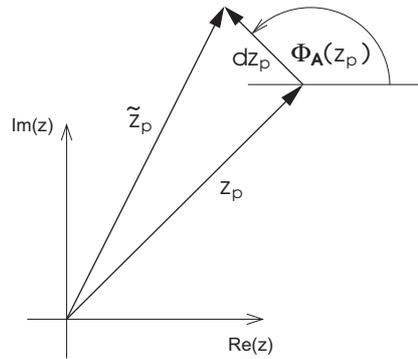
Im Folgenden wird untersucht, unter welchen Winkeln  $\Phi_A(z_p)$  die Äste der Wurzelortskurve jeweils aus den von  $I^\circledast(z)$  (1.23) in den offenen Regelkreis (3.34) eingebrachten Polstellen  $z_p$  (3.5) austreten. Das heißt, es werden diejenigen Äste der Wurzelortskurve betrachtet, die mit  $K_k = 0$  in den Polstellen  $z_p$  beginnen.

Wie in Abbildung 3.3 gezeigt wird, entspricht der Winkel

$$\Phi_A(z_p) = \arg [\tilde{z}_p - z_p], \quad (3.43)$$

unter dem die Wurzelortskurve aus dem Pol  $z_p$  austritt, dem Winkel der komplexen Differenz

$$dz_p = \tilde{z}_p - z_p, \quad (3.44)$$



**Abbildung 3.3:** Austrittswinkel  $\Phi_A(z_p) = \arg[\tilde{z}_p - z_p]$  des im Pol  $z_p$  beginnenden Asts der Wurzelortskurve (die Polstelle  $\tilde{z}_p$  hat einen infinitesimalen Abstand  $dz_p \rightarrow 0$  zur Polstelle  $z_p$ ).

wobei  $\tilde{z}_p$  die mit

$$dz_p \longrightarrow 0 \quad (3.45)$$

infinitesimal von der Polstelle  $z_p$  des offenen Regelkreises entfernte Polstelle des geschlossenen Regelkreises ist.

Da die komplexe Zahl  $\tilde{z}_p$  auf der Wurzelortskurve liegt, erfüllt sie die Phasenbedingung (3.42).

Setzt man die Gleichungen (3.35), (3.3) und (3.4) in Gleichung (3.42) ein, so ergibt sich mit  $z = \tilde{z}_p$

$$\begin{aligned} \arg \left[ \tilde{G}_k(\tilde{z}_p) \right] &= \arg [G(\tilde{z}_p)] + \arg \left[ (\tilde{z}_p^R - 1) \cdot F_{\text{par}}(\tilde{z}_p) + f^\circledast(\tilde{z}_p) \right] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{R-1} \arg \left[ \tilde{z}_p - e^{jk \frac{2\pi}{R}} \right] = (2m + 1) \cdot \pi. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Summe über  $k$  in Gleichung (3.46) enthält den Austrittswinkel  $\Phi_A(z_p)$  (3.43) als Summand ( $k = p$ ). Stellt man Gleichung (3.46) um, so

erhält man den Austrittswinkel gemäß

$$\begin{aligned}\Phi_\Lambda(z_p) &= \arg \left[ \check{z}_p - e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right] \\ &= \arg [G(\check{z}_p)] + \arg \left[ (\check{z}_p^R - 1) \cdot F_{\text{par}}(\check{z}_p) + f^\odot(\check{z}_p) \right] \\ &\quad - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{R-1} \arg \left[ \check{z}_p - e^{jk \frac{2\pi}{R}} \right] - (2m+1) \cdot \pi. \quad (3.47)\end{aligned}$$

Mit Gleichung (3.44) und mit dem Grenzübergang (3.45) folgt für den Austrittswinkel der Wurzelortskurve in der Polstelle  $z_p$ :

$$\begin{aligned}\Phi_\Lambda(z_p) &= \arg [G(z_p)] + \arg [f^\odot(z_p)] \\ &\quad - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{R-1} \arg \left[ \left( z_p - e^{jk \frac{2\pi}{R}} \right) \right] - (2m+1) \cdot \pi. \quad (3.48)\end{aligned}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass  $F_{\text{par}}(z)$  keine Polstelle bei  $z = z_p$  besitzt.

Im Folgenden werden die Ausdrücke in Gleichung (3.48) bestimmt, um die Abhängigkeit der Austrittswinkel  $\Phi_\Lambda(z_p)$  von den Phasenwinkeln  $\varphi_n$  der Übertragungsfunktion  $F^\odot(z)$  darzustellen.

Da die Wurzelortskurve zur reellen Achse symmetrisch ist, reicht es aus, die Austrittswinkel in denjenigen Polstellen  $z_p$  des offenen Regelkreises zu untersuchen, die in der oberen Halbebene ( $\Im(z) \geq 0$ ) der  $z$ -Ebene liegen. Außerdem ist der Austrittswinkel der Wurzelortskurve in der Polstelle  $z_0$  nicht durch die Phasenwinkel zu beeinflussen, was man durch Einsetzen von  $z = z_0 = 1$  in Gleichung (3.48) zeigen kann.

Für die folgenden Betrachtungen gilt also

$$0 < p < \frac{R}{2}. \quad (3.49)$$

Setzt man nun  $z = z_p$  (3.5) in  $f^\circledast(z)$  (3.33) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 f^\circledast(z_p = e^{jp \frac{2\pi}{R}}) &= \sum_{k=1}^R \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k + \sum_{k=1}^R 2 \sum_{n=1}^N g_n \cos\left(\frac{2\pi n k}{R} - \varphi_n\right) \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k \\
 &= \sum_{k=1}^R \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k + \sum_{k=1}^R \sum_{n=1}^N g_n \left( e^{j\left(\frac{2\pi n k}{R} - \varphi_n\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi n k}{R} - \varphi_n\right)} \right) e^{jp \frac{2\pi}{R} k} \\
 &= \underbrace{\sum_{k=1}^R \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k}_A + \sum_{n=1}^N g_n e^{-j\varphi_n} \underbrace{\sum_{k=1}^R e^{j\left(\frac{2\pi(p+n)k}{R}\right)}}_B \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N g_n e^{j\varphi_n} \underbrace{\sum_{k=1}^R e^{j\left(\frac{2\pi(p-n)k}{R}\right)}}_C. \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Mit den Ausdrücken A, B und C sind jeweils geometrische Reihen in Gleichung (3.50) enthalten.

Für eine geometrische Reihe gilt

$$\sum_{m=0}^{M-1} x^m = \frac{1 - x^M}{1 - x}. \quad (3.51)$$

Für den Ausdruck A folgt analog

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^R \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k = \sum_{k=0}^{R-1} \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} \right)^k \\
 &= \frac{1 - 1}{1 - e^{jp \frac{2\pi}{R}}} = 0 \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

für alle  $p$ , die die Gleichung (3.49) erfüllen.

Ebenso folgt

$$B = 0, \quad (3.53)$$

denn mit  $N < R/2$  gemäß Gleichung (2.6) und mit Gleichung (3.49) gilt  $0 < n + p < R$ .

Der Ausdruck  $C$  ist für  $n = p$  von Null verschieden. Dann ist der Summand der Summe über  $k$  gleich Eins für alle  $k$ . Es gilt

$$C = \begin{cases} 0 & \text{für alle } n \text{ mit } n \neq p \\ R & \text{für } n = p. \end{cases} \quad (3.54)$$

Aus den Gleichungen (3.50), (3.52), (3.53) und (3.54) folgt

$$f^\circledast(z_p) = R \cdot g_{n=p} \cdot e^{j\varphi_{n=p}}. \quad (3.55)$$

Es gilt also

$$\arg [f^\circledast(z_p)] = \varphi_{n=p}. \quad (3.56)$$

Der Ausdruck  $\arg [G(z_p)]$  entspricht der Phasenverzögerung  $\Phi_G(j\omega)$  der Regelstrecke  $G$  bei der Kreisfrequenz  $\omega = \omega_p = p \frac{2\pi}{RT_A}$  (3.17):

$$\begin{aligned} \arg [G(z_p)] &= \Phi_G(j\omega_p) \\ &= \arg [G(j\omega = j\omega_p)] \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit dem Frequenzgang  $G(j\omega)$  der Regelstrecke.

Nun ist noch der im Austrittswinkel (3.48) enthaltene Ausdruck

$$\begin{aligned} \Theta_p &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{R-1} \arg[(z_p - e^{j \cdot k \frac{2\pi}{R}})] \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{R-1} \arg[d_{k,p}] \end{aligned} \quad (3.58)$$

zu bestimmen.

Abbildung 3.4 zeigt an einem Beispiel ( $R = 5$ ,  $p = 2$ ) die komplexen Differenzen

$$\begin{aligned} d_{k,p} &= z_p - e^{j \cdot k \frac{2\pi}{R}} \\ &= e^{j \cdot p \frac{2\pi}{R}} - e^{j \cdot k \frac{2\pi}{R}}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

deren Argumente es für alle  $k \neq p$  aufzusummieren gilt.

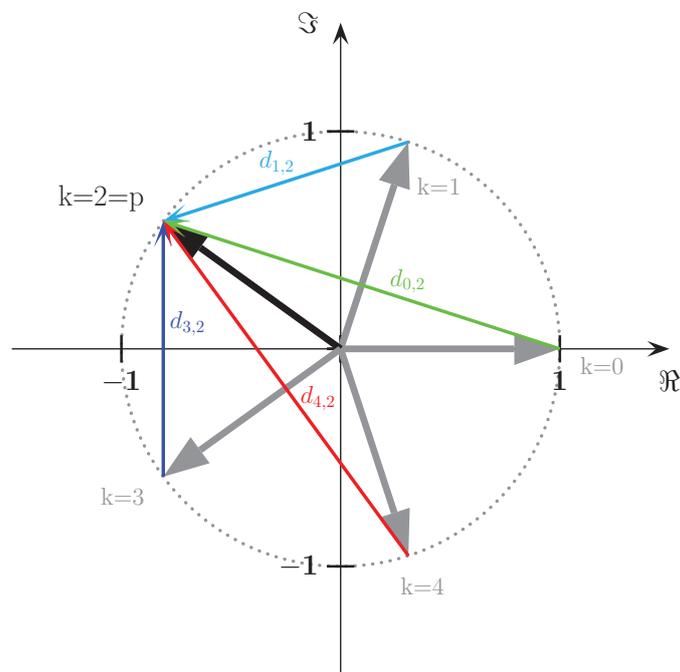


Abbildung 3.4: Differenzen  $d_{k,p}$  für  $R = 5$  und  $p = 2$

Zur Bestimmung des Ausdrucks  $\Theta_p$  werden die Differenzen  $d_{k,p}$  jeweils um den Winkel

$$\rho_k = -k \frac{2\pi}{R} \quad (3.60)$$

rotiert.

Die rotierten Differenzen

$$\begin{aligned} d_{k,p}^\rho &= e^{j\rho_k} d_{k,p} \\ &= e^{-jk \frac{2\pi}{R}} \left( e^{jp \frac{2\pi}{R}} - e^{jk \frac{2\pi}{R}} \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

liegen ausschließlich im zweiten Quadrant oder im dritten Quadrant der komplexen Ebene. Ihre Argumente können so mit nur einer einzigen Fallunterscheidung geschlossen bestimmt werden (die einzelnen Summanden von  $\Theta_p$  können über  $\arg[d_{k,p}] = \arctan[\Im(d_{k,p})/\Re(d_{k,p})]$  nicht geschlossen bestimmt werden, da  $\arg[d_{k,p}]$  in Abhängigkeit von der Differenz  $p - k$  auch außerhalb des Hauptwerts des Arcustangens liegen kann).

Die Differenzen  $d_{k,p}$  werden nun fallweise betrachtet, abhängig davon, ob sie nach der Rotation um den Winkel  $\rho_k$  im zweiten oder im dritten Quadrant liegen.

1.  $d_{k,p}^\rho$  liegt im zweiten Quadrant:  $p > k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$

Abbildung 3.5 zeigt am Beispiel mit  $R = 5$  die Differenz  $d_{0,2}$  ( $k = 0$ ,  $p = 2$ ).

Das Argument von  $d_{0,2}$  ermittelt man gemäß

$$\arg[d_{0,2}] = \pi - \beta_{0,2}. \quad (3.62)$$

Nach Gleichung (3.60) ist  $\rho_{k=0} = 0$ . Die Differenz  $d_{0,p}$  wird also nicht rotiert und es gilt

$$\arg[d_{0,2}^\rho] = \arg[d_{0,2}]. \quad (3.63)$$

Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks  $\pi$  beträgt, gilt:

$$\beta_{0,2} = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{5}. \quad (3.64)$$

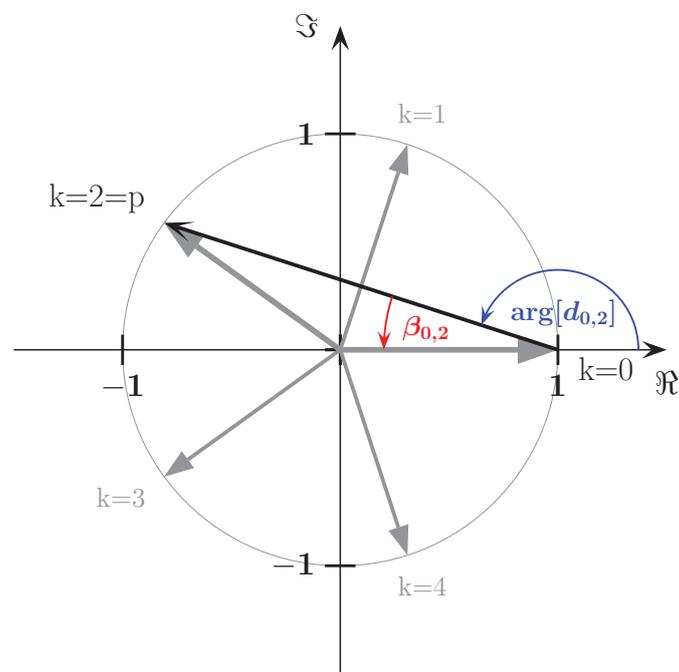
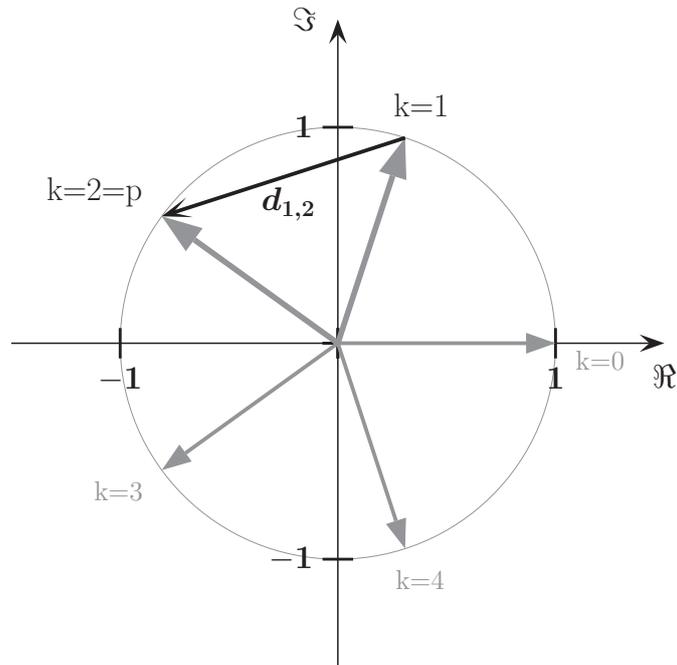


Abbildung 3.5: Differenz  $d_{0,2}$  ( $R = 5$ ,  $p = 2$ ,  $k = 0$ )



**Abbildung 3.6:** Differenz  $d_{k,p}$  ( $R = 5$ ,  $p = 2$ ,  $k = 1$ )

Allgemein gilt für eine im zweiten Quadrant liegende, mit dem Winkel  $\rho_k$  rotierte Differenz  $d_{k,p}^\rho$ :

$$\arg[d_{k,p}^\rho] = \pi - \beta_{k,p} \quad (3.65)$$

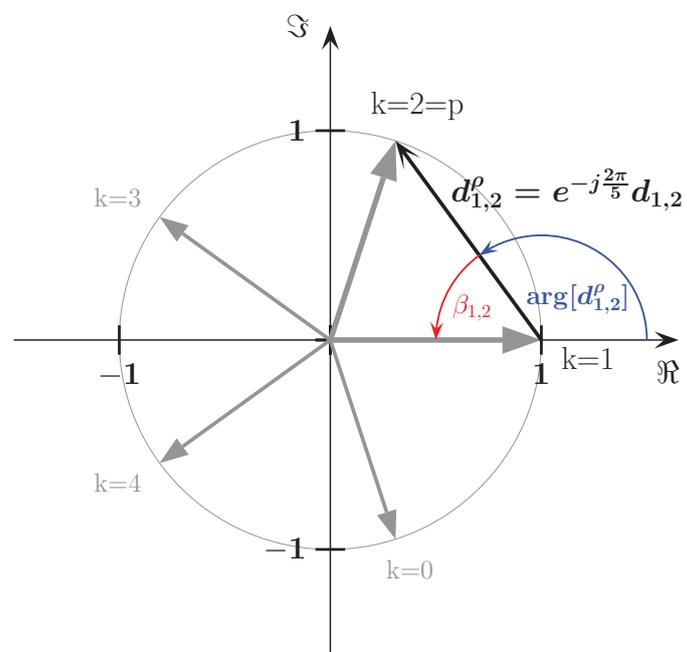
mit

$$\beta_{k,p} = \frac{\pi}{2} - (p - k) \frac{\pi}{R}. \quad (3.66)$$

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen dies am Beispiel mit  $R = 5$ ,  $p = 2$ ,  $k = 1$ .

2.  $d_{k,p}^\rho$  liegt im dritten Quadrant:  $p < k = p + 1, p + 2, \dots, R - 1$

Die Abbildungen 3.8 und 3.9 zeigen am Beispiel mit  $R = 5$  die Differenz  $d_{4,2}$  ( $p = 2$ ) und die um den Winkel  $\rho_4 = -4 \frac{2\pi}{R}$  rotierte Differenz  $d_{4,2}^\rho$ .



**Abbildung 3.7:** Rotierte Differenz  $d_{k,p}^p$  ( $R = 5, p = 2, k = 1$ )

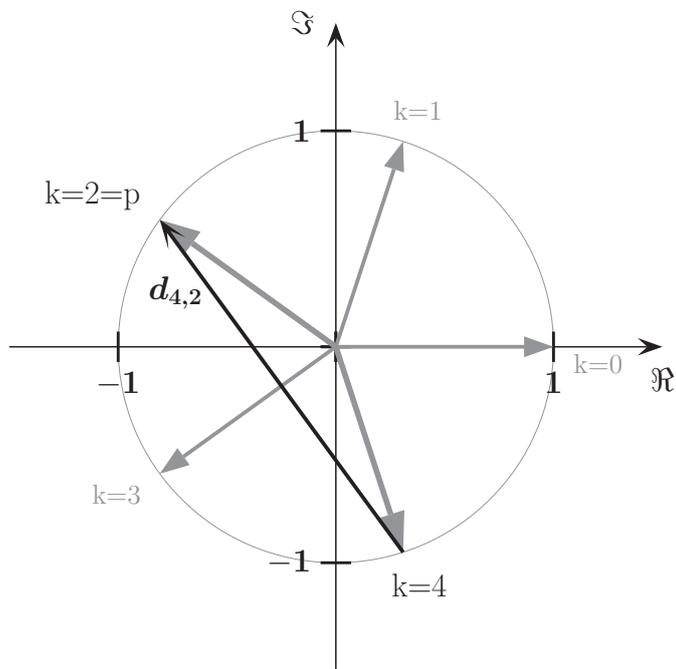
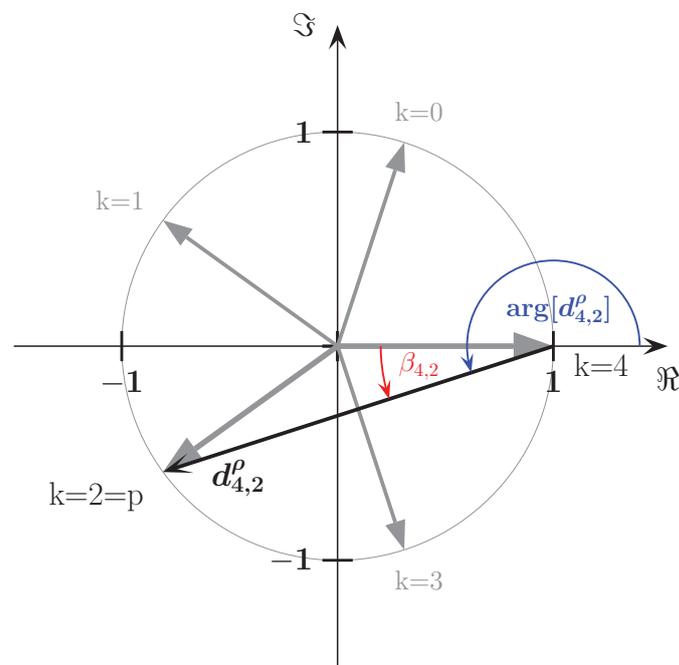


Abbildung 3.8: Differenz  $d_{k,p}$  ( $R = 5$ ,  $p = 2$ ,  $k = 4$ )



**Abbildung 3.9:** Rotierte Differenz  $d_{k,p}^p$  ( $R = 5$ ,  $p = 2$ ,  $k = 4$ )

Das Argument von  $d_{4,2}^\rho$  ermittelt man gemäß

$$\arg[d_{4,2}^\rho] = \pi + \beta_{4,2}. \quad (3.67)$$

Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks  $\pi$  beträgt, gilt:

$$\beta_{4,2} = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{5} \quad (3.68)$$

Allgemein gilt für eine im dritten Quadrant liegende, mit dem Winkel  $\rho_k$  rotierte Differenz  $d_{k,p}^\rho$ :

$$\arg[d_{k,p}^\rho] = \pi + \beta_{k,p} \quad (3.69)$$

mit

$$\beta_{k,p} = \frac{\pi}{2} - (k-p)\frac{\pi}{R}. \quad (3.70)$$

Aus Gleichung (3.61) folgt für das Argument der Differenz  $d_{k,p}$ :

$$\arg[d_{k,p}] = \arg[d_{k,p}^\rho] - \rho_k. \quad (3.71)$$

Für  $\Theta_p$  (3.58) gilt

$$\begin{aligned} \Theta_p &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{R-1} \arg[d_{k,p}] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \arg[d_{k,p}]}_D + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{R-1} \arg[d_{k,p}]}_H. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Mit den Gleichungen (3.71) und (3.60) und mit den Gleichungen (3.65) und (3.66) folgt für die Summanden der Summe D in Gleichung (3.72)

$$\begin{aligned} \arg[d_{k,p}] &= \arg[d_{k,p}^\rho] - \rho_k \\ &= k\frac{\pi}{R} + p\frac{\pi}{R} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Analog folgt mit den Gleichungen (3.71) und (3.60) und mit den Gleichungen (3.69) und (3.70) für die Summanden der Summe H in

Gleichung (3.72)

$$\begin{aligned}\arg[d_{k,p}] &= \arg[d_{k,p}^p] - \rho_k \\ &= k \frac{\pi}{R} + p \frac{\pi}{R} + \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}\quad (3.74)$$

Nach einer Zwischenrechnung erhält man

$$\begin{aligned}\Theta_p &= -p \cdot \frac{2\pi}{R} + 2\pi(R-1) \\ &= -\Phi_p + 2\pi(R-1)\end{aligned}\quad (3.75)$$

mit  $\Phi_p = \arg[z_p]$  (3.6). Mit den Gleichungen (3.58), (3.75), (3.57) und (3.56) folgt für den Austrittswinkel (3.48) der Wurzelortskurve in der Polstelle  $z_p$

$$\Phi_A(z_p) = \Phi_G(j\omega_p) + \varphi_{n=p} + \Phi_p - 2\pi(R-1) - (2m+1)\pi. \quad (3.76)$$

Wie aus Gleichung (3.76) hervorgeht, ist der Austrittswinkel  $\Phi_A(z_p)$  der Wurzelortskurve in der Polstelle  $z_p$  (3.5) direkt vom Phasenwinkel  $\varphi_n$  mit  $n = p$  abhängig.

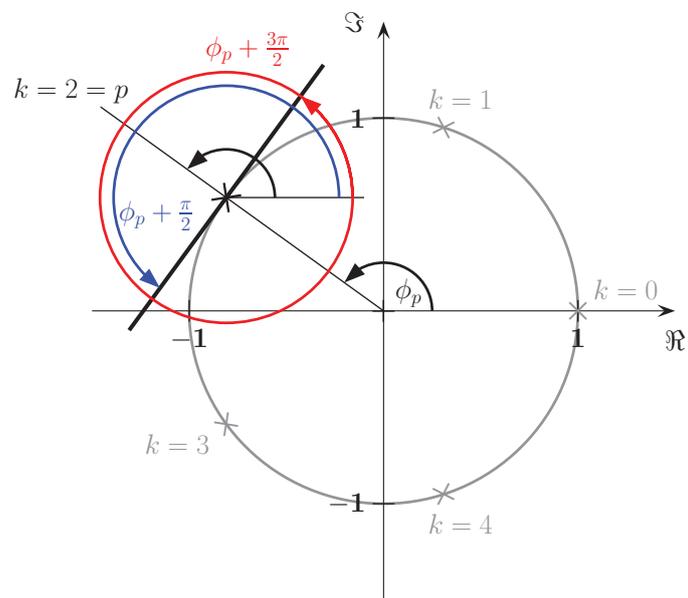
Die Phasenwinkel  $\varphi_n$ , die als Parameter in die Übertragungsfunktion  $F^\circ(z)$  eingehen, sind so zu parametrieren, dass die in den Polstellen  $z_p$  beginnenden Äste der Wurzelortskurve in das Innere des Einheitskreises hineintreten.

Abbildung 3.10 stellt an einem Beispiel mit  $R = 5$  und  $p = 2$  dar, welche Grenzen für den Austrittswinkel  $\Phi_A(z_p)$  des Astes der Wurzelortskurve, der in der Polstelle  $z_p$  beginnt, gelten, damit dieser Ast in das Innere des Einheitskreises hineinläuft. Die Grenzen werden durch die in  $z_p$  am Einheitskreis liegende Tangente bestimmt.

Allgemein müssen die Austrittswinkel die Ungleichung

$$\Phi_p + \frac{\pi}{2} < \Phi_A(z_p) < \Phi_p + \frac{3\pi}{2} \quad (3.77)$$

erfüllen, damit die in den Polstellen  $z_p$  beginnenden Äste der Wurzelortskurve in das Innere des Einheitskreises hineinlaufen.



**Abbildung 3.10:** Pole  $z_k = e^{jk\frac{2\pi}{5}}$  des *ZykloRegler* ( $R = 5$ ) in der  $z$ -Ebene. Für  $p = 2$  sind der minimal (blau) und der maximal zulässige (rot) Austrittswinkel der Wurzelortskurve im Pol  $z_2$  eingezeichnet.

Wird Gleichung (3.76) in Gleichung (3.77) eingesetzt, so ergibt sich

$$-\Phi_G(j\omega_p) - \frac{\pi}{2} < \varphi_{n=p} - 2\pi(R+m) < -\Phi_G(j\omega_p) + \frac{\pi}{2}. \quad (3.78)$$

Das Verhalten der Übertragungsfunktion  $F^\circledast(z)$  (1.57) ändert sich nicht, wenn man anstelle eines Phasenwinkels  $\varphi_n$  den Winkel  $\varphi_n - 2\pi(R+m)$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) einsetzt. Der Summand  $-2\pi(R+m)$  in Gleichung (3.78) kann somit unberücksichtigt bleiben.

Die Parametrierungsvorschrift für die Phasenwinkel  $\varphi_n$  der Übertragungsfunktion  $F^\circledast(z)$  lautet also

$$-\Phi_G(j\omega_p) - \frac{\pi}{2} < \varphi_{n=p} < -\Phi_G(j\omega_p) + \frac{\pi}{2}. \quad (3.79)$$

Dies ist wegen  $n = p$  und Gleichung (3.17) gleichbedeutend mit

$$-\Phi_G(jn\omega_g) - \frac{\pi}{2} < \varphi_n < -\Phi_G(jn\omega_g) + \frac{\pi}{2}, \quad (3.80)$$

mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  gemäß Gleichung (1.6).

Die Einhaltung der Parametrierungsvorschrift (3.80) stellt eine notwendige Bedingung für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises dar. Wenn die Phasenwinkel  $\varphi_n$  die Gleichung (3.80) erfüllen, so laufen die in den Polstellen  $z_p$  (mit  $p = 1, \dots, R-1$ ) beginnenden Äste unmittelbar in das Innere des Einheitskreises hinein, sobald der Vorfaktor  $K_k$  des offenen Regelkreises (3.34) größer Null wird.

#### Bemerkung

Es sei an dieser Stelle noch einmal bemerkt, dass hier zur Herleitung der notwendigen Stabilitätsbedingung die Austrittswinkel nur in den Polstellen  $z_p$  betrachtet wurden, die mit  $p$  gemäß Gleichung (3.49) in der oberen Halbebene der  $z$ -Ebene liegen. Da die Wurzelortskurve zur reellen Achse symmetrisch ist, laufen auch die Äste der Wurzelortskurve, die in den mit  $R/2 < p < R-1$  in der unteren Halbebene liegenden Polstellen  $z_p$  beginnen, in das Innere des Einheitskreises hinein, sobald der Regelkreis mit  $K_k > 0$  geschlossen wird, wenn die Phasenwinkel die Gleichung (3.80) erfüllen.

### 3.2.2 Phasenwinkel für maximale Dämpfung bei minimaler Verstärkung

Wenn die in den Polstellen  $z_p$  beginnenden Äste der Wurzelortskurve in radialer Richtung in den Einheitskreis hineintreten, so sind die Beträge der entsprechenden Polstellen bei kleinster Verstärkung  $K_k$  des offenen Regelkreises (3.34) minimal. Das heißt, dann ist die Dämpfung bei kleinster Verstärkung  $K_k$  möglichst hoch.

Der in der Polstelle  $z_p$  beginnende Ast der Wurzelortskurve tritt radial in den Einheitskreis hinein, wenn sein Austrittswinkel

$$\begin{aligned} \Phi_A(z_p) &= p \frac{2\pi}{R} + \pi \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \Phi_p + \pi \end{aligned} \quad (3.81)$$

beträgt, wie in Abbildung 3.11 am Beispiel mit  $R = 5$  und  $p = 2$  gezeigt wird.

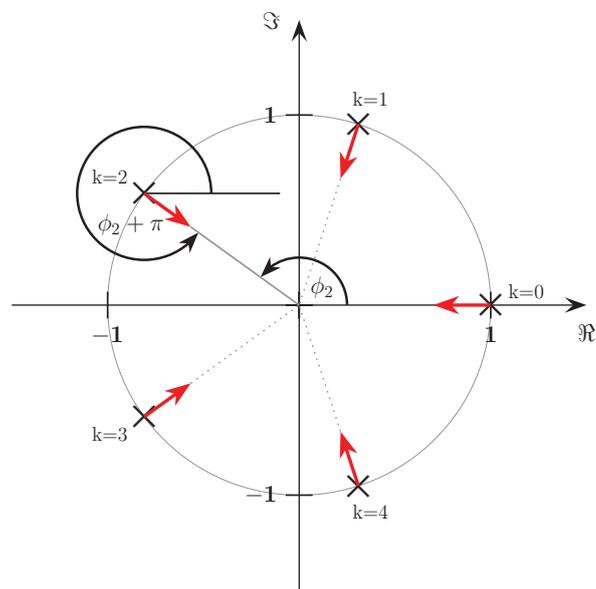
Aus den Gleichungen (3.76) und (3.81) folgt

$$\varphi_{n=p} = -\Phi_G(j\omega_p), \quad (3.82)$$

was wegen  $n = p$  und Gleichung (3.17) gleichbedeutend mit der in Abschnitt 2.2.3 für die Phasenwinkel  $\varphi_n$  der Übertragungsfunktion  $F^\circledast(z)$  genannten Auslegungsvorschrift (2.8) ist:

$$\varphi_n = -\Phi_G(jn\omega_g), \quad (3.83)$$

mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_g$  gemäß Gleichung (1.6).



**Abbildung 3.11:** Bedingung für den Austrittswinkel im Pol  $z_2$ , damit der dort beginnende Ast der Wurzelortskurve radial in den Einheitskreis hineintritt:  
 $\Phi_A(z_2) = \Phi_2 + \pi$ .

## Anwendung des *ZykloRegler*



## Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüfstand

Der *Zyklusregler* wurde insbesondere mit dem Ziel entworfen, an einem Prüfstand zur außermotorischen Erprobung der Verschleißsicherheit von Motorengleitlagern [3] hochdynamische, periodische Belastungsprofile stationär genau und stabil führen zu können.

### 4.1 Prüfumgebung des Gleitlagers

Am Prüfstand sollen hydraulisch erzeugte Belastungsprofile zu einer Verschleißbildung am Gleitlager führen, die repräsentativ für die im realen Betrieb des Hubkolben-Verbrennungsmotors erfolgende Verschleißbildung ist.

Das zu erprobende Gleitlager ist entsprechend mit solchen Kräften zu belasten, wie sie im Motor gemäß der kinematischen Gesetze der Kurbeltriebmechanik entstehen [1]. Die Kräfte setzen sich aus Gaskräften und Massenträgheitskräften, die von der Kurbelwellendrehzahl abhängig sind, zusammen. Sie verlaufen periodisch über dem Drehwinkel der Kurbelwelle und über der Zeit, wenn die Motordrehzahl  $n$  (über zwei Umdrehungen der Kurbelwelle gemittelte Kurbelwellendrehzahl) und die Motorlast konstant sind. Die Periode entspricht zwei Umdrehungen der Kurbelwelle, das heißt 720 Grad Drehwinkel der Kurbelwelle (ein Arbeitsspiel des Viertakt-Motors [1]).

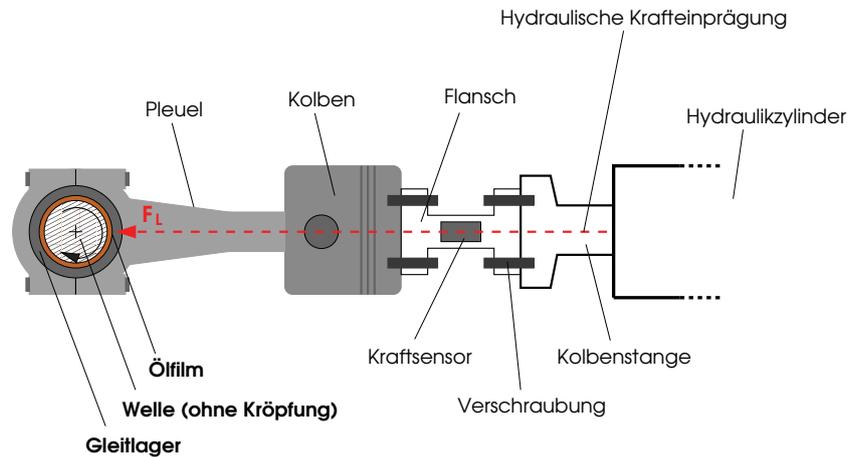
In Abbildung 4.1 sind die für die Belastung von Gleitlagern wesentlichen Konstruktionsmerkmale des Prüfstandaufbaus dargestellt.

Das Gleitlager befindet sich im großen Auge eines Pleuels und besitzt als Gleitpartner eine Welle, die von einer elektrischen Maschine angetrieben wird. Die Welle ist so gelagert, dass sie keine Translationsbewegung erfahren kann und ein Widerlager für den Pleuel darstellt. Der Pleuel ist am kleinen Auge in einem Kolben gelagert, der über einen Flansch fest mit der Kolbenstange eines Hydraulikzylinders verbunden ist, so dass die hydraulisch erzeugte Kraft  $F_L$  über den Pleuel in das Gleitlager geleitet wird. Damit kann auch die Kolbenstange nicht bewegt werden, abgesehen von kleinen Bewegungen aufgrund von Lagerspiel und Elastizitäten der belasteten Bauteile des Prüfstands. Zur messtechnischen Erfassung der hydraulischen Kraftereinprägung befindet sich am Flansch eine Sensorik (Dehnungsmessstreifen). Die Drehzahl und der Drehwinkel der Welle werden ebenfalls messtechnisch erfasst (Inkrementalgeber).

Im Prüfbetrieb werden die hydraulische Kraft und der Drehwinkel der Welle entsprechend der Kurbeltriebmechanik von Verbrennungsmotoren synchronisiert.

### 4.2 Elektrohydraulisches System des Gleitlagerprüfstands

In Abbildung 4.2 ist das Hydrauliksystem des Gleitlagerprüfstands schematisch dargestellt. Eine Hydropumpe fördert den für die (geregelt) Aufrechterhaltung des konstanten Systemdrucks  $p_S$  benötigten Ölvolumenstrom. Die hydraulische Kraft  $F_L$ , die von der Kolbenstange über den Pleuel in das Gleitlager geleitet wird, resultiert aus der Differenz  $\Delta p = p_A - p_B$  der Drücke in den Zylinderkammern des Hydraulikzylinders. Die Druckdifferenz  $\Delta p$  wird mit einem elektrohydraulischen Servoventil [19] gesteuert. Ein Servoventil besteht im Wesentlichen aus einem elektromechanischen Wandler und einem Kolbenschieber. Der elektromechanische Wandler überführt einen elektrischen Strom  $i$  in eine Auslenkung  $s$  des Kolbenschiebers. Die Auslenkung  $s$  des Kolbenschiebers verhält sich annähernd proportional zum elektrischen Steuerstrom  $i$ . Von



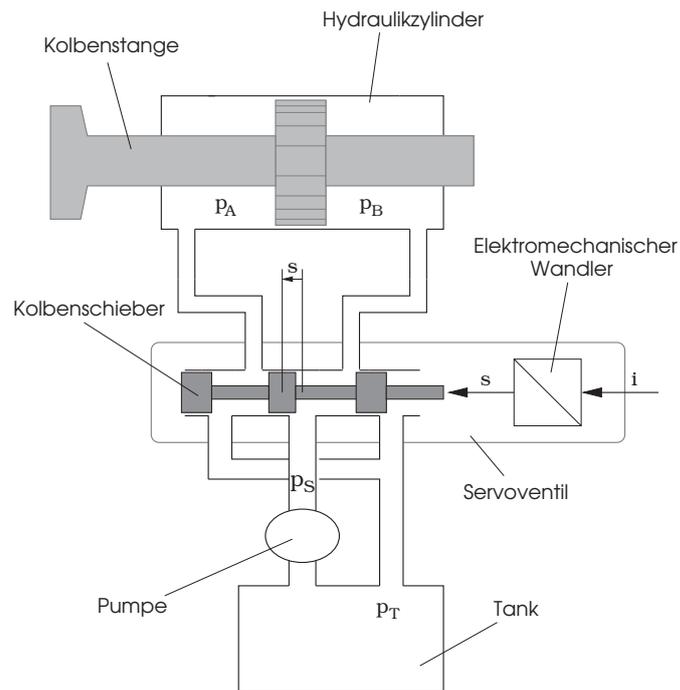
**Abbildung 4.1:** Konstruktionsmerkmale des Prüfstands zur Belastung von Gleitlagern

der Auslenkung  $s$  sind die Strömungswiderstände abhängig, über die die Zylinderkammern entweder mit dem Tank oder mit der Hydropumpe verbunden sind. Die Ansteuerung des Servoventils mit einem elektrischen Strom  $i$  bewirkt somit eine Änderung der Druckdifferenz  $\Delta p$  und damit eine Änderung der Kraft  $F_L$ . Da die Kolbenstange des Hydraulikzylinders aufgrund des Prüfstandaufbaus nur gering bewegt werden kann<sup>1</sup>, ändert sich die Druckdifferenz  $\Delta p$  so lange, wie der Kolbenschieber ausgelenkt ist und die Begrenzung ( $\Delta p_{\max} = p_S - p_T$ ) noch nicht erreicht ist. Die Dynamik der Änderung von  $\Delta p$  ist dabei vom Betrag der Auslenkung des Kolbenschiebers abhängig.

Eine endliche Auslenkung des Kolbenschiebers führt theoretisch (von der Begrenzung  $\Delta p_{\max}$  abgesehen) zu einem unendlich hohen Betrag der Kraft  $F_L$ . Das Hydrauliksystem des Gleitlagerprüfstands besitzt im systemtheoretischen Sinn ein instabiles Verhalten in der Übertragung des elektrischen Stroms  $i$  zur Kraft  $F_L$ . Die Kraft  $F_L$  muss geregelt werden,

<sup>1</sup>Eine Bewegung der Kolbenstange erfolgt lediglich durch Lagerspiel und durch Elastizitäten der Prüfstandskomponenten.

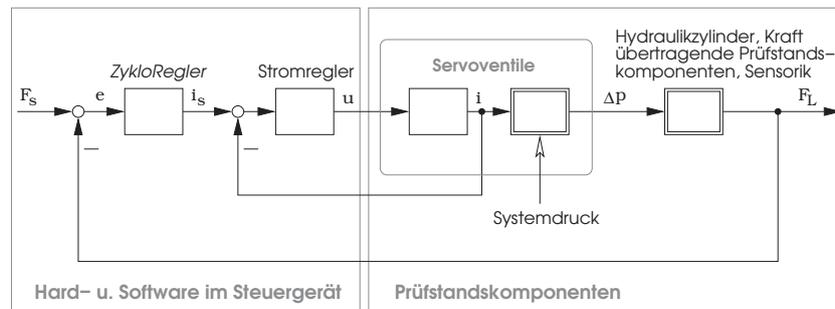
#### 4 Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüfstand



- $p_A, p_B$ : Drücke in den Zylinderkammern
- $p_S$ : Geregelter, konstanter Systemdruck
- $p_T$ : Druck im Öltank
- $i$ : Elektrischer Strom zur Ansteuerung des Servoventils
- $s$ : Auslenkung des Kolbenschiebers im Servoventil

**Abbildung 4.2:** Schematische Darstellung: Elektrohydraulisches System des Gleitlagerprüfstands

### 4.3 Kraftregelkreis zur Erzeugung des Belastungsprofils



$F_s$ : Sollwert der Kraft

$F_L$ : Istwert der Kraft

$e$ : Regelabweichung

$i_s$ : Stellgröße des *ZykloRegler*: Sollwert für den elektrischen Strom zur Ansteuerung der Servoventile

$u$ : Stellgröße des Stromreglers: Elektrische Spannung, die zur Erzeugung des elektrischen Stroms erforderlich ist

$i$ : Elektrischer Strom zur Ansteuerung der Servoventile

$\Delta p$ : Differenz der in den beiden Kammern des Hydraulikzylinders vorliegenden Drücke

**Abbildung 4.3:** Übertragungselemente und Signale des Kraftregelkreises

um das Hydrauliksystem zu stabilisieren.

### 4.3 Kraftregelkreis zur Erzeugung des Belastungsprofils

Am Prüfstand wird zur Kraftregelung der *ZykloRegler* eingesetzt, da es periodische Belastungsprofile stationär genau zu regeln gilt, wie zu Beginn dieses Kapitels erläutert wurde.

In Abbildung 4.3 ist das Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises dargestellt.

Der Regelkreis ist kaskadiert. Zur Regelung der hydraulischen Kraft  $F_L$

besitzt der *ZykloRegler* den Sollwert  $i_s$  für den elektrischen Strom  $i$ , mit dem die Servoventile angesteuert werden,<sup>2</sup> als Stellgröße. Der unterlagerte Regelkreis dient dazu, dass der elektrische Strom  $i$  seinem Sollwert  $i_s$  stationär genau folgt.

#### 4.4 Technische Realisierung des *ZykloRegler* für den Betrieb des Prüfstands

Die Abtastperiode  $T_A$  des Kraftregelkreises am Prüfstand darf, entsprechend dem dynamischen Verhalten des elektrohydraulischen Systems, nicht größer als eine Millisekunde sein. Insbesondere bei langer Periodendauer  $T_p$  eines periodischen Sollwertverlaufs der hydraulischen Kraft erfordert der Algorithmus des *ZykloRegler* hohe Anforderungen an die Geschwindigkeit der digitalen Signalverarbeitung. Mit einer Abtastperiode  $T_A = 0.001$  s und einer Periodendauer  $T_p = 0.2$  s der periodischen Führungsgröße ergibt sich der Reglerparameter  $R$ , wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, gemäß Gleichung (1.5) zu  $R = 200$ . Das bedeutet, die Ordnung der Übertragungsfunktion (2.4) des Reglers ist sehr hoch, so dass innerhalb der Abtastperiode  $T_A$  eine hohe Anzahl an Rechenoperationen auszuführen ist, um die Stellgröße des Reglers zu ermitteln.

Für den Einsatz des *ZykloRegler* zur Kraftregelung am Gleitlagerprüfstand wurde ein sehr leistungsfähiges Steuergerät entwickelt, um den hohen Anforderungen an die Geschwindigkeit der digitalen Signalverarbeitung gerecht zu werden.

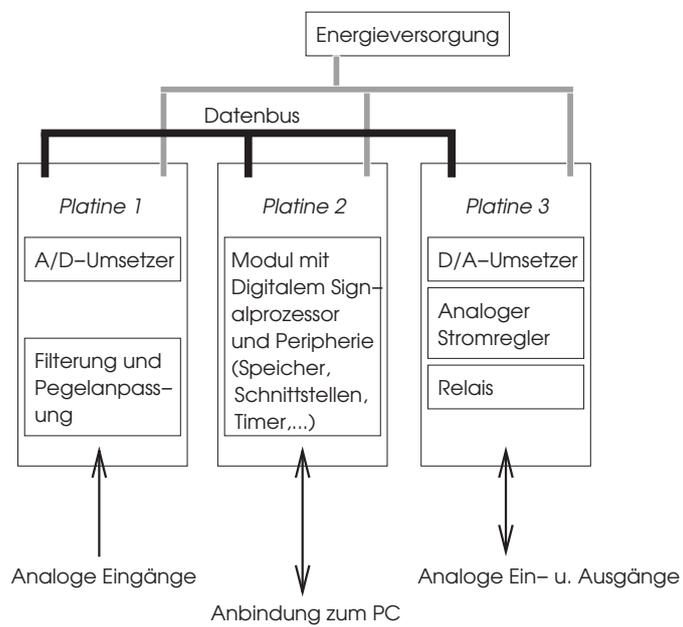
Wie in Abbildung 4.4 dargestellt, beinhaltet das Steuergerät drei Platinen, auf denen die wesentlichen Funktionalitäten verteilt sind.

Auf der *Platine 2* befindet sich ein Modul, das einen digitalen Signalprozessor (TigerSHARC 203S von Analog Devices) und zusätzliche Peripherie (zum Beispiel Schnittstellen, Speicher, Timer, Interrupt-Eingänge, Programmierschnittstelle) enthält. Auf dem digitalen Signalprozessor werden die benötigten Steuerungs- und Überwachungsfunktionen, sowie

---

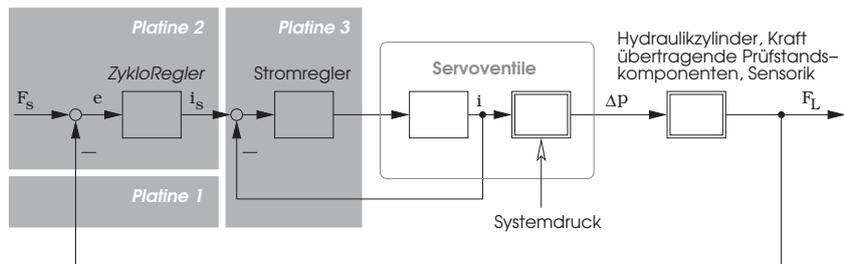
<sup>2</sup>Am Prüfstand sind sechs Servoventile hydraulisch parallel geschaltet, um den hohen Dynamikanforderungen, die aus den Kraft-Sollwertverläufen resultieren, gerecht zu werden.

#### 4.4 Technische Realisierung des *Zyklusregler* für den Betrieb des Prüfstands



**Abbildung 4.4:** Funktionsmodule des Steuergeräts für den Gleitlagerprüfstand

#### 4 Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüfstand



**Abbildung 4.5:** Aufteilung der Steuergerätfunktionalitäten im Regelkreis

die Kraftregelung mit dem *Zyklusregler* ausgeführt [15]. Über eine serielle Schnittstelle ist der digitale Signalprozessor mit einem PC verbunden. Der Prüfstand wird vom PC aus bedient, wozu eine Software mit grafischer Bedienoberfläche erstellt wurde [15].

Auf der *Platine 1* befinden sich Analog/Digital-Umsetzer und analoge Schaltungen zur Pegelanpassung und Filterung von Sensorsignalen. Hier werden die Regelgröße und weitere Prozessgrößen digitalisiert und über den Datenbus an den digitalen Signalprozessor auf *Platine 2* gesendet.

Auf der *Platine 3* befinden sich Digital/Analog-Umsetzer, ein analoger Stromregler, Verstärkerschaltungen und einige Relais. Der Stromregler und die Verstärkerschaltungen sind speziell für die Ansteuerung der elektrohydraulischen Servoventile konzipiert<sup>3</sup>.

In Abbildung 4.5 ist skizziert, welche Funktionen die einzelnen Platinen jeweils im Kraftregelkreis übernehmen.

Das Steuergerät wurde in einem Gehäuse mit Baugruppenträger implementiert. Die drei Platinen werden als Einschubkarten gehandhabt. Abbildung 4.6 zeigt ein Foto des Steuergeräts.

<sup>3</sup>Der modulare Aufbau des Steuergeräts ermöglicht gegebenenfalls eine schnelle Anpassung an andere Regelstrecken. Es wird in der Regel lediglich der Austausch von *Platine 3* erforderlich sein.



**Abbildung 4.6:** Steuergerät für den Gleitlagerprüfstand

#### 4.5 Messergebnisse aus dem Betrieb des Prüfstands mit dem *ZykloRegler*

Nachdem der *ZykloRegler* im Steuergerät implementiert [15] und ausführlich getestet wurde, befindet er sich nun am Prüfstand zur stationär genauen Führung der geforderten, periodischen Belastungsprofile im Einsatz. Seine Stabilitätseigenschaften gewährleisten den sicheren Betrieb des Prüfstands.

Im Folgenden werden einige Messungen gezeigt, die während des Betriebs des Prüfstands aufgezeichnet wurden.

Zu den Messungen ist zunächst anzumerken, dass sie ungefiltert dargestellt werden. Die Signale sind mit Messrauschen behaftet. Das Messrauschen ist bei den verschiedenen Messungen unterschiedlich stark ausgeprägt, abhängig davon, welche der Anlagen, die sich außer dem Gleitlagerprüfstand in der Versuchshalle befinden, gleichzeitig mit ihm in Betrieb waren und gegebenenfalls Quellen für elektromagnetische Störungen darstellten.

Abbildung 4.7 zeigt einen Ausschnitt aus dem eingeschwungenen Zustand bei einer Kurbelwellendrehzahl von 6000 rpm mit einer Lastspitze von etwa 20 kN. Im Belastungsprofil wurde dem Kraftanteil, der im Kurbeltrieb durch Gaskräfte verursacht wird, ein wesentlich höheres Gewicht gegeben als dem durch Massenbewegung hervorgerufenen Kraftanteil. Das Belastungsprofil enthält dadurch steilere Kraftgradienten, die zusätzlich zu der aus der hohen Kurbelwellendrehzahl resultierenden hohen Dynamik des Belastungsprofils die Anforderung an die Dynamik der Stellgröße

des Reglers erhöhen. Wie in Abbildung 4.7a gezeigt wird, führt der *ZyklusRegler* den Kraft-Istwert  $y$  dem hochdynamischen Kraft-Sollwert  $w$  stationär genau nach.

In Abbildung 4.8 ist ein weiterer Ausschnitt aus dem eingeschwungenen Zustand dargestellt. Hier wurde ein Belastungsprofil mit 2200 rpm und einer Lastspitze von etwa 90 kN eingeregelt.

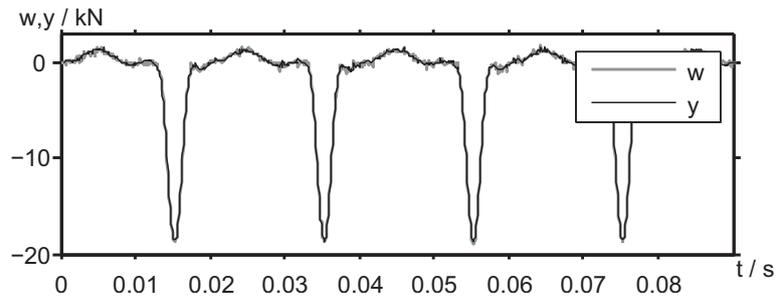
In Abbildung 4.9 ist der Einschwingvorgang nach dem Aufschalten eines dynamischen Belastungsprofils gezeigt. Insbesondere am Verlauf der Regelabweichung (Abbildung 4.9b) ist zu erkennen, dass der stationäre Zustand nach kurzer Zeit erreicht wird.

Zur Regelung der Kraftprofile am Prüfstand eignet sich der *ZyklusRegler* vor allem aufgrund seines stationär genauen Führungsverhaltens bei periodischen Führungsgrößen. Wenn die geforderten Belastungsprofile Anlagewechsel des Gleitlagers verursachen, wird jedoch auch das stationär genaue Störverhalten des *ZyklusRegler* benötigt, um sie exakt einzuregeln.

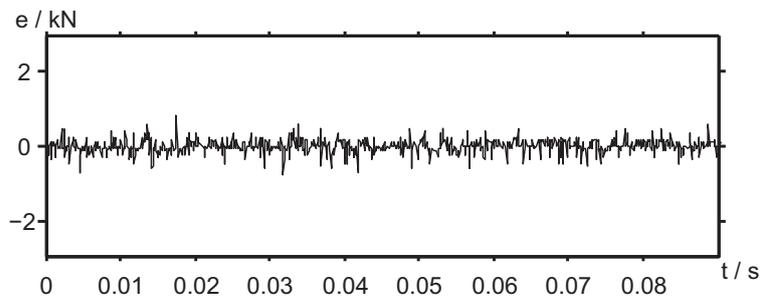
In Abbildung 4.10 ist dargestellt, dass das Gleitlager bei Druck- und Zugbelastung auf der rechten Seite beziehungsweise auf der linken Seite an der Kurbelwelle anliegt. Beim Anlagewechsel des Gleitlagers bewegt sich aufgrund des Lagerspiels der Kolben des Hydraulikzylinders. Die Bewegung des Kolbens wirkt sich störend auf die hydraulische Kraft aus. Aufgrund der Periodizität des Belastungsprofils ist auch die durch das Lagerspiel verursachte Störung periodisch (mit identischer Periodendauer), so dass sie vom *ZyklusRegler* kompensiert wird.

In Abbildung 4.11 werden zwei Messungen mit etwas unterschiedlichen Belastungsprofilen gezeigt. Bei der in Abbildung 4.11a gezeigten Messung wurde das Gleitlager permanent in Druckrichtung belastet, so dass keine Bewegung durch Gleitlagerspiel stattfand. Bei der in Abbildung 4.11b gezeigten Messung wird die Anlage stellenweise verlassen, wenn die hydraulische Kraft Null wird. Das Kraftprofil wird trotz dieser Störungen stationär genau geregelt. Der Stellgrößenverlauf unterscheidet sich entsprechend vom störungsfreien Fall. Die Ausprägungen im Stellgrößenverlauf, die zur Kompensation der durch Anlagewechsel des Gleitlagers verursachten Störungen benötigt werden, sind mit Pfeilen markiert.

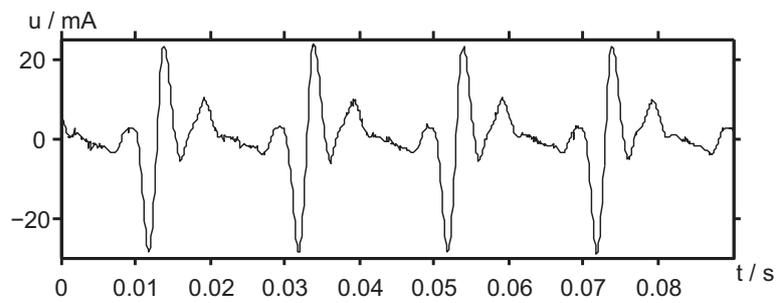
#### 4.5 Messergebnisse aus dem Betrieb des Prüfstands



(a) Verlauf von Sollwert  $w$  und Istwert  $y$  (Kraft, mit der das Lager belastet wird)



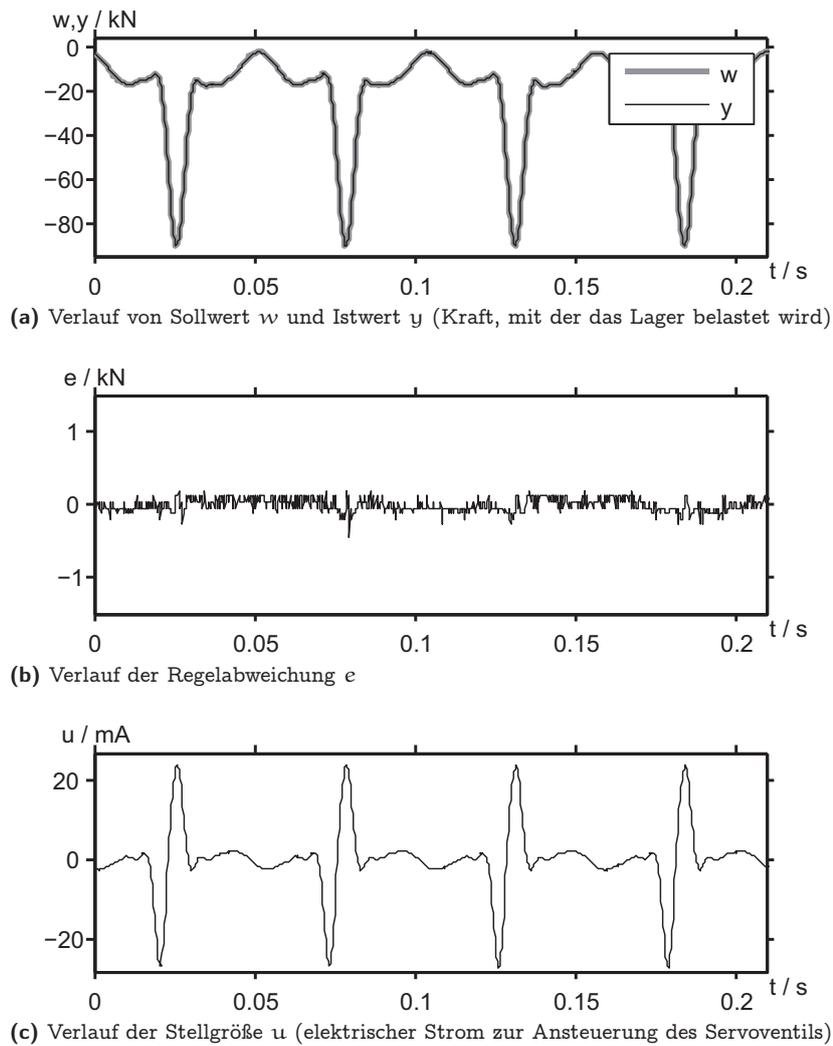
(b) Verlauf der Regelabweichung  $e$



(c) Verlauf der Stellgröße  $u$  (elektrischer Strom zur Ansteuerung des Servoventils)

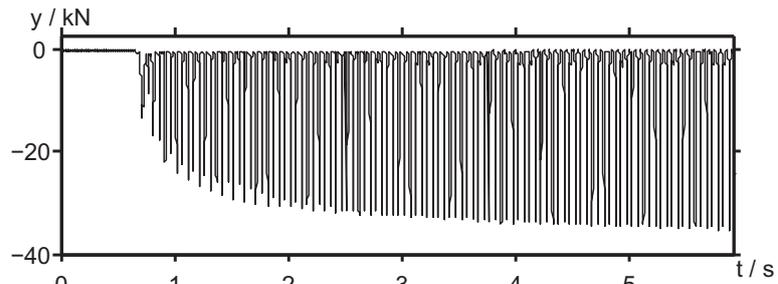
**Abbildung 4.7:** Auszug vom eingeschwungenen Zustand bei einer Kurbelwellendrehzahl von 6000 rpm und einer Belastung von ca. 20 kN

#### 4 Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüfstand

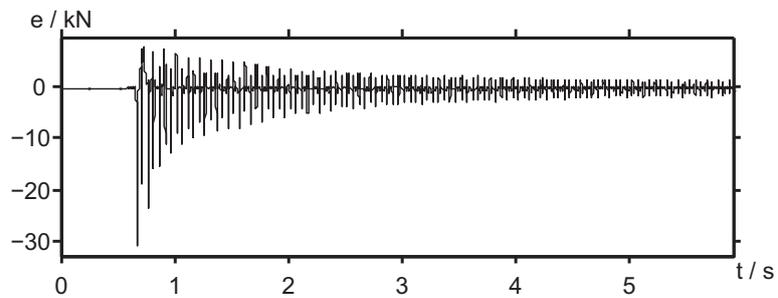


**Abbildung 4.8:** Auszug vom eingeschwungenen Zustand bei einer Kurbelwellendrehzahl von 2200 rpm und einer Belastung von ca. 90 kN

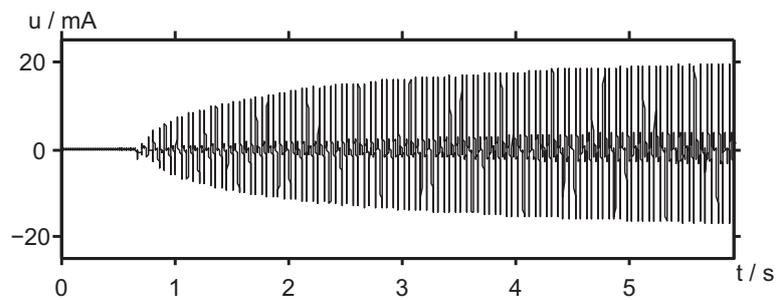
#### 4.5 Messergebnisse aus dem Betrieb des Prüfstands



(a) Verlauf des Istwerts  $y$  (Kraft, mit der das Lager belastet wird)



(b) Verlauf der Regelabweichung  $e$

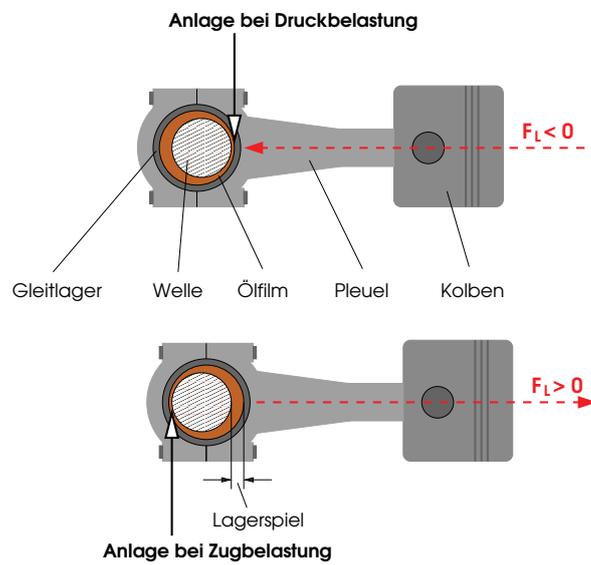


(c) Verlauf der Stellgröße  $u$  (elektrischer Strom zur Ansteuerung des Servoventils)

**Abbildung 4.9:** Einschwingvorgang bei einer Kurbelwellendrehzahl von 2400 rpm und einer geplanten Belastung von ca. 35 kN

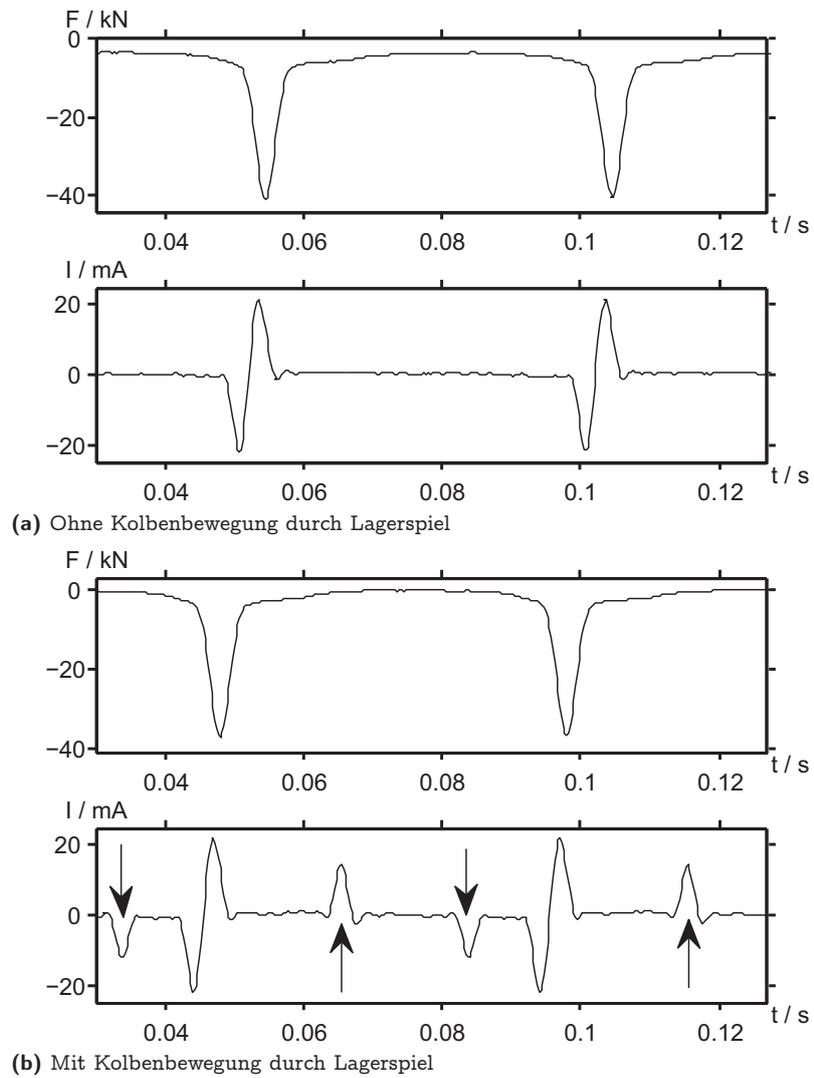
#### 4 Regelung periodischer Kraftverläufe an einem Gleitlagerprüfstand

---



**Abbildung 4.10:** Anlage des Gleitlagers auf der rechten Seite bei Druckbelastung, auf der linken Seite bei Zugbelastung

#### 4.5 Messergebnisse aus dem Betrieb des Prüfstands



**Abbildung 4.11:** Vergleich: Verlauf des elektrischen Stroms im Fall ohne Anlagewechsel und im Fall mit Anlagewechsel



## Drehzahl- und Laufruheregung eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung

Bei Dieselmotoren mit Direkteinspritzung kommt es in der Regel trotz gleicher Ansteuerung der zylinderindividuellen Einspritzdüsen zu unterschiedlichen Beiträgen der einzelnen Zylinder zum Drehmoment an der Kurbelwelle. Dies resultiert überwiegend daraus, dass aufgrund von Fertigungstoleranzen der hydraulischen Komponenten der Einspritzsysteme nicht alle Einspritzdüsen bei gleicher Ansteuerung dieselbe Kraftstoffmenge liefern.

Da während einer Umdrehung der Nockenwelle alle Zylinder jeweils einmal zünden, werden aufgrund dieser unterschiedlichen Drehmomentbeiträge der einzelnen Zylinder dem gewünschten Drehmoment harmonische Anteile überlagert, wobei die Frequenzen der Harmonischen dem Kehrwert

$$f_{NW} = \frac{1}{T_{NW}} \quad (5.1)$$

der Dauer  $T_{NW}$  einer Nockenwellenumdrehung sowie seinen Vielfachen  $v \cdot f_{NW}$  ( $v = 1, 2, \dots, V < Z/2$ ,  $Z$ : Anzahl der Zylinder) entsprechen.

Bezieht man den Verlauf des Drehmoments auf den Drehwinkel

$$\varphi_{NW}(t) = 2\pi \cdot f_{NW} \cdot t \quad (5.2)$$

der Nockenwelle, so lauten die Frequenzen der Harmonischen Anteile  $v \cdot f_{NW}^{\circ}$  mit der Grundfrequenz

$$f_{NW}^{\circ} = \frac{1}{T_{NW}^{\circ}} \quad (5.3)$$

und der Periodendauer

$$T_{NW}^{\circ} = 2\pi, \quad (5.4)$$

die einer Umdrehung der Nockenwelle entspricht.

Im Leerlauf- und im Teillastbetrieb des Motors werden die harmonischen Drehmomentanteile deutlich ausgeprägt zur Drehzahl der Kurbelwelle übertragen, so dass auch dem gewünschten Drehzahlverlauf, bezogen auf den Drehwinkel (5.2), harmonische Anteile mit den Frequenzen  $\nu \cdot f_{NW}^{\circ}$  überlagert werden.

Die harmonischen Anteile der Kurbelwellendrehzahl werden von Fahrzeuginsassen störend als unrunder Motorlauf empfunden. Resultieren die störenden Drehmomentanteile aus unerwünschten, zylinderindividuellen Unterschieden der Einspritzmengen, so kommt es außerdem zu erhöhten Abgasemissionen.

Um die Störungen zu eliminieren, muss die Ansteuerung der Einspritzdüsen zylinderselektiv korrigiert werden, so dass alle Zylinder dieselben Drehmomentbeiträge liefern.

Aus der Literatur sind Verfahren (zum Beispiel [2, 5]) bekannt, die die Störungen entsprechend zu eliminieren vermögen. Sie werden unter anderem als Laufruheregung oder Zylindergleichstellung bezeichnet. Diese Verfahren besitzen kein Führungsverhalten, so dass sie im Leerlaufbetrieb als zusätzliche Funktion parallel zum Leerlaufregler zu betreiben sind.

Der *ZykloRegler* eignet sich aufgrund seines stationären Störverhaltens dazu, die störenden, harmonischen Drehmomentanteile zu eliminieren. Da er auch (stationär genaues) Führungsverhalten besitzt, fasst er die Funktionen Leerlaufregelung und Laufruheregung zusammen.

Wie in den folgenden Abschnitten dargestellt wird, wurde die Eignung des *ZykloRegler* zur Drehzahl- und Laufruheregung an einem Versuchsfahrzeug verifiziert. Als Versuchsfahrzeug diente ein PKW der Kompaktklasse mit einem Vierzylinder-Dieselmotor mit Direkt-Einspritzsystem [13].

## 5.1 Drehzahlregelkreis im Versuchsfahrzeug

Der *ZyklusRegler* wurde im Versuchsfahrzeug als Drehzahlregler für den Leerlaufbetrieb eingesetzt. Der Drehzahlregler hat die Aufgabe, die mittlere Kurbelwellendrehzahl auf ihrem Sollwert zu halten, was durch entsprechende Beeinflussung des Motordrehmoments erreicht wird. Das Motordrehmoment ist beim Dieselmotor direkt von der Menge des eingespritzten Kraftstoffs abhängig, so dass es mit hoher Dynamik variiert werden kann.

Abbildung 5.1 zeigt das Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises. Der Regler besitzt als Stellgröße den Sollwert  $q_n$  für die Kraftstoffmenge  $q$ , die in denjenigen Zylinder eingespritzt werden soll, der als nächstes zünden wird.

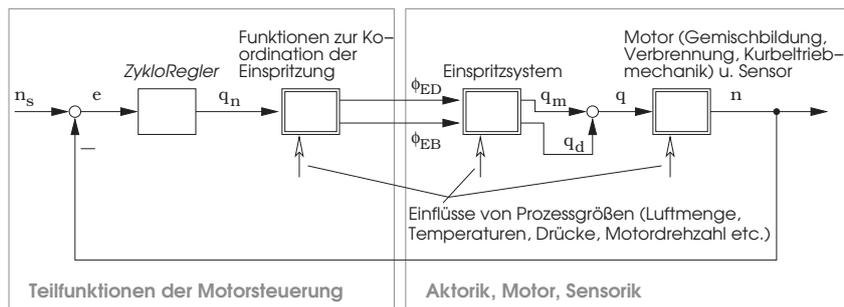
Die mittlere Kurbelwellendrehzahl  $n$  ist die Regelgröße. Sie entsteht durch Mittelung zweier aufeinander folgende Abtastwerte der Kurbelwellendrehzahl, wobei während einer Nockenwellenumdrehung  $2Z$  ( $Z$ : Anzahl der Zylinder) Abtastungen durchgeführt werden.

Aus der vom Regler ausgegebenen Soll-Einspritzmenge  $q_n$  werden von den Funktionen der Motorsteuerung, die der Koordination der Einspritzung dienen, unter Berücksichtigung weiterer Prozessgrößen der erforderliche Beginn  $\phi_{EB}$  sowie die erforderliche Dauer  $\phi_{ED}$  der Einspritzung ermittelt. Mit diesen Größen werden die Einspritzdüsen angesteuert, so dass die Kraftstoffmenge  $q$  in den sich in der Kompressionsphase befindlichen Zylinder gelangt. In Abhängigkeit der Verläufe der Gemischbildung, der Entzündung des Gemischs und der Verbrennung des Kraftstoffs wird über die Kurbeltriebmechanik abzüglich von Verlusten (Reibung, Gaswechsel) der Beitrag dieses Zylinders zum Drehmoment an der Kurbelwelle ausgeprägt.

## 5.2 Implementierung des *ZyklusRegler* im Motormanagementsystem des Versuchsfahrzeugs

Der *ZyklusRegler* wurde mittels eines Rapid-Prototyping-Systems in das Motormanagementsystem des Versuchsfahrzeugs integriert.

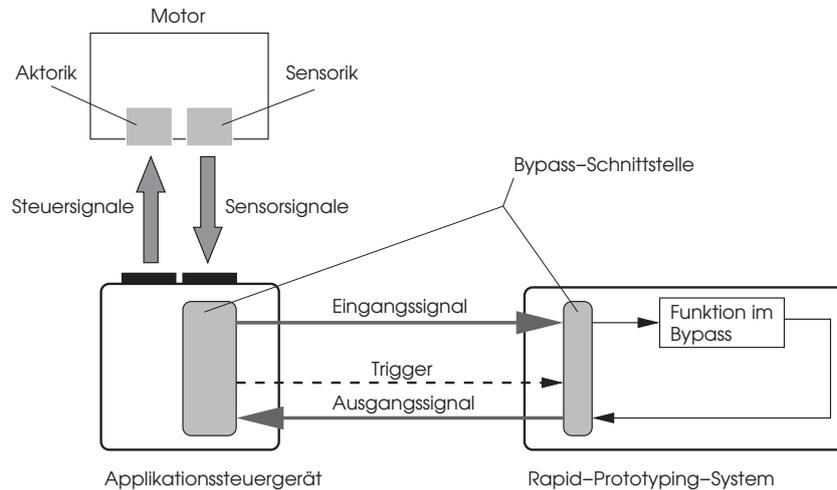
## 5 Drehzahl- und Laufruheregung eines Dieselmotors



- $n_s$ : Sollwert der mittleren Kurbelwellendrehzahl
- $n$ : Istwert der mittleren Kurbelwellendrehzahl
- $e$ : Regelabweichung
- $q_n$ : Stellgröße des *Zyklusregler*: Sollwert für die einzuspritzende Kraftstoffmenge
- $q$ : Resultierende Einspritzmenge
- $q_d$ : Harmonische Störung durch zylinderselektive Abweichungen der Einspritzmenge vom Sollwert  $q_n$
- $q_m$ : Resultierende Einspritzmenge abzüglich  $q_d$
- $\phi_{ED}$ : Dauer der Einspritzung (Intervall des Drehwinkels der Kurbelwelle, während dessen Verstreichens Kraftstoff eingespritzt wird)
- $\phi_{EB}$ : Beginn der Einspritzung (Drehwinkelstellung der Kurbelwelle relativ zum oberen Totpunkt des Kolbens)

**Abbildung 5.1:** Übertragungselemente und Signale des Drehzahlregelkreises

## 5.2 Implementierung des *ZykloRegler* im Versuchsfahrzeug



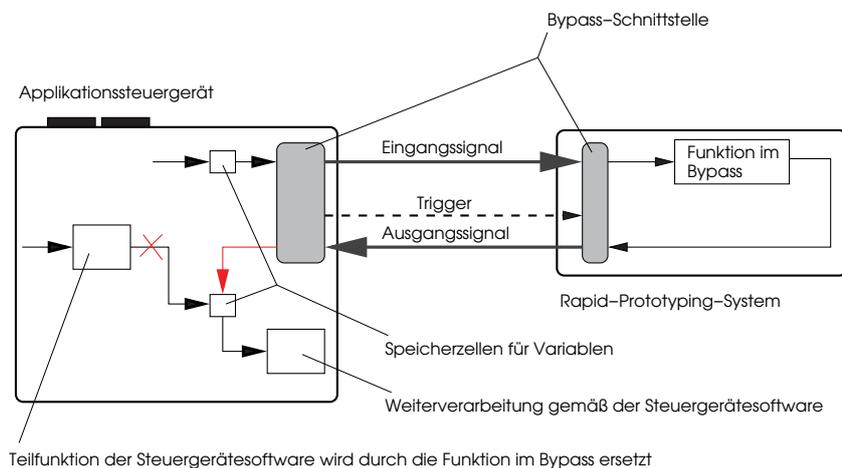
**Abbildung 5.2:** Rapid-Prototyping mit der Bypass-Methode

Das serienmäßige Motorsteuergerät des Versuchsfahrzeugs wurde zunächst durch ein Applikationssteuergerät [14] ersetzt, da es keine geeignete Schnittstelle zur Anbindung eines Rapid-Prototyping-Systems besitzt. Der serienmäßige Stand der Steuerungs- und Regelungsfunktionen für das Motormanagement wurde in den Speicher des Applikationssteuergeräts geladen.

Der *ZykloRegler* wurde dann mittels Bypass, wie eine Methode des Rapid-Prototyping [14, 18] genannt wird, in das Motormanagementsystem des Versuchsfahrzeugs integriert.

Die Realisierung einer Steuerungs- oder Regelungsfunktion mittels Bypass bedeutet, dass sie parallel zum Steuergerät im Rapid-Prototyping-System ausgeführt wird, wie in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt ist.

Zur Synchronisation der Rechenprozesse im Bypass mit den Rechenprozessen in der Motorsteuerung wird das Rapid-Prototyping-System vom Applikationssteuergerät getriggert. Über die Schnittstelle des Applikationssteuergeräts empfängt der Echtzeitrechner des Rapid-Prototyping-

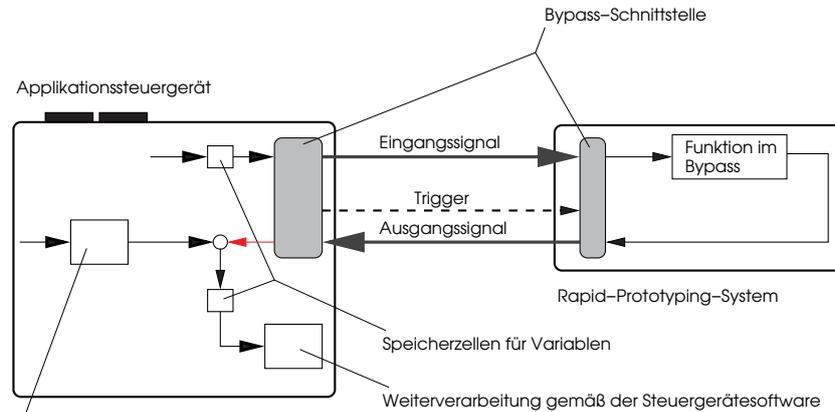


**Abbildung 5.3:** Eine Teilfunktion der Motorsteuerung wird durch die Funktion im Bypass ersetzt

Systems Signale aus der Motorsteuerung, berechnet gemäß dem Algorithmus der Steuerungs- oder Regelungsfunktion (Funktions-Prototyp) Ausgangssignale und sendet diese zurück an die Motorsteuerung. Es sind dabei zwei Modi üblich: Entweder ersetzt ein im Bypass berechnetes Ausgangssignal ein in der Motorsteuerung berechnetes Signal, wie in Abbildung 5.3 skizziert, oder es wird addiert, wie in Abbildung 5.4 skizziert. Im ersten Modus wird eine Teilfunktion der Motorsteuerung durch die im Rapid-Prototyping-System implementierte Funktion ersetzt. Im zweiten Modus wird der Teilfunktion der Motorsteuerung die im Rapid-Prototyping-System implementierte Funktion überlagert.

### 5.3 Messergebnisse aus dem Betrieb des Versuchsfahrzeugs mit dem *ZykloRegler*

Die Parametrierung des Reglers sowie die Durchführung von Messungen im Betrieb des Versuchsfahrzeugs erfolgte mit einem sogenannten Applikationssystem [18]. Das Applikationssystem bietet entsprechende



Der Teilfunktion der Steuergerätesoftware wird die Funktion im Bypass überlagert

**Abbildung 5.4:** Einer Teilfunktion der Motorsteuerung wird die Funktion im Bypass überlagert

Schnittstellen zum Motormanagementsystem, so dass Variablen und Signale der Motorsteuerung mittels einer PC-Anwendung manipulier- beziehungsweise beobachtbar sind. Das heißt, Verstellungen von Variablen der Steuerungs- und Regelungsfunktionen des Motormanagementsystems konnten während des Betriebs des Fahrzeugs mit einer PC-Anwendung durchgeführt werden. Ebenso wurde die Durchführung von Messungen mit dieser PC-Anwendung koordiniert.

Die Leerlaufdrehzahl konnte wahlweise mit einem PI-Regler, der die serienmäßige Funktion der Motorsteuerung für die Leerlaufdrehzahlregelung des als Versuchsfahrzeug eingesetzten Fahrzeugtyps darstellt, oder mit dem mittels Bypass implementierten *Zyklusregler* geregelt werden. Außerdem konnte dem serienmäßigen PI-Regler für die Drehzahlregelung die ebenfalls serienmäßige Regelung zur Zylindergleichstellung parallel geschaltet werden. So konnte das Verhalten des *Zyklusregler* mit dem Verhalten der serienmäßigen Kombination aus Leerlauf- und Laufruhe- regelung verglichen werden. Zwischen den verschiedenen Betriebsarten konnte vom PC aus umgeschaltet werden.

Im Folgenden werden Messergebnisse aus zwei beispielhaften Versuchen gezeigt, die im Fahrzeug durchgeführt wurden.

In Abbildung 5.5 ist dargestellt, wie sich die Regelabweichung und die Stellgröße verhalten haben, nachdem aus dem eingeschwungenen Zustand heraus vom PI-Regler auf den *ZykloRegler* umgeschaltet wurde. Die Umschaltung geschah in etwa zum Zeitpunkt  $t = 6.1$  s. Bis dahin wurde die Drehzahl mit dem PI-Regler geregelt.

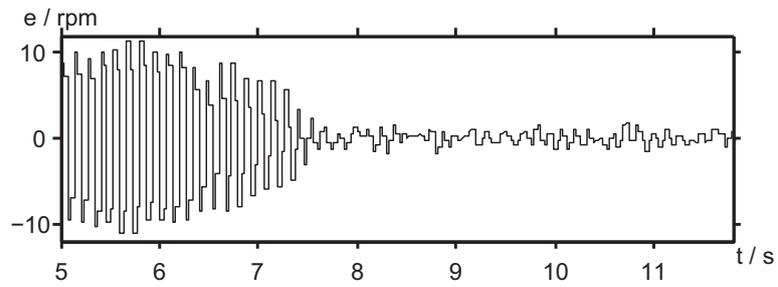
In Abbildung 5.5a ist am Verlauf der Regelabweichung zu sehen, dass der PI-Regler den Mittelwert der mittleren Kurbelwellendrehzahl stationär genau einregeln kann. Die störenden Schwingungen, die wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben aus zylinderselektiven Beiträgen zum Drehmoment resultieren, kann der PI-Regler jedoch nicht eliminieren. Wird die Drehzahl mit dem *ZykloRegler* geregelt, so werden die störenden harmonischen Anteile der mittleren Kurbelwellendrehzahl ausgeregelt, wie am weiteren Verlauf der Regelabweichung zu erkennen ist.

In Abbildung 5.5b wird der Verlauf der Stellgröße abzüglich ihres Mittelwerts dargestellt. Der *ZykloRegler* erzeugt harmonische Stellgrößenanteile, die benötigt werden, um die harmonischen Störungen zu kompensieren.

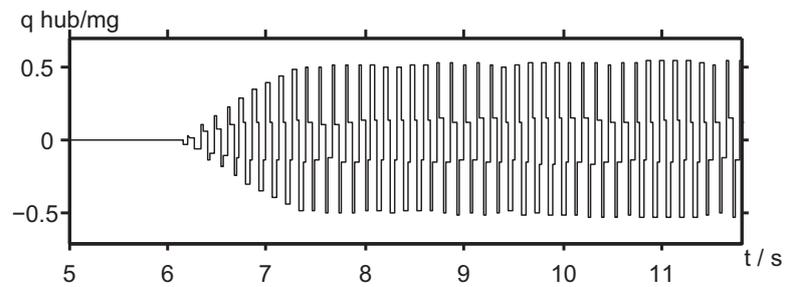
Der zur Kompensation der harmonischen Störungen benötigte Stellgrößenanteil resultiert in zylinderindividuellen Differenzen der geplanten Einspritzmenge zur mittleren Einspritzmenge, wie in Abbildung 5.5c zu sehen ist.

In Abbildung 5.6 wird anhand zweier übereinander gelegter Messungen noch einmal veranschaulicht, dass zur Drehzahlregelung eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung ein Regelungsverfahren benötigt wird, das auch harmonische Störsignale stationär genau zu kompensieren vermag. Ein Regler, der stationäre Genauigkeit allein bei konstanten Störsignalen leistet, wie zum Beispiel der PI-Regler, kann die bezüglich Komfort und Emissionen an das Verhalten eines Dieselmotors im Leerlaufbetrieb gestellten Anforderungen nicht erfüllen.

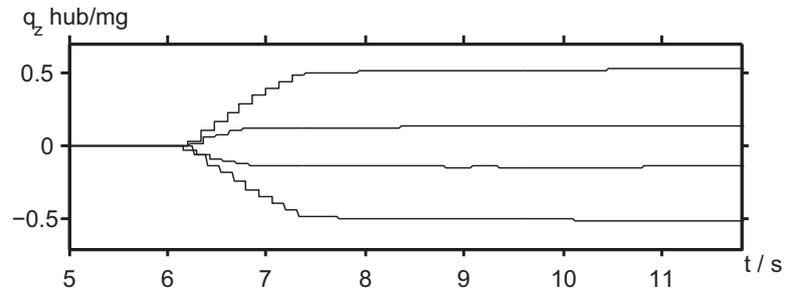
Bei den zur Zeit in Serie eingesetzten Motorsteuerungen für Dieselmotoren mit Direkteinspritzung ist es deshalb üblich, für den Leerlaufbetrieb zwei Regelungsfunktionen parallel zu benutzen. Dabei leistet einer der beiden Regler stationäre Genauigkeit bei konstanten Signalen (wie zum



(a) Verlauf der Regelabweichung

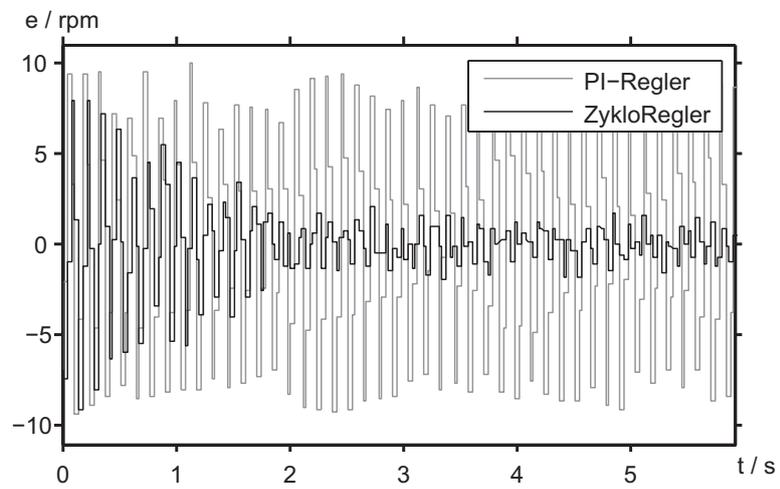


(b) Verlauf der Stellgröße (geplante Einspritzmenge) abzüglich ihres Mittelwerts



(c) Aus dem Verlauf der Stellgröße resultierende zylinderindividuelle Differenzen zum Mittelwert der geplanten Einspritzmenge

**Abbildung 5.5:** Einschwingvorgang nach dem Umschalten (bei  $t \approx 6.1\text{ s}$ ) vom Betrieb mit dem PI-Regler in den Betrieb mit dem *ZykloRegler*

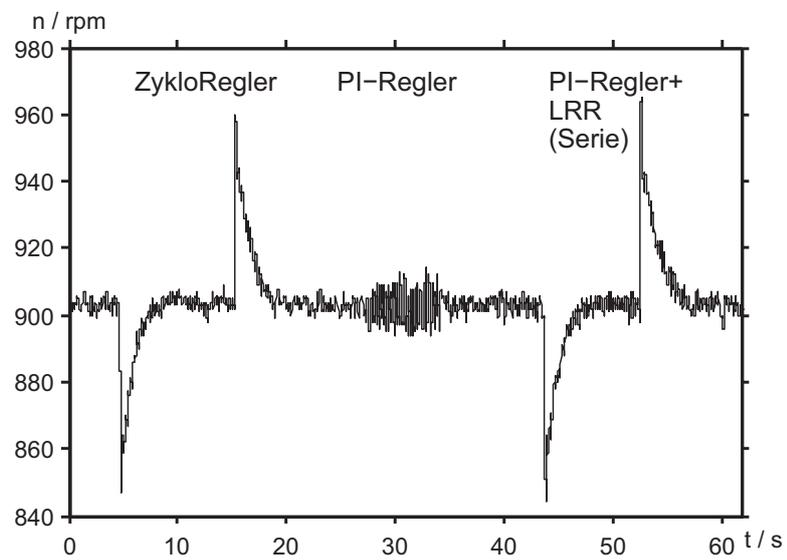


**Abbildung 5.6:** Drehzahlregelung mit dem PI-Regler und mit dem *ZykloRegler* (auf den in der Messung bei  $t \approx 0$ s umgeschaltet wurde). Die Drehzahlregelung eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung erfordert ein Regelungsverfahren mit stationärer Genauigkeit auch bei harmonischen Stör-signalen.

Beispiel der PI-Regler), so dass der Mittelwert der mittleren Kurbelwellendrehzahl auf dem Sollwert für die mittlere Kurbelwellendrehzahl gehalten wird. Der zweite Regler, in der Literatur [13, 18] üblicherweise als Laufruheregelung, Zylindergleichlaufregelung oder Zylindergleichstellung bezeichnet, dient zur Unterdrückung der harmonischen Anteile der mittleren Kurbelwellendrehzahl.

In Abbildung 5.7 wird anhand einer Messung gezeigt, dass der *ZykloRegler* die dem Stand der Technik entsprechende Kombination aus zwei separaten Regelungsfunktionen zur Leerlauf- und Laufruheregelung ersetzen kann. Hier wurde im Betrieb beider Drehzahlregelungsverfahren jeweils eine Last zugeschaltet (indem das Lenkrad schlagartig in den Anschlag gezogen und anschließend gehalten wurde, so dass die Servopumpe entsprechend Leistung von der Kurbelwelle entnehmen musste) und nach einer Weile wieder abgeschaltet (Lenkrad wieder aus dem Anschlag gelöst).

Wie anhand des Drehzahlverlaufs zu erkennen ist, bietet der *ZykloRegler* ein mit der serienmäßigen Kombination aus Leerlauf- und Laufruheregelung vergleichbar gutes Regelungsverhalten. Er kann also in der Dieselmotorsteuerung unter anderem als Leerlaufregler eingesetzt werden, ohne dass eine zusätzliche Regelungsfunktion für die Zylindergleichstellung benötigt wird.



**Abbildung 5.7:** Verhalten bei Zu- und Abschaltung konstanter Lasten (Leistungsbedarf der Servopumpe): 1. Drehzahlregelung mit dem *ZyκλοRegler*. 2. Drehzahlregelung mit der serienmäßigen Kombination aus PI-Regler und Laufruheregung

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur stationär genauen Regelung periodischer, hochdynamischer Prozesse entworfen und in zwei industriellen Anwendungen erfolgreich zum Einsatz gebracht. Das Verfahren erhielt den Namen *ZykloRegler*.

Bevor der *ZykloRegler* zum Einsatz kam, wurde er zunächst systemtheoretisch analysiert. Es wurde nachgewiesen, dass er stationäre Genauigkeit bei periodischen Führungs- und Störgrößen leistet. Die dafür im offenen Regelkreis benötigten grenzstabilen Polstellen erfordern zur Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises gezielte, frequenzselektive Phasenverschiebungen der Regelabweichung. Es wurde gezeigt, dass der *ZykloRegler* die grenzstabilen Polstellen des offenen Regelkreises in stabile Polstellen des geschlossenen Regelkreises zu überführen vermag. Dazu wurde eine Auslegungsvorschrift für die Reglerparameter ermittelt, die Einfluss auf die entsprechenden Polstellen haben.

Nachdem das Verfahren hinsichtlich Stabilität und stationärer Genauigkeit theoretisch abgesichert war, erfolgte die Realisierung der ersten technischen Anwendung.

So wurde der *ZykloRegler* zur elektrohydraulischen Regelung periodischer, hochdynamischer Kraftprofile an einem Gleitlagerprüfstand eingesetzt. Dazu wurde ein Steuergerät entwickelt, das die vom Regelalgorithmus gestellten Anforderungen an die digitale Signalverarbeitung erfüllt und auch die von der Sensorik und Aktorik des elektrohydraulischen Systems geforderte analoge Signalverarbeitung leistet.

Der *ZykloRegler* wurde am Gleitlagerprüfstand in Betrieb genommen und ausführlich getestet. Dabei wurden die geforderten Eigenschaften hinsichtlich Stabilität und stationärer Genauigkeit, auch bei hochdynamischen Führungsgrößen, unter Beweis gestellt. Die geforderten Kraftprofile konnten exakt eingeregelt werden.

Der *ZykloRegler* wurde in einer zweiten Anwendung zur Regelung der mittleren Kurbelwellendrehzahl eines Dieselmotors mit Direkteinspritzung in einem Versuchsfahrzeug eingesetzt.

Die Regelung wurde mit Hilfe eines Rapid-Prototyping-Systems im

Versuchsfahrzeug implementiert und umfangreich getestet. Da der *Zyklus-Regler* stationäre Genauigkeit bei periodischen Führungs- und Störgrößen leistet, fasst er die Funktionen Leerlaufregelung und Laufruheregung zusammen. Bei der Verwendung des *ZyklusRegler* als Leerlaufregler wird kein zusätzliches Verfahren zur Laufruheregung benötigt.

Die hohe Regelgüte des *ZyklusRegler* wurde in zwei verschiedenen technischen Anwendungen unter Beweis gestellt. Bei beiden Anwendungen wäre eine Modellbildung sehr aufwendig gewesen. Der *ZyklusRegler* benötigt keine Modellbildung zur Parametrierung. Er konnte mit wenig Aufwand, überwiegend empirisch, an die jeweilige Regelstrecke angepasst werden.

Für das Regelungsverfahren erfolgte eine Patenterteilung [6] durch das Deutsche Patent- und Markenamt.

## Literaturverzeichnis

- [1] BASSHUYSEN, R.v. (Hrsg.) ; SCHÄFER, F. (Hrsg.): *Handbuch Verbrennungsmotor*. Vieweg, 2005 (ATZ/MTZ - Fachbuch)
- [2] BIRK, M. ; RUPP, P. ; FEHRMANN, R. ; MAIENBERG, U. ; EICHHORN, F.: *Verfahren und Vorrichtung zur Regelung der Laufruhe einer Brennkraftmaschine*. Patent DE19527218B4, März 2004. – Robert Bosch GmbH
- [3] BUSCHE, E.: *Entwicklung eines außermotorischen Verfahrens zur Bewertung der Verschleißsicherheit von Motorengleitlagern*, Universität Kassel, Diss., 2005
- [4] CUIYAN, L. ; DONGCHUN, Z. ; XIANYI, Z.: A Survey of Repetitive Control. In: *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2004
- [5] FABIAN, D. ; THEUERKAUF, H.: *Zylindergleichstellung bei Hubkolbenmotoren durch Ausregeln der harmonischen Anteile der Kurbelwellendrehzahl*. Patent DE102005047829B3, Mai 2007. – Universität Kassel
- [6] FABIAN, D. ; THEUERKAUF, H.: *Verfahren zur Regelung zyklischer Prozesse*. Patent DE102007018805, Oktober 2008. – Universität Kassel
- [7] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig, 2005
- [8] FRANCIS, B. A. ; WONHAM, W. M.: The internal model principle of control theory. In: *Automatica* 12 (1976), Nr. 5, S. 457–465
- [9] GIROD, B. ; RABENSTEIN, R.: *Einführung in die Systemtheorie*. Vieweg+Teubner, 2007
- [10] HUSH, D. R. ; STEARNS, S. D.: *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. Oldenbourg, 1999

- [11] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Springer Berlin Heidelberg, 2007
- [12] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2008
- [13] ROBERT BOSCH GMBH: *Dieselmotor-Management*. Vieweg, 2004
- [14] SCHÄUFFLE, J. ; ZURAWKA, Th.: *Automotive Software Engineering*. Vieweg, 2006 (ATZ/MTZ - Fachbuch)
- [15] SPIEKER, C.: *Implementierung einer zyklischen Regelung auf einem digitalen Signalprozessor*, Universität Kassel, Diplomarbeit, 2008
- [16] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I*. Vieweg, 2007
- [17] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II*. Vieweg, 2007
- [18] WALLENTOWITZ, H. (Hrsg.) ; REIF, K. (Hrsg.): *Handbuch Kraftfahrzeugelektronik*. Vieweg, 2006 (ATZ/MTZ - Fachbuch)
- [19] WILL, D. (Hrsg.) ; GEBHARDT, N. (Hrsg.) ; STRÖHL, H. (Hrsg.): *Hydraulik – Grundlagen, Komponenten, Schaltungen*. Springer Berlin Heidelberg, 2006



