

# Zentrum für Luft- und Raumfahrttechnik

Technische Universität  
Braunschweig



---

## Ein Ingenieurmodell für den Rißfortschritt in hochleistungsgefrästen (HPC) Panels

**Torsten Fabel**

Institut für Flugzeugbau und Leichtbau

# Zentrum für Luft- und Raumfahrttechnik

Technische Universität  
Braunschweig



---

## Ein Ingenieurmodell für den Rißfortschritt in hochleistungsgefrästen (HPC) Panels\*

**Torsten Fabel**

Institut für Flugzeugbau und Leichtbau

---

ZLR-Forschungsbericht      2008-07

\* Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als von der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.



# **Ein Ingenieurmodell für den Rißfortschritt in hochleistungsgefrästen (HPC) Panels**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von: Dipl.-Ing. Torsten Fabel  
aus: Dresden  
Eingereicht am: 10.01.2008  
Mündliche Prüfung am: 17.07.2008  
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. P. Horst  
Prof. Dr.-Ing. habil. E. J. Breitbach  
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2008

Zugl.: (TU) Braunschweig, Univ., Diss., 2008

978-3-86727-809-6

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2008

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

[www.cuvillier.de](http://www.cuvillier.de)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2008

Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86727-809-6

## **Danksagung**

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Flugzeugbau und Leichtbau (IFL) der Technischen Universität Braunschweig.

Mein besonderer Dank gilt dem Leiter des Instituts für Flugzeugbau und Leichtbau, Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Horst, für die vielfältigen Anregungen und die Unterstützung, mit denen er wesentlichen Anteil am Gelingen der Arbeit hat.

Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. E. J. Breitbach für die Übernahme des Koreferates danken.

Bei allen Mitarbeitern des Instituts für Flugzeugbau und Leichtbau möchte ich mich für die positive Arbeitsatmosphäre, die auch in den privaten Bereich hineinreicht, und deren Unterstützung bedanken; den Mitarbeitern in der Werkstatt für deren Hilfe bei der Umsetzung der Versuche, den wissenschaftlichen Mitarbeitern für so manches Streitgespräch und den damit verbundenen vielfältigen Anregungen und Denkanstößen.

Mein ganz persönlicher Dank gilt meiner Frau Manuela, die mich immer wieder motiviert, mir die notwendigen Freiräume für die Arbeit geschaffen und so ein erfolgreiches Gelingen gesichert hat. Meinen Söhnen Eric und Janne danke ich für das Verständnis, wenn ihr Vater mal keine Zeit für sie hatte.



## Übersicht

In der heutigen Zeit kommt der Gewichthsoptimierung von Flugzeugen eine große Bedeutung zu, da dies einen großen Einfluß auf die Wirtschaftlichkeit im Betrieb hat. Daher geht die Bestrebung bei den Flugzeugherstellern dahin, Materialeigenschaften besser zu nutzen und neue Fertigungsverfahren einzusetzen. Durch modernste Bearbeitungsmaschinen lassen sich heutzutage komplexe Bauteile als Integralbauteile fertigen, so daß beispielsweise keine Mindestwandstärke für den Zusammenbau eingehalten werden muß.

Da diese Integralbauteile auch weiterhin den strengen luftfahrtspezifischen Auslegungskriterien unterliegen, müssen diese auch auf ihr Verhalten bei auftretenden Schäden, insbesondere bei Rissen, untersucht werden. Dies ist in der Regel mit großem Aufwand verbunden, eine schnelle Aussage ist für solche Strukturen nicht zu treffen. Ziel dieser Arbeit ist es, ausgehend von Berechnungsmethoden, die für differentiell hergestellte Bauteile gelten, diese weiterzuentwickeln und für integrale Haut-Stringer-Verbindungen zu adaptieren, um eine schnelle Aussage über das Fortschreiten von Rissen zu treffen. Dabei wird eine Unterscheidung des Stringerzustandes vorgenommen und in das Analysemodell implementiert.

Die Ergebnisse des Berechnungsmodells wurden mit Proben, die sich hinsichtlich Stringeranzahl und -zustand unterscheiden, validiert. Außerdem werden die Ergebnisse mit der Methode der Finiten Elemente verglichen. Die Berechnungen geben die Versuchsergebnisse gut wieder, wobei bei unterschiedlicher Stringerhöhe eine größere Abweichung zu verzeichnen ist. Auch im Vergleich zu den FE-Rechnungen zeigen die Berechnungen gute Ergebnisse. Es läßt sich zeigen, daß sich mit den Berechnungen gute Ergebnisse in kurzer Zeit erzielen lassen.

Für die analytischen Betrachtungen wurden Parameter variiert und deren Einfluß auf die Ergebnisse sichtbar dargestellt. Eindeutig konnten die Vorteile und Grenzen des Modells aufgezeigt und weiterführende Untersuchungen angeregt werden.



## **Abstract**

Weight optimization is of at most importance in today's aircraft, mainly for economical reasons. Therefore, airplane manufacturers try to use both, material and new manufacturing in an optimal way. The use of modern high performance cutting machines allows the production of complex designs, namely integrally stiffened panels.

Since these integrally stiffened panels are subject to strict aviation-specific justification criteria, the damage tolerance behaviour has to be examined closely, in particular with regard to cracks. This usually is connected with high computational effort, meaning that optimization is a problem, where many calculations are needed. The aim of this work is to develop a calculation method for integral skin-stringer combinations that allows rapid assessment of the crack growth. A distinction between different stringer conditions is drawn and considered in the method.

Results of the computational model are validated by samples for different number of stringers and stringer conditions. In addition the results are compared with results obtained with the finite element method. The results of the new method correspond with the experimental findings and with the finite element analyses, although a larger deviation can be observed with increase of the stringer height. This shows the efficiency of the method to create good results in short period of time.

Based on a variation of model parameters of the analytical model a further evaluation of the method is performed. Results are illustrated and advantages and limitations of the model are discussed and enable the reader to understand the advantages of the method.

---

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung .....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung .....</b>	<b>7</b>
2.1	Lineare Elastizitätstheorie .....	7
2.1.1	Grundgleichungen .....	7
2.1.2	Lösungsmethoden .....	11
2.2	Bruchmechanische Ansätze .....	13
2.3	Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren .....	15
2.4	Rißfortschritt .....	17
2.4.1	Rißfortschritt nach Paris .....	18
2.4.2	Rißfortschritt nach Forman .....	19
<b>3</b>	<b>Versteifte Strukturen.....</b>	<b>20</b>
3.1	Verschiebung der Haut.....	22
3.2	Verschiebung des Stringers.....	25
3.3	Kompatibilitätsbeziehung .....	27
3.4	Spannungsintensitätsfaktoren.....	28
<b>4</b>	<b>Integrale Strukturen unter Berücksichtigung des Biegemomentes .....</b>	<b>29</b>
4.1	Verformung der Versteifung durch Biegung .....	29
4.1.1	Verformung einer intakten Versteifung .....	29
4.1.2	Verformung einer gebrochenen Versteifung.....	33
4.1.3	Verformung einer angerissenen Versteifung .....	36
4.2	Spannungsintensitätsfaktoren.....	39
4.2.1	Spannungsintensitätsfaktor ohne Biegung .....	39
4.2.2	Spannungsintensitätsfaktor unter Berücksichtigung der Stringerbiegung.....	39
4.3	Kompatibilitätsbeziehung .....	41
4.4	Spannungsintensitätsfaktor der Versteifung .....	42
<b>5</b>	<b>Validierung mit der Finite Elemente Methode .....</b>	<b>43</b>
5.1	Rißspitzenelementierung.....	43
5.2	Modellgenerator .....	45
5.2.1	Eingabedaten.....	45
5.2.1.1	Geometriedaten .....	46
5.2.1.2	Netzparameter .....	46
5.2.1.3	Randbedingungen.....	46
5.2.2	Vernetzung .....	47

<b>6</b>	<b>Bauteilversuche .....</b>	<b>48</b>
6.1	Allgemeines.....	48
6.2	Probengeometrie .....	50
6.2.1	Probenform 1 (4 Steifen, kein Fuß) .....	51
6.2.2	Probenform 2 (4 Steifen, mit Fuß).....	51
6.2.3	Probenform 3 (5 Steifen, Mittelsteife gebrochen, kein Fuß) .....	52
6.3	Versuchsaufbau .....	52
6.4	Versuchsdurchführung .....	54
6.4.1	Rißeinbringung.....	54
6.4.2	Statische Versuche .....	56
6.4.3	Versuche mit zyklischer Last.....	56
6.5	Versuchsergebnisse .....	57
6.5.1	Versuchskraft .....	57
6.5.2	Rißwachstum.....	58
6.5.2.1	Probenform 1 .....	59
6.5.2.2	Probenform 2.....	59
6.5.2.3	Probenform 3.....	60
6.5.2.4	Fazit.....	60
<b>7</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse.....</b>	<b>62</b>
7.1	Eingangsdaten .....	62
7.1.1	Konstante Größen .....	62
7.1.1.1	Werkstoffkennwerte .....	62
7.1.1.2	Größen des analytischen Modells .....	63
7.1.1.3	Anfangsrißlänge der Versteifung .....	63
7.1.2	Variable Größen.....	65
7.2	Modellierung der Versteifung .....	66
7.3	Vergleich der Ergebnisse .....	67
7.3.1	Probenform 1.....	67
7.3.2	Probenform 2.....	69
7.3.3	Probenform 3.....	71
7.3.4	Fazit.....	72
7.4	Parametervariation .....	73
7.4.1	Anzahl der Lastübertragungspunkte .....	73
7.4.2	Position des ersten Lastübertragungspunktes .....	74
7.4.3	Durchmesser des Lastübertragungspunktes .....	75
7.4.4	Flächenträgheitsmoment .....	75
7.4.5	Anmerkungen.....	76
7.4.6	Fazit.....	76
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>78</b>
<b>9</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>80</b>

---

<b>10 Bilder.....</b>	<b>85</b>
<b>11 Tabellen.....</b>	<b>105</b>



# Bezeichnungen

## Formelzeichen

$a$	Rißlänge, geometrische Größe
$A$	Werkstoffkennwert
$A_1^0$	Linke Auflagerkraft des Balkens mit der Spannweite $l_1$
$B$	Geometrische Größe
$B$	Werkstoffkennwert
$C$	Integrationskonstante, Werkstoffkennwert, Abstand der Neutralachse der Versteifung zur Oberfläche einer Platte
$d$	Durchmesser
$E$	Elastizitätsmodul
$f$	Nietnachgiebigkeit
$F$	Kraft
$G$	Schubmodul
$G$	Energiefreisetzungsrates(Bruchmechanik)
$i$	Zählvariable
$I_1, I_2, I_3$	Variablen in der Spannungsintensitätsgleichung
$\text{Im } \{ \}$	Imaginärteil von $\{ \}$
$j$	Zählvariable
$k$	Werkstoffkennwert
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$K_c$	kritische Werte des Spannungsintensitätsfaktors, Bruchzähigkeit
$K_D$	Spannungsintensitätsfaktor der Versteifung durch Nietkräfte
$K_G$	Spannungsintensitätsfaktor der Versteifung durch eine angelegte Spannung
$K_{th}$	„K-threshold“, Schwellwert des Spannungsintensitätsfaktors $K$
$L$	Spannweite, Länge eines Feldes
$L_i^j$	Rechtes statisches Moment der Momentenfläche des Feldes mit der Spannweite $i$ , als statisch bestimmter Balken gerechnet, zufolge der äußeren Belastung um die Stütze $j$
$m$	Werkstoffkennwert
$M$	Moment
$M_{xi}^0$	Moment an der Stelle $x_i$
$n$	Anzahl der Felder eines Trägers
$N$	Anzahl der Niete, Anzahl der Belastungszyklen
$P$	Kraft
$r$	Polarkoordinate, Radius
$R$	Rißzähigkeit, Belastungsverhältnis
$R_i^j$	Rechtes statisches Moment der Momentenfläche des Feldes mit der Spannweite $i$ , als statisch bestimmter Balken gerechnet, zufolge der äußeren Belastung um die

---

	Stütze $j$
$\operatorname{Re} \{ \}$	Realteil von $\{ \}$
$S$	Oberflächenenergie
$t$	Dicke
$u, v, w$	kartesische Verschiebungskomponenten
$U_0$	elastische Energie der ungerissenen Scheibe
$U_a$	elastische Energie der gerissenen Scheibe
$V$	Verformung
$V_1$	Verformung durch angelegte Spannung
$V_2$	Verformung durch eine Nietkraft
$V_3$	Verformung durch auf die Rißoberfläche aufgebrachte Spannungsverteilung
$V_D$	Verformung der Versteifung durch Nietkräfte
$V_{DB}$	Verformung des Stringers infolge eines Biegemomentes
$V_G$	Verformung der Versteifung durch eine angelegte Spannung
$W$	äußere Arbeit
$W_S$	Breite des Stringers/der Versteifung
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$y$	Nietposition
$z = x + iy$	komplexe Variable
$\bar{z} = x - iy$	konjugiert komplexe Variable
$X_A, Y_A, Y_B$	Parameter in der Verschiebungsgleichung
$Z(z)$	komplexe Spannungsfunktion von Westergaard
$\bar{Z}(z)$	erstes Integral der komplexen Funktion $Z(z)$
$\underline{\underline{Z}}(z)$	zweites Integral der komplexen Funktion $Z(z)$

### Vektoren und Matrizen

$\underline{\underline{D}}$	Operatormatrix
$\underline{\underline{E}}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}^{-1}$	Nachgiebigkeitsmatrix
$\underline{u}$	Verschiebungsvektor
$\underline{X}$	Vektor der Volumenkraft
$\underline{\varepsilon}$	Dehnungsvektor
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor

**Griechische Symbole**

$\alpha$	Funktion in der Spannungsgleichung
$\beta$	Parameter zur Identifizierung der Rißkonfiguration
$\gamma$	Schubverzerrung
$\gamma_e$	spezifische elastische Verformungsarbeit
$\Delta$	Differenz/Änderung
$\varepsilon$	Dehnung
$\zeta$	Parameter in einer Korrekturgleichung
$\eta$	Parameter in einer Korrekturgleichung
$\theta$	Polarkoordinate, Winkel
$\kappa = 3 - 4\nu$	bei ebenem Verzerrungszustand (EVZ)
$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$	bei ebenem Spannungszustand (ESZ)
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi$	Abstand vom Ursprung zum Punkt auf der Rißoberfläche
$\Pi$	potentielle Energie
$\sigma$	Spannung
$\sigma_{xx}$	Normalspannungskomponente in x-Richtung ( $\hat{=} \sigma_x$ )
$\sigma_{yy}$	Normalspannungskomponente in y-Richtung ( $\hat{=} \sigma_y$ )
$\tau$	Schubspannung
$\tau_{xy}$	Schubspannungskomponente in y-Richtung, senkrecht auf der x-Ebene (wegen der Symmetrie $\hat{=} \tau_{yx}$ )
$\varphi$	Polarkoordinate, Winkel
$\phi(z)$	komplexe Spannungsfunktion
$\psi(z)$	komplexe Spannungsfunktion

**Mathematische Symbole**

$()'$	1. Ableitung von $()$
$()''$	2. Ableitung von $()$
$\partial ()$	Ableitung von $()$
$\partial^2 ()$	zweifache Ableitung von $()$
$()^T$	Transponierte von $()$



**Indices**

$( )_{0, 1, 2}$	Kennzeichnung der Anteile von $( )$
$-a_k$	linke Rißspitze des Risses $k$
$+a_k$	rechte Rißspitze des Risses $k$
$i$	beeinflußter Punkt, Laufvariable
$j$	ein mit einer Nietkraft belasteter Punkt
I, II, III	Rissöffnungsmodi Schälen, Schub und Scherung
$K$	Zählvariable zur Kennzeichnung des Risses
$P$	Hautfeld, Platte
$R$	Niet (engl. = rivet)
$S$	Stringer, Versteifung
$x$	bezogen auf die $x$ -Richtung
$y$	bezogen auf die $y$ -Richtung
$z$	bezogen auf die $z$ -Richtung

**Verwendete Abkürzungen**

1-D	eindimensional
2-D	zweidimensional
DMG	Dreimomentengleichung
DMS	Dehnungsmessstreifen
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite Elemente Methode
HPC	High Performance Cutting
LEBM	Linear elastische Bruchmechanik
SIF	Spannungsintensitätsfaktor
CTOD	Rissöffnungsverschiebung ( <i>Crack Tip Opening Displacement</i> )

**Anmerkung**

Im Gegensatz zur Literaturangabe [21] lautet die korrekte Übersetzung des Namens des Verfassers *Muschelischwili*. Für die Literaturangabe wurde der Name des Verfassers entsprechend dem des Bucheinbandes gewählt, im weiteren Text wird jedoch die korrekte Übersetzung des Namens verwendet.

Diese Arbeit ist unter Verwendung der Rechtschreibung, wie sie bis zum 1. August 1998 gültig war, geschrieben.

# 1 Einleitung und Zielsetzung

Seit der Entwicklung des Luftverkehrs und dem Einsatz immer größerer Luftfahrzeuge zum Transport von Personen und Fracht hat sich an der prinzipiellen Bauweise der Flugzeuge nichts geändert. Die einzelnen Bauteile sind überwiegend durch Niete miteinander verbunden. Mit dem Einsatz strahlgetriebener Flugzeuge mit Beginn der 50er Jahre und der größeren Flughöhe ergab sich, die Rumpfröhre mit Innendruck zu belasten.

Ein entscheidendes Ereignis, nämlich der Absturz zweier *Comet*-Flugzeuge innerhalb kurzer Zeit, führte dazu, daß man sich mit dem Problem der Ermüdung beschäftigen mußte. Daraus resultierten neue Zulassungsvorschriften und die Notwendigkeit, sich schon bei der Auslegung künftiger Flugzeuge mit dem *Damage-Tolerance-Verhalten* auseinanderzusetzen.

Man erkannte sehr schnell, daß das Betriebsfestigkeitsverhalten von Strukturen sehr stark von der Ribinitiation und dem Ribfortschritt bei schwingender Belastung abhängt und somit einen großen Einfluß auf die Lebensdauer eines Bauteils ausübt. Zum anderen ist die Betrachtung der Restfestigkeit sehr wichtig, um eine Aussage über die Sicherheit eines geschädigten Bauteils treffen zu können. Einhergehend kann man mit diesen Untersuchungen Aussagen dahingehend machen, ab wann eine Bauteilschädigung zu instabilem Ribwachstum führt, welches im Totalversagen der Struktur mündet.

Die herkömmliche, seit Jahrzehnten erprobte und bewährte differentielle Bauweise, d. h. verschiedene Teilstrukturen werden mittels mechanischer Befestigungselemente zu einem komplexen Bauteil zusammengesetzt, wirkte sich weitgehend positiv auf einen Schaden und damit auf das *Damage-Tolerance-Verhalten* aus. Auf der anderen Seite war es notwendig, Mindestwandstärken festzulegen, um eine tragfähige Verbindung zwischen den Bauteilen zu gewährleisten. Dies führt dazu, daß die Wandstärke alleine durch das Fügeverfahren und nicht aus Festigkeitsgründen bestimmt wird, so daß es zu einer ungenügenden Materialausnutzung und damit zu unnötig schweren Bauteilen kommt. Ein weiterer Grund, weshalb man differentielle Strukturen nutzte, war, daß mit den ersten Zerspannungsmaschinen nur relativ einfache, wenig komplexe Bauteile gefertigt werden konnten und die zu fertigenden minimalen Wandstärken von der Bauteilgeometrie abhingen.

Heute können eine Vielzahl von Strukturen im Flugzeugbau durch den Einsatz neuer, hochleistungsfähiger Fräsmaschinen als komplexe, integrale Strukturen hergestellt werden, bei dem z. B. das **High Performance Cutting (HPC)** als Fertigungsverfahren eingesetzt wird. Die Leistungsfähigkeit dieser Maschinen geht so weit, daß selbst Nietnachbildungen gefräßt werden können.

Die Verwendung integraler Strukturen läßt ein großes Einsparpotential hinsichtlich der Flugzeugmasse erahnen, wenn man bedenkt, daß beispielsweise für einen einzigen Airbus mehr als zwei Millionen Niete unterschiedlichster Typen benötigt werden [38]. Nimmt man einmal an, daß jeder Niet durchschnittlich 1,5 g wiegt, so beträgt alleine die Masse der Niete ca. drei Tonnen. Wenn man hypothetisch diese Masse um fünf Prozent reduzieren könnte und das Vergrößerungsgesetz berück-

sichtigt, ist es nicht verwunderlich, daß nicht nur Kosten für die Teilefertigung reduziert, sondern auch Masse eingespart werden kann, die das Luftfahrzeug noch ökonomischer machen. Jedoch gilt der Einsatz integraler Strukturen im Flugzeugbau hinsichtlich verschiedener Aspekte als problematisch, da sich unter anderem die Charakteristik der Rißausbreitung von der herkömmlichen Bauart unterscheidet.

Für eine Vielzahl von Rißkonfigurationen ist der Korrekturfaktor  $\beta$  bekannt, auch gibt es Lösungen, um versteifte Strukturen zu analysieren. Diese beziehen sich jedoch auf genietete Versteifungen, bei denen die Exzentrizität infolge der einseitig befestigten Versteifungselemente vernachlässigt wird. Dieses Vorgehen ist in Kapitel 3 ausführlich dargestellt. Für integral versteifte Strukturen ist das Rißfortschritts- und Restfestigkeitsverhalten aus Experimenten bekannt, mit ingenieurtechnischen Möglichkeiten, ohne Verwendung der Methoden der Finiten Elemente (FEM), ist dieses jedoch nicht vorherzusagen.

In dieser Arbeit soll nun eine Möglichkeit aufgezeigt werden, mit der die Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) integraler Strukturen unter Berücksichtigung von Exzentrizitäten berechnet werden können. Mit Hilfe dieser SIF'en kann dann unter Verwendung der bekannten Rißfortschrittsgesetze der Rißfortschritt berechnet werden, um so eine Aussage über das Rißwachstum und die Restfestigkeit zu erhalten. Diese Aussagen sollen helfen, Integralstrukturen hinsichtlich ihres *Damage-Tolerance-Verhaltens* schon während des Flugzeugentwurfes besser zu beurteilen, um nicht erst durch die Ergebnisse teurer und langwieriger Bauteilversuche diesem Problem begegnen zu können.

## 2 Stand der Forschung

### 2.1 Lineare Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie kurz dargestellt. Auf eine Herleitung der Gleichungen an dieser Stelle soll verzichtet werden, da sie in einschlägiger Literatur, wie z.B. in Timoshenko [37] und Kossira [19], nachgeschlagen werden können. Weiterhin wird die Volumenkraft  $\underline{X}$  vernachlässigt und es werden die Verhältnisse im 2-D-Fall aufgezeigt. Zum besseren Verständnis werden noch einmal die Voraussetzungen und Annahmen dargestellt, auf denen die Theorie beruht.

Die lineare Elastizitätstheorie beruht auf zwei Voraussetzungen:

- Die Verschiebungskomponenten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sind klein gegenüber allen Abmessungen des betrachteten Körpers.
- Die Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind sehr viel kleiner als 1, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll 1; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$$

Mit diesen Bedingungen ergeben sich weiter folgende zulässige Annahmen:

- Das körperfeste Koordinatensystem gilt auch unter Last als unverändert.
- Belastungs- und Verformungsgrößen dürfen nach dem Superpositionsprinzip aufgespalten oder überlagert werden.
- Randbedingungen und Gleichgewichtsbedingungen können am unverformten Körper angesetzt bzw. aufgestellt werden.

#### 2.1.1 Grundgleichungen

In der linearen Elastizitätstheorie existieren drei miteinander verbundene Gleichungsgruppen, die sich wie folgt gliedern:

- Gleichgewichtsbedingung
- Kinematische Beziehungen (Verzerrungs-Verschiebungsbedingung)
- Stoffgesetz

Für die Indizierung der Spannungen und Verzerrungen in diesem Kapitel soll folgende Konvention gelten:

- Der erste Index bezeichnet die Ebene.
- Der zweite Index kennzeichnet die Richtung der Spannungskomponente.

### **Gleichgewichtsbedingung**

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Volumenelement mit den Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Da nur der 2-D-Fall betrachtet werden soll, die x-y-Ebene, wird die dritte Dimension als konstante Dicke  $dz$  angenommen, die sich aus den Gleichungen herauskürzt.

Unter Vernachlässigung der Volumenkräfte ergibt sich das Kräftegleichgewicht in x-Richtung zu:

$$\sum F_x = 0 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2-1)$$

Analog dazu ergibt sich für die y-Richtung:

$$\sum F_y = 0 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (2-2)$$

Aus dem Momentengleichgewicht und unter der Annahme eines infinitesimal kleinen Elements ergibt sich somit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-3)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich unter Verwendung eines Spannungsvektors folgender Ausdruck

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{D^T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-4)$$

bzw.

$$\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{D^T}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2-5)$$

Dabei wird  $\underline{\underline{D^T}}$  als Operatormatrix bezeichnet.

### **Differentialgleichungen der Kinematik (Verzerrungs-Verschiebungsbedingung)**

Der Begriff der Verzerrung wird allgemein genutzt, wenn man von Dehnungen und Gleitungen spricht. Die zuvor dargestellten Spannungen rufen Verschiebungen und Verzerrungen hervor. Unter Vernachlässigung nichtlinearer Terme ergibt sich für die x-Richtung

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-6)$$

und für die y-Richtung

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-7)$$

Für die Schubverzerrung ergibt sich

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-8)$$

In Matrixschreibweise können die Beziehungen unter Verwendung von Verzerrungs- und Verschiebungsvektoren wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\underline{u}} \quad (2-9)$$

bzw.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad (2-10)$$

Aus den Gleichungen (2-9) und (2-10) ergibt sich, daß mehr Verzerrungskomponenten als Verschiebungskomponenten vorhanden sind. Um eine eindeutige Beziehung für die Verschiebungen zu erhalten, muß eine weitere Beziehung geschaffen werden, die man Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingung nennt. Für den hier betrachteten 2-D-Fall (x-y-Ebene) bleibt folgende Verträglichkeitsbeziehung erhalten:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (2-11)$$

Dieser ist durch eine ebene Dehnung mit  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  gekennzeichnet.

### **Stoffgesetz**

Den einfachsten Zusammenhang findet man im 1-D-Fall und ist allgemein als *Hookesches Gesetz* in der Technischen Mechanik bekannt und lautet:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2-12)$$

Entsprechendes muß auch im mehrdimensionalen Zustand gelten. Aus diesem lassen sich besondere Stoffgesetze herleiten, von denen der *ebene Spannungszustand* der wohl wichtigste ist. Auch hier gelten die dargestellten Zusammenhänge wieder für die x-y-Ebene.

*Ebener Spannungszustand (ESZ)*

Der ESZ ist als Sonderfall zu verstehen, bei dem die Abmessung in z-Richtung (Dickenrichtung) sehr viel kleiner ist als die Abmessungen in den anderen Richtungen. Daher kann angenommen werden, dass folgende Spannungskomponenten zu Null werden:

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2-13)$$

Für den ebenen Spannungszustand ergibt sich in Matrixschreibweise folgendes System:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (2-14)$$

Die inverse Beziehung lautet dann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E^{-1}=F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-15)$$

Das Gegenteil des *ebenen Spannungszustandes* ist der *ebene Dehnungszustand*, der im folgenden kurz dargestellt ist.

*Ebener Dehnungs- bzw. Verzerrungszustand (EVZ)*

Der EVZ ist ein Sonderfall, bei dem die folgenden Dehnungen/Verzerrungen zu Null angenommen werden können:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2-16)$$

Dies ist dann der Fall, wenn es sich um dicke Bauteile handelt, bei denen angenommen werden darf, daß eine Dehnungsbehinderung quer zur Ebene auftritt. In Matrixschreibweise läßt sich dann folgendes schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E^{-1}=F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-17)$$

Die inverse Beziehung lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \quad (2-18)$$

### 2.1.2 Lösungsmethoden

Eine geschlossene Lösung, die alle Gleichungsgruppen vollständig berücksichtigt, ist selten. Für ebene, zweidimensionale Probleme, auch *Scheibenproblem* genannt, ist speziell die Methode der Spannungsfunktionen sehr vorteilhaft. Es gibt mehrere Arten von Spannungsfunktionen (z. B. die *Airy'sche Spannungsfunktion*); hier soll im folgenden die komplexe Spannungsfunktion dargestellt werden, zum einen die allgemeine Funktion von *Kolosov* und *Muschelischwili*, zum anderen die spezielle, komplexe Spannungsfunktion nach *Westergaard*.

#### *Komplexe Spannungsfunktion von Kolosov und Muschelischwili*

Dieses Lösungsverfahren stellt nach Hahn [15] das wichtigste dar, um ebene Elastizitätsprobleme bei kompliziert berandeten Körpern zu lösen. Die Entwicklung stammt von *Kolosov* aus dem Jahre 1909 und wurde von *Muschelischwili* weiter ausgebaut und auf eine Vielzahl elastizitätstheoretischer Probleme angewendet, [21]. Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten werden dabei als Funktion der komplexen Variablen

$$z = x + iy = r e^{i\varphi} \quad (2-19)$$

bzw. der konjugiert komplexen Variablen

$$\bar{z} = x - iy = r e^{-i\varphi} \quad (2-20)$$

aufgefaßt. Es läßt sich zeigen, daß Lösungen der Grundgleichungen des ESZ und EVZ aus nur zwei komplexen Funktionen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$  konstruiert werden können. Der Zusammenhang von Spannung und Verschiebung mit ihren kartesischen Komponenten ist durch die *Kolosov'sche Formeln* gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)] \\ 2G(u + iv) &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \right\} \quad (2-21a)$$



mit

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ \left( \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \right) & \text{ESZ} \end{cases} \quad (2-21b)$$

### *Komplexe Spannungsfunktion von Westergaard*

Die komplexe Spannungsfunktion von *Westergaard* stellt einen Spezialfall der allgemeinen Lösung von *Kolosov* und *Muschelischwili* dar, die aus einer einzigen komplexen Spannungsfunktion  $\Psi$  besteht. Für diese gelten mehrere Einschränkungen. Insbesondere muß der betrachtete RiB auf der Achse  $y = 0$  liegen und das Problem muß symmetrisch zur x-Achse sein.

Diese spezielle Funktion  $\Psi$  lautet dann:

$$\Psi = \text{Re } \bar{\bar{Z}} + y \text{Im } \bar{Z} \quad (2-22)$$

Dabei hat die Funktion  $Z$  folgenden Aufbau:

$$Z(z) = \text{Re } Z + i \text{Im } Z \quad (2-23)$$

mit der komplexen Variablen

$$z = x + iy$$

Die Funktion  $Z(z)$  ist eine analytische Funktion der komplexen Variablen  $z$  und es muß gelten

$$\frac{d \bar{\bar{Z}}}{d z} = \bar{Z} \quad \frac{d \bar{Z}}{d z} = Z \quad \frac{d Z}{d z} = Z' \quad (2-24a), (2-24b), (2-24c)$$

Weiterhin muß sie den *Cauchy-Riemannsches*-Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial x} &= \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial y} = \text{Re } \frac{dZ}{dz} \\ \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial x} &= -\frac{\partial \text{Re } Z}{\partial y} = \text{Im } \frac{dZ}{dz} \end{aligned} \quad (2-25)$$

Dann ergeben sich für die Spannungen folgende Ausdrücke:

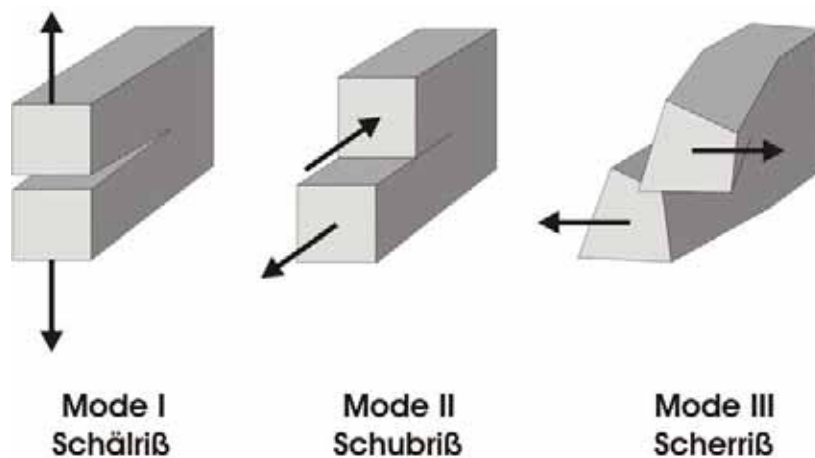
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \\ \sigma_y &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' \\ \tau_{xy} &= -y \text{Re } Z' \end{aligned} \quad (2-26)$$

Die Gleichungen (2-26) sind allgemeine Lösungen und liefern für jede Funktion  $Z(z)$  die Spannungen. Mit diesen Gleichungen können nun verschiedene Spezialfälle berechnet werden.

## 2.2 Bruchmechanische Ansätze

Die Bruchmechanik befaßt sich mit der Beschreibung des Verhaltens eines Risses. Aus makroskopischer Sicht wird dieser als Schnitt in einem Körper aufgefaßt. Seine gegenüberliegenden Berandungen sind die Ritoberflächen, im ebenen Fall auch Rißflanken oder Rißufer bezeichnet (Gross [14]). Der Riß endet an der Rißfront bzw. an der Rißspitze.

Hinsichtlich der Rißdeformation unterscheidet man drei verschiedene Rißöffnungsarten (Modi), wie sie in Abbildung 1 dargestellt sind.



**Abbildung 1:** Rißöffnungsmodi

Mode I, der Schälriß, kennzeichnet dabei eine symmetrische Rißöffnung und ist charakteristisch für Zugbelastungen. Mode II ist durch eine asymmetrische Trennung der Ritoberflächen gekennzeichnet, die auf einer Relativbewegung normal zur Rißfront beruht, d.h durch Schubbelastung entsteht. Daher wird dieser Riß auch als Schubriß bezeichnet. Der Scherriß, Mode III, ist durch eine Relativverschiebung aus der Körperebene heraus gekennzeichnet. Diese Art Riß tritt bei Schub- und Torsionsproblemen auf.

Für die Beschreibung der Rißausbreitung sind eine ganze Reihe von Modellen entwickelt worden, die ihren Ursprung in den Arbeiten von *Griffith* haben, der seine Bruchtheorie 1920 anhand eines Risses in Glas vorstellte. Seine Theorie basiert auf einem energetischen Ansatz, wobei der Grundgedanke folgender ist: Bei Rißvergrößerung wird elastische Energie freigesetzt, wegen der Schaffung neuer Oberflächen wird die elastische Oberflächenenergie (gespeicherte Energie an der Oberfläche) erhöht. Er unterscheidet dabei folgende Energiebeiträge, die bei der Rißvergrößerung zum Tragen kommen. Dieses sind die elastische Energie für die belastete, nicht rißbehaftete Scheibe  $U_0$ , die Änderung der elastischen Energie durch Einbringung des Risses  $U_a$ , die Oberflächenenergie  $S$  und die äußere Arbeit  $W$ . Die Energiegleichung (Gesamtenergie) lautet somit

$$\Pi = U_0 + U_a + S - W \quad (2-27)$$

Bei instabiler Rißvergrößerung nimmt die gesamte potentielle Energie ab, d.h. es wird mehr Form-  
 nderungsenergie frei, als zur Bildung neuer Oberflächen benötigt wird. Das Stabilitätskriterium  
 lautet dann

$$\frac{d\Pi}{da} \leq 0 \quad (2-28)$$

mit  $da$  als Änderung der Rißlänge.

Im Fall der festen Einspannung ist  $W = 0$  und die Ableitung der elastischen Energie  $U_\theta$  wird eben-  
 falls zu Null. Unter Verwendung von Gleichung (2-28), der Tatsache, daß  $U_a$  durch Einbringen des  
 Risses negativ sein muß und Umschreiben der Gleichung kann dann folgender Ausdruck gefunden  
 werden:

$$\frac{2\pi\sigma^2 a}{E} = 4\gamma_e \quad \text{bzw.} \quad \sigma\sqrt{\pi a} = \sqrt{2E\gamma_e} \quad (2-29a), (2-29b)$$

Schreibt man nun Gleichung (2-29b) in der Form

$$\frac{\sigma^2 \pi a}{E} = 2\gamma_e \quad (2-30)$$

und verwendet die von *Irwin* eingeführte Bezeichnung für die linke Seite der Gleichung (2-30) mit

$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (2-31)$$

als der Energiefreisetzungsrate  $G$ , so kann man festhalten, daß eine Aufweitung des Risses dann  
 auftritt, wenn

$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \geq \frac{\sigma_c^2 \pi a}{E} = G_c = R \quad (2-32)$$

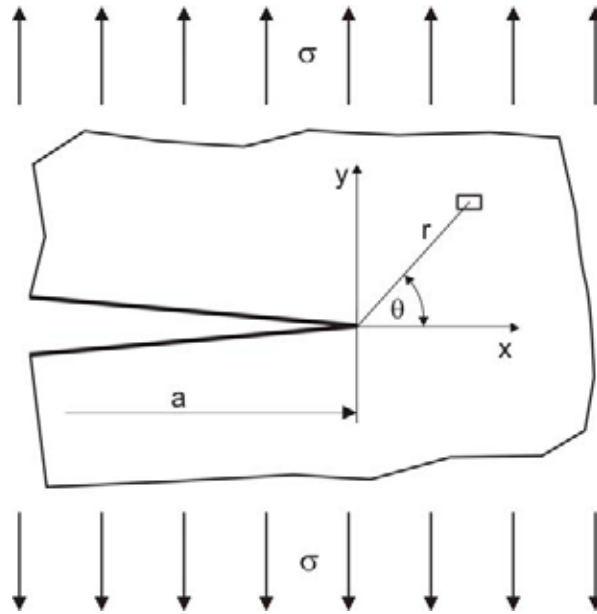
Dabei wird die rechte Seite von Gleichung (2-30) als Rißzähigkeit  $R = 2\gamma_e$  bezeichnet. Zunächst  
 kann angenommen werden, daß  $R$  bzw.  $G_c$  eine Funktion der Rißlänge  $a$  ist und in einem Experi-  
 ment leicht ermittelt werden kann. In der Wirklichkeit hat sich aber gezeigt, daß die Realität viel  
 komplizierter ist als hier gezeigt. Es bleibt aber festzuhalten, daß  $G$  ein wichtiger Parameter zur  
 Beurteilung eines Risses ist. Ein weiterer wichtiger Parameter ist der des Spannungsintensittsfak-  
 tors (SIF), auf den näher in Kapitel 2.3 eingegangen wird.

Wesentlich für die Rißausbreitung sind die Vorgänge an der Rißspitze. Mit Hilfe derer und unter  
 Betrachtung weiterer Daten lassen sich nach Hahn [15] folgende Aufgaben und Ziele der Tech-  
 nischen Bruchmechanik ableiten:

1. Materialien auswählen, die genügend sicher gegen Bruch sind.
2. Quantitative Berechnungen über das Bruchverhalten in bestimmten Situationen zu erstellen.
3. Die Lebensdauer von Bauteilen bei bestimmten Belastungen vorherzusagen.
4. Brauchbare Material- und Inspektionsvorschriften für verschieden mögliche Fälle zu erstel-  
 len.

### 2.3 Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren

Wir betrachten einen geraden Riß, der als zweidimensionales Problem eines Körpers aufgefaßt wird. Dabei soll uns nur ein Feld innerhalb einer kleinen Umgebung mit dem Radius  $r$  um die Rißspitze interessieren, wie es in Abbildung 2 dargestellt ist. Für den ESZ und den EVZ kann man das Rispitzenfeld unter Verwendung zweier komplexer Spannungsfunktionen  $\Phi(z)$  und  $\Psi(z)$  bestimmen.



**Abbildung 2:** Größen bei der Beschreibung der Verhältnisse an der Rißspitze

Für den Modus I sollen hier die Ergebnisse dargestellt werden, für die anderen Modi können die Ergebnisse der einschlägigen Literatur (Ewalds et. al. [81], Gross [81], Hahn [81], Kanninen et. al. [18]) entnommen werden. Für den Modus I läßt sich das Nahfeld in folgender Form darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ v &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

wobei sich  $\kappa$  aus Gleichung (2-21b) ergibt.

Damit sind die Spannungen und Verformungen in der Rispitzenumgebung eindeutig definiert. Die Amplitude des Rispitzenfeldes wird durch die Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) bestimmt. Diese Hängen von der Geometrie und Belastung ab und lassen sich aus den Spannungen und Deformationen ermitteln, sofern diese bekannt sind. Nach Gleichung (2-33) gilt

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(\theta = 0) \quad (2-35)$$

Die Spannungen sind singular von Typ  $r^{-1/2}$  und typisch für die Rißspitze, d.h sie wächst mit  $r \rightarrow 0$  unbeschränkt an. Für einen Zentralriß in einer unendlich großen Platte bei außen angelegter Spannung  $\sigma$  ergibt sich der SIF im Mode I zu

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-36)$$

Für den linear elastischen Fall ist gezeigt, daß sich die Energiefreisetzungsrates  $G$  zu

$$G = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (2-37)$$

ergibt. Mit Gleichung (2-36) gilt für den Zentralriß

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-38)$$

Dann ist folglich

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2-39)$$

Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für den hier gezeigten Fall, sondern hat für den ESZ allgemeine Gültigkeit. Für den EVZ gilt

$$G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu) \quad (2-40)$$

In Anlehnung an Gleichung (2-32) kann neben einem  $G_c$  auch eine  $K_c$  aufgestellt werden.

Man kann feststellen, daß sich für Risse unter einer außen angelegten Spannung  $\sigma$  im Mode I der SIF zu folgender allgemeiner Form ergibt:

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-41)$$

Der darin enthaltene Faktor  $\beta$  ist ein Korrekturwert, der von der Rikonfiguration abhängig ist. Für eine Vielzahl von Problemen ist der Korrekturfaktor bekannt. Eine sehr umfangreiche Sammlung ist in Tada et al. [83] und anderen Quellen zu finden.

Ein weiterer Parameter zur Beschreibung des Bruchverhaltens soll hier nur kurz angesprochen werden, nämlich das  $J$ -Integral. Sein Vorteil liegt darin begründet, daß er neben seiner Gültigkeit in der

LEBM auch dann angewendet werden kann, wenn inelastisches Materialverhalten vorliegt. In der linearen Bruchmechanik ist das  $J$ -Integral äquivalent zu  $G$  und  $K$  und bestimmt sich wie folgt:

$$\text{ESZ:} \quad J = G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2-42)$$

$$\text{EVZ:} \quad J = G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu) \quad (2-43)$$

## 2.4 Rißfortschritt

In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, wie man den Rißfortschritt berechnen kann, nachdem der SIF bekannt ist. Wird ein Bauteil statisch belastet, tritt so lange keine Rißausbreitung auf, so lange die Rißlänge bzw. die Belastung unterhalb der kritischen Größe liegt. Dagegen erkennt man bei zyklischer Belastung schon ein Rißwachstum (Rißfortschritt) weit unterhalb der kritischen statischen Last. Man spricht in diesem Fall von Ermüdungsrißwachstum (englisch = fatigue crack growth). Wie bereits in Kapitel 2.3 gezeigt, ist der SIF der Parameter, der einen Vergleich verschiedener Rißkonfigurationen erlaubt. In Anlehnung an Gleichung (2-41) kann man die „Schwingbreite“ bzw. den „Ausschlag“ des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K$  wie folgt definieren:

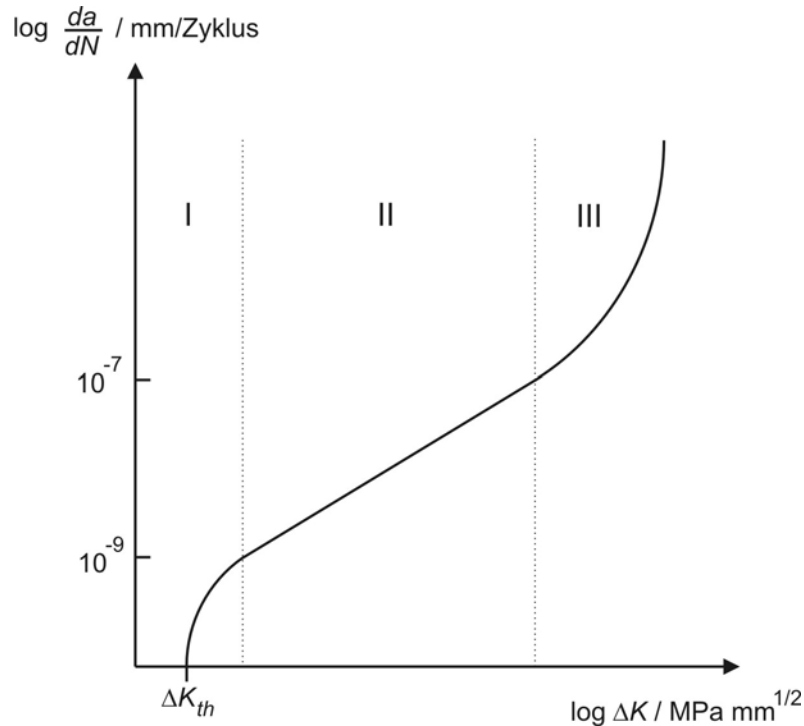
$$\Delta K = \beta \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-44)$$

Dabei findet man einen Zusammenhang zwischen dem inkrementellen Rißfortschritt  $da/dN$  und  $\Delta K$ , wie er in Abbildung 3 dargestellt ist. Die Kurve läßt sich in drei Bereiche unterteilen, die nach Ewalds et. al. [12] wie folgt charakterisiert werden können:

- I. In diesem Bereich kann nicht mehr mit kontinuumsmechanischen Mitteln gearbeitet werden. Der Riß ist so kurz, daß es einen starken Einfluß der Mikrostruktur, der Mittelspannung und der Umwelteinflüsse gibt.
- II. Dieser Bereich ist dadurch gekennzeichnet, daß der mikromechanische Einfluß zwar noch vorhanden, aber nicht mehr so stark ist, man gut mit mikromechanischen Modellen arbeiten kann und es einen großen Einfluß der Umwelt und Frequenzeinflüsse gibt.
- III. In diesem Bereich gibt es bereits Anzeichen von *dimples* und intergranulare Klaffungen. Auch hier ist der Einfluß von Mikrostruktur, Mittelspannung und ein Dickeneinfluß spürbar, die Umwelt spielt hier jedoch eine untergeordnete Rolle.

Unterhalb eines Schwellwertes  $\Delta K_{th}$  breitet sich der Riß nicht aus. Der zweite Bereich der Kurve kann bei doppelt logarithmischer Auftragung als Gerade angenommen werden, was einem gleichmäßigen Rißwachstum entspricht, der dritte Bereich stellt die Ermüdungsrißausbreitung dar. Der in Abbildung 3 dargestellte Kurvenverlauf ist neben den bereits genannten Einflußfaktoren auch noch

vom Belastungsverhältnis  $R$  abhängig und kann durch starke Unterschiede von einem Materiallos zum anderen Unterschiede aufweisen. Die gezeigten Zusammenhänge in Abbildung 3 lassen sich in verschiedenen Formen darstellen, wobei hier zwei wesentliche Rißfortschrittsgesetze, das *Paris-Gesetz* und die *Forman-Beziehung*, in den folgenden Kapiteln behandelt werden sollen.



**Abbildung 3:** Prinzipielle Darstellung der Rißfortschrittsrate  $da/dN - \Delta K$

#### 2.4.1 Rißfortschritt nach Paris

Der zweite Bereich in Abbildung 3 ist im doppelt logarithmischen Maßstab dadurch gekennzeichnet, daß er sich als „*Paris-Gerade*“ der Form

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (2-45)$$

darstellen läßt. Darin sind  $N$  die Anzahl der Belastungszyklen,  $C$  und  $m$  sind Werkstoffparameter. Diese beiden Parameter lassen sich relativ leicht bestimmen, wenn zwei Punkte auf der  $da/dN - \Delta K$ -Kurve bekannt sind. Dann ergibt sich für  $m$

$$m = \frac{\log\left(\frac{da}{dN}\right)_2 - \log\left(\frac{da}{dN}\right)_1}{\log(\Delta K)_2 - \log(\Delta K)_1} \quad (2-46)$$

und für  $C$

$$\log C = \log \left( \frac{da}{dN} \right)_1 - m \log(\Delta K)_1 \quad (2-47)$$

Für metallische Werkstoffe sind Werte für  $m \approx 2 \dots 4$  typisch. Es ist sofort sichtbar, daß mit der Gleichung (2-45) die Bereiche I und III nicht wiedergegeben werden können und der Einfluß von  $R$  nicht enthalten ist. Ein Vorteil ist, zumindest bei einem ungestörten Riß der Form  $\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi a}$ , daß sich die *Paris-Gleichung* relativ leicht integrieren läßt. Enthält die Gleichung zur Berechnung von  $\Delta K$  einen Korrekturwert  $\beta$ , so wird das Ganze ungleich komplizierter.

### 2.4.2 Rißfortschritt nach Forman

Das Rißausbreitungsgesetz nach *Forman* stellt eine Erweiterung des *Paris-Gesetzes* dar, das sich durch zwei wesentliche Punkte von diesem hervorhebt:

1. Eine Abhängigkeit von  $R$  ist vorhanden.
2. Der dritte Bereich wird wiedergegeben, wobei ein weiterer Parameter  $K_c$  eingeführt wird.

Das *Forman-Gesetz* ist nach [1] in dem Bereich von  $\Delta K_{th}$  bis  $(1 - R) \cdot K_f$  gültig, wobei sich der Wert für  $\Delta K_{th}$  wie folgt bestimmt:

$$\Delta K_{th} = A \cdot (1 - B \cdot R)^k \quad (2-48)$$

Darin sind  $A$ ,  $B$  und  $k$  Werkstoffparameter, die ebenfalls aus [1] entnommen werden können und  $R$  ist das Belastungsverhältnis. Der formelmäßige Zusammenhang des Rißfortschrittsgesetzes lautet:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C (\Delta K)^m}{(1 - R) K_c - \Delta K} \quad (2-49)$$

mit einem kritischen Wert  $K_c$  für den SIF, auch Bruchzähigkeit genannt, und  $R$  dem Belastungsverhältnis. Dieses Gesetz wird häufig in der Praxis angewendet, da es zwei zusätzliche, in der Praxis wichtige Parameter enthält.

Neben den beiden aufgezeigten Modellen existieren noch eine Reihe weiterer Gleichungen und Gleichungsgruppen, um die Rißausbreitung noch besser wiedergeben zu können. Diese zielen darauf ab, den Wert  $\Delta K_{th}$  mit zu berücksichtigen. Allen diesen Bemühungen ist eigen, daß die zu bestimmenden Parameter ansteigen und ebenfalls bestimmt werden müssen.

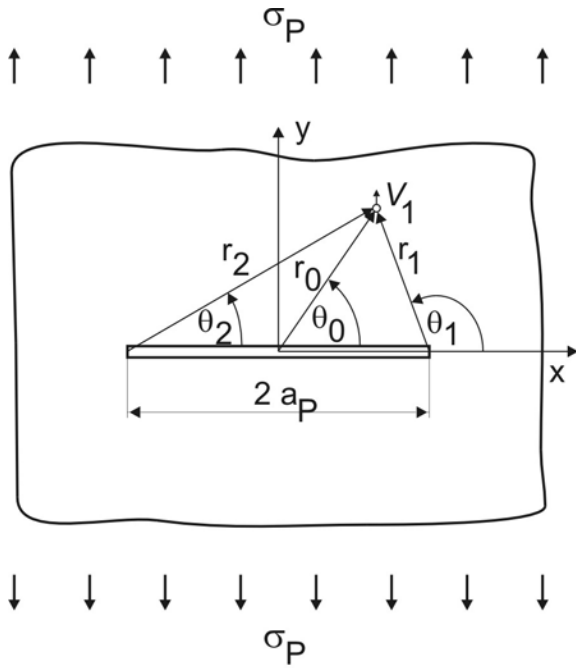


### 3 Versteifte Strukturen

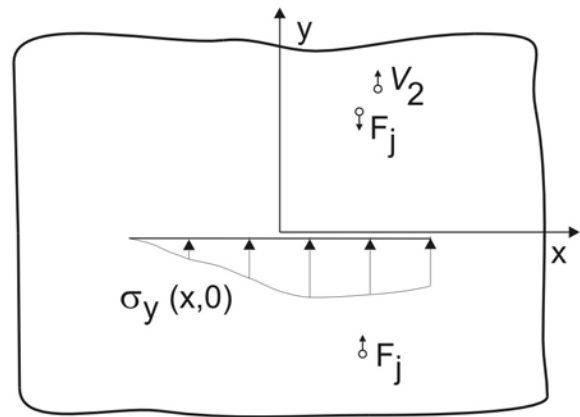
Im Flugzeugbau bzw. im Leichtbau bestehen die Strukturen aus einer dünnen Haut und Versteifungen. Die Versteifungen beeinflussen nicht nur das Beulverhalten, sondern haben auch Einfluß auf das *Damage Tolerance* Verhalten, d.h. das Verhalten bei einem aufgetretenen Schaden. Solche Versteifungen lassen sich mit Hilfe von zwei verschiedenen Bauweisen realisieren: die differentielle Bauweise (z.B. durch Nieten) oder die integrale Bauweise (z.B. durch Fräsen).

Die Zusammenhänge sind sehr komplex. Zur Lösung stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, wobei die Methode der Finiten Elemente eine davon ist. Eine weitere ergibt sich durch Nutzung halbanalytischer Methoden, Bloom et al. [5], Swift [33] bis [35] und Nishimura [22] bis [24], die alle auf den gleichen Grundlagen beruhen. Mit Hilfe der linearen Elastomechanik und unter Verwendung komplexer Spannungsfunktionen werden die Kräfte und Verschiebungen von Haut und Stringer ausgedrückt. Dabei muß ein Kräfte- und Verschiebungsgleichgewicht an den Orten der Niete sichergestellt sein. Diese Zusammenhänge können sehr komplex sein. Im folgenden soll ein Vorgehen zur Berechnung dargestellt werden, bei dem die Biegung der Struktur infolge der Stringer vernachlässigt wird, das den Ausführungen von Nishimura [22] bis [24] folgt. Formal können die Verschiebungen in Haut und Stringer getrennt voneinander behandelt werden, wobei durch Aufstellen des Gesamtgleichungssystems beide Strukturkomponenten miteinander verbunden werden.

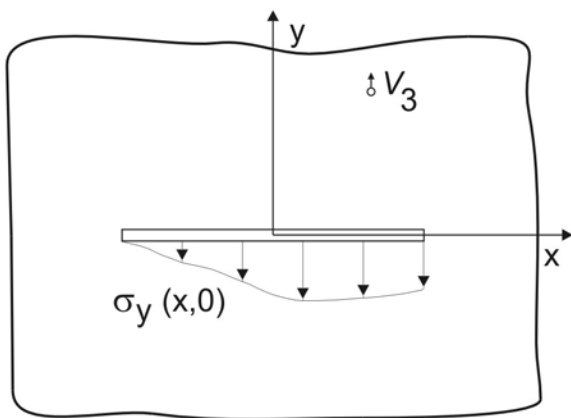
Das zu behandelnde Problem ist in Abbildung 4 dargestellt. Dabei handelt es sich um eine mit aufgenieteten Stringern versehene gerissene Platte, die unter einer außen angelegten Spannung belastet wird. Die Anzahl von Stringern und Nieten ist prinzipiell nicht begrenzt. Es wird angenommen, dass sich die Risse in der Haut und dem Stringer in einer Linie befinden, Exzentrizitäten durch die Stringer (symmetrisches Problem) sowie Reibung zwischen Haut und Stringer vernachlässigt werden und die Nietlöcher keine Verringerung der Querschnittsfläche im Stringer bewirken.



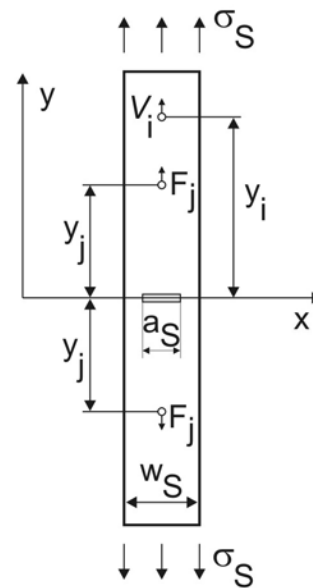
a. Verschiebung  $V_1$  in der rißbehafteten Scheibe unter einer angelegten Spannung  $\sigma_P$



b. Verschiebung  $V_2$  in der nicht rißbehafteten Scheibe durch die Nietlasten  $F_j$



c. Verschiebung  $V_3$  infolge der auf dem Rißufer angebrachten Spannung  $\sigma_y(x,0)$



d. Verschiebung  $V_i$  an den Nieten in den Stringern (Index S) auf Grund der eingeleiteten Spannung  $\sigma_S$  und der Nietkräfte  $F_j$

**Abbildung 4:** Grundmodell nach Nishimura

### 3.1 Verschiebung der Haut

Nach Abbildung 4a bis c verschieben sich die Orte (Punkte) der Niete in der Haut entsprechend den drei Komponenten  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$ . Diese Aufteilung ergibt sich auf Grund analytischer Berechnungen, wobei sich die Verschiebungskomponenten wie folgt definieren:

- Die Verschiebung  $V_1$  in der gerissenen Haut resultiert aus der angelegten Spannung  $\sigma_P$ .
- Die Verschiebung  $V_2$  in der ungerissenen Haut resultiert aus den eingeleiteten Nietlasten.
- Die Verschiebung  $V_3$  resultiert aus der auf dem Rissufer angelegten Spannungsverteilung, die sich aus den Nietlasten der ungerissenen Haut ergibt (*Buecknersches Prinzip*).

#### **Verschiebung $V_1$**

Für den Fall einer unendlich breiten, rißbehafteten Scheibe unter außen angelegter Spannung  $\sigma_P$  ergibt sich die komplexe Westergaardsche Spannungsfunktion zu:

$$Z = \frac{\sigma_P \cdot z}{\sqrt{z^2 \cdot a_P^2}} \quad (3-1)$$

wobei  $z$  die komplexe Variable und  $a_P$  der Riß in der Scheibe ist. Die Verschiebung  $v_l$  ergibt sich zu

$$V_1(x, y) = \frac{\sigma_P}{E_P} \cdot \left\{ 2 \sqrt{r_1 r_2} \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{(1 + \nu_P) y \cdot r_0 \cdot \cos\left(\theta_0 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}{\sqrt{r_1 r_2}} + \nu_P y \right\} \quad (3-2)$$

Darin ist  $E_P$  der Elastizitätsmodul und  $\nu_P$  die Querkontraktion der Scheibe. Die geometrischen Beziehungen für  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  bzw.  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  lauten:

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r_1 = \sqrt{(x - a_P)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x + a_P)^2 + y^2} \quad (3-3a), (3-3b), (3-3c)$$

bzw.

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x - a_P}\right) \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{y}{x + a_P}\right) \quad (3-4a), (3-4b), (3-4c)$$

#### **Verschiebung $V_2$**

Die Spannungsverteilung  $\sigma_Y$  in einer unendlichen Scheibe auf Grund einer Einzellast  $F$  ergibt sich zu

$$\sigma_Y = \frac{F(1 + \nu_P)}{4\pi t_P} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \left[ \frac{3 + \nu_P}{1 + \nu_P} - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (3-5)$$

mit der sich daraus ergebenden Verschiebung  $V_Y$

$$V_Y = \frac{F(1+\nu_P)}{4\pi t_P E_P} \cdot \left[ \frac{3-\nu_P}{2} \cdot \ln(x^2 - y^2) + \frac{(1-\nu_P)x^2}{(x^2 + y^2)} \right] + C \quad (3-6)$$

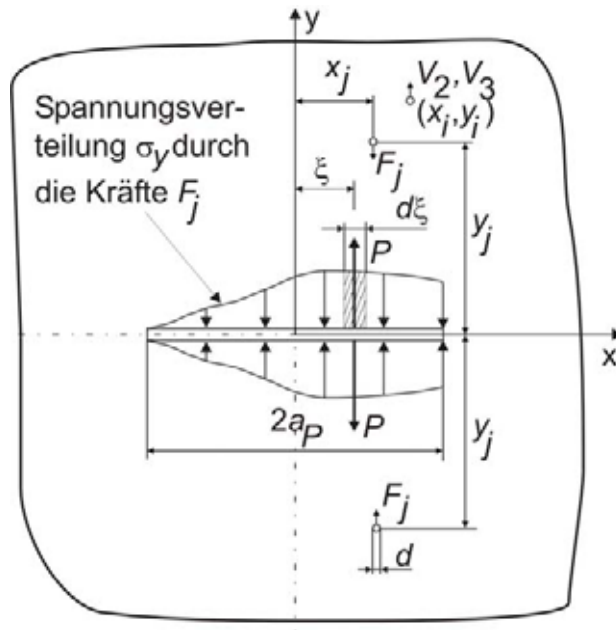
Darin sind  $C$  die Integrationskonstante,  $x$  und  $y$  die Abstände vom Lastangriffspunkt,  $t_P$  die Scheibendicke und  $\nu_P$  die Querkontraktionszahl.

Der Nachteil der Lösung ist, dass in Gleichung (3-6) nahe der Lasteinleitung ( $x = y = 0$ ) singularär wird. Zur Vermeidung dieser Singularität kann die Nietkraft gleichmäßig über den Nietdurchmesser  $d$  verteilt angenommen werden. Dies wird durch Substitution von  $x$  durch  $(x-\delta)$  in Gleichung (3-6) und Integration nach  $\delta$  von  $-d/2$  bis  $d/2$  erreicht. Daraus ergibt sich dann für ein Kräftepaar  $F_j$ , wie es in Abbildung 5 zu sehen ist, die Verschiebung  $V_2$  als folgender Ausdruck:

$$V_2(x_i, y_i, x_j, y_j) = \frac{(1+\nu_P)(3-\nu_P)}{16\pi t_P E_P} F_j \left\{ \begin{aligned} & \left( (X_A + 1) \ln \left[ \frac{(X_A + 1)^2 + Y_A^2}{(X_A + 1)^2 + Y_B^2} \right] - (X_A - 1) \ln \left[ \frac{(X_A - 1)^2 + Y_A^2}{(X_A - 1)^2 + Y_B^2} \right] + \right. \\ & \left. + 4 \frac{1-\nu_P}{3-\nu_P} \left[ Y_A \arctan \left( \frac{2Y_A}{X_A^2 + Y_A^2 - 1} \right) - Y_B \arctan \left( \frac{2Y_B}{X_A^2 + Y_B^2 - 1} \right) \right] \right\} \quad (3-7)$$

mit  $X_A = \frac{2(x_i - x_j)}{d}$ ,  $Y_A = \frac{2(y_i - y_j)}{d}$ ,  $Y_B = \frac{2(y_i + y_j)}{d}$  (3-8a), (3-8b), (3-8c)

Die Indizes  $i$  und  $j$  stehen dabei für den beeinflussten Punkt, d.h für den Punkt, für den die Verschiebung berechnet werden soll, bzw. die Koordinate des Nietes.



**Abbildung 5:** Verhältnisse an einem RiB durch ein Kräftepaar  $F_j$

**Verschiebung  $V_3$** 

Ebenso erhält man durch Überführung des Ursprungs und Superposition der Spannung, die man aus Gleichung (3-5) erhält, die Spannungsverteilung entlang der  $x$ -Achse einer ungerissenen Scheibe durch ein Kräftepaar  $F_j$  am Punkt  $(x_j, \pm y_j)$ , siehe Abbildung 5, zu

$$\sigma_y(x,0) = -F_j \frac{(1+\nu_P) y_j \alpha(x_j, y_j, x)}{2 \pi t_P} \quad (3-9)$$

wobei sich  $\alpha(x_j, y_j, x)$  wie folgt berechnet:

$$\alpha(x_j, y_j, x) = \frac{(3+\nu_P)}{(1+\nu_P) \left[ (x-x_j)^2 + y_j^2 \right]} - \frac{2(x-x_j)^2}{\left[ (x-x_j)^2 + y_j^2 \right]^2} \quad (3-10)$$

Die Verschiebung  $V_3$  erhält man nun, wenn man eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Spannungsverteilung auf die Rißoberfläche aufprägt, um die Spannungsverteilung  $\sigma_Y(x, 0)$ , die aus dem Kräftepaar resultiert, zu kompensieren. Die komplexe Spannungsfunktion  $Z$  für den Fall der gerissenen Scheibe durch ein Kräftepaar  $P$  lautet

$$Z = \frac{P}{t_P \pi (z - \xi)} \cdot \sqrt{\frac{a_P^2 - \xi^2}{z^2 - a_P^2}} \quad (3-11)$$

Durch Substitution von  $P$  durch  $\sigma_Y(x, 0) t_P d\xi$  und Integration nach  $\xi$  über die Rißlänge erhält man die Verschiebung  $V_3$  zu

$$V_3(x_i, y_i, x_j, y_j) = -\frac{(1+\nu_P) y_j F_j}{2 \pi^2 t_P E_P} \cdot \int_{-a_P}^{a_P} \alpha(x_j, y_j, \xi) \cdot \varepsilon(x_i, y_i, \xi) d\xi \quad (3-12)$$

Die Funktion  $\varepsilon(x_i, y_i, \xi)$  berechnet sich wie folgt:

$$\varepsilon(x_i, y_i, \xi) = 2 \ln \left[ \frac{(a_P + \xi) r_1 + (a_P - \xi) r_2}{2 a_P r_0} + \frac{\sqrt{(a_P^2 - \xi^2)(a_P^2 - x_i^2 - y_i^2 + r_1 r_2)}}{a_P r_0} \right] - (1+\nu_P) y_i \sqrt{\frac{a_P^2 - \xi^2}{r_1 r_2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_0}{2}\right)}{r_0} \quad (3-13)$$

mit den geometrischen Beziehungen

$$r_0 = \sqrt{(x_i - \xi)^2 + y_i^2} \quad r_1 = \sqrt{(x_i - a_P)^2 + y_i^2} \quad r_2 = \sqrt{(x_i + a_P)^2 + y_i^2} \quad (3-14a), (3-14b), (3-14c)$$

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i - \xi}\right) \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i - a_P}\right) \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i + a_P}\right) \quad (3-15a), (3-15b), (3-15c)$$

Die Verschiebung der Scheibe durch eine angelegte Spannung und aufgebrachtten Nietkräften ergibt sich zu

$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 \quad (3-16)$$

### 3.2 Verschiebung des Stringers

Für die Berechnung der Verschiebung im Stringer ist es notwendig, verschiedene Fälle des Stringerzustandes zu unterscheiden, die wie folgt definiert werden können:

- Stringer intakt
- Stringer gebrochen
- Stringer angerissen

Dabei haben die Stringer die Form von Streifen, eine Art Doppler auf der Haut. Zur Berechnung der Verschiebung sind zwei Anteile zu berücksichtigen, zum einen die Verschiebung  $V_{Gi}$  durch die angelegte Spannung, zum anderen durch die Verschiebung  $V_{Di}$  durch die Nietkräfte. Die geometrischen Verhältnisse am Stringer sind in Abbildung 4d dargestellt.

#### **Intakter Stringer**

Für den intakten Stringer berechnet sich die Verschiebung durch die angelegte Spannung zu

$$V_{Gi} = \frac{\sigma_S y_i}{E_S} \quad (3-17)$$

und durch die Nietkräfte zu

$$V_{Di} = \frac{1}{W_S t_S E_S} \cdot \left( \sum_{j=1}^i F_j y_j + y_i \cdot \sum_{j=i+1}^N F_j \right) \quad (3-18)$$

mit  $W_S$ ,  $t_S$  und  $E_S$  die Breite, Dicke und der E-Modul des Stringers,  $y$  ist der Abstand von der Reißoberfläche und  $N$  ist die Anzahl der Nieten pro Stringer.

#### **Gebrochener Stringer**

Ähnlich wie beim intakten Stringer erhält man die Verschiebung für den gebrochenen Stringer, wobei sich die Verschiebung infolge der Spannung zu

$$V_{Gi} = 0 \quad (3-19)$$

ergibt, für die Verschiebung aus den Nietkräften erhält man

$$V_{Di} = \frac{1}{W_S t_S E_S} \cdot \left( [y_N - y_i] \sum_{j=1}^{i-1} F_j + \sum_{j=i}^N F_j (y_N - y_i) \right) \quad (3-20)$$

wobei die Verschiebung von einem entfernt liegenden Punkt  $y_N$  aus bestimmt wird.

### Angerissener Stringer

Die Verschiebung erhält man aus der Summation der Verschiebung des intakten Stringers und einem Inkrement  $\Delta V$ . Somit lässt sich die aus der Spannung resultierende Verschiebung wie folgt ausdrücken:

$$V_{Gi} = V_{Gi}^{INTAKT} + \Delta V_{Gi} \quad (3-21)$$

wobei sich das Inkrement durch Energiebetrachtung nach [36] wie folgt bestimmt:

$$\Delta V_{Gi} = \frac{\beta t_S}{E_S} \int_0^{a_s} \frac{K_{Di}}{F_i} \cdot K_G da \quad (3-22)$$

Für die Verschiebung infolge der Nietkräfte kann man wie folgt schreiben:

$$V_{Di} = V_{Di}^{INTAKT} + \sum_{j=1}^N V_{Gi,j} \quad (3-23)$$

mit

$$\Delta V_{Di,j} = \frac{\beta t_S}{E_S F_j} \int_0^{a_s} \left( \frac{K_{Di}}{F_i} \right) \cdot \left( \frac{K_{Dj}}{F_j} \right) da \quad (3-24)$$

In Gleichung (3-24) verkörpern  $K_G$  und  $K_D$  die Spannungsintensitätsfaktoren, die sich aus der angelegten Spannung bzw. den Nietkräften ergeben. Für den in Abbildung 4 dargestellten Fall nimmt  $\beta$  den Wert 2 an, die Spannungsintensitätsfaktoren bestimmen sich zu

$$K_G = \sigma_S \sqrt{\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi \zeta}{2}\right)}} \cdot (1 - 0,025\zeta^2 + 0,06\zeta^4) \quad (3-25)$$

und

$$K_D = \frac{F}{t_S \sqrt{W_S}} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 \quad (3-26)$$

Die Faktoren  $I_1$ ,  $I_2$ , und  $I_3$  bestimmen sich wie folgt:

$$I_1 = 1 + \left\{ 0,297 + 0,115 \left[ 1 - \frac{\sin(\pi \zeta)}{\cosh\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)} \right] \right\} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi \zeta}{2}\right) \right] \quad (3-27)$$

$$I_2 = 1 + \frac{1 + \nu_S}{2} \cdot \frac{\frac{\pi \eta}{2} \tanh\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)}{\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi \zeta}{2}\right)}\right)^2} - 1 \quad (3-28)$$

$$I_3 = \sqrt{\frac{\tan\left(\frac{\pi \zeta}{2}\right)}{\left[1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi \zeta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi \eta}{2}\right)}\right]^2}} \quad (3-29)$$

Für die Variablen  $\zeta$  und  $\eta$  ergeben sich zu

$$\zeta = \frac{2a}{W_S} \quad \eta = \frac{2y}{W_S} \quad (3-30), (3-31)$$

### 3.3 Kompatibilitätsbeziehung

In den beiden vorherigen Kapiteln sind die Verschiebungen des Hautfeldes und der Stringer aufgezeigt worden. Die Verbindung beider Teilstrukturen erfolgt über Niete, die ebenfalls eine Verschiebung  $V_R$  erfahren. Diese resultiert aus den Nietreaktionskräften und ist wie folgt definiert:

$$V_R = F \cdot f \quad (3-32)$$

mit der Nachgiebigkeit  $f$  des Nietes.

Für den Fall des intakten bzw. angerissenen Stringers ergibt sich als Kompatibilitätsbedingung, daß die Verschiebungen

$$[V_1 + V_2 + V_3]_i = V_G + V_D + V_R \quad (3-33)$$

sind. Für den gebrochenen Stringer ergibt sich analog

$$[V_1 + V_2 + V_3]_i - [V_1 + V_2 + V_3]_N = V_G + V_D + V_R \quad (3-34)$$

mit  $N$  der Anzahl der durchtrennten Niete.



Unter der Annahme einer starren Verbindung zwischen Haut und Stringer wird die Verschiebung  $V_R = 0$ . Sortiert man anschließend die Verschiebungen  $V_I$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_G$  und  $V_D$  nach ihren Abhängigkeiten von  $\sigma_P$ ,  $\sigma_S$  und  $F_j$  und setzt voraus, daß die Spannungen  $\sigma_P$  und  $\sigma_S$  vorgegeben sind, kann nun ein Gleichungssystem aufgestellt werden, bei dem die Nietkräfte  $F_j$  als primäre Unbekannte gelten und das folgende Form hat, [17]:

$$\begin{bmatrix} (V_{21} + V_{31} - V_{D1})_1 & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj})_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (V_{21} + V_{31} - V_{D1})_i & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj})_i & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (V_{21} + V_{31} - V_{D1})_N & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj})_N & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{G1} - V_{11} \\ \vdots \\ V_{Gi} - V_{1i} \\ \vdots \\ V_{GN} - V_{1N} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

### 3.4 Spannungsintensitätsfaktoren

Der Spannungsintensitätsfaktor an der Spitze des Risses in der Haut  $K_P$  berechnet sich durch Superposition der Spannungsintensitäten auf Grund der angelegten Spannung  $\sigma_P$  und der Nietkräfte zu

$$K_P = \sigma_P \sqrt{\pi a_P} - \sum_{j=1}^N \frac{F_j}{t_P \sqrt{\pi a_P}} \cdot \left[ \frac{I_1 + y_j(1 + \nu_P)I_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} \right] \quad (3-36)$$

mit

$$I_1 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \quad (3-37)$$

$$I_2 = \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{r_2}{r_1} \cdot \cos\left(\frac{3\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{a_P}{r_1} \cdot \cos\left(\frac{3\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (3-38)$$

In gleicher Art erhält man den Spannungsintensitätsfaktor für den Stringer  $K_S$  auf Grund der angelegten Spannung  $\sigma_S$  und der Nietkräfte  $F_j$  zu

$$K_S = K_G + \sum_{j=1}^N K_{Dj} \quad (3-39)$$

Die Komponenten  $K_G$  und  $K_{Dj}$  lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (3-25) bis (3-31) berechnen.

Abschließend soll noch einmal erwähnt werden, daß das hier vorgestellte Verfahren von Nishimura für den von ihm betrachteten Fall gilt und einen Biegeeinfluß der Stringer nicht berücksichtigt. Im nächsten Kapitel soll die Berechnungsmethode weiterentwickelt werden, um sie für integrale Strukturen unter Berücksichtigung der Biegung zu nutzen.

## 4 Integrale Strukturen unter Berücksichtigung des Biegemomentes

Die im vorherigen Kapitel dargestellten Zusammenhänge beziehen sich auf eine symmetrische Struktur, d.h. es existiert keine Biegung auf Grund von Exzentrizitäten. In der Regel findet man jedoch Strukturen, die unsymmetrisch aufgebaut sind und sich unter einer Belastung biegen. Eine solch typische Struktur ist eine Haut-Stringer-Verbindung im Flugzeugbau.

In diesem Kapitel sollen nun die theoretischen Grundlagen aufgezeigt werden, um die Biegung einer solchen Struktur zu berücksichtigen. Dabei muß auch hier wieder unterschieden werden, ob die Versteifung bzw. der Stringer intakt bzw. gebrochen ist.

### 4.1 Verformung der Versteifung durch Biegung

In diesem Kapitel sollen nun die Verschiebungsanteile für die intakte, gebrochene und angerisse Versteifung unter dem Einfluß einer Biegung auf der Basis *Nishimuras* hergeleitet werden. Für die ersten beiden Fälle soll dies mit Hilfe der *Dreimomentengleichung* (DMG) erfolgen. Der Gedanke dazu stammt von Swift [34], die Grundlagen und die Vorgehensweise sind Bollinger [7] entnommen. Die Gleichungen sollen dabei mit Bezug auf die späteren Verifikationsversuche dargestellt werden.

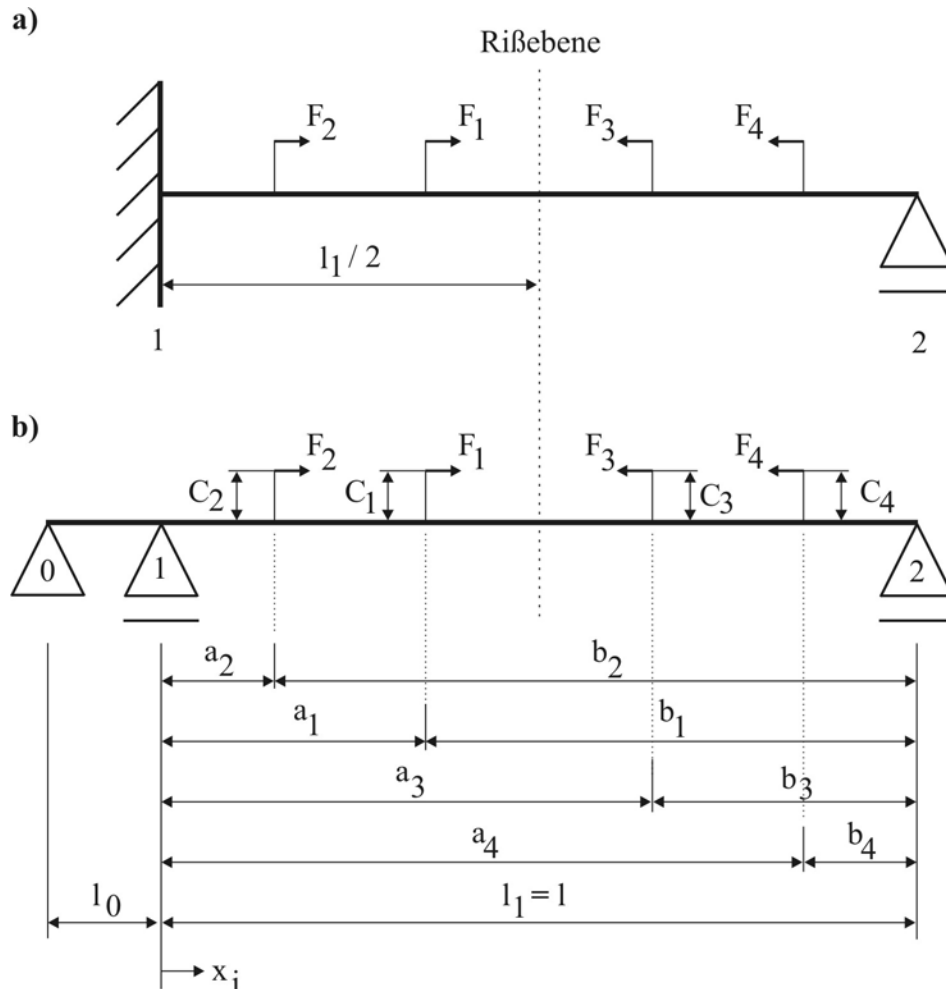
#### 4.1.1 Verformung einer intakten Versteifung

In diesem Kapitel sollen die Gleichungen hergeleitet werden, mit denen die Biegung einer unter Zugbelastung stehenden Haut-Stringer-Verbindung berücksichtigt werden können. Dazu stelle man sich ein in Abbildung 6a dargestelltes System vor. Eine mit einer Versteifung versehene Haut ist an einem Ende fest eingespannt, am anderen ist sie momentenfrei gelagert, was die Zugseite im Versuch widerspiegelt. Die Struktur ist in diesem Fall beispielhaft mit vier Momenten belastet, die sich aus den Kräften  $F$  und den Hebelarmen  $C$  zusammensetzen. Die Hebelarme  $C$  können wie folgt interpretiert werden: Sie stellen den Abstand der Kräfte von der Haut zur Neutralachse, d.h. zum Massenschwerpunkt des Stringers dar.

In Abbildung 6b ist das mathematische Modell für die Berechnung gezeigt. Zur Lösung der in Abbildung 6 gezeigten Struktur wird die *Dreimomentengleichung* (DMG) benutzt. Dazu muß das System um zwei Felder  $l_0$  und  $l_2$  erweitert werden. Die Anzahl der Dreimomentengleichungen zur Lösung des Systems bestimmt sich zu:

$$DMG = n - 1 \quad (4-1)$$

mit  $n$  der Anzahl der Felder.



**Abbildung 6:** System einer intakten Struktur: a) reales System, links fest eingespannt, rechts momentenfreies Lager; b) mathematisches Modell zur Beschreibung

In diesem Fall ist  $n = 2$ , so daß das System mit einer Dreimomentengleichung gelöst werden kann. Die einzelnen Felder sind durch ihre Spannweiten  $l_0$  und  $l_1$ , die Lagerpunkte mit 0, 1 und 2 gekennzeichnet, wobei die Lager 0 und 2 momentenfrei sind. Die Dreimomentengleichung lautet dann wie folgt:

$$M_0 \cdot l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 \cdot l_1 = -6 \left( \frac{L_1^0}{l_0} + \frac{R_2^2}{l_1} \right) \quad (4-2)$$

Darin sind  $M_i$  die Momente an den Lagerpunkten  $i = 0, 1$  und  $2$ ,

$R_i^j$  bzw.  $L_i^j$  das rechte bzw. linke statische Moment der Momentenfläche des Feldes mit der Spannweite  $i$ , als statisch bestimmter Balken gerechnet, zufolge der äußeren Belastung um die Stütze  $j$ .

Mit den Beziehungen, die sich leicht aus der Anschauung ergeben,

$$l_0 = 0; M_0 = M_2 = 0; L_1^0 = 0 \quad (4-3)$$

läßt sich die Dreimomentengleichung folgendermaßen vereinfachen:

$$2 M_1 l = -6 \frac{R_2^2}{l} \quad (4-4)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (4-4), nämlich der Lastenwert für den Balken mit der Spannweite  $l$ , läßt sich wie folgt bestimmen:

$$6 \frac{R_2^2}{l} = \frac{F_1 C}{l} (3b_1^2 - l^2) + \frac{F_2 C}{l} (3b_2^2 - l^2) + \frac{F_3 C}{l} (l^2 - 3b_3^2) + \frac{F_4 C}{l} (l^2 - 3b_4^2) \quad (4-5)$$

Die DMG kann nun unter Verwendung der Gleichung (4-5) wie folgt geschrieben werden:

$$2 M_1 l = - \frac{C}{l} \sum_{j=1}^2 F_j (3b_j^2 - l^2) - \frac{C}{l} \sum_{j=3}^4 F_j (l^2 - 3b_j^2) \quad (4-6)$$

Auf Grund der Tatsache, daß es sich in Abbildung 6 um eine symmetrische Struktur handelt, lassen sich folgende Beziehungen ableiten:

$$b_{1,2} = \frac{l}{2} + y_j \Rightarrow a_{1,2} = l - b_{1,2} = l - \left( \frac{l}{2} + y_j \right) = \frac{l}{2} - y_j \quad (4-7)$$

$$b_{3,4} = \frac{l}{2} - y_j \Rightarrow a_{3,4} = l - b_{3,4} = l - \left( \frac{l}{2} - y_j \right) = \frac{l}{2} + y_j \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} a_1 = b_3 &\Rightarrow b_1 = a_3 \\ a_2 = b_4 &\Rightarrow b_2 = a_4 \\ F_1 = F_3 &\Rightarrow F_2 = F_4 \end{aligned} \quad (4-9)$$

Darin ist  $y_j$  die Nietposition, von der Rißebeine aus betrachtet, bzw. die Position, an der das Moment angreift. Damit läßt sich für die Gleichung (4-6) folgender Ausdruck schreiben:

$$M_1 = - \frac{3C}{l} \sum_{j=1}^2 F_j y_j \quad (4-10)$$

Erweitert man das in Abbildung 6 gezeigte System dahingehend, daß man die Anzahl der Momente beliebig erhöht, d. h. mehr als vier Momente zuläßt, unter Beibehaltung einer symmetrisch belasteten Struktur, kann man Gleichung (4-10) in folgender allgemeiner Form schreiben:

$$M_1 = - \frac{3C}{l} \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j \quad (4-11)$$

Dabei ist  $N_l$  gleich der Anzahl der Nietkräfte  $F_j$  links der Rißebeane, d.h. im Bereich von Lager 1 bis zur Rißebeane.

Das Moment an einer beliebigen Stelle  $i$ , ausgehend von Lager 1, berechnet sich allgemein wie folgt:

$$M_i = M_{x_i}^0 + M_1 \cdot \frac{l-x_i}{l} + M_2 \cdot \frac{x_i}{l} \quad (4-12)$$

Darin sind  $M_{x_i}^0$  das Moment an der Stelle  $x_i$ ,  $M_1$  das Lagermoment,  $M_2 = 0$  [(4-3)],  $l$  die Spannweite und  $x_i$  die Position im Bereich  $0 \leq x_i \leq l/2$ . Für  $x_i$  bzw.  $l-x_i$  können folgende Beziehungen geschrieben werden:

$$x_i = l - \left( \frac{l}{2} + y_i \right) = \frac{l}{2} - y_i \quad (4-13)$$

$$l - x_i = \frac{l}{2} + y_i \quad (4-14)$$

mit  $y_i$  der Position, ausgehend von der Rißebeane, für die die Kraft des Momentes bestimmt werden soll. Das Moment  $M_{x_i}^0$  bestimmt sich zu:

$$M_{x_i}^0 = A_1^0 \cdot x_i + \sum_{j=i}^{N_l} F_j C \quad (4-15)$$

Dabei ist  $A_1^0$  die linke Auflagerkraft der Struktur mit der Spannweite  $l_l=l$  und der zweite Ausdruck die Summe der Momente bis zur Stelle  $x_i$ .

Die Auflagerkraft  $A_1^0$  betimmt sich unter Verwendung von (4-9) zu:

$$A_1^0 = - \frac{F_1 C}{l} - \frac{F_2 C}{l} + \frac{F_3 C}{l} + \frac{F_4 C}{l} = 0 \quad (4-16)$$

Dabei ist  $N_l$ , wieder allgemein geschrieben, die Anzahl der Nietkräfte  $F_j$  links der Rißebeane, d.h. im Bereich von Lager 1 bis zur Rißebeane. Damit ergibt sich Gleichung (4-15) unter Verwendung der Gleichungen (4-13) und (4-16) zu:

$$M_{x_i}^0 = \sum_{j=i}^{N_l} F_j C \quad (4-17)$$

Damit läßt sich das Moment  $M_i$ , unter Nutzung aller Beziehungen, wie folgt bestimmen:

$$M_i = M_{x_i}^0 + M_1 \cdot \frac{l/2 + y_i}{l} \quad (4-18)$$

Setzt man in (4-18) die Ausdrücke (4-11) und (4-17) ein, erhält man das Moment  $M_i$  zu:

$$M_i = \sum_{j=i}^{N_1} F_j C - \frac{2C}{3l} \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j - \frac{3C}{l^2} \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j y_i \quad (4-19)$$

Die Verschiebung in Längsrichtung durch das Biegemoment läßt sich damit wie folgt berechnen:

$$V_{DBi,L} = \frac{C}{EI} \sum_{i=1}^i M_i (y_i - y_{(i-1)}) \quad (4-20)$$

Da die Annahme der Einspannung des Trägers so nicht ganz zutreffend ist, an einer Seite sollen ja die Zugkräfte aufgebracht werden, ist es erforderlich, den Einfluß der Querkontraktion zu berücksichtigen. Daher soll folgende Annahme getroffen werden:

Die Probe wird durch die Zugbelastung gelängt, d.h. es kommt zu einer Längsverschiebung, die eine Rißerweiterung fördert. Durch Berücksichtigung der Querkontraktion schnürt sich die Probe ein, im Reißquerschnitt am stärksten. Dies wirkt jedoch wie eine Entlastung und muß wie folgt berücksichtigt werden:

$$V_{DBi} = V_{DBi,L} - V_{DBi,Q} \quad (4-21)$$

Darin sind  $V_{DBi}$  die Verschiebung aus dem Biegemoment,  $V_{DBi,L}$  die aus dem Biegemoment resultierende Längsverschiebung,  $V_{DBi,Q}$  die aus dem Biegemoment resultierende Verschiebung durch die Querkontraktion.

Aus der Dehnung in Längsrichtung  $\varepsilon_L$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  läßt sich bekanntermaßen die Querdehnung  $\varepsilon_Q$  wie folgt bestimmen:

$$\varepsilon_Q = \frac{\Delta V_Q}{l_Q} = -\nu \cdot \varepsilon_L \quad (4-22)$$

Unter Verwendung der Gleichungen bzw. Beziehungen (4-20) bis (4-22) läßt sich die Verschiebung  $V_{DBi}$  durch das auftretende Biegemoment folgendermaßen bestimmen:

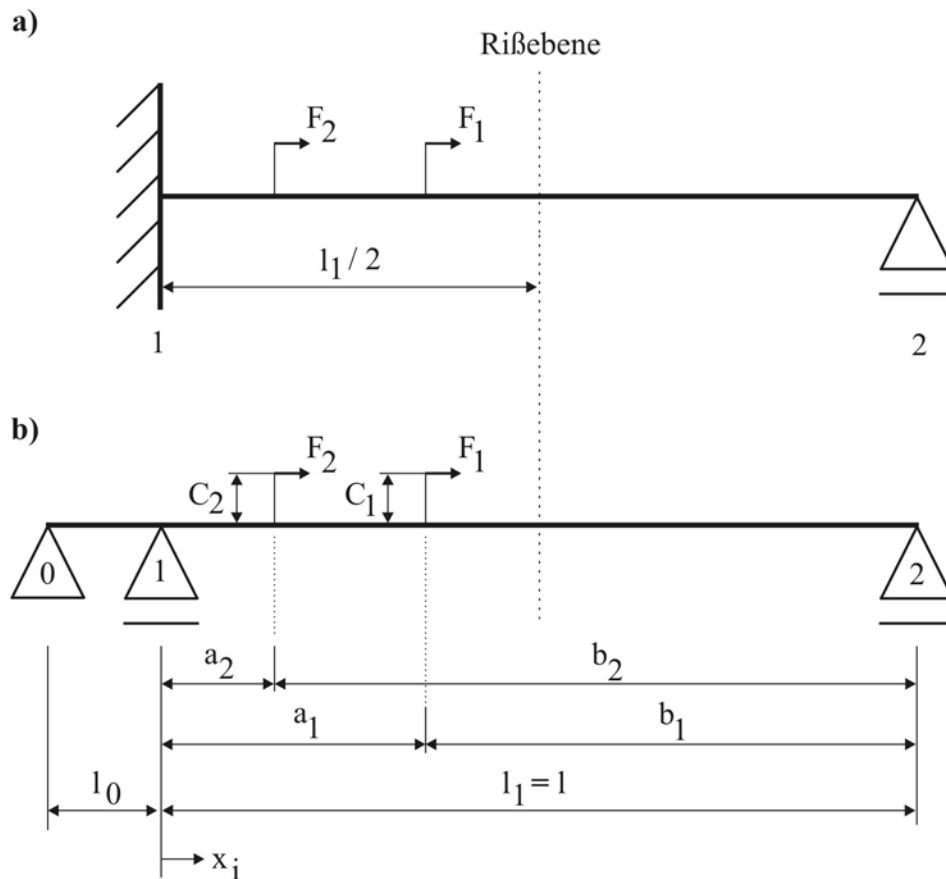
$$V_{DBi} = \frac{C}{EI} \sum_{i=1}^i M_i (y_i - y_{(i-1)}) - \left( -\nu \cdot l_Q \cdot \frac{C}{EI} \sum_{i=1}^i M_i \right) \quad (4-23)$$

bzw.

$$V_{DBi} = \frac{C}{EI} \sum_{i=1}^i M_i \left\{ (y_i - y_{(i-1)}) + \nu \cdot l_Q \right\} \quad (4-23a)$$

#### 4.1.2 Verformung einer gebrochenen Versteifung

Im vorigen Kapitel wurde die Biegeverformung für einen intakten Stringer hergeleitet. In gleicher Weise kann dies für die gebrochene Versteifung geschehen. Eine solche ist in Abbildung 7 dargestellt. Wie leicht einzusehen, handelt es sich nun um ein unsymmetrisches System. Dieses ist in Abbildung 7a dargestellt, die geometrischen Verhältnisse bzw. das mathematische Modell zeigt Abbildung 7b.



**Abbildung 7:** System einer gebrochenen Struktur: a) Reales System, links fest eingespannt, rechts momentenfreies Lager; b) Mathematisches Modell zur Beschreibung

Aus Gleichung (4-1) ergibt sich, daß zur Lösung des Systems eine Dreimomentengleichung notwendig ist. Diese Gleichung läßt sich wie folgt schreiben:

$$M_0 \cdot l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 \cdot l_1 = -6 \left( \frac{L_1^0}{l_0} + \frac{R_2^2}{l_1} \right) \quad (4-24)$$

Mit den Beziehungen

$$l_0 = 0; M_0 = M_2 = 0; L_1^0 = 0 \quad (4-25)$$

läßt sich die Dreimomentengleichung zu folgendem Ausdruck vereinfachen:

$$2 M_1 l = -6 \frac{R_2^2}{l} \quad (4-26)$$

Die Lastenwerte für den Balken mit der Spannweite  $l$  in der Gleichung (4-26) läßt sich wie folgt bestimmen:

$$6 \frac{R_2^2}{l} = \frac{F_1 C}{l} (3b_1^2 - l^2) + \frac{F_2 C}{l} (3b_2^2 - l^2) = \frac{C}{l} \sum_{j=1}^2 F_j (3b_j^2 - l^2) \quad (4-27)$$

Diesen Ausdruck in die DMG eingesetzt, erhält man folgende Gleichung:

$$2 M_1 l = - \frac{C}{l} \sum_{j=1}^2 F_j (3b_j^2 - l^2) \quad (4-28)$$

Unter Nutzung der folgenden geometrischen Beziehungen,

$$b_{1,2} = \frac{l}{2} + y_j \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = l - b_{1,2} = l - \left( \frac{l}{2} + y_j \right) = \frac{l}{2} - y_j \quad (4-29)$$

worin  $y_j$  wieder die Position des Nietes bzw. die Position des angreifenden Moments zu verstehen ist, ergibt sich für die DMG folgender Ausdruck:

$$M_1 = \frac{C}{l^2} \sum_{j=1}^2 F_j \left( \frac{l^2}{8} - \frac{3}{2} l y_j - \frac{3}{2} y_j^2 \right) \quad (4-30)$$

Allgemein geschrieben, d.h. bei beliebiger Nietanzahl bzw. Momenten, aber unter Beibehaltung der Tatsache, daß diese nur im Bereich von Lager 1 bis zur Rißebeine (=  $l/2$ ) wirken, kann man wie folgt schreiben:

$$M_1 = \frac{C}{l^2} \sum_{j=1}^{N_1} F_j \left( \frac{l^2}{8} - \frac{3}{2} l y_j - \frac{3}{2} y_j^2 \right) \quad (4-31)$$

mit  $N_1$  gleich der Anzahl der Niete bzw. Momente links der Rißebeine.

Das Moment an einer beliebigen Stelle, ausgehend von Lager 1, und unter Berücksichtigung der Beziehung (4-25), berechnet sich wie folgt:

$$M_i = M_{x_i}^0 + M_1 \cdot \frac{l - x_i}{l} \quad (4-32)$$

Mit den Beziehungen

$$x_i = l - \left( \frac{l}{2} + y_i \right) = \frac{l}{2} - y_i \quad (4-33)$$

und

$$l - x_i = \frac{l}{2} + y_i \quad (4-34)$$

können auch hier wieder die diskreten Punkte  $y_i$  berücksichtigt werden.

Das Moment  $M_{x_i}^0$  und die Auflagerkraft  $A_i^0$  berechnen sich analog zum Vorgehen in Kapitel 4.1 zu:



$$M_{x_i}^0 = A_1^0 \cdot x_i + \sum_{j=i}^{N_1} F_j C \quad (4-35)$$

$$A_1^0 = -\frac{F_1 C}{l} - \frac{F_2 C}{l} = -\frac{C}{l} \sum_{j=1}^{N_1} F_j \quad (4-36)$$

Die Gleichung (4-36) in (4-35) eingesetzt, ergibt

$$M_{x_i}^0 = \left( -\frac{C}{l} \sum_{j=1}^{N_1} F_j \right) \cdot \left( \frac{l}{2} - y_i \right) + \sum_{j=i}^{N_1} F_j C \quad (4-37)$$

bzw.

$$M_{x_i}^0 = C \cdot \sum_{j=i}^{N_1} F_j + \frac{C}{l} \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_i - \frac{C}{2} \sum_{j=1}^{N_1} F_j \quad (4-38)$$

Damit bestimmt sich  $M_i$  unter Nutzung aller geometrischen Beziehungen zu:

$$M_i = M_{x_i}^0 + \frac{M_1}{2} + M_1 \cdot \frac{y_i}{l} \quad (4-39)$$

Unter Nutzung der Gleichungen (4-31) und (4-38) läßt sich Gleichung (4-39) wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} M_i = & C \cdot \sum_{j=i}^{N_1} F_j + \frac{9C}{8l} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_i - \frac{7C}{16} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j - \frac{3C}{4l} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j - \frac{3C}{4l^2} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j^2 - \\ & - \frac{3C}{2l^3} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j y_i - \frac{3C}{2l^3} \cdot \sum_{j=1}^{N_1} F_j y_j^2 y_i \end{aligned} \quad (4-40)$$

Die Verschiebung infolge der Biegemomente und unter Berücksichtigung der Querkontraktion ergibt sich analog der Berechnung in Kapitel 4.1.1.

### 4.1.3 Verformung einer angerissenen Versteifung

Nachdem in den beiden vorherigen Kapiteln die Verformung der Versteifung auf Grund der exzentrisch angreifenden Nietkräfte der intakten bzw. gebrochenen Versteifung dargestellt wurde, soll dies nun für die gerissene Steife geschehen. Im Gegensatz zu den beiden bisher behandelten Stringerzuständen ist das Vorgehen in diesem Fall nicht ganz so einfach, da das Verformungsverhalten der angerissenen Versteifung recht kompliziert zu beschreiben ist, da es Anteile des intakten und gebrochenen Zustandes enthält. Dabei können die in Abbildung 8 gezeigten geometrischen Verhältnisse und Bezeichnungen zugrunde gelegt werden.



Diese dient dazu, den Bereich festzulegen, in dem die Neutralachse als „gewandert“ betrachtet werden soll.

Hat  $h$  den Wert 100 erreicht, gilt  $hy_i = y_i$ . Die Frage ist nun, für welches  $h$  sich der Grenzfall  $hy_i = a_s$  ergibt, Gl. (4-43).

$$hy_i = h \cdot \Delta y_i = h \cdot \frac{y_i}{100} \stackrel{?}{=} a_s \quad (4-43)$$

Da  $h$  eine ganze Zahl ist,  $\Delta y$  und  $a_s$  im Allgemeinen reell, wird es in der Regel immer so sein, daß  $hy \neq a_s$ . Es können prinzipiell zwei Fälle unterschieden werden, die den Bereich bestimmen. Der eher seltene Fall, daß  $hy_i = a_s$  ist, soll dem Fall 1 zugeordnet werden, was aus der Anschauung auch Sinn macht.

Fall 1: Die Hilfsgröße  $hy$  ist kleiner gleich der Rißlänge im Stringer ( $a_s$ ).

$$hy_i = h \cdot \Delta y_i = h \cdot \frac{y_i}{100} \leq a_s \Rightarrow x_{N1} = z_{SP} + \frac{a_s}{2} \quad (4-44)$$

In diesem Fall wird die einfache Annahme getroffen, daß sich die aus der Betrachtung des Profils ermittelte Neutralachse  $z_{SP}$  um die halbe Rißlänge  $a_s$  vergrößert.

Fall 2: Die Hilfsgröße  $hy$  ist größer als die Rißlänge im Stringer ( $a_s$ ). In diesem Fall ist die Neutralachse  $x_N$  gleich der des betrachteten Profils  $z_{SP}$ .

$$hy_i = h \cdot \Delta y_i = h \cdot \frac{y_i}{100} > a_s \Rightarrow x_{N2} = z_{SP} \quad (4-45)$$

Dasjenige letzte  $h$ , welches gerade noch den Fall 1 erfüllt, wird mit  $h_g$  bezeichnet.

Das gleiche  $\Delta y_i$ , wie es in Gl. (4-41) beschrieben ist, kann nun zur Bestimmung der Verformung genutzt werden. Dabei wird auch hier eine Hilfsgröße  $gy$  [Gleichung (4-46)], ähnlich dem Ausdruck in Gleichung (4-43), eingeführt.

$$gy_i = g \cdot \Delta y_i \quad \text{mit} \quad g = 1, 2, 3 \dots 100 \quad (4-46)$$

Mit  $gy_i$  kann der Bereich, in dem sich die Neutralachse ändert, besser erfaßt werden und die Verschiebung auf Grund der Biegung genauer berücksichtigt werden. Dabei muß die Beziehung von Gleichung (4-47) gelten, wobei dasjenige größte ganzzahlige  $g$ , welches die Bedingung gerade noch erfüllt, als  $g_g$  bezeichnet wird.

$$gy_i = g \cdot \Delta y_i = g \cdot \frac{y_i}{100} \leq y_j \quad (4-47)$$

Damit läßt sich die Verschiebung am Punkt  $i$  unter Berücksichtigung der durch den Anriß des Stringers verschobenen Neutralachse wie folgt berechnen:

$$V_{DBi} = \frac{1}{I_x E} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^N F_j \cdot \frac{y_i}{100} \cdot \sum_{t=1}^{g_g} \left[ \sum_{t=1}^{h_g} \left( z_{SP} + \frac{a_s}{2} \right)^2 + \sum_{t=h_g+1}^{100} z_{SP}^2 \right] \right\} \quad (4-48)$$

## 4.2 Spannungsintensitätsfaktoren

Die Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren in der Versteifung, so wie sie bisher in Kapitel 3.1.4 beschrieben wurden, muß den gegebenen Bedingungen angepaßt werden. Dies bezieht sich zum einen auf den Teil, der durch die angelegte Spannung hervorgerufen wird, zum anderen muß ein zusätzlicher Teil eingeführt werden, der die Biegung berücksichtigt.

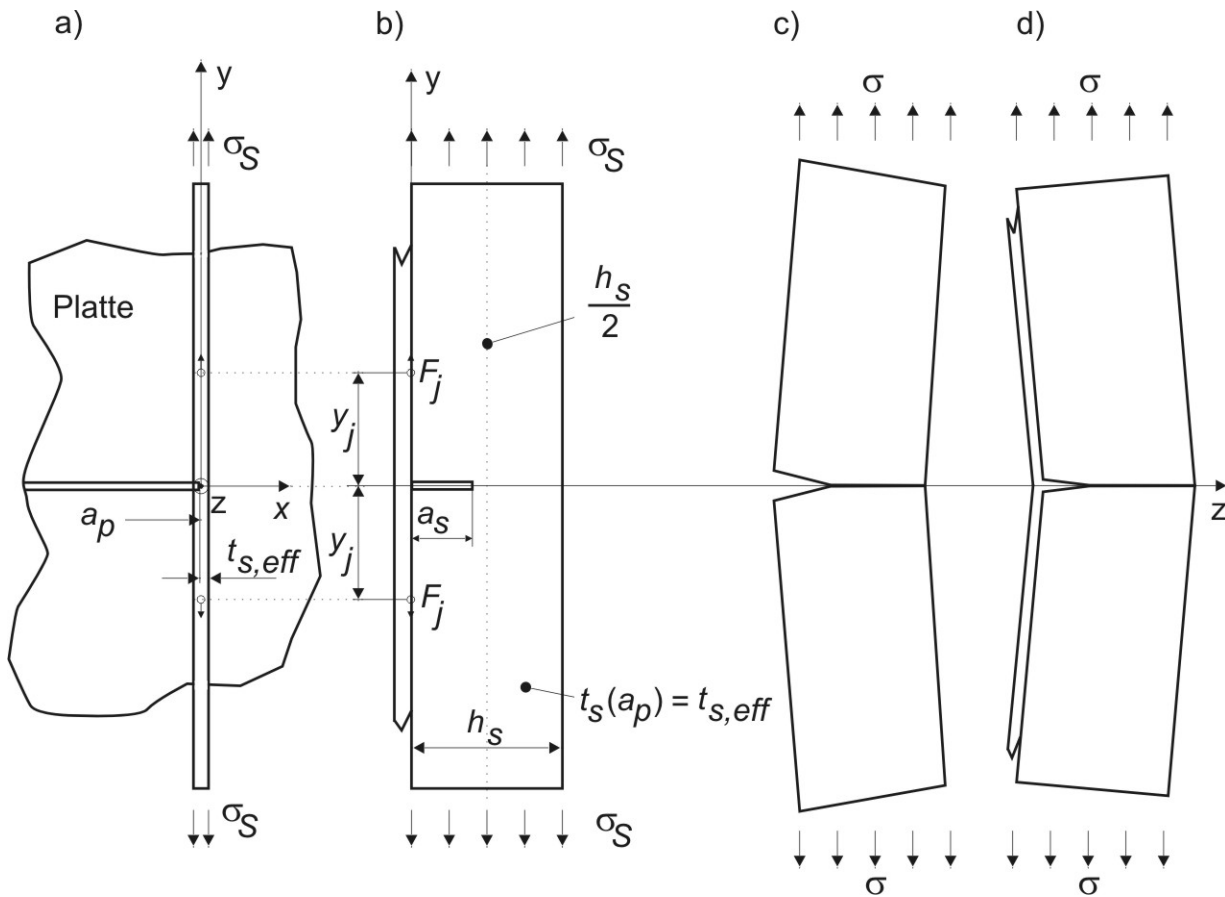
### 4.2.1 Spannungsintensitätsfaktor ohne Biegung

Der in Gleichung (3-39) enthaltene Term  $K_G$  zur Berücksichtigung der angelegten Spannung, der in Gl. (3-25) formelmäßig dargestellt ist, muß neu definiert werden. Der bisherige Term repräsentiert einen Zentralriß in einer ebenen Scheibe mit begrenzter Breite. Bei dem betrachteten Problem handelt es sich jedoch um einen Eckanriß in einer begrenzten Platte bei angelegter Spannung. Auch hier wird vorausgesetzt, daß die Spannung keine Biegung der angerissenen Platte bewirkt. Für diesen Fall kann man z.B. in Tada et al. [36] oder Ewalds et al. [12] folgenden Ausdruck für den Spannungsintensitätsfaktor finden:

$$K_G = \sigma_s \cdot \sqrt{\pi a_s} \cdot \left\{ 1,122 - 0,231 \left( \frac{a_s}{h_s} \right) + 10,55 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^2 - 21,71 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^3 + 30,382 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^4 \right\} \quad (4-49)$$

### 4.2.2 Spannungsintensitätsfaktor unter Berücksichtigung der Stringerbiegung

Die Berücksichtigung der Biegung bei der Bestimmung des SIF ist nicht trivial. Nach Aussagen der Literatur, z. B. Tada et al. [36], gibt es bisher keine verlässlichen Aussagen, wie der Spannungsintensitätsfaktor zu bestimmen ist, wenn der Eckriß in einer ebenen Platte auf Grund der Belastung am Rand teilweise geschlossen bzw. zusammengedrückt wird. Schon gar keine Aussagen lassen sich finden, wenn es sich um eine Haut-Stringer-Verbindung handelt. Die geometrischen Verhältnisse und das prinzipielle Verformungsverhalten sind in Abbildung 9 dargestellt.



**Abbildung 9:** Zusammenhänge zur Bestimmung des SIF unter Biegung;

- a) + b): geometrische Beschreibung der Versteifung
- c) : Verformung einer angerissenen Platte unter Zugbelastung
- d) : Verformung einer Haut-Stringer-Verbindung unter Zugbelastung, wobei der Stringer angerissen ist

In Abbildung 9a und b sind die geometrischen Größen des Systems abgebildet. Das Bild c) zeigt die Verformung einer angerissenen Scheibe unter einer Zugbelastung. Deutlich sieht man, daß es auf Grund des Eckanrisses zu einer Biegeverformung kommt, bei der der Riß geöffnet wird. Berücksichtigt man aber die geometrischen Verhältnisse und den Fakt, daß die Versteifung an einer Platte befestigt ist, so stellt sich die im Bild d) dargestellte Verformung des Systems ein. Deutlich sichtbar ist, daß der Riß durch die Biegeverformung teilweise geschlossen wird. Eine Abschätzung, wie groß der Effekt der „Rißschließung“ ist und ob es eine Abhängigkeit zum Riß in der Haut gibt, kann nicht eindeutig gesagt werden. Qualitativ kann jedoch festgehalten werden, daß der Effekt der „Rißschließung“ mit zunehmender Rißlänge  $a_p$  verschwindet. Daher werden im folgenden einige Annahmen getroffen, um den Biegeeffekt zu berücksichtigen:

1. Der Riß kann in der Versteifung nur im Steg wachsen, weshalb die Versteifung als ebene Platte mit der Dicke  $t_s$  und der Breite  $w_s$  angesehen werden kann.

2. Die Dicke  $t_s$  wird als konstant angenommen, auch wenn der Riß  $a_p$  in der Haut unter der Versteifung wächst.
3. Als Ansatz für den SIF soll die Gleichung (4-49) gewählt werden, wobei die Spannung mit Hilfe der Nietkräfte, die in einem Abstand von  $0,5 \cdot h_s$  angreifen, und dem Flächenträgheitsmoment einer ebenen Platte ausgedrückt werden kann.

Unter Berücksichtigung aller Nietkräfte und der gemachten Annahmen kann der Spannungsintensitätsfaktor  $K_B$  nach [36] unter Verwendung der Beziehung  $\sigma = \frac{M_B}{W_B}$  wie folgt geschrieben werden, wobei das Biegemoment durch die Gleichung  $M_B = F \cdot C$  bestimmt ist und das Widerstandsmoment durch die Beziehung  $W_B = \frac{h_s^2 \cdot t_s}{6}$  ersetzt wird, Gleichung (4-50):

$$K_{Bj} = \sum_{j=1}^N \frac{6F_j C}{h_s^2 t_s} \cdot \sqrt{\pi a_s} \cdot \left\{ 1,122 - 0,231 \left( \frac{a_s}{h_s} \right) + 10,55 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^2 - 21,71 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^3 + 30,382 \left( \frac{a_s}{h_s} \right)^4 \right\} \quad (4-50)$$

Die in (4-50) benutzte Gleichung zur Bestimmung des SIF ist von *Gross* und *Brown* mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate aufgestellt worden und nur bis zu einem  $\frac{a_s}{h_s}$  von 0,6 gültig, was aber als ausreichend angesehen wird. Grund dafür sind Voruntersuchungen gemäß Abbildung 9c, bei denen sich gezeigt hat, daß ab einem Verhältnis  $\frac{a_s}{h_s} \geq 0,6$  der Spannungsintensitätsfaktor größer als die Bruchzähigkeit ist und somit kein stabiles Rißwachstum mehr erwartet werden kann. Die Beziehung kann zwar das reale Verhalten von Abbildung 9d nicht wiedergeben, da aber der Effekt der „Rißschließung“ quantitativ nicht erfaßt werden kann, d.h keine Aussage über die Entlastung der Rißufer aus der Verformung getroffen werden kann, scheint die Annahme als sinnvoll. Bestärkt wir die Annahme auch dadurch, daß die Haut unter dem Stringer auch gerissen ist und somit auch ein Teil der Verformung in Abbildung 9c folgt.

Alle weiteren untersuchten Methoden zur Beschreibung des Problems, z.B von *Tada*, führten zu keinen brauchbaren Resultaten und konnten den Rißfortschritt nur ungenügend abbilden.

### 4.3 Kompatibilitätsbeziehung

Mit den im Kapitel 4.1 hergeleiteten Beziehungen zur Berücksichtigung der Biegung einer Haut-Stringer-Verbindung muß das in Gleichung (3-35) aufgestellte Gleichungssystem um den Term  $V_{DB}$  erweitert werden. Die Verformungen  $V_1, V_2, V_3, V_D$  und  $V_G$  bestimmen sich nach Kapitel 3. Da die Spannungen  $\sigma_p$  und  $\sigma_s$  bekannt sind, bleiben als einzige Unbekannte die Nietkräfte  $F_j$ , die sich mit dem in Gleichung (4-51) aufgestellten Gleichungssystem bestimmen lassen.

$$\begin{bmatrix}
 (V_{21} + V_{31} - V_{D1} - V_{DB1})_1 & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj} - V_{DBj})_1 & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (V_{21} + V_{31} - V_{D1} - V_{DB1})_i & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj} - V_{DBj})_i & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (V_{21} + V_{31} - V_{D1} - V_{DB1})_N & \cdots & (V_{2j} + V_{3j} - V_{Dj} - V_{DBj})_N & \cdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_1 \\
 \vdots \\
 F_j \\
 \vdots \\
 F_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_{G1} - V_{11} \\
 \vdots \\
 V_{Gi} - V_{1i} \\
 \vdots \\
 V_{GN} - V_{1N}
 \end{bmatrix}
 \quad (4-51)$$

Somit steht nun ein Gleichungssystem zur Verfügung, das neben der Zustandsbeschreibung des Stringers (intakt, angerissen oder gebrochen) auch noch den Einfluß der Biegung berücksichtigt.

#### 4.4 Spannungsintensitätsfaktor der Versteifung

In Anlehnung an Gleichung (3-39) wird der Spannungsintensitätsfaktor für den Stringer  $K_S$  mit dem in Gleichung (4-52) dargestellten Zusammenhang ermittelt. Neben den bisherigen Anteilen aus Spannung ( $K_G$ ) und den Nietkräften ( $K_D$ ) muß nun noch der Anteil aus der Biegung ( $K_B$ ), wie er in Kapitel 4.2.2 hergeleitet ist, berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, daß sich die Terme  $K_G$  nach Gleichung (4-49),  $K_D$  nach (3-26) und  $K_B$  nach (4-50) bestimmen.

$$K_S = K_G + \sum_{j=1}^N K_{Dj} + \sum_{j=1}^N K_{Bj} \quad (4-52)$$

Mit diesem ermittelten Spannungsintensitätsfaktor für den Stringer läßt sich unter Berücksichtigung des Belastungsverhältnisses  $R$  mit Hilfe eines Rißfortschrittsgesetzes, z.B. nach *Forman*, das Rißwachstum im Stringer bestimmen.

## 5 Validierung mit der Finite Elemente Methode

Eine heute weltweit verbreitete und anerkannte Methode zur Berechnung des Spannungs- und Verformungsverhaltens großer und komplizierter Bauteile stellt die Methode der Finiten Elemente dar. Für gängige Probleme ist sie etabliert und zeigt gute und sehr gute Ergebnisse. Um jedoch nicht nur das Verhalten einer intakten Struktur unter statischen oder dynamischen Umständen untersuchen zu können, sondern auch zu analysieren, wie sich ein Bauteil unter einer Schädigung verhält, sind un-  
gemein kompliziertere und aufwendigere Modelle vonnöten. Diese müssen zusätzlichen Randbedingungen unterworfen sein, um sie für derartige Untersuchungen einsetzen zu können. Auf die Darstellung der Grundlagen der FE-Modellierung soll hier verzichtet werden, da diese in einschlägiger Literatur, wie Bathe [4] und Zienkiewicz et. al. [39], beschrieben sind. Vielmehr soll auf die Besonderheiten bei der Modellierung von Schäden mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente eingegangen werden, um den Rißfortschritt bestimmen zu können.

Im Anschluß daran wird auf die Umsetzung in einem parametrisierten Modellgenerator eingegangen. Da für die Rechnung das kommerzielle Programm ABAQUS [2] genutzt wird, beziehen sich alle weiteren Ausführungen und Bezeichnungen auf die in diesem Programmsystem verwendeten.

### 5.1 Rißspitzenelementierung

Die an der Rißspitze vorherrschende Spannungssingularität ist für die richtige Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren von großer Bedeutung. Dabei folgt der Spannungsanstieg an der Spitze im elastischen Fall der Form

$$\sigma(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (5-1)$$

wobei  $r$  der Radius ist, der von der Rißspitze aus gemessen ist.

Barsoum [3] schlägt vor, daß man durch Modifikation isoparametrischer Elemente mit einer quadratischen Ansatzfunktion diese für bruchmechanische Untersuchungen verwenden kann, solange es sich um linear-elastische Probleme handelt. Diese Probleme bedingen auch eine ebensolche Verzerrungssingularität der Form

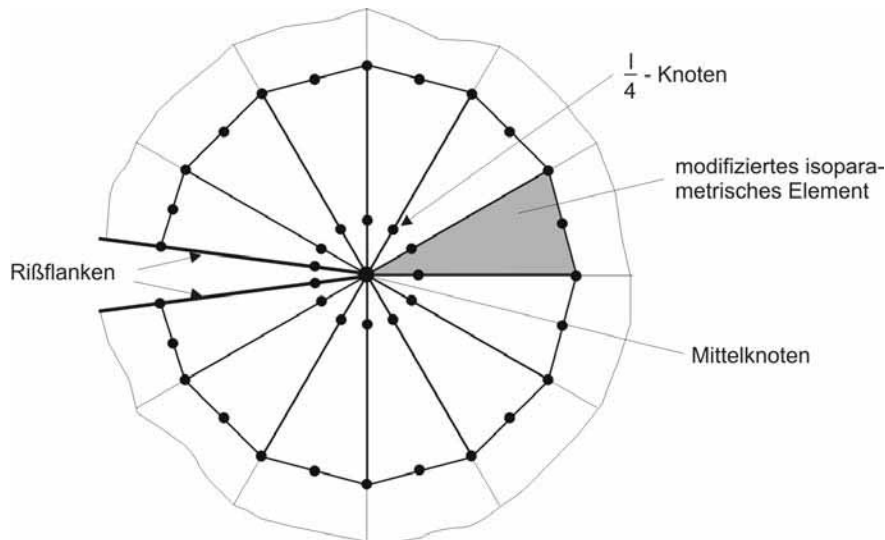
$$\varepsilon(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (5-2)$$

die für die Standardsoftware notwendig ist.





nungsintensitätsfaktor bestimmen. Neuere Softwareversionen ermöglichen es, direkt den Spannungsintensitätsfaktor auszugeben, gehen intern jedoch auch den Schritt über das J-Integral. Auf das J-Integral soll hier nicht weiter eingegangen werden, da es dazu ausführliche Abhandlungen beispielsweise in Ewalds et. al. [12], Groß [14], Hahn [15], Kanninen et. al. [18] und Rice [27] gibt.



**Abbildung 11:** Typische Reißspitzenidealisation in der linear-elastischen Bruchmechanik

## 5.2 Modellgenerator

In diesem Kapitel soll kurz der Aufbau des Modellgenerators geschildert werden, zu dem neben der Eingabe von Netzparametern, der Geometrie auch das anschließende Vernetzen selbiger gehört. Die Generierung aller unterschiedlichen Probengeometrien ist dabei zu gewährleisten.

Das Programm erstellt ein ABAQUS-Input-File und eine von Tecplot<sup>®</sup> lesbare Datei, mit der man sich schnell über die Güte des erzeugten Netzes informieren kann. Beide Dateinamen sind frei wählbar, sollten aber einen Bezug zur Probe haben.

### 5.2.1 Eingabedaten

Grundsätzlich bietet das Programm die Möglichkeit, ein Viertel-, Halb- oder Vollmodell zu generieren. Entsprechend der Modellart sind dann die Randbedingungen zu setzen. Die Wahl des Modells erfolgt über Auskommentieren entsprechender Funktionen. Die Eingabedaten werden dabei immer für ein Viertelmodell definiert, ein Vollmodell wird durch Spiegeln des Viertelmodells um zwei Achsen erreicht.

Die Eingabedaten lassen sich in drei Gruppen einteilen; geometrische Daten, Netzparameter und Randbedingungen. Diese drei Gruppen sollen im folgendem kurz erläutert werden.

#### 5.2.1.1 Geometriedaten

Die zu erstellende Probe wird in unterschiedliche Teilkörper, Teilgeometrien, eingeteilt, die in der Regel aus vier Eckpunkten besteht. Diese Eckpunkte bestehen aus den drei Koordinaten  $x$ ,  $y$ , und  $z$ . Aus den vorher gemachten Aussagen ergibt sich, daß das Koordinatensystem im Mittelpunkt des Gesamtmodells liegt.

Die Reihenfolge der Eckpunkte muß in der Weise erfolgen, daß sie entweder dem Uhrzeigersinn bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn folgen. Bei der ersten Geometrie ist der Umlaufsinn freigestellt, alle weiteren müssen der Bedingung folgen, daß die folgende Geometrie entgegen dem Umlaufsinn der vorherigen Geometrie definiert ist. Liegt in einer Teilgeometrie eine Rißspitze, so ist dieser Punkt **immer** als erster bei der Geometriedefinition anzugeben. Die weiteren Eckpunkte müssen im Uhrzeigersinn angegeben werden. Gegebenenfalls müssen vorher definierte Geometrien angepaßt werden. Die Bedingung des Umlaufsinn der Geometriedefinition ist unbedingt einzuhalten, um bei der späteren Vernetzung geschlossene Netze an den Geometriekanten zu erhalten.

Die Wandstärken werden für jede Geometrie separat definiert und durch entsprechende offsets in die Geometrien eingearbeitet und berücksichtigt.

#### 5.2.1.2 Netzparameter

Neben den Parametern, die vom Benutzer frei wählbar zur Erzeugung des Rißspitzenfeldes und der Elementgröße sind, gibt es weitere Parameter, die zwar frei wählbar, aber an den in Kapitel 5.2.2 aufgezeigten Algorithmus geknüpft sind. Dabei haben sich einige als in der Praxis bewährt herausgestellt und werden als feste Werte verwendet. In Tabelle B1 sind alle Parameter zusammengefaßt und kurz beschrieben bzw. sind ihre benutzen Werte angegeben. Die genaue Funktion bzw. Bedeutung ist Nowotny [25] zu entnehmen.

#### 5.2.1.3 Randbedingungen

Zu den festzulegenden Randbedingungen zählen neben den Materialkennwerten Elastizitätsmodul, Querkontraktion und thermischer Wärmeausdehnungskoeffizient (hier jedoch für die Berechnung nicht notwendig) auch die aufzuprägende Belastung und die Verschiebungsrandbedingungen. Dabei ist die gewählte Modellart (Vollmodell etc.) zu beachten.

Die Kräfte greifen an Knoten an, deren Anzahl entsprechend der Netzparameter von Rechnung zu Rechnung variieren kann.

### 5.2.2 Vernetzung

Die Vernetzung der Geometrien erfolgt in zwei Schritten. Um zu gewährleisten, daß die Teilnetze der einzelnen Geometrien beim Zusammenfügen zu einem Gesamtnetz zusammenpassen, müssen Anzahl und Position der Knoten auf den Kanten benachbarter Teilgeometrien identisch sein. Dies wird durch Verwendung ein und desselben Verteilungsalgorithmus erreicht.

Die Verteilung der inneren Knoten und Elemente, d.h. die Knoten, die nicht auf einer Geometrie-kante liegen, basiert auf einem Algorithmus von Nowotny [25], dem das Prinzip „Teile und Herrsche“ zu Grunde liegt. Da der Algorithmus für beliebige Flächen bzw. Geometrien Anwendung finden kann, sind einige Optimierungsfunktionen zur Glättung des Netzes enthalten, deren Parameter bereits in Kapitel 5.2.1.2 aufgeführt sind. Für die hier vorliegenden einfachen, rechtwinkligen Geometrien spielen diese eine eher untergeordnete Rolle. Die Erzeugung der Knoten erfolgt für die 2-D-Geometrien, die Knoten zur Erzeugung eines 3-D-Elements, d.h. die Knoten, die nicht in der Geometrieebene liegen, werden durch Transformation der 2-D-Knoten und Nutzung der Wandstärkeinformation der einzelnen Teilgebiete erzeugt.

Die Generierung der Volumenelemente führt zu Prismen mit drei- und viereckigen Grundflächen, wobei die Elementtypen C3D15 (15-Knoten Volumenelement) und C3D20 (20-Knoten Volumenelement) Verwendung finden. Anschließend werden die doppelten Knoten gelöscht und der anhand einer Rißbox definierte Riß in die Struktur integriert, wobei nach Kapitel 5.1 vorgegangen wird. Ein Beispiel für ein FE-Netz eines Vollmodells (Probe 1), welches der Modellgenerator liefert und für die Untersuchungen genutzt wird, ist in Abbildung A1 zu sehen. In der Mitte des mittleren Hautfeldes liegt der Riß mit der sehr feinen Elementierung und den aus dem Vorhandensein des Risses resultierenden etwas unstrukturierten Elementen. Alle anderen Geometrien weisen strukturierte Elemente entsprechend der Netzparameter auf.

Vorteil dieser Art der Elementerzeugung ist, daß für jede beliebige Flächen Netze generiert werden können. Hier, in diesem Fall, wäre diese Variabilität nicht nötig, da es sich um rechteckige Flächen handelt, aber für den Fall der Modellerweiterung ist diese Flexibilität des Modellgenerators notwendig.

## 6 Bauteilversuche

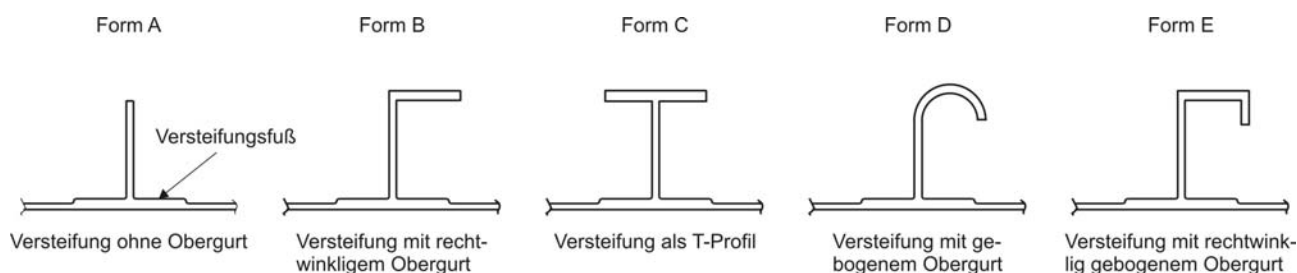
Die in den Kapiteln 4 und 5 aufgebauten Modelle sollen nun mit Bauteilversuchen verifiziert werden. Auf Grund unterschiedlicher Versteifungen im Flugzeugbau und unterschiedlicher Ausgangssituationen bei der Analyse von Schäden soll dies auch bei den Versuchen Berücksichtigung finden. Dafür wurden sieben verschiedene Geometrien untersucht, die zusätzlich drei Designs zeigen. Die Belastung wird so gewählt, daß in der Symmetrieebene der Platte, in die später der Riß eingebracht wird, eine maximale Spannung von ca. 100 MPa erreicht wird. Alle Proben werden bei einem Belastungsverhältnis von  $R = 0,1$  schwingend getestet. Da sehr hohe Restspannungen zu erwarten sind, wird für die Herstellung das **High Performance Cutting (HPC)** eingesetzt, mit dem sich auch geringe Wandstärken realisieren lassen.

Bei Airbus Deutschland GmbH, Werk Varel, wurden alle Proben gefräst. Als Material kommt die Aluminiumlegierung 3.4364 T7351 (7075 T7351) zum Einsatz, d.h. die Legierung ist lösungsgeglüht, abgeschreckt, gereckt und warm ausgelagert. Die Proben sind nach folgendem Fertigungsablauf hergestellt:

- Sägen der Probe aus einer Normplatte
- Planfrsen
- Einbringen der Spannbohrungen
- NC – Fräsen
- Austrennen (Trennen von Bauteil und Spann-/Reststücken)
- Entgraten

### 6.1 Allgemeines

Die Vielfalt an im Flugzeugbau verwendeten Versteifungsformen ist groß. Einen Ausschnitt der möglichen Formen ist in Abbildung 12 zu sehen. Die Form A ist die einfachste Form mit einem „Blechstreifen“ als Versteifung und einem sogenannten Versteifungsfuß, um einen belastungsgerechteren Übergang von der Haut in die Versteifung zu erreichen. Die Formen B und C besitzen einen rechteckigen Obergurt, einmal als L- und einmal als T-Profil ausgeführt. Die Form D ist durch einen gebogenen Obergurt, die Form E als rechteckiger Obergurt mit Hinterschneidung gekennzeichnet.



**Abbildung 12:** Auswahl prinzipiell möglicher Versteifungsformen

Für integrale Strukturen, bei denen auch die Versteifungen mit ausgefräbt werden, ergeben sich in der Vielfalt einige Einschränkungen. So darf es z.B. keine Hinterschneidungen geben (Form E), um das Bauteil fertigen bzw. noch wirtschaftlich herstellen zu können. Jedoch ist diese Form praxisrelevant und gut bei Differentialbauteilen einsetz- und herstellbar. Form D ist eher von theoretischer Natur und soll nicht weiter betrachtet werden, da sie unwirtschaftlich bzw. gar nicht herstellbar ist. Die Versteifung der Form A ist heutiger Stand der Technik und frästechnisch zu favorisieren. Gegen die Formen B und C sprechen die höheren Fertigungskosten, sind jedoch realisierbar und haben gute mechanische Eigenschaften. Beide Formen sind sowohl bei einer Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung einsetzbar, wobei bei Zug eher die Form A auf Grund ihrer Einfachheit zum Einsatz kommt. In Tabelle 1 sind die Eigenschaften der fünf verschiedenen Versteifungsformen noch einmal zusammengefaßt dargestellt.

Versteifung	Realisierbarkeit	Bemerkung	Belastung		
			Zug	Druck	Biegung
A	realisierbar	frästechnisch zu bevorzugen, Stand der Technik	×	---	---
B	realisierbar	hohe Fertigungskosten	---	×	×
C	realisierbar	hohe Fertigungskosten	---	×	×
D	nicht realisierbar	nicht realisierbar, nicht praxisrelevant	---	---	---
E	nicht realisierbar	nicht realisierbar, aber praxisrelevant	---	---	---

**Tabelle 1:** Eigenschaften der verschiedenen Versteifungsformen

Alle Formen sind natürlich auch ohne Versteifungsfuß realisierbar, jedoch ergibt sich durch den Fräskopf kein scharfkantig rechteckiger Übergang (z.B. von der Haut in die Versteifung, von Stringerstep in Stringergurt). An jedem dieser Übergänge befindet sich ein Radius, dessen Größe vom Fräskopf abhängt, der beim Herstellungsprozeß verwendet wird.

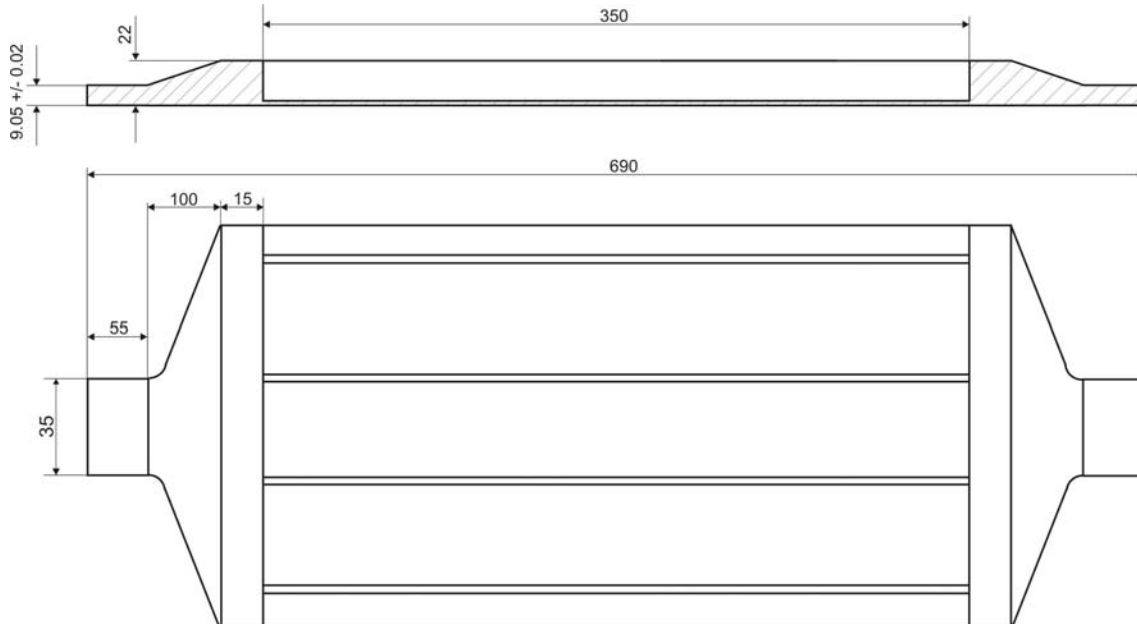
Für die Versuche wird die Versteifungsform A gewählt, wobei sie ohne und mit Fuß ausgeführt ist.

## 6.2 Probengeometrie

Alle Proben haben die Außenmaße 690 x 200 x 22 mm, Abbildung 13 (hier ist stellvertretend die Probenform 1 dargestellt), lediglich in Anzahl und Form der Versteifungen variieren sie. Die beiden äußeren Versteifungen sind bei allen Probenformen gleich hoch (20 mm), nur die Geometrie der Versteifung im Hautanschluß (mit bzw. ohne Fuß) ist angepaßt. Außer den Versteifungen in Probenlängsrichtung gibt es keine weitere Stützung des Bauteils, so daß es sich durch die Belastung frei verformen kann.

Mit Hilfe der Proben sollen zwei grundlegende Szenarien untersucht werden; zum einen eine versteifte Struktur mit Zentralriß, bei der alle Versteifungen intakt sind, zum anderen eine versteifte Struktur mit gebrochenem Mittelstringer. Eine weitere Betrachtung zielt darauf zu sehen, wie sich unterschiedlich hohe Versteifungen in einer Struktur auf den Rißfortschritt auswirken.

Die Proben sind symmetrisch um zwei Achsen, an beiden Enden stehen 55 mm für die Einspannung zur Verfügung. Es folgt eine Länge von 100 mm, die dazu dienen soll, daß sich die Kraft gleichmäßig über die Breite verteilen kann. Die anschließenden 15 mm sollen als Übergang von der Kräfteinleitung zu den Versteifungselementen dienen und einen sauberen Übergang in den Prüfbereich schaffen.



**Abbildung 13:** Allgemeine Abmessungen und prinzipielle Geometrie der Proben

Der Hautanschluß der Versteifungen folgt grundsätzlich zwei Formen. Bei den Probenformen 1 und 3 soll die Versteifung scharf senkrecht, ohne einen ausgeprägten Übergang, auf der Haut stehen. Dies läßt sich so fertigungsgerecht nicht erreichen, der Übergang verläuft eher harmonisch, bedingt

durch den Fräser. Bei Probenform 2 ist die Versteifung mit einem Fuß von 1 mm Dicke versehen, aber auch hier erfolgt der Übergang vom Fuß in die Versteifung kontinuierlich.

### 6.2.1 Probenform 1 (4 Steifen, kein Fuß)

Diese Form besitzt 4 Steifen, die einen Abstand von 60 mm zueinander aufweisen. Der Riß liegt zentral zwischen den Mittelstringern. Es werden zwei unterschiedliche Versteifungshöhen untersucht, wobei für jede Stringerhöhe zwei Proben zur Verfügung stehen. Die Geometrien der Probenform 1 sind in Abbildung A2 zu sehen und in Tabelle 2 zusammengefaßt aufgeführt. Bei den Proben P1-1 und P1-2 besitzen alle vier Versteifungen eine Höhe von 20 mm, bei den Proben P2-1 und P2-2 beträgt die Höhe der beiden inneren Versteifungen 10 mm.

Proben-code	Anzahl der Versteifungen	Versteifungstyp	Höhe der Außenversteifung in mm	Höhe der Innenversteifung in mm	Zustand der Innenversteifungen zu Versuchsbeginn
P1-1	4	I - Profil	20	20	intakt
P1-2	4	I - Profil	20	20	intakt
P2-1	4	I - Profil	20	10	intakt
P2-2	4	I - Profil	20	10	intakt

**Tabelle 2:** Geometrie und Code der Proben der Probenform 1

Die Versteifungen sind als Streifen ausgeführt, haben aber am Übergang zur Haut einen durch den Fräser bedingten Radius von 4 mm. Am Übergang zum Randbereich beträgt dieser 8 mm.

### 6.2.2 Probenform 2 (4 Steifen, mit Fuß)

Bei dieser Form sollen drei unterschiedliche Versteifungshöhen untersucht werden. Für eine innere Versteifungshöhe von 20 mm stehen fünf Proben, für 10 mm und 5 mm Versteifungshöhe jeweils zwei Proben zur Verfügung. Die Geometrien der Probenform 2 sind in Abbildung A3 zu sehen und in Tabelle 3 zusammengefaßt. Bei den Proben P3-1 bis P3-5 ist die Versteifungshöhe aller vier Versteifungen gleich, 20 mm, bei den Proben P4-1 und P4-2 beträgt die Höhe der inneren Versteifungen 10 mm, bei den Proben P5-1 und P5-2 beträgt sie 5 mm.

Die Stringer sind als T-Profil ausgeführt, d.h. sie besitzen einen ausgeprägten Fuß von 1mm Höhe. Daran anschließend folgt, wie bei Probenform 1, ein Anlaufradius von 4 mm zum Versteifungssteg.



Proben-code	Anzahl der Versteifungen	Versteifungstyp	Höhe der Außenversteifung in mm	Höhe der Innenversteifung in mm	Zustand der Innenversteifungen zu Versuchsbeginn
P3-1	4	T-Profil	20	20	intakt
P3-2	4	T-Profil	20	20	intakt
P3-3	4	T-Profil	20	20	intakt
P3-4	4	T-Profil	20	20	intakt
P3-5	4	T-Profil	20	20	intakt
P4-1	4	T-Profil	20	10	intakt
P4-2	4	T-Profil	20	10	intakt
P5-1	4	T-Profil	20	5	intakt
P5-2	4	T-Profil	20	5	intakt

**Tabelle 3:** Geometrie und Code der Proben der Probenform 2

### 6.2.3 Probenform 3 (5 Steifen, Mittelsteife gebrochen, kein Fuß)

Bei dieser Form sollen wieder zwei unterschiedliche Versteifungshöhen untersucht werden, wobei auch hier für jede Versteifungshöhe zwei Proben zur Verfügung stehen. Im Gegensatz zu den Probenformen 1 und 2 besitzt diese fünf Versteifungen, wobei die mittlere Versteifung gebrochen ist. Die Geometrie der Probenform 3 ist in Abbildung A4 zu sehen und in Tabelle 4 zusammengefaßt. Bei den Proben P6-1 und P6-2 ist die Versteifungshöhe aller fünf Versteifungen gleich, 20 mm, bei den Proben P7-1 und P7-2 beträgt die Höhe der drei inneren Versteifungen 10 mm. Die Ausführung der Versteifung entspricht der von Probenform 1.

Proben-code	Anzahl der Versteifungen	Versteifungstyp	Höhe der Außenversteifung in mm	Höhe der Innenversteifung in mm	Zustand der Mittelversteifung zu Versuchsbeginn
P6-1	5	I - Profil	20	20	gebrochen
P6-2	5	I - Profil	20	20	gebrochen
P7-1	5	I - Profil	20	10	gebrochen
P7-2	5	I - Profil	20	10	gebrochen

**Tabelle 4:** Geometrie und Code der Proben der Probenform 3

## 6.3 Versuchsaufbau

Der zugschwellende Versuch bei  $R = 0,1$  wird in einer servohydraulischen Universal-Axial-Torsional-Prüfmaschine MTS 319.25 der Fa. MTS durchgeführt. Zum Einspannen der Proben wird das 646 Hydraulic Collet Grip der Fa. MTS mit serienmäßigen Flachspannbacken benutzt, siehe Abbildung 14.

Zur Dokumentation einzelner Belastungsabschnitte ist auf Stringerseite eine Filmkamera aufgebaut, mit einer Digitalkamera wird das Rißwachstum nach jedem Belastungsintervall dokumentiert.

Die Proben für die statischen Vorversuche sind mit Dehnungsmeßstreifen bestückt, deren Signale mit einer Vielstellenmeßanlage UPM 60 der Fa. Hottinger Baldwin Meßtechnik (HBM) aufgezeichnet werden. Alle anderen Proben bzw. die zyklischen Belastungsversuche sind mit jeweils zwei Rosetten-Dehnungsmeßstreifen bestückt, wobei pro Rosette nur zwei Richtungen, die Längsrichtung und eine 45°-Richtung, aufgezeichnet werden. Auf die Querrichtung, also die Richtung der Rißausbreitung, wird verzichtet, da sie keine für das Untersuchungsziel zusätzlich notwendigen Daten liefert. Diese werden über einen Meßverstärker MGC der Fa. HBM an den mit einem Analog-Digital-Wandler ausgestatteten Steuerrechner der MTS angeschlossen, so daß die Dehnungssignale mit diesem Rechner aufgezeichnet werden.

Das Bauteil kann sich unter Last frei verformen, die Bauteilbiegung wird nicht durch eine Beulstütze o.ä. behindert.



**Abbildung 14:** Versuchsaufbau, Prüfmaschine MTS 319.25 mit eingebauter Probe

## 6.4 Versuchsdurchführung

Vor den Versuchen werden die Testbauteile stichprobenartig auf ihre Maßgenauigkeit überprüft und der weiteren Vorbereitung zugeführt.

Die Regelung der Prüfmaschine erfolgt mit Hilfe eines externen Rechners und der Software „Teststar“, für das scriptbasierte Versuchsprogramm wurde die Software „Testware“ verwendet.

### 6.4.1 Rißeinbringung

Auf Grund unterschiedlicher Anzahl der Versteifungen und unter Berücksichtigung der einzuhaltenen Symmetrie des Bauteils mit Riß ist es erforderlich, dies schon bei der Rißeinbringung zu berücksichtigen. Die Risse der Testteile der Probenformen 1 und 2 (4 Versteifungen) werden dabei wie folgt eingebracht:

- In der Symmetrieebene der Probe, also im Rißmittelpunkt, wird ein Loch mit einem Bohrdurchmesser von 1,0 mm gebohrt.
- Markieren der gewünschten Rißlänge im Hautfeld.
- Zwei gehärtete Stahlblöcke werden rechtwinklig links und rechts von der gewünschten Rißposition gesehen ausgerichtet. Sie werden so weit zusammengebracht, daß sie dabei nur noch einen Schlitz von ca. 0,6 mm Breite freilassen.
- Ein Metallaubsägeblatt wird durch das Bohrloch gesteckt und am Laubsägebügel befestigt.
- Das Sägeblatt wird seitlich durch die beiden Stahlblöcke geführt und der Riß der gewünschten Länge kann in das Bauteil gesägt werden.

Für die Teile der Probenform 3 (5 Versteifungen) muß das Verfahren ein wenig geändert werden, da die Mittelversteifung durchtrennt werden muß. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

- Links und rechts von der mittleren Versteifung, im gleichen Abstand von deren Mittelebene aus, wird jeweils ein Loch mit einem Bohrdurchmesser von 1,0 mm gebohrt.
- Markieren der gewünschten Rißlänge im Hautfeld.
- Zwei gehärtete Stahlblöcke werden rechtwinklig links und rechts von der gewünschten Rißposition gesehen ausgerichtet. Sie werden so weit zusammengebracht, daß sie dabei nur noch einen Schlitz von ca. mm Breite freilassen.
- Ein Metallaubsägeblatt wird durch ein beliebiges Bohrloch gesteckt und am Laubsägebügel befestigt.

- Das Sägeblatt wird seitlich durch die beiden Stahlblöcke geführt und der Riß der gewünschten Länge (1. Rißspitze) kann in das Bauteil gesägt werden, wobei das Sägeblatt senkrecht geführt werden muß.
- Umspannen des Sägeblattes, Weiterführen des Schnittes bis zur gewünschten Rißlänge.
- Anschließend muß das Sägeblatt entfernt, erneut in das erste Bohrloch gesteckt und wieder befestigt werden. Somit läßt sich auch diese Seite auf die gewünschte Rißlänge bringen, 2. Rißspitze.

Die Breite des Risses ist also abhängig von der Größe des Laubsgeblattes (0,9 mm in Sgerichtung, ca. 0,4 mm dick). Bei dem hier verwendeten Blatt läßt sich also eine Rißbreite von ca. 0,4 mm bis 0,5 mm realisieren.

Bei der Einbringung des Risses ist unbedingt auf folgendes zu achten:

1. Die Bohrung/Bohrungen darf/dürfen nicht dort eingebracht werden, wo sich die Rißspitze befinden soll.
2. Bei der Probenform 3 ist ein Umspannen des Sägeblattes aus dem Grund erforderlich, da der Bohrdurchmesser von 1,0 mm gerade ausreicht, daß Sägeblatt hindurchzustecken. Das Drehen des Sägeblattes ist nicht möglich oder nur dann, wenn man ein Ausfransen der Bohrrnder in Kauf nimmt.

Bei der Rißeinbringung ist auf größtmögliche Sorgfalt beim Sägen zu achten. Es muß sichergestellt sein, daß der Riß wirklich in einer Ebene verläuft, symmetrisch um das Bohrloch liegt und die Rißspitzen gerade durch die Bauteildicke verlaufen.

Nach dem Einbringen der Risse werden diese noch einmal mit einem digitalen Meßschieber ABS CALIPER 41 2601/150 der Fa. Garant vermessen. Dabei ergeben sich für die unterschiedlichen Proben die in Tabelle 5 notierten Rißlängen. Diese stellen Mittelwerte dar, die aus jeweils drei Messungen pro Probe gewonnen werden.

I - Stringer - Proben		T - Stringer - Proben	
Probencode	Rißlänge $2a_P$ / mm	Probencode	Rißlänge $2a_P$ / mm
P1-1	11,60	P3-1	11,83
P1-2	11,70	P3-2	11,60
P2-1	12,00	P3-3	11,86
P2-2	11,80	P3-4	11,88
P6-1	11,95	P3-5	11,76
P6-2	12,00	P4-1	11,66
P7-1	11,96	P4-2	11,75
P7-2	12,20	P5-1	11,46
		P5-2	11,50

**Tabelle 5:** Tatsächlich in die Proben eingebrachte Risse

Unterhalb der Risse wird auf der Rückseite (ebene Seite ohne Versteifungen) der Bauteile ein Stahlmaß mit einer Ablesegenauigkeit von 0,5 mm befestigt. Damit ist es möglich, nach jedem Meßzyklus die Rißlänge, getrennt nach linker und rechter Seite, aufzunehmen.

#### 6.4.2 Statische Versuche

Mit den Proben P1-1, P3-1, P3-3 und P6-1 werden vor Einbringung des Risses statische Versuche durchgeführt, mit denen die Kraft, Dehnung und das Verformungsverhalten abgeschätzt werden soll. Bei den Proben mit vier Versteifungen werden zwei Rosetten-Dehnungsmeßstreifen (R-DMS) und vier Längs-Dehnungsmeßstreifen (L-DMS) appliziert, bei der Probe mit fünf Versteifungen zwei R-DMS und fünf L-DMS. Die Rosetten werden auf der inneren Hautfläche, die L-DMS auf den äußeren Hautflächen und auf den inneren Versteifungen aufgebracht. Die genaue Lage und die Ausrichtung der Dehnungsmeßstreifen sind Abbildung A5 und Abbildung A6 zu entnehmen. Der Versuchsablauf kann wie folgt beschrieben werden:

- Anfahren der Ausgangswerte zum Einspannen der Probe
- Ausrichten und Einspannen der Probe, Beginn der Datenaufzeichnung
- Belastung des Bauteils mit einer Belastungsgeschwindigkeit von 1 kN/s bis zur Maximalkraft
- Halten der Maximalkraft über 5 s
- Entlasten der Probe
- Auswerten der Versuchsdaten

#### 6.4.3 Versuche mit zyklischer Last

Mit allen 17 Proben werden Versuche unter zyklischer Last durchgeführt. Die Belastung erfolgt in Blöcken (Zyklen) mit unterschiedlicher Lastwechselzahl, mit einer Frequenz von 2 Hz und einem Belastungsverhältnis  $R = 0,1$ . Alle Versuchsparameter sind in Tabelle B2 zusammengefaßt.

Nach jedem Block wird ein Meßzyklus von zwei Lastwechseln gefahren, bei dem die Kraft, der Weg und die Dehnungen der Rosetten in Längs- und 45°-Richtung aufgezeichnet werden. Bei Maximalkraft wird dann der Riß vermessen. Der Versuchsablauf läßt sich wie folgt darstellen:

- Anfahren der Ausgangswerte zum Einspannen der Probe
- Ausrichten und Einspannen der Probe
- Start eines Belastungsblockes mit einer bestimmten Anzahl von Lastwechseln
- Unterbrechung des Versuches nach Ablauf des Belastungsblockes zum Nullabgleich der Dehnungsmeßstreifen
- Beginn des Meßzyklusses mit zwei Lastwechseln
- Halten der Probe bei Maximalkraft
- Vermessen des Risses und Versuchsdokumentation vervollständigen
- Start eines neuen Belastungsblockes

Zum Wechsel des Belastungsblockes mit einer Lastwechselzahl in einen mit einer anderen Lastwechselzahl muß der Versuch unterbrochen werden und der Versuchsablauf muß von neuem abgearbeitet werden. Die Blöcke unterschiedlicher Lastwechselzahlen sind notwendig, um den Rißfortschritt in Abhängigkeit der Rißlänge besser aufnehmen zu können. Dies ist insbesondere wichtig, wenn der Riß langsam in die Versteifung wächst bzw. der Riß soweit vorangeschritten ist, daß die Versteifung als gebrochen angesehen werden kann.

## 6.5 Versuchsergebnisse

Während der Versuche werden Kraft, Weg, Dehnung und Rißlänge nach jedem Belastungszyklus protokolliert. Die Auswertung wird sich jedoch nur auf die Kraft und das Rißwachstum beziehen. Zum einen, da es sich bei Weg und Dehnung nur um Sekundärgrößen handelt, die zur Beschreibung des Rißwachstums nicht zwingend notwendig sind, zum anderen werden die Dehnungen nur aufgezeichnet, um einen Vergleich zum FE-Modell zu haben. Sollten diese Sekundärgrößen wichtig sein, wird darauf an gegebener Stelle Bezug genommen.

### 6.5.1 Versuchskraft

Alle Versuche werden kraftgesteuert durchgeführt. Bei allen durchgeführten statischen Versuchen wird die Versuchskraft erreicht. Für die Versuche unter zyklischer Belastung wird eine Regleroptimierung des Reglers der Prüfmaschine durchgeführt. Diese gefundenen Reglerparameter werden dann bei allen Versuchen verwendet.

Die Versuchskraft ist so gewählt, daß in der Rißebeine in der Haut eine Spannung von ca. 100 MPa erreicht wird. Über die Querschnittsfläche der einzelnen Proben errechnet sich diese. Nach Auswertung aller Daten der einzelnen Meßzyklen im Versuch werden die Kraftdaten für jede Probe gemittelt, um eine Aussage über die während der Versuchszeit aufgeprägte Kraft zu erhalten. Eine Zusammenstellung der Daten liefert Tabelle 6.

Die während der Versuchszeit aufgeprägten Kräfte erreichen zwischen 98,55 % der Sollkraft (Probe P2-2) und 99,62 % (Probe P3-5). Der sehr gute Wert bei P3-5 liegt darin begründet, daß nur ein Meßzyklus gefahren werden konnte, während bei P2-2 16 Zyklen gefahren werden. Demzufolge ist auch die Streuung der Meßwerte größer.

Allgemein kann aber festgehalten werden, daß die Zielkräfte sehr gut erreicht wurden. Mit diesen real erreichten Kräften kann nun eine reale Spannung im Rißquerschnitt bestimmt werden, die wiederum mit den gemessenen Dehnungen korreliert. Dies ist notwendig, um Versuch und Simulation miteinander vergleichen zu können.

Probencode	Anzahl der Meßzyklen	Durchschnittliche Versuchskraft / kN
P1-1	24	62,74
P1-2	27	62,37
P2-1	16	58,67
P2-2	16	58,14
P3-1	14	67,41
P3-2	13	67,35
P3-3	6	54,72
P3-4	3	62,73
P3-5	1	65,75
P4-1	22	63,56
P4-2	27	63,49
P5-1	22	61,41
P5-2	24	61,38
P6-1	22	67,45
P6-2	31	67,24
P7-1	37	61,40
P7-2	36	61,37

**Tabelle 6:** Durchschnittliche Versuchslast der einzelnen Proben

### 6.5.2 Rißwachstum

Im folgenden soll das Rißwachstum der unterschiedlichen Probenformen dargestellt werden. In Kapitel 7.3 werden dann die Ergebnisse aller Probenformen und Analyseverfahren miteinander verglichen. Die Rißlängen sind für linke und rechte Rißspitze separat erfaßt worden. Zu bestimmten Zeitpunkten gab es bei der Probenvermessung größere Abweichungen der Rißlängen zwischen beiden Rißspitzen (bis zu 3 mm), die sich jedoch im nachfolgenden Zyklus wieder angeglichen haben. Aus diesem Grund sollen im weiteren nur die aus linker und rechter Rißspitze gemittelten Rißlängen betrachtet werden. Dies macht auch deshalb Sinn, da für die analytischen und FE-Rechnungen nur von symmetrischen Betrachtungen ausgegangen wird und die Vergleichbarkeit sonst nicht gegeben ist.

In Abbildung A7 sind die aus linker und rechter Rißlänge gemittelten Versuchsergebnisse der 17 Probekörper graphisch dargestellt. Die für die einzelnen Proben ermittelte Rißlänge mit den dazugehörigen Lastwechselzahlen sind in der Tabelle B3 zusammengefaßt.

Ein Problem, welches sich bei allem Versuchen dieser Art stellt, ist, daß der eingebrachte Riß nicht sofort mit dem Aufprägen der Last wächst. Der Beginn des Rißwachstums ist schwer vorhersagbar, da er von einigen Faktoren abhängt und diese nicht greifbar sind. Dies können z.B. die Rißspitzen sein, die durch den Sägeschnitt so beeinflusst werden, daß sie in gewisser Weise das Wachstum verhindern, das Materialgefüge kann an genau der Rißspitze so sein, daß es eine rißwachstumsverzögernde Wirkung hat, Schwankungen in der Wandstärke etc. All diese Faktoren lassen sich erst nach einer gewissen Belastungsanzahl überwinden, die nicht abschätzbar ist und die von Probe zu Probe

unterschiedlich sein kann, obwohl sie gleiche Geometrien aufweisen. Dies muß berücksichtigt werden, wenn man die Ergebnisse auswertet.

#### 6.5.2.1 Probenform 1

In Abbildung A8 sind die unkorrigierten, gemittelten Versuchsergebnisse der Proben P1-1, P1-2, P2-1 und P2-2 dargestellt. Deutlich sichtbar ist das unstete Rißwachstum bei P1-1 zu erkennen. Um einen besseren Kontrast zu haben, ist die Seite, auf der der Riß vermessen wird, dunkel eingefärbt. Die Rißöffnung ist jedoch so klein, daß der Rißfortschritt nicht erkannt und so irrtümlich kein Rißwachstum festgestellt wird. Mit größer werdendem Riß ändert sich dies, woraus sich der Sprung der Rißlänge zwischen den Lastwechseln 21500 und 27800 erklärt. Bis auf Probe P2-1 liegen trotz unterschiedlicher Geometrie die Kurven sehr dicht beieinander. Es ist erkennbar, daß das Rißwachstum nicht sofort bei Versuchsbeginn einsetzt, sondern mehrere tausend Lastwechsel notwendig sind, bevor es zu einem Wachsen des Risses kommt. Dies ist damit erklärbar, daß sich die Struktur zunächst einmal einschwingen und der Anfangswiderstand der Rißspitzen (Korngrenzen des Materials) des eingebrachten Risses überwunden werden muß. Daher ist es für die Auswertung notwendig, die Kurven um eine bestimmte Anzahl von Lastwechseln zu korrigieren. Für die Proben P1 sind dies 6300 Lastwechsel, für die Probe P2-1 4000 und für P2-2 5000 Lastwechsel. Diese korrigierten Kurven sind in Abbildung A9 dargestellt.

Auch mit der korrigierten Darstellung ist kein eindeutiger Trend der Kurven erkennbar. Bis zum Beginn der Versteifung liegen die Kurven sehr dicht beieinander, dies ändert sich, wenn der Riß langsam in die Versteifung hineinwächst. Normal wäre es zu erwarten, daß der Riß in einer der beiden Probengeometrien schneller wächst als in der anderen, da die Steifigkeit der Proben auf Grund unterschiedlicher Stringerhöhen verschieden ist. Dies bestätigen die Ergebnisse jedoch nur teilweise. Läßt man Probe P2-1 außen vor, ist man geneigt zu sagen, daß die unterschiedliche Geometrie bei dieser Versteifungsform keinen Einfluß hat. Das anzunehmen ist sicherlich nicht richtig, jedoch läßt sich auf Grund der begrenzten Probenanzahl keine fundierte Annahme aufstellen. Bei der Probe P2-2 riß bei einer Rißlänge von  $2a = 70$  mm die untere Probeneinspannung. Dies ist auf einen Fehler beim Spannen der Probe zurückzuführen.

Allen Proben gemein ist, daß der Riß, sobald er den Steg der Versteifung überwunden hat (also  $a_P > 31$  mm), sehr rasch wächst und innerhalb kurzer Zeit zum Versagen der Probe führen würde. Da dies nicht Ziel der Versuche ist, wird ab einer bestimmten Rißlänge der Versuch beendet.

#### 6.5.2.2 Probenform 2

Insgesamt neun Proben der Form 2 wurden getestet, deren Ergebnisse in Abbildung A10 dargestellt sind. Die Geometrien der Proben P3 sind identisch und die Ergebnisse sind der Übersichtlichkeit halber noch einmal in Abbildung A11 separat abgebildet. Da es bei P3-1 und P3-2 nach Erreichen des Stringers zum Abriß jeweils der unteren Einspannung kam, wurden drei weitere Testteile untersucht, wobei bei P3-5 die Spannung geringfügig, bei P3-4 merklich verringert wurde, um das vorherige Versagen auszuschließen. Trotzdem kam es bei diesen Proben zu einem sehr frühen Versagen der Probe durch Verlust einer Einspannung, so daß die Ergebnisse dieser Proben keine Aussagen



liefern und nicht weiter betrachtet werden. Daraufhin ist bei Probe P3-3 die Belastung um ca. 20 Prozent reduziert worden, aber auch hier versagte die Einspannung. Eine Erklärung dafür ließ sich nicht finden, zumal der Hersteller der Proben versichert hat, daß die Proben P3-3 bis P3-5 aus dem gleichen Material und nach dem gleichen Fertigungsprozeß hergestellt wurden, wie die Proben P3-1 und P3-2. Auf Grund dieser Tatsachen werden die Proben P3-3, P3-4 und P3-5 nicht weiter betrachtet, die Proben P3-1 und P3-2 liefern nur bedingt nutzbare Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Proben P4 und P5 sind in Abbildung A12 noch einmal einzeln gezeigt, wobei die Ergebnisse der Abbildung A10 bis Abbildung A12 unkorrigiert vorliegen. Da auch hier die Aussagen von Kapitel 6.5.2.1 bezüglich der Rißinitiierung gültig sind, sind die Proben P3-1, P3-2, P4-1 und P4-2 um 3000 Lastwechsel, P5-1 und P5-2 um jeweils 2000 Lastwechsel korrigiert. Die Ergebnisse dieser Korrektur sind in Abbildung A13 dargestellt. Auf Grund des frühzeitigen Versagens der Proben P3 (Es kann nicht genau gesagt werden bzw. es läßt sich nicht abschätzen, ab welcher Lastwechselzahl das Versagen der Proben begann.) und der Streuung der Versuchsergebnisse läßt sich auch hier kein eindeutiger Trend ablesen. Jedoch zeigt sich auch hier, daß, nachdem der Riß den Versteifungssteg überwunden hat (also  $a_p > 31$  mm), der Riß innerhalb kurzer Zeit sehr groß wird und zum Versagen der Probe führen würde.

### 6.5.2.3 Probenform 3

Im Gegensatz zu den Proben 1 und 2 mit gleichen Versteifungsformen zeigen die Proben P6 und P7 recht einheitliche Ergebnisse (Abbildung A14). Die Ergebnisse von P6 streuen leicht, grenzen sich jedoch eindeutig von denen der Probe P7 ab. Auffällig ist hier, daß sofort mit Versuchsbeginn ein Wachsen des Risses feststellbar ist. Dies liegt darin begründet, daß durch den gebrochenen Mittelstringer der Riß eine hohe Belastung erfährt, der sofort zum Wachsen des Risses führt. Bei Probe P7 scheint es, als ob man von einem sofortigen Rißwachstum nicht sprechen kann. Es liegt jedoch eher daran, daß man bei sehr kleinen Rißlängen die Schwierigkeit hat zu unterscheiden, ob der Riß gewachsen ist oder ob es sich um die Frässpur des Fräskopfes handelt.

Schon in der Anfangsphase des Versuches zeigt sich, daß sich der Riß sehr schnell ausbreitet und die Ergebnisse nicht korrigiert werden müssen, um sie miteinander vergleichen zu können.

Auf Grund der geringeren Biegung wächst der Riß in P7 langsamer als in P6. Wie auch bei den anderen Formen zeigt sich ein sehr schnelles Rißwachstum, sobald der Riß den Versteifungssteg überwunden hat (also  $a_p > 46$  mm). Es läßt sich sogar auf Grund der gegebenen Geometrie und der Belastung sagen, daß das Bauteil unmittelbar danach versagt, wenn der Riß aus dem Versteifungsfuß läuft, d.h die Rißlänge  $a_p > 55$  mm ist. Diese Annahme bestätigt der Versuch mit der Probe P6-1, die innerhalb weniger Lastwechsel versagte (Durchreißen der Platte), nachdem der Riß den Stringerfuß verlassen hatte. Das Bauteil besitzt dann auf Grund fehlender Versteifungselemente keinerlei Möglichkeit den Riß aufzuhalten, selbst die beiden außenliegenden Versteifungen haben keinen Einfluß, d.h die kritische Rißlänge ist erreicht.

### 6.5.2.4 Fazit

Einen eindeutigen Trend aus den Versuchsergebnissen abzulesen ist schwierig, da nur eine begrenzte Anzahl von Proben gleicher Geometrie zur Verfügung standen (bis auf Probe P3 jeweils nur zwei

Teile pro Geometrie). Daneben macht natürlich auch die Streuung der Ergebnisse eine generelle Aussage schwierig. Um dies dennoch zu versuchen, sind noch einmal in Abbildung A15 alle korrigierten Versuchsergebnisse in einem Bild dargestellt. Daraus lassen sich folgende Aussagen ableiten:

1. Aus den Versuchen kann auf Grund der Streuung der Ergebnisse kein eindeutiger Schluß gezogen werden, welchen Einfluß eine Änderung der Versteifungshöhe bei ansonsten gleicher Geometrie bewirkt. Nur bei Probenform 3 zeigt sich eindeutig, daß eine geringe Versteifungshöhe zu einem langsameren Rißwachstum führt, da die Belastung für den Riß, somit auch der SIF, geringer ist und das Bauteil länger die Last erträgt.
2. Ein wie bei den Proben P3, P4 und P5 ausgeprägter Versteifungsfuß führt zu einer Verlangsamung des Rißwachstums.
3. Ein Szenario, bei dem wie bei den Proben P6 und P7 die mittlere Versteifung gebrochen ist, führt zu einem sehr schnellen Rißwachstum und stellt einen sehr ungünstigen Ausgangszustand dar.
4. Hat der Riß die geometrische Mitte der Versteifung überwunden, kommt es zu einem erhöhten bzw. schnelleren Rißwachstum. Sobald der Riß den Versteifungsfuß verläßt (also  $a_P > 35$  mm bei P1/P2,  $a_P > 37,5$  mm bei P3 bis P5 bzw.  $a_P > 50$  mm bei P6/P7), kommt es zu einem rapiden Wachstum des Risses, in dessen Folge nach wenigen Lastwechseln die Probe versagt.
5. Der Rißfortschritt ist für linke und rechte Rißspitze separat aufgenommen worden. Es wurden nach den einzelnen Belastungszyklen Unterschiede im Wachsen des Risses zwischen linker und rechter Rißspitze festgestellt. Dies sind Momentaufnahmen, wobei sich die Differenzen in der Regel im anschließenden Lastzyklus wieder ausgeglichen haben. Dies konnte im Versuch auch optisch verfolgt werden. Es läßt sich abschließend sagen, daß linke und rechte Rißspitze über die Versuchsdauer und unabhängig von der Probengeometrie in gleicher Weise wachsen.
6. Bei allen Proben hat sich gezeigt, daß die Risse während der Versuche prinzipiell in ihrer Ebene senkrecht zur Belastungsrichtung wachsen. Auch vorhandene Fräsriefen geringer Tiefe haben nur kurzzeitig Einfluß auf die Richtung des Rißwachstums und bewirken keine signifikanten Beeinträchtigungen der Ergebnisse.

## 7 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse der Versuche, des analytischen Modells und der FE-Rechnung verglichen werden. Dazu ist es jedoch erst einmal nötig, alle Eingangsdaten und die für das analytische Modell notwendigen Überlegungen darzulegen. Dies beinhaltet die Materialdaten, Versuchsparameter und Parameter für das analytische Modell ebenso wie die Annahmen zur Festlegung der Flächenträgheitsmomente der Stringer und der Anfangsrißlänge im Stringer. Wie bereits in Kapitel 6.5.2.2 dargelegt, sollen die Proben P3-3 bis P3-5 nicht berücksichtigt werden.

### 7.1 Eingangsdaten

Die Eingangsdaten können in zwei Gruppen eingeteilt werden; konstante und variable Größen. Dies sind z. B. Materialkennwerte, Geometriedaten und Belastungen bzw. Randbedingungen.

#### 7.1.1 Konstante Größen

Bei den konstanten Größen, die im folgenden näher beschrieben werden sollen, handelt es sich um Materialkennwerte, Eingabewerte für das analytische Modell (wie z.B. Anzahl der Lastübertragungspunkte und deren Position) und die Bestimmung der Anfangsrißlänge im Stringer, wenn dieser als angerissen betrachtet wird.

Die Eingabewerte für den analytischen Ansatz werden zuerst einmal als konstant angesehen, werden im weiteren aber auch für weiterführende Untersuchungen als Parameter variiert. An geeigneter Stelle wird dann darauf näher eingegangen.

##### 7.1.1.1 Werkstoffkennwerte

Als eine Konstante in allen Betrachtungen kann selbstverständlich das Material angesehen werden. Wie bereits erwähnt, handelt es sich um den Werkstoff 3.4364 T7351 (7075 T7351), der sich durch die Kennwerte Elastizitätsmodul, *Forman*-Konstante und *Forman*-Exponent sowie die Reißfähigkeit auszeichnet (Tabelle 7). Weiterhin kann gesagt werden, daß die Proben aus einer Platte gefräßt sind, für die die angegebenen Kenngrößen zutreffen.

Kenngröße		Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	$E_{Zug}$	71000	MPa
FORMAN – Konstante	$C$	$1,34 \cdot 10^{-8}$	---
FORMAN – Exponent	$m$	2,78	---
Rißzähigkeit	$K_C$	1765	N/mm <sup>3/2</sup>

**Tabelle 7:** Werkstoffkennwerte für die Aluminiumlegierung 3.4364 T7351, nach [1]

### 7.1.1.2 Größen des analytischen Modells

Weiterhin als konstant kann die Geometrie von zwei gleichen Proben angesehen werden. Da die im Versuch verwendeten Proben integral gefräst und auch das FE-Modell als integral modelliert werden, sind noch einige Größen für das analytische Modell festzulegen. Diese werden für alle Modelle benutzt, werden aber auch als Parameter bei weiteren Studien variiert. Dies sind die Position des ersten Lastübertragungspunktes, der Abstand der Lastübertragungspunkte zueinander, die Anzahl der Lastübertragungspunkte sowie deren Durchmesser. Die Werte dafür sind in Tabelle 8 zusammengefaßt.

Kenngröße		Wert	Einheit
Abstand der beiden Lager	$l$	350	mm
Anzahl der Lastübertragungspunkte auf halber Einspannlänge	$N$	15	Stück
y-Position des ersten Lgspunktes	$y_l$	1,40	mm
Abstand der Lastübertragungspunkte zueinander	$\Delta y$	12,30	mm
Durchmesser der Lastübertragungspunkte	$d$	$0,5 \cdot t_S$	mm

**Tabelle 8:** Konstante Größen der analytischen Betrachtung

Anzumerken ist, daß für den Durchmesser max. zwei Nachkommastellen angegeben werden. Ergeben sich aus der Bestimmung des Nietdurchmessers nach Tabelle 8 mehr Stellen, hat es sich als vorteilhaft herausgestellt, die Werte für die Probenformen 1 und 2 aufzurunden, für Probenform 3 abzurunden. Mehr als zwei Nachkommastellen ziehen numerische Ungenauigkeiten nach sich und sollten deshalb vermieden werden.

### 7.1.1.3 Anfangsrißlänge der Versteifung

Ein besonderes Augenmerk soll der Festlegung der Anfangsrißlänge der Versteifung zukommen. Bei dem analytischen Modell wird der Riß als nur in der Plattenbene bzw. nur im Stringer betrachtet. Es ist also zu entscheiden, ab welcher Rißlänge in der Haut der Stringer als angerissen betrachtet wird. Als Grundlage zur Festlegung soll die Probe P1 herangezogen werden. Dabei spielen die

bei den Versuchen gewonnenen Erkenntnisse und gemachten Beobachtungen eine Rolle. Diese sind zwar nur qualitativ aufgenommen, reichen aber vorerst aus.

Ausgangspunkt ist die in Kapitel 7.2 geschilderte Modellierung der Versteifung, wobei ein realer Stringer als aus drei Einzelstringern bestehend modelliert wird. Zunächst wird diejenige Rißlänge  $a_P$  der Haut bestimmt, ab der der Stringer als angerissen betrachtet werden soll. Da keine elliptischen Eckenrisse bzw. Anrisse im Dreidimensionalen aus Gründen der Einfachheit angenommen werden sollen, müssen die Risse in Haut und Stringer jeweils in ihrer Ebene betrachtet werden. Das Problem wird auf den zweidimensionalen Fall begrenzt, wobei aber eine Abhängigkeit der Stringer-anfangsrißlänge von der Rißlänge in der Haut besteht. Dabei sind folgende Überlegungen zugrunde gelegt worden:

Die Mittelposition des ersten Stringers bei Probe P1 ist  $x_{Stringermittle}$ . Es wird angenommen, daß ab einer Hautrißlänge  $a_{P, Sanriss}$  von 97,5 Prozent des Mittelpunktes der ersten Versteifung der Stringer als angerissen gilt, Gleichung (7-1).

$$a_{P, Sanriss} = 0,975 \cdot x_{Stringermittle} \quad (7-1)$$

Mit der aus (7-1) gewonnenen Rißlänge läßt sich nun bestimmen, wie weit der Riß in der Haut bereits unter die Versteifung gewachsen ist. Dieser Wert wird mit  $\Delta x$  bezeichnet und läßt sich mit Gleichung (7-2) bestimmen.

$$\Delta x = a_{P, Sanriss} - \left( x_{Stringermittle} - \frac{t_S}{2} \right) \quad (7-2)$$

Dieser gewonnene Wert bedeutet nun, daß der Stringer mit dem Wert  $\Delta x$  nicht mehr mit der Haut verbunden ist. Mit dieser Größe gilt es ein  $a_{S, start}$  zu bestimmen, so daß eine Abhängigkeit von Hautrißlänge und Anfangsrißlänge im Stringer gegeben ist.

Während der Versuche wurde beobachtet, daß der Riß in der Haut etwas schneller wächst als in der Versteifung. Dies konnte während der Versuche nicht quantitativ, sondern nur qualitativ festgehalten werden. Da diesem Verhalten eine untergeordnete Rolle zugemessen wurde, ist keine Anstrengungen unternommen worden, dieses Verhalten auch quantitativ zu erfassen. Es hätte einer sehr zeitaufwendigen und genau geplanten Meßmethode bedurft, die zuvor an einer anderen Probe hätte verifiziert werden müssen.

Um den Effekt des unterschiedlich schnellen Rißwachstums zu berücksichtigen, wird der in Gleichung (7-2) ermittelte Wert herangezogen und mit einem Abminderungsfaktor multipliziert. Dabei wird angenommen, daß der Anfangsriß im Stringer nur 97,5 Prozent der Länge des Risses in der Haut unter dem Stringer (Wert  $\Delta x$ ) beträgt. Dieser Zusammenhang ist mit Gleichung (7-3) ausgedrückt.

$$a_{S, start} = 0,975 \cdot \Delta x \quad (7-3)$$

Dabei soll weiterhin angenommen werden, daß der Riß im Stringer selbst durch die gesamte Stringerdicke geht. Dies ist insofern zulässig, da für das analytische Berechnungsmodell des Rißwachstums nur 2-D-Verfahren angewendet werden.

Der in (7-2) berechnete Wert für  $\Delta x$  wird für jede modellierte Versteifung benutzt, um die Anfangsrißlänge des jeweiligen Stringers zu bestimmen. Da aus der Berechnung des Rißwachstums in der Regel  $a_{P, \text{Sanriss}}$  ungleich der Vorschrift nach (7-1) ist, wird diese wie so abgeändert, wie sie in nachfolgender Gleichung (7-1a) zu sehen ist.

$$a_{P, \text{Sanriss}} \geq 0,975 \cdot x_{\text{Stringermite}} \quad (7-1a)$$

Für den Riß in der Haut und im Stringer wird jeweils separat mit Hilfe des Rißfortschrittsgesetzes ein neues  $a$  bestimmt, so daß im weiteren beide Risse unabhängig voneinander wachsen, aber nach gleicher Gesetzmäßigkeit.

### 7.1.2 Variable Größen

Als variable Größen sollen die aufgefaßt werden, die sich von Probentyp zu Probentyp unterscheiden. Dabei handelt es sich um die Parameter angelegte Spannung bzw. aufgeprägte Kraft und die eingebrachte Rißlänge. Während Spannung und Kraft geometriebedingt festgelegt werden, ergibt sich die Rißlänge  $2 \cdot a_P$  aus dem Geschick heraus, mit der Hand so genau wie möglich die anvisierten 12 mm zu sägen.

Die in den Versuchen für die jeweilige Probe aufgeprägten Kräfte sind in Tabelle 6 des Kapitels 6.5.1 zusammengefaßt zu finden. Die sich daraus für das FE-Modell ergebenden Kräfte werden durch Mittelwertbildung der Kräfte der beiden gleichen Proben gefunden.

Die eingebrachten Rißlängen  $a_P$  sind in Tabelle 5, Kapitel 6.4.1, zusammengefaßt. Die für die Rechnungen ermittelten Anfangsrißlängen bestimmen sich wie folgt: Die kleinste Rißlänge beider Proben einer Geometrie wird als Ausgangsrißlänge gewählt. Der Grund dafür ist, daß der Riß im Versuch nicht unbedingt stetig wachsen muß, d.h. der Riß durch bestimmte Umstände mal schneller oder langsamer wachsen kann. In dem analytischen Modell bzw. in der FE-Rechnung ist immer ein stetiges Wachstum vorhanden, so daß dieses Wachstum immer von der Ausgangsrißlänge abhängig ist. Um diesem Rechnung zu tragen, wird also immer der kleinste Riß verwendet. In Tabelle 9 sind die Spannungen bzw. Kräfte und Anfangsrißlängen der einzelnen Proben zusammengefaßt:

Probencode	Anfangsrißlänge $a_{P, \text{init}} / \text{mm}$	Spannung, analytisches Modell $\sigma / \text{MPa}$	Kraft, FE-Rechnung $F / \text{kN}$
P1-1, P1-2	5,80	101,0	62,56
P2-1, P2-2	5,90	101,0	58,41
P3-1, P3-2	5,80	98,0	67,38
P4-1, P4-2	5,83	98,0	63,53
P5-1, P5-2	5,73	98,0	61,40
P6-1, P6-2	5,98	101,0	67,34
P7-1, P7-2	5,98	101,0	61,40

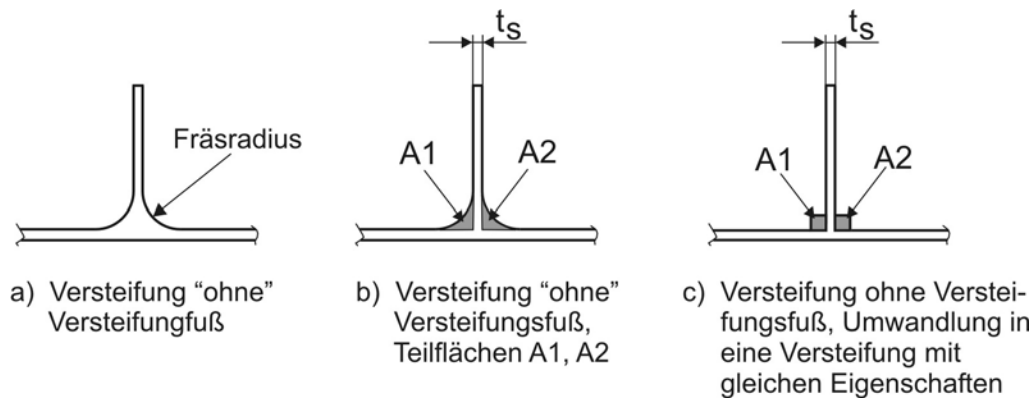
**Tabelle 9:** Variable Größen der analytischen und FE-Rechnung

## 7.2 Modellierung der Versteifung

Für die Modellbildung des Stringers sind hauptsächlich dessen Flächenträgheitsmoment (FTM), der Schwerpunkt und die Fläche von Bedeutung. Aus der allgemeinen Betrachtung von Stringerformen (Kapitel 6.1) leitet sich die in den Versuchen benutzte Form ab und es wird dargestellt, wie diese für die weiteren Berechnungen umgesetzt ist.

Zunächst soll das Vorgehen für eine Versteifung ohne ausgeprägten Versteifungsfuß dargestellt werden. Abgeleitet davon wird das Vorgehen für eine Versteifung mit Fuß erläutert.

In diesem Fall steht die Versteifung senkrecht auf der Haut. Bedingt durch den Fräskopf findet man am Übergang Haut-Versteifung keine scharfe Kante, sondern der Übergang erfolgt kontinuierlich in Form eines Viertelkreises, dessen Radius vom Fräskopf abhängig ist, siehe Abbildung 15a.

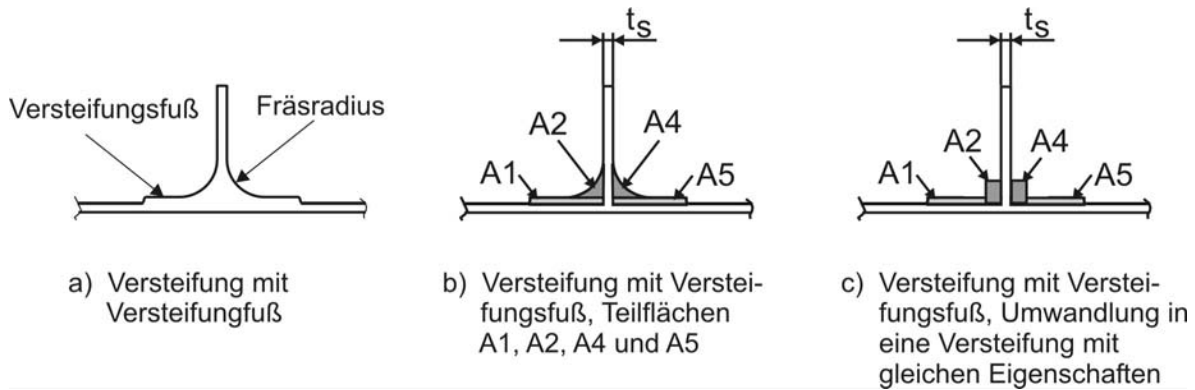


**Abbildung 15:** Versteifung ohne ausgeprägten Versteifungsfuß und dessen Parameter

Die Modellierung einer in Abbildung 15a dargestellten Versteifung ist mühsam und nicht geeignet für schnelle Lösungen. Daher soll die Versteifung möglichst vereinfacht werden, wobei darauf zu achten ist, daß das FTM, die Fläche des realen Stringers und der Schwerpunkt so exakt wie möglich abgebildet werden. Die einfachste Form zur Bestimmung des FTM einer solchen Versteifung ist, daß man die Fläche unter den gekrümmten Kurven (Flächen A1 und A2, Teilbild b) in Rechtecke bzw. Quadrate überführt. Dazu wird die Versteifung in drei Teilkörper unterteilt: den Teilkörper der Fläche A1, den Teilkörper der Breite  $t_s$  und den Teilkörper der Fläche A2. Hierbei ist nicht so sehr die einzelne Fläche von belang, sondern der gesamte, aus drei Teilkörpern aufgebaute Stringer mit seinen Eigenschaften, d.h. der Stringer in Abbildung 15c muß die Eigenschaften des realen Stringers (Abbildung 15b) besitzen. Mit diesen Annahmen und Voraussetzungen läßt sich die Versteifung in einen relativ leicht zu behandelnden Stringer umformen.

In Abbildung 16a ist ein integral gefräster Stringer mit ausgeprägtem Fuß dargestellt. Der Übergang vom Fuß zum senkrechten Teil der Versteifung ist durch den Fräsradius bestimmt. Dabei stellen die Teilflächen A1 und A5 die Flächen des eigentlichen Fußes dar, A2 und A4 die Flächen, die durch den Fräser bestimmt werden und  $t_s$  bestimmt die Breite des senkrechten Teils der Versteifung,

Abbildung 16b. Auch hier wird die Versteifung in einfache Teilgeometrien zerlegt, wobei die Anteile der Flächen A1 und A5 unter den Flächen A2 und A4 diesen zugeordnet werden, Abbildung 16c. Ansonsten gilt gleiches Vorgehen wie bei der Versteifung ohne Fuß.



**Abbildung 16:** Versteifung mit ausgeprägtem Versteifungsfuß und dessen Parameter

### 7.3 Vergleich der Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse der Versuche mit denen aus der analytischen und der FE-Rechnung verglichen werden. Um auch hier die Ergebnisse verständlicher und übersichtlicher präsentieren zu können, soll dies zunächst wieder getrennt für die Probenformen geschehen, bevor abschließend ein Vergleich aller Proben stattfindet und um eine Aussage über günstige bzw. ungünstige Geometrien bezüglich des Rißfortschrittes zu treffen.

Wie bereits beschrieben, werden für den Vergleich die korrigierten Ergebnisse aus den Versuchen verwendet. Die für das analytische Modell verwendeten Parameter sind in Tabelle B4 zusammengefaßt dargestellt, die aufgeprägte Belastung ist jene, die in Tabelle 9 notiert ist.

Die FE-Rechnungen erfolgen mit dem Solver ABAQUS 6.4-1, die analytische Berechnung erfolgt mit COMPAQ DIGITAL™ Visual Fortran, Standard Edition, Version 6.0.

#### 7.3.1 Probenform 1

Wie bereits in Kapitel 6.5.2.1 gezeigt, liegen die Versuchsergebnisse für beide Stringerhöhen dicht beieinander. Der Übersichtlichkeit halber werden zunächst beide Geometrien getrennt voneinander betrachtet, um abschließend miteinander verglichen zu werden.

Zunächst wird die Geometrie mit vier gleich großen Versteifungen betrachtet. Das Ergebnis für die Probe 1 ist in Abbildung A16 zu sehen. Deutlich sichtbar ist, daß die Ergebnisse bis zu einer Riß-



länge von 20 mm sehr gut übereinstimmen und kaum Unterschiede festzustellen sind. Dies trifft für das analytische Modell als auch für die FE-Rechnung zu.

Anschließend trafen die Kurven auseinander. Der Vergleich von Versuch und analytischem Modell zeigt ein zu schnelles Wachstum des Risses bei der analytischen Rechnung. Dies liegt am Modell selbst. Die Modellierung erfolgt nach Kapitel 7.2, d.h. der Beginn des Stringers beginnt später als im realen Bauteil, da die Fläche des Fräsradiuses durch ein Quadrat abgebildet wird. Wie bei den Versuchen, ist ab Beginn der Versteifung deren Einfluß spürbar. Das zeigt sich deutlich am Kurvenverlauf mit einer sich signifikant reduzierenden Steigung. Da im Versuch der Fräsradius schon eine verzögernde Wirkung hat, verlangsamt sich natürlich auch das Rißwachstum eher. Weiterhin bestätigt der Vergleich die Richtigkeit der in Kapitel 7.1.1.3 getätigten Annahmen zur Festlegung der Anfangsrißlänge im Stringer.

Die Versuche enden bei einer Rißlänge von 51 mm. Der Versuch ist an diesem Punkt abgebrochen worden, da es nicht zu einem Durchriß der Platte kommen sollte. Es läßt sich jedoch ganz gut ablesen, daß die Kurven ab einer Rißlänge von ca. 39 mm nahezu parallel verlaufen bzw. eine ähnliche Steigung aufweisen, so daß auch der Bereich nach Durchtrennung der Versteifung gut abgebildet wird.

Es ist im Versuch zu beobachten, daß die Versteifung, obwohl sie stofflich zumindest noch teilweise intakt war, keinen oder nur noch einen sehr geringen Beitrag zur Steifigkeit des Bauteils beiträgt und ab einer gewissen Rißlänge als gebrochen angesehen werden kann.

Der Vergleich von Versuch und FE-Rechnung zeigt ein ähnliches Bild wie der Vergleich mit dem analytischen Modell. Auch bei der FE-Lösung kommt die rißverzögernde Wirkung der Versteifung erst später zum Tragen. Neben der bereits o.g. Aussage tritt hier ein zweiter Punkt in Erscheinung, der die Abweichung vom Versuch erklärt. Es bestätigt die Aussage von [29], die sagt, daß über die Dicke mehrere Elemente notwendig sind, um den großen Spannungsgradienten richtig abzubilden. Außerdem zeigen die Oberflächenkonturen auffällige Abweichungen zu den übrigen Konturen. Dieses Verhalten tritt erst dann auf, wenn sich das Verformungsverhalten grundlegend ändert. Dies trifft dann zu, wenn der Riß in die Nähe der Versteifung kommt.

Die Ergebnisse von analytischem Modell und FE-Rechnung zeigen gute Übereinstimmung, wobei durch die Modellierung die Ergebnisse aus der FE-Rechnung bis zur Versteifung geringfügig schlechter sind als die des analytischen Modells, das Verhalten der Probe nach Durchdringung der Steife durch das 3D-FE-Modell besser wiedergegeben wird. Es zeigt sich, daß die zweidimensionale Behandlung des dreidimensionalen Problems möglich ist, sehr gute Vorhersagewerte liefert und der Aufwand zur Erlangung der Ergebnisse wesentlich geringer ist, als dies mit der FE-Lösung möglich wäre.

Ein ähnliches Bild zeigt die Probe P2, deren Mittelstringer die halbe Höhe der Außenstringer aufweist, Abbildung A17. Der Bereich bis zur Versteifung zeigt in etwa das gleiche Erscheinungsbild wie bei Probe P1, wobei der Bereich bis zu einer Rißlänge von  $a_P = 22$  mm die FE-Lösung ein etwas zu geringes Wachstum voraussagt. Lassen sich die Ergebnisse mit Probe P2-1 gut in Einklang

bringen, sind die Abweichungen zu Probe P2-2 spürbar, wobei auch die Versuchsergebnisse zwischen beiden Proben sehr streuen. Eine Ursache auf versuchstechnischer Seite kann nicht festgestellt werden.

Ein Vergleich zwischen analytischer Rechnung und dem Versuch zeigt, daß der theoretische Ansatz sehr gut das Ergebnis von Probe P2-1 wiedergibt, es jedoch größere Abweichungen zu Probe P2-2 gibt. Da die Versuchsergebnisse beider Proben sehr stark streuen, ist eine Aussage schwierig. Im Anfangsstadium der Probe, also bei kleiner Rißlänge, zeigt die analytische Lösung ein etwas zu geringes Rißwachstum, aber mit Erreichen der Versteifung nähern sich Versuch und Theorie wieder an, auch der Bereich nach der Versteifung wird gut abgebildet, ähnlich wie bei Probe 1. Der Bereich um den Stringersteg (zw. 43000 und 52000 Lastwechseln) zeigt ein zu langsames Rißwachstum voraus. Dies resultiert daraus, daß der Stringer nur als angerissen modelliert werden kann, wenn der Riß in der Haut unter der Versteifung hindurchgewachsen ist, also  $a_p \geq 31$  mm ist. Der anschließende Kurvenverlauf entspricht dem aus dem Versuch, es ist eine Parallelverschiebung der Kurve festzustellen, wobei der Kurvenverlauf selbst gut abgebildet wird.

Alle Ergebnisse der Probenform 1 sind noch einmal zusammengefaßt in Abbildung A18 zu sehen. Läßt man einmal die Probe P2-2 außen vor, zeigen die Ergebnisse des analytischen Modells, der FE-Rechnung und des Versuches eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Eine große Stringerhöhe kann das Rißwachstum besser verlangsamen als eine geringe. Die Rechnungen geben dies qualitativ auch sehr gut wieder. Der Bereich bis zu einer Rißlänge von  $a_p = 40$  mm wird dabei (bei analytischer und FE-Rechnung) eher konservativ wiedergegeben, d.h. der Riß wächst etwas schneller als in der Realität. Der Bereich nach Durchtrennung des Stringers wird nicht ganz so gut abgebildet, was durch den etwas flacheren Kurvenverlauf zum Ausdruck kommt. Die Ergebnisse bestätigen die Richtigkeit der getroffenen Annahmen, Vereinfachungen und Modellierungen.

### 7.3.2 Probenform 2

Der Vergleich der Ergebnisse für die Probenform 2 ist schwieriger als für Probenform 1. Zunächst werden die Proben P3-1 und P3-2 betrachtet. Beide Proben werden durch das Abreißen einer Einspannung irreparabel geschädigt, wobei nicht abzuschätzen ist, ab wann sich die beginnende Schädigung der Proben auf die Ergebnisse ausgewirkt hat. Diese sind in Abbildung A19 gezeigt.

Die analytische Lösung stimmt recht gut mit Probe P3-1 überein, von P3-2 weicht sie doch erheblich ab, wobei die Abschätzung des Rißfortschritts konservativ erfolgt. Prinzipiell liegt die Kurve der Theorie zwischen beiden Versuchsergebnissen, so daß der mögliche Bereich bis  $a_p = 22$  mm recht gut wiedergegeben wird.

Für die FE-Rechnung zeigt sich bei Probe P3-1 eine gute Übereinstimmung bis ca. 16 mm Rißlänge, ab da wird ein zu schneller Rißfortschritt vorhergesagt. Als Ursachen dafür können die aus dem

vorherigen Kapitel angeführt werden. Größere Unterschiede lassen sich auch hier in Bezug auf P3-2 feststellen.

Bis zu einer Lastwechselzahl von 27000 liegen die Ergebnisse von analytischer und FE-Rechnung sehr dicht zusammen und es ist eine gute Übereinstimmung feststellbar.

Für die Proben P4 (Abbildung A20) und P5 (Abbildung A21) zeigt sich ein ähnliches Bild wie für die Proben P3-1 und P3-2.

Für P4 zeigt die Theorie einen etwas zu schnellen Reißfortschritt, wobei der Kurvenverlauf qualitativ sehr gut abgebildet wird. Im Bereich der Versteifung und dem Bereich danach zeichnen auch hier die vereinfachten Annahmen für die Abweichungen verantwortlich, ohne jedoch das konservative Vorhersageergebnis zu verlassen.

Bei Probe P5 zeigen sich mehr und mehr die Grenzen des analytischen Modells. Die Betrachtung des Zweidimensionalen reicht nicht mehr aus, um die Abhängigkeiten von Haut und Stringer zu beschreiben. Trotz allem kann die Kurve einen befriedigenden Reißwachstumsverlauf vorhersagen. Dabei sind die Versteifungen abweichend von der in Kapitel 7.2 dargestellten Form modelliert, um den abgebildeten Kurvenverlauf zu erhalten. Eine Versteifung ist nicht in fünf Teilgeometrien aufgeteilt, so daß insgesamt 20 Stringer berücksichtigt werden, sondern jeder Stringer ist als Ganzes modelliert, das Modell der Probe P5 besteht also aus vier Versteifungen.

Die läßt vermuten, daß es möglicherweise eine Biegung um die Zugachse gibt, welche das Bauteilverhalten und damit auch das Reißwachstum beeinflusst. Dies läßt sich auch auf P4 übertragen, wobei da der Effekt nicht so deutlich sichtbar ist. Erschwerend kommt hinzu, daß die Versuchsergebnisse streuen. Dies zeigt, daß das analytische Modell dann versagt bzw. unzureichende Ergebnisse liefert, wenn sich die Steifigkeiten gravierend ändern.

Die Kurven zeigen eine recht gute Übereinstimmung für die FE-Rechnung und die Versuche. Eine sehr gute Übereinstimmung findet man bei der Probe P4. Es zeigt sich, daß mit dem FE-Modell die Abhängigkeiten sehr gut abgebildet werden.

Für die Probe P5 zeigen sich auch hier deutliche Abweichungen, deren Ursache nicht ganz einleuchtend und erklärbar sind, zumal die Ergebnisse bis zu einer Reißlänge von  $a_P = 18$  mm sehr gut mit denen des Versuchs übereinstimmen. Augenscheinlich gibt es Effekte, die nicht genug von dem mit den Vereinfachungen erzeugten FE-Modell erfaßt werden können oder aber, daß es Effekte während des Versuches gibt, die so nicht festgestellt worden.

Der Vergleich von analytischem Modell und FE-Rechnung zeigt wie bei der Probenform 1 eine gute Übereinstimmung, was auf Grund der ähnlichen Form auch zu erwarten war..

Der Vergleich aller Proben der Form 2 ist noch einmal in Abbildung A22 gezeigt und bestätigt die Einschätzung. Wie bei Probenform 1 zeigt die Rechnung, daß der Reiß in den Proben mit kleiner

Stringerhöhe schneller wächst. Dies ist jedoch durch die Streuung der Versuchsergebnisse nicht so deutlich sichtbar. Die Tatsache, daß die Rechnungen mit ihrer Vorhersage konservativ sind, läßt eine Abschätzung des Rißwachstums möglich erscheinen, obwohl die Genauigkeit der Vorhersage mit kleiner werdendem Mittelstringer sinkt.

### 7.3.3 Probenform 3

In der Abbildung A23 und der Abbildung A24 sind die Ergebnisse der Proben P6 und P7 dargestellt. Sehr gut ist bei P6 die Übereinstimmung der analytischen Rechnung mit den Versuchsergebnissen erkennbar, auch wenn durch die Streuung der Versuchsdaten die Ergebnisse für P6-2 im Bereich nach dem Stringer etwas abweichen. Das abrupte Versuchsende von P6-1 zeigt, daß in diesem Versuch die Belastung von der Probe nicht mehr ertragen wird und die Probe in zwei Teile zerreißt. Bei P6-2 zeugt dies vom hohen Gradienten der Kurve, wobei sie jedoch noch nicht durchgerissen ist. Der Bereich um den 2. Stringer, wenn dieser angerissen ist, wird durch die Rechnung nicht ganz wiedergegeben, da die Kurve etwas flacher verläuft. Hier scheint der Einfluß des Stringers stärker als in der Realität zu sein, wobei das Durchreißen selbst sehr gut abgebildet wird.

Die Ergebnisse bei Probe P7 sind unbefriedigend. Während bei kleiner Rißlänge die Ergebnisse durchaus brauchbar sind, kann das Verhalten ab einer Rißlänge von  $a_P = 18$  mm nicht mehr abgebildet werden. Deutlich zeigen sich die Grenzen des analytischen Modells mit seiner 2D-Betrachtung bzw. der starken Abhängigkeiten von der Haut-Stringer-Kombination. Wie bei den anderen Probenformen wird das Rißwachstum konservativ vorausgesagt, d.h. das Rißwachstum wird zur sicheren Seite hin abgeschätzt. Für die Vorhersage bis zum Bauteilversagen kann das analytische Modell in seiner Gesamtheit sicherlich genutzt werden, jedoch ist es für eine Vorhersage bis zu einem gewissen Zeitpunkt bzw. Rißgröße eher ungeeignet.

Die Ergebnisse der FE-Rechnung liefern für beide Proben (Probe P6 und P7) unbefriedigende Lösungen. Dies liegt zum einen an der unzureichenden Modellierung des FE-Netzes, das die großen Spannungsgradienten über die Hautdicke nicht berücksichtigen kann (vgl. [29]) und der Art der Stringermodellierung. Für brauchbare Ergebnisse ist ein wesentlich höherer Modellierungsaufwand nötig, bei dem einige Besonderheiten bei der Elementierung und des Netzaufbaus berücksichtigt werden müssen.

Aus Abbildung A25 erkennt man ein anderes Verhalten als bei den beiden vorangegangenen Probenformen. Bei diesem Szenario, mit gebrochenem Stringer als Ausgangszustand, zeigt sich, daß das Rißwachstum verlangsamt werden kann, indem die Stringerhöhe niedrig gehalten wird. Die Rechnung gibt diesen Versuchsverlauf qualitativ wieder.

### 7.3.4 Fazit

Die Rechnungen können das Reißwachstum gut voraussagen, obwohl für die Versuche nur eine begrenzte Anzahl von Proben zur Verfügung standen. Erschwerend für die Interpretation ist die Streuung der Versuchsergebnisse bzw. der vorzeitige Verlust einiger Probekörper, besonders für Probenform 2, die eine ausreichend genaue Aussage erschweren. Trotzdem geben die Rechnungen die Versuchsergebnisse gut wieder. Das Auftreten einer Sekundärbiegung bei unterschiedlichen Stringerhöhen, welche von der Berechnung nur teilweise bzw. gar nicht abgebildet werden kann, führt zu einer größeren Abweichung der Ergebnisse im Vergleich zum Versuch. Zusammenfassend noch einmal die wichtigsten Ergebnisse und Aussagen.

1. Alle durchgeführten Rechnungen zeigen bezüglich der Versuchsergebnisse einen konservativen Reißfortschritt, geben eine Abschätzung zur sicheren Seite.
2. Der Ausgangszustand mit einer gebrochenen Mittelversteifung stellt den kritischsten Zustand dar.
3. Die Rechnungen haben gezeigt, daß die Annahmen zur Modellierung der Stringer nach Kapitel 7.2 bis zu einem gewissen Grade zulässig sind. Abweichungen der Ergebnisse bei den FE-Rechnungen zu den Versuchen sind nur unmittelbar vor der Versteifung spürbar, reduzieren jedoch den Modellierungsaufwand erheblich.
4. Ist der Ausgangszustand der, daß alle Versteifungen intakt sind (Probenformen 1 und 2), so hat eine große Stringerhöhe eine reißwachstumsverzögernde Wirkung.
5. Ist der Ausgangszustand der, daß die mittlere Versteifung gebrochen ist (Probenformen 3), so hat eine geringe Stringerhöhe eine reißwachstumsverzögernde Wirkung.
6. Für jene Proben, deren Versteifungen alle die gleiche Höhe besitzen (P1, P3, P6), läßt sich das Reißwachstum sehr gut mit dem analytischen Modell vorhersagen, die Versuche bestätigen dies.
7. Für Proben unterschiedlicher Versteifungshöhen (P2, P4), bei denen die Mittelsteifen keine große Änderung der FTMe zu den äußeren Versteifungen aufweisen, sind die Vorhersagen mit dem analytischen Modell noch akzeptabel, können aber das Wachsen des Risses weniger gut wiedergeben. Dies kommt von einer zusätzlichen Biegung um die Zugachse, die so in der analytischen Rechnung nicht wiedergegeben werden kann. Die Annahmen bzw. Vereinfachungen, mit denen das dreidimensionale Problem auf ein ebenes reduziert wird, sind dann nicht mehr zulässig und ungeeignet. Je einfacher die Stringerform (I-Form), umso besser läßt sich das Reißwachstum auch bei unterschiedlichen Stringerhöhen vorhersagen.
8. Bei einer im Vergleich zu den Außenversteifungen wesentlich kleineren Stringerhöhe der Mittelstringer (P5) ist die Vorhersage des Reißwachstums mit dem analytischen Modell nur unzureichend möglich, wobei auch hier die Vorhersage zur sicheren Seite hin erfolgt.
9. Das analytische Modell ist gut geeignet für Strukturen mit Versteifungen gleicher Höhe, unabhängig vom Ausgangszustand der Struktur. Für unterschiedlich hohe Versteifungen werden die Ergebnisse schlechter, sind aber noch akzeptabel. Bei der Konfiguration mit gebrochenem Mittelstringer und ungleichen Versteifungshöhen (Probe P7) versagt das Modell, da die Sekundärbiegung (Biegung um die Zugachse) nicht berücksichtigt werden kann.

10. Die FE-Rechnungen liefern für die Probenformen 1 und 2 gute Ergebnisse und stimmen auch mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen überein. Die Ergebnisse in unmittelbarer Stringernähe weichen von denen aus dem Versuch und Rechnung ab, was auf die vereinfachte Modellierung und den unter Punkt 11 angeführten Ursachen liegt.
11. Die FE-Ergebnisse für die Konfiguration mit gebrochenem Mittelstringer lassen sich mit den Versuchsergebnissen nicht vergleichen. Dies liegt zum einen daran, daß sich durch den gebrochenen Mittelstringer das Biegeverhalten der Struktur stark ändert, da der gebrochene Stringer sehr stark geöffnet wird und somit das Spannungsfeld um die Rißspitzen stark beeinflusst. Selbst die benachbarten Stringer zeigen eine leicht nach außen gebogene Verformung. Dieses Verhalten ist für die Probe P6 bei einer Rißlänge von  $a_P = 5,98$  mm in Abbildung A26 überhöht dargestellt. Dies ist bei den Probenformen 1 und 2 nicht der Fall, wie dies überhöht Abbildung A27 für die Probe P1 bei einer Rißlänge von  $a_P = 5,80$  mm zeigt. Da wird der Riß hauptsächlich durch die Zugspannung in der Haut beeinflusst, es ist kaum ein zusätzlicher Einfluß aus der Biegung bemerkbar, da diese durch die Stringer getragen wird. In unmittelbarer Nähe des Stringerbeginns ist auch bei diesen Formen der Biegeeinfluß größer, was die abweichenden Ergebnisse erklärt. Ein anderer Fakt ist, daß die Modellierung in diesen Fällen unzureichend ist, was [29] bestätigt. Die große Spannungsänderung über die Hautdicke kann von einem Element nicht abgebildet werden, um dies für bruchmechanische Untersuchungen zu nutzen. Statt dessen muß die Elementanzahl erheblich größer sein, um dies richtig abbilden zu können. Dies führt natürlich zu einem sehr viel größeren Modellierungsaufwand.

## 7.4 Parametervariation

In diesem Kapitel sollen die Auswirkungen auf die Ergebnisse der analytischen Lösung untersucht werden, wenn sich einige Ausgangsparameter ändern. Dies sind vor allem die Anzahl der Lastübertragungspunkte, der Position des ersten Lastübertragungspunktes, der Durchmesser des Lastübertragungspunktes und das Flächenträgheitsmoment der Versteifung zur Bestimmung des Rißfortschrittes. Dies soll für die Proben P1 und P6 geschehen, was sich aus den bisherigen Ergebnissen ableitet.

### 7.4.1 Anzahl der Lastübertragungspunkte

Neben der für die Berechnungen verwendeten 15 Lastübertragungspunkte pro Stringer und halber Spannweite, wie es beispielsweise in Swift [34] vorgeschlagen wird, werden weitere Analysen mit 11 und 21 Punkten durchgeführt. Bei der Verteilung auf halber Spannweite wurde darauf geachtet, daß der erste Lastpunkt an der gleichen Position beibehalten wird, der erste und letzte Lastpunkt den gleichen Abstand zum Riß bzw. Einspannrand haben und die restlichen Lastübertragungspunkte

gleichmäßig über die Länge verteilt sind. Dies ist notwendig, um den in Kapitel 4.1 aufgestellten Systemen zu genügen. Somit ändert sich zwangsläufig der Abstand zwischen den Lastpunkten. Als weitere Bedingung muß gelten, daß der Abstand zwischen zwei Punkten auf ein hundertstel Millimeter genau bestimmt wird. Die einzelnen für die Rechnung benötigten Werte sind, abhängig von der Probengeometrie, in Tabelle B5 und Tabelle B6 zusammengefaßt.

In Abbildung A28 ist für die Probe 1 zu sehen, daß eine Reduzierung der Lastpunkte auf 11 eine starke Verschlechterung der Ergebnisse zur Folge hat, der Rißfortschritt zu langsam vorhergesagt wird. Dies könnte daran liegen, daß durch die geringe Anzahl der Lastpunkte der Biegeeinfluß nicht richtig erfaßt wird und damit das Gesamtverhalten nicht richtig wiedergegeben werden kann. Eine Erhöhung bewirkt eine leichte Verschlechterung, die hauptsächlich dann zum Tragen kommt, wenn der Riß in den Stringer hineinläuft. Der Kurvenverlauf ist lediglich parallel verschoben, qualitativ stimmt er jedoch gut überein. Eine abschließende Wertung ist in diesem Fall nicht möglich, da die Probenanzahl keine statistisch abgesicherten Versuchsergebnisse liefert und nicht eindeutig gesagt werden kann, ob 21 oder 15 Lastübertragungspunkte bessere Vorhersagen liefern.

Entscheidend ist jedoch, daß sich mit Erhöhung der Lastpunkte die Rechenzeit erhöht. Gegenüber 15 Punkten erhöht sich bei 21 Lastpunkten die Rechenzeit um ungefähr den Faktor zwei.

Ähnlich verhält sich die Änderung bei Probe 6, Abbildung A29. Eine Reduzierung der Lastübertragungspunkte führt zu einer dramatischen Verschlechterung der analytischen Ergebnisse, so daß man sagen kann, daß sie in keinster Weise zur Abschätzung des Rißfortschritts herangezogen werden kann. Eine Erhöhung auf 21 zeigt einen etwas zu schnellen Rißfortschritt im Bereich der Haut bis zu einer Rißlänge von  $a_P = 35$  mm, die Ergebnisse sind nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ brauchbar. Die Kurven mit 15 und 21 Lastpunkten nähern sich im weiteren Verlauf an und geben auch das Versagen des Bauteils recht gut wieder. Damit scheint sich die Annahme von Probe 1, daß der Biegeverlauf mit wenigen Lastpunkten nur unzureichend abgebildet werden kann, bestätigt.

Es lassen sich die Aussagen von Swift [34] bestätigen, daß, unabhängig von der Ausgangskonfiguration, eine Lastpunktanzahl von 15 für die Berechnungen am geeignetsten erscheint bei vergleichsweise geringer Rechenzeit und guter Vorhersage des Rißfortschritts und des Versagens.

#### 7.4.2 Position des ersten Lastübertragungspunktes

Für alle bisherigen Analysen befindet sich der erste Lastübertragungspunkt bei einer y-Position von 1,40 mm. Dieser willkürlich angenommene Wert läßt sich natürlich variieren, wobei sich die Betrachtung auf zwei weitere Positionen beschränken soll. Dies ist zum einen eine Position bei  $y = 0,7$  mm, zum anderen bei  $y = 2,1$  mm. Daraus ergeben sich dann die Positionen der anderen Lastpunkte bzw. der Abstand der Punkte zueinander. Für die untersuchten Proben sind die Parameter in Tabelle B7 für die Probe 1 und in Tabelle B8 für die Probe 6 zusammengefaßt angegeben.

Die Ergebnisse für die Probe 1 sind in Abbildung A30 dargestellt. Für eine Position bei 0,7 mm zeigt sich eine gute Übereinstimmung sowohl mit den Versuchsergebnissen als auch mit der analytischen Lösung und einer Lastpunktposition von 1,4 mm. Zu sagen, welche Position vergleichswei-

se bessere Ergebnisse liefert, ist auf Grund der begrenzten Probenanzahl schwierig. Beide heben sich jedoch eindeutig von der Position von 2,1 mm ab. Wie leicht zu sehen ist, liefert die Rechnung keine brauchbaren Ergebnisse. Die zu bestimmenden Lastpunktkräfte und das daraus resultierende Biegeverhalten der Probe können nicht wiedergegeben werden, so daß der Rißfortschritt sehr langsam verläuft. Die Rechnung ist auf Grund des Kurververlaufes bei 61000 Lastwechseln abgebrochen worden.

Für die Probe 6 zeigt sich ein ähnliches Bild, wie es in Abbildung A31 zu sehen ist. Bis ca. 26 mm Rißlänge liegen die Kurven noch eng beieinander, ab dann laufen sie auseinander und liefern keine befriedigende Lösung. Die relativ kleine Änderung der Anfangslastpunktposition hat relativ große Auswirkungen auf die Lastverteilung und den Rißfortschritt mit einem zu optimistischem Verhalten. Die Konfiguration mit gebrochenem Mittelstringer reagiert sensitiver auf die Position des ersten Lastpunktes, so daß die gefundene Lösung bei  $y = 1,4$  mm scheinbar ein Optimum darstellt.

#### 7.4.3 Durchmesser des Lastübertragungspunktes

Für das bisherige analytische Vorgehen ist bislang davon ausgegangen worden, daß der Durchmesser der Lastpunkte gleich der halben Stringerdicke ist. Dies ist der Überlegung geschuldet, daß der Lastpunkt nicht gleich der Stringerdicke sein kann und es nicht abgeschätzt werden kann, ob durch das mathematische Modell ungünstige Beeinflussungen stattfinden. Um diesen Einfluß zu überprüfen, soll der Durchmesser so variiert werden, daß er einen Wert von 25 Prozent bzw. 75 Prozent der Versteifungsdicke annimmt. Alle anderen Parameter stimmen überein.

In Abbildung A32 sind die Ergebnisse für Probe 1 dargestellt. In beiden Fällen kommt es zu einem langsameren Rißwachstum, wobei der Riß bei einem Durchmesser von 25 Prozent so langsam wächst, daß die Rechnung bei 61000 Lastwechseln nicht weitergeführt wird. Bei einem Lastpunktdurchmesser von 75 Prozent der Stringerdicke stimmt der Kurvenverlauf bis zum Erreichen der Versteifung zwar qualitativ und quantitativ gut überein, das Rißwachstum kann aber nur unzureichend abgebildet werden, wenn die Versteifung angerissen ist.

Bei Probe 6 liegt ähnliches Verhalten wie bei Probe 1 vor, auch wenn hier ein Durchmesser von 25 Prozent der Stringerdicke ein etwas besseres Ergebnis liefert. Beide Variationen können kein befriedigendes Ergebnis liefern und sind ungeeignet für die Vorhersage des Rißwachstums.

#### 7.4.4 Flächenträgheitsmoment

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob sich der in Kapitel 7.2 gemachte Aufwand zur Modellierung der Versteifungen auf die Ergebnisse auswirkt. Die Stringer sollen nun nur als Streifen betrachtet werden, d.h. der Einfluß der bei der Herstellung entstehenden Fräsradien sollen unberücksichtigt bleiben. Alle anderen Größen bzw. Annahmen sollen beibehalten werden.

In Abbildung A34 sind die Ergebnisse für die Probe 1 abgebildet. Prinzipiell, d.h. qualitativ kann der Rißfortschritt gut wiedergegeben werden, zeigt aber ein zu langsames Wachstum. Auch hier



zeigt sich, daß ab ca. einer Rißlänge von 15 mm die Kurven signifikant auseinanderlaufen. Das kleinere Flächenträgheitsmoment führt zu einer Reduzierung der Biegung und somit zu abweichenden Ergebnissen. Dieser Effekt verstärkt sich natürlich noch bei Probe 6 mit gebrochenem Mittelstringer, was sich eindeutig aus den Ergebnissen von Abbildung A35 ablesen läßt. Die Rechnung wird auf Grund des Anfangsverhaltens der Probe abgebrochen und nicht beendet.

Bei beiden Konfigurationen zeigt sich, daß sich der Aufwand der Stringermodellierung nicht nur lohnt, sondern von enormer Bedeutung für die Vorhersage des Rißwachstums ist.

#### **7.4.5 Anmerkungen**

Für den Vergleich von analytischer Berechnung bzw. FE-Ergebnissen mit den Versuchsdaten ist es von großer Bedeutung, die Anfangsrißlänge so exakt wie möglich zu bestimmen. Anders als im Versuch bzw. realen Bauteil sind die Ausgangsgrößen für das Rißwachstum von entscheidender Bedeutung. Während im Versuch der Riß auf Grund des Gefüges und des Herstellungsprozesses (Fräsen) nicht gleichmäßig wächst, können solche Einflüsse bei den Berechnungen nicht berücksichtigt werden. Daher muß man sich schon vor der Rißeinbringung Gedanken machen, wie letztlich die tatsächlich eingebrachte Rißlänge bestimmt werden kann.

Ebenso hat die angelegte Spannung bzw. die aufgebrachte Kraft eine große Bedeutung auf das Rißwachstum. Zu beachten ist dabei, daß im Versuch bzw. bei der FE-Rechnung eine Kraft als Belastung aufgebracht wird, hingegen bei der analytischen Rechnung eine Spannung zugrunde gelegt wird. Diese ist sehr sorgfältig zu bestimmen.

Um vergleichbare Versuchsergebnisse zu erhalten, muß man sich auch ein im Vorfeld ein geeignetes Verfahren überlegen, mit dem man während des Versuches den Rißfortschritt feststellen kann.

#### **7.4.6 Fazit**

Aus den vier Parametern, die während der Studien verändert worden, lassen sich, auch wenn es auf den ersten Blick nicht so scheint, einige allgemeingültigen Aussagen treffen, die noch einmal kurz zusammengefaßt dargestellt werden sollen.

1. Es ist notwendig, den Stringer entsprechend Kapitel 7.2 zu modellieren, weitere Vereinfachungen scheinen nicht sinnvoll.
2. Wird eine zu geringe Verteilung der Lastpunkte gewählt, kann das Biegeverhalten nicht mehr ausreichend abgebildet werden, was zu einer Verschlechterung der Ergebnisse führt. Eine Lastpunktanzahl von 15 hat sich hierbei als vorteilhaft herausgestellt, was auch in der Literatur als günstig angesehen wird. Bei sehr viel größeren Bauteilen könnte es aber von Vorteil sein, den Abstand zwischen den Lastpunkten beizubehalten und die Lastpunktanzahl zu erhöhen, um den Biegeeffekt gut abzubilden.
3. Als optimal hat sich ein Lastpunktdurchmesser von 50 Prozent der Stringerdicke herausgestellt.

- 
4. Bei Probe 1 läßt sich unabhängig von der Parameterwahl der Rißfortschritt bis zu einer Rißlänge von der Hälfte des Stringerabstandes recht gut bestimmen, die Ausnahme bilden die Parameter Lastpunktposition gleich 2,1 mm und Lastpunktdurchmesser gleich 25 Prozent der Stringerdicke.
  5. Ab einer Rißlänge von ca. 50 Prozent des Stringerabstandes (Probe 1) beginnt sich das Biegeverhalten des Bauteils zu ändern, was einen größeren Einfluß der geänderten Parameter zur Folge hat. Bei Probe 6 wird das Biegeverhalten von Anfang an durch den gebrochenen Mittelstringer bestimmt.
  6. Probe 6, die den ungünstigsten Ausgangszustand darstellt, reagiert weit aus sensitiver auf die Änderung der betrachteten Parameter als Probe 1.
  7. Eine höhere Lastpunktanzahl als die zugrunde gelegten 15 Lastübertragungspunkte führen ebenfalls zu guten Ergebnissen.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

In der heutigen Zeit werden von den Flugzeugherstellern kosteneffiziente und umweltschonendere Flugzeuge gefordert, die gleichzeitig leistungsfähiger als bisherige sein sollen. Neben vielen anderen, auf neuesten Forschungserkenntnissen beruhenden Innovationen, gilt dabei auch der Reduzierung der Abflugmasse bei gleichbleibender Leistungsfähigkeit ein besonderes Augenmerk.

Herkömmliche Flugzeuge entstehen durch Vernietung einzelner Bauteile zu einer Gesamtstruktur. Durch Einsatz neuer Fertigungsverfahren und durch das Fortschreiten neuer Fertigungstechnologien können Bauteile, die früher mit Nieten hergestellt werden, z.B. durch Fräsen aus einem Block gefertigt werden. Neben einer beanspruchungsgerechteren Konstruktion lassen sich auch Mindestwandstärken vermeiden, Fertigungszeiten reduzieren und Gewicht einsparen, da die Verbindungselemente fehlen. Trotz allem müssen diese Teile den hohen, luftfahrtspezifischen Anforderungen genügen. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf Schadenstoleranz dieser Bauteile, d.h. wie verhält sich das Bauteil, wenn ein Schaden auftritt, speziell, wie breitet sich ein Riß in so einer integralen Struktur aus.

In dieser Arbeit sind nun die bisher für differentiell hergestellte Bauteile verwendeten Analyseverfahren so weiterentwickelt worden, daß sie auch für integrale Strukturen nutzbar sind. Dabei wird ein Hautfeld mit mehreren integralen Versteifungen betrachtet, die eine unterschiedliche Geometrie aufweisen.

In Kapitel 2 werden noch einmal kurz die theoretischen Grundlagen dargestellt, die für die Berechnungen benötigt werden. Anschließend werden im Kapitel drei die für die herkömmliche Bauweise von mit Stringern versteiften Hautfeldern dargestellt. Dabei muß unterschieden werden, daß einmal die Versteifung intakt, angerissen und gebrochen ist. Dies ist für die versteifte Haut ohne Biegung gezeigt, eine Lösung mit Biegung ist aber nur für intakte und gebrochene Versteifungen vorhanden, wenn diese auf der Haut aufgeklebt sind.

Im Kapitel vier werden diese vorhandenen Lösungsansätze so weiterentwickelt, daß damit auch integrale Strukturen unter zusätzlicher Biegung berechnet werden können, wobei eine Unterscheidung des Versteifungszustandes (intakt, angerissen oder gebrochen) berücksichtigt wird.

Die in den Kapiteln 2 bis 4 aufgezeigten und weiterentwickelten Verfahren werden mit Hilfe von Ergebnissen aus Finite Elemente Rechnungen und Versuchsergebnissen validiert.

Dafür werden im Kapitel 5 kurz die Grundlagen dargestellt, die bei bruchmechanischen Untersuchungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente zu beachten sind. Außerdem wird kurz das Vorgehen zum Erzeugen des Modells erläutert und das Prinzip des Netzgenerators beschrieben.

Im Kapitel 6 werden die für die Versuche verwendeten drei Probengeometrien vorgestellt. Weiterhin werden der Versuchsaufbau, die Versuchsdurchführung und die Besonderheiten beim Einbrin-

gen des Risses in die Struktur ausführlich beschrieben. Getrennt nach Probenform und Probengeometrie werden die Versuchsergebnisse dargestellt und erste Rückschlüsse auf das Rißwachstumsverhalten gezogen. Außerdem ist darauf hingewiesen worden, worauf bei der Probenvorbereitung besonderes Augenmerk gelegt werden muß, um den Berechnungen Eingabewerte zur Verfügung zu stellen, damit diese miteinander verglichen werden können. Für die Dokumentation der Versuche bzw. das Feststellen des Rißwachstums werden Hinweise und Anregungen gegeben, um die Ergebnisse sicherer und einfacher zu erhalten, so daß die Vergleichbarkeit verbessert werden kann.

In Kapitel 7 werden alle Ergebnisse dargestellt, miteinander verglichen und Rückschlüsse dahingehend gezogen, wie eine integral versteifte Struktur mit Blick auf das schadenstolerante Verhalten ausgeführt sein soll. Es konnte eindeutig herausgearbeitet werden, in welchen Bereichen bzw. bei welchen Konfigurationen das analytische Modell sehr gute Resultate liefert, d.h. der Rißfortschritt gut vorhergesagt werden kann. Dies sind zum einen Konfigurationen mit Versteifungen, die alle die gleichen physikalischen Eigenschaften haben, insbesondere eine gleiche Höhe, zum anderen solche, bei denen auch noch der Mittelstringer gebrochen ist. Bei unterschiedlich hohen Versteifungen werden die Ergebnisse schlechter und sind nicht geeignet, das Rißwachstum vorherzusagen. Weiterhin ist dargestellt, welche Besonderheiten bei der analytischen Modellierung zu beachten sind.

Die Versuchsergebnisse der Konfiguration mit intakten Stringern kann mit den Ergebnissen der Finiten Elemente Rechnungen und den analytischen Berechnungen nachvollzogen werden, wobei die Unterschiede bei der FE-Rechnung erklärbar sind. Die FE-Analysen für die Konfiguration mit gebrochenem Mittelstringer liefern nur ungenügende Ergebnisse und sind ungeeignet zur Vorhersage des Rißwachstums. Die Ursache dafür liegt in der unzureichenden Anzahl der Elemente über die Bauteildicke bei dieser Art von Struktur, was von der Literatur bestätigt wird.

Für die analytische Berechnung sind einige Eingabeparameter geändert und deren Auswirkungen auf die Ergebnisse untersucht worden. Dabei sind Literaturangaben bestätigt und Erkenntnisse gewonnen worden, die für weiterführende Untersuchungen berücksichtigt werden müssen.

Für die Vorhersage des Rißwachstums in integral versteiften Strukturen, unterschiedlicher Ausgangskonfiguration und einfacher Versteifungsgeometrie konnte ein Analysetool geschaffen werden, welches mit Versuchen an relativ kleinen Proben validiert wurde. Diese Ergebnisse sollten nach Möglichkeit durch weitere Proben abgesichert werden, wobei der Rißeinbringung und der Dokumentation des Rißfortschritts im Versuch eine besondere Bedeutung zukommen muß.

Weiterhin muß untersucht werden, ob und inwieweit das Analysetool für kompliziertere Stringergeometrien, wie z.B. Doppel-T- oder C-Profile, einsetzbar ist bzw. wie solche Geometrien in das Tool implementiert werden können. Dazu sind natürlich ausreichend viele Versuchsergebnisse sowie deren Eingabeparameter in entsprechender Qualität notwendig. Gleiches gilt auch für größere Bauteile. Dabei ist dann von Wichtigkeit, daß die Werkstoffkennwerte und Randbedingungen in entsprechendem Umfang vorhanden sind.

## 9 Literatur

- [1] ANON.:  
Luftfahrttechnisches Handbuch LTH, Handbuch Strukturberechnung HSB, Industrie Ausschluß Struktur Berechnungsunterlagen IASB, München, 2002.
- [2] ANON.:  
ABAQUS/Standard, Version 6.4 von der Hibbit, Karlsson & Sorensen, INC., 2002.
- [3] Barsoum, R.S.:  
On the Use of Isoparametric Finite Elements In Linear Fracture Mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 25-37, 1976.
- [4] Bathe, K.-J.:  
Finite-Elemente-Methoden, Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen, Springer-Verlag Berlin, 1986.
- [5] Bloom, J.M.; Sanders Jr., J.L.:  
The Effect of a Riveted Stringer on the Stress in a Cracked Sheet, Journal of Applied Mechanics, Sept. 1966.
- [6] Blumenauer, H.; Pusch, G.:  
Technische Bruchmechanik, 3., stark überarbeitete Auflage, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig Stuttgart, 1993.
- [7] Bollinger, Otto E.:  
Der durchlaufende Träger, Berechnung mit Hilfe der Dreimomentengleichung von Clapeyron, Schweizer Druck- und Verlagshaus, Zürich, 1947.
- [8] Broek, D.:  
Elementary Engineering Fracture Mechanics, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1978.

- 
- [9] Bruhns, O.; Lehmann, Th.:  
Elemente der Mechanik II, Elastostatik, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1994.
- [10] Chell, G.G. (Hrsg.):  
Developments in Fracture Mechanics – 1, Applied Science Publishers LTD, London, 1979.
- [11] Cook, R.; Poole, P. (Hrsg.):  
ICAF 97 Fatigue in new and ageing aircraft, Volume I Lecture Papers, Proceedings of the 19<sup>th</sup> Symposium of the International Committee on Aeronautical Fatigue, 18-20 June 1997, Edinburgh, Scotland, EMAS Publishing, 1997.
- [12] Ewalds, H. L.; Wanhill, R. J. H.:  
Fracture Mechanics, überarbeitete Auflage, Delftse U.M. Delft, Arnold, a member of the Hodder Headline Group London, 1989.
- [13] Grosche, G.; Ziegler, V.; Ziegler, D. (Hrsg.):  
Bronstein-Semendjajew – Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage, Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1989.
- [14] Gross, D.:  
Bruchmechanik, zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [15] Hahn, H.G.:  
Bruchmechanik: Einführung in die theoretischen Grundlagen, Teubner Studienbücher Mechanik, Teubner Stuttgart, 1976.
- [16] Horst, P.:  
Multiple Site Damage in Integrally Stiffened Structures, 6<sup>th</sup> Joint FAA/DoD/NASA Aging Aircraft Conference, San Francisco, Sept. 16-19, 2002.
- [17] Horst, P., Fabel, T.:  
Crack Growth in Integrally Stiffened Structures, Fatigue 2003
- [18] Kanninen, M. F.; Popelar, C. H.:  
Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press New York, Clarendon Press Oxford, 1985.

- 
- [19] Kossira, H.:  
Grundlagen des Leichtbaus, Einführung in die Theorie dünnwandiger stabförmiger Tragwerke, Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [20] Meguid, S.A.:  
Engineering Fracture Mechanics, Elsevier Science Publishers LTD. London and New York, 1989.
- [21] Muskhelishvili, N.I.:  
Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending, 3. Auflage, P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1953.
- [22] Nishimura, T.:  
Stress Intensity Factors for a Cracked Stiffened Sheet With Cracked Stiffeners, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 113, pp.119-124, January 1991.
- [23] Nishimura, T.:  
Stress Intensity Factors of Multiple Cracked Sheet with Riveted Stiffeners, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 113, pp. 280-284, July 1991.
- [24] Nishimura, T.:  
Strip Yield Analysis for Multiple Cracked Sheet with Riveted Stiffeners, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 115, pp.398-403, October 1993.
- [25] Nowotny, G.D.:  
Netzerzeugung durch Gebietszerlegung und duale Graphenmethode, Shaker Verlag, 1999.
- [26] Pettit, R.G.; Wang, J.J.; Toh, C.:  
Validated Feasibility Study of Integrally Stiffened Metallic Fuselage Panels for Reducing Manufacturing Costs, NASA/CR-2000-209342, Hampton, Virginia, May 2000.
- [27] Rice, J.R.:  
A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, S. 379-386, 1968.
- [28] Rossmannith, H.-P. (Hrsg.):  
Grundlagen der Bruchmechanik, Springer-Verlag Wien New York, 1982.

- 
- [29] Roy, M. R.; Sumpter, J. D. G.; Timbrell, C. M.; Wiehan, M.:  
Stress intensity factors for cracked plates under out-of-plane bending, *ABAQUS Users' Conference*, 2005
- [30] Sähn, S.; Göldner, H.:  
Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre, 2., verbesserte Auflage, Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 1993.
- [31] Schnell, W.; Gross, D.; Hauger, W.:  
Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik, 4. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [32] Schwalbe, K.-H.:  
Bruchmechanik metallischer Werkstoffe, Carl Hanser Verlag München Wien, 1980.
- [33] Swift, T.:  
Fracture Analysis of Adhesively Bonded Cracked Panels, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 100, pp.10-15, January 1978.
- [34] Swift, T.:  
Damage Tolerance Analysis of Redundant Structures, *Fracture Mechanics Design Methodology*, AGARD – LS – 97, 1979.
- [35] Swift, T.:  
Fracture Analysis of Stiffened Structure, *Damage Tolerance of Metallic Structures: Analysis Methods and Application*, ASTM STO 842, pp. 69-107, 1984.
- [36] Tada, H.; Paris, P.C.; Irwin, G.R.:  
The Stress Analysis of Cracks Handbook, Copyright 2000 by The American Society of Mechanical Engineers (Hrsg.), 3<sup>rd</sup> Edition, New York: ASME Press, 2000.
- [37] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N.:  
Theory of Elasticity, 3<sup>rd</sup> Edition, New York: McGraw-Hill Book Company, 1934.
- [38] Trumpf GmbH + Co., Ditzingen (Hrsg.):  
Faszination Blech. Flexible Bearbeitung eines vielseitigen Werkstoffs, J. Raabe Verlag, Stuttgart, 1996



- [39] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.:  
The Finite Element Method, 4<sup>th</sup> edition, Volume 1, Basic Formulation and Linear Problems,  
McGraw-Hill Book Company, 1989.

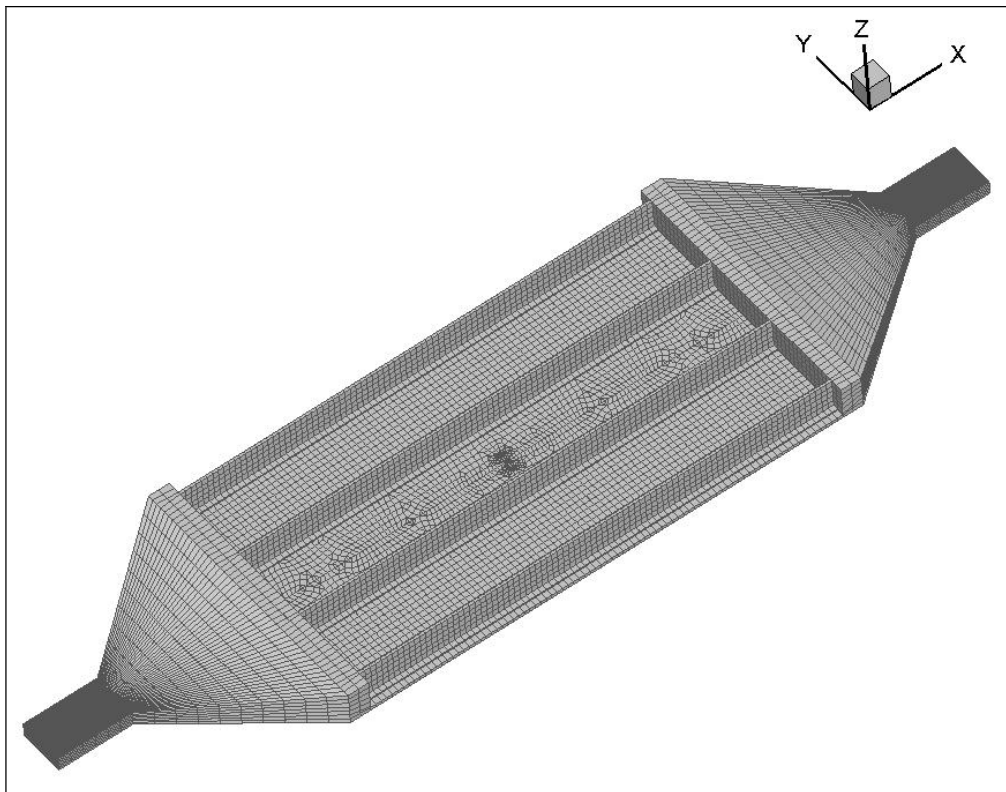
## 10 Bilder

### Verzeichnis der Abbildungen

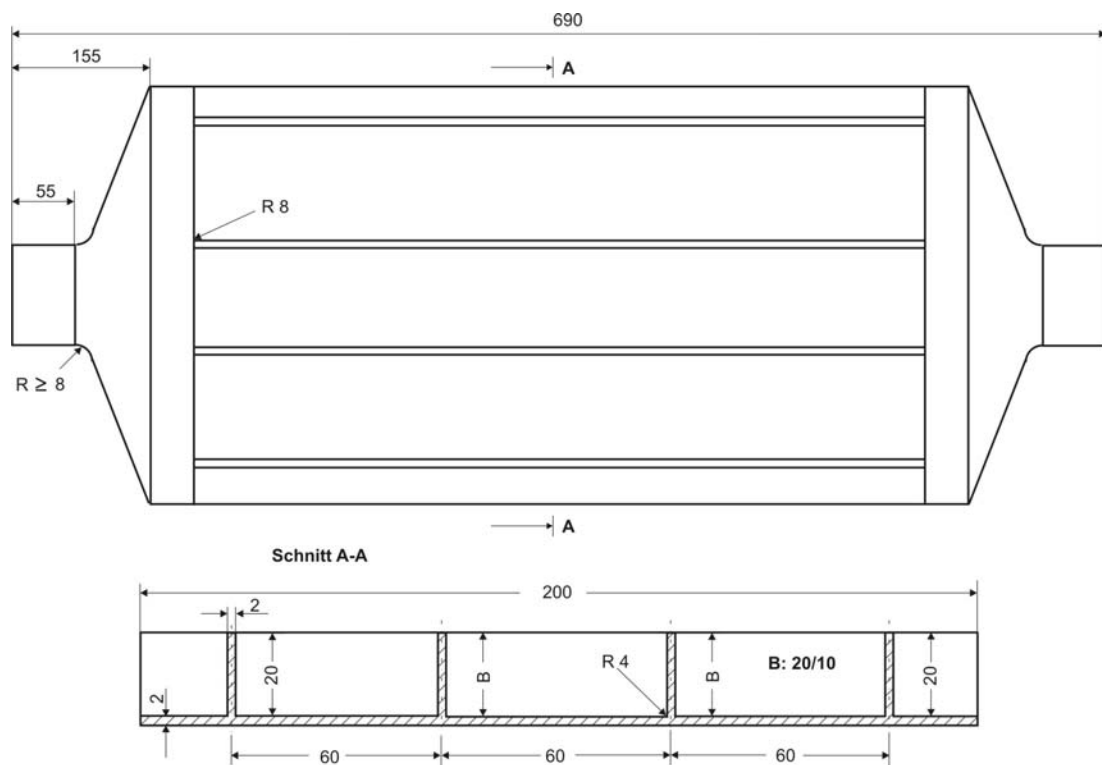
Abbildung A1 : FE-Modell eines Vollmodells, Probe 1.....	87
Abbildung A2 : Geometrie der Probenform 1 .....	87
Abbildung A3 : Geometrie der Probenform 2 .....	88
Abbildung A4 : Geometrie der Probenform 3 .....	88
Abbildung A5 : Position und Ausrichtung der DMS der Proben mit vier Versteifungen .....	89
Abbildung A6 : Position und Ausrichtung der DMS der Proben mit fünf Versteifungen.....	89
Abbildung A7 : Gemittelte Versuchsergebnisse aller getesteten 17 Probekörper .....	90
Abbildung A8 : Gemitteltes Reißwachstum der Proben P1 und P2 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.....	90
Abbildung A9 : Korrigierte, gemittelte Darstellung des Reißwachstums der Proben P1 und P2 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl .....	91
Abbildung A10 : Gemitteltes Reißwachstum der Proben P3, P4, P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.....	91
Abbildung A11 : Gemitteltes Reißwachstums der Probe P3 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl .....	92
Abbildung A12 : Gemitteltes Reißwachstum der Proben P4 und P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.....	92
Abbildung A13 : Korrigierte, gemittelte Darstellung des Reißwachstums der Proben P3, P4, P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl .....	93
Abbildung A14 : Gemitteltes Reißwachstum der Proben P6 und P7 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.....	93
Abbildung A15 : Korrigierte, gemittelte Darstellung des Reißwachstums der Proben P1 bis P7 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl .....	94
Abbildung A16 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P1 .....	94
Abbildung A17 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P2.....	95
Abbildung A18 : Vergleich der Ergebnisse für die Probenform 1 (P1 und P2) .....	95
Abbildung A19 : Vergleich der Ergebnisse für die Proben P3-1 und P3-2 .....	96
Abbildung A20 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P4.....	96
Abbildung A21 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P5 .....	97
Abbildung A22 : Vergleich der Ergebnisse für die Proben P3, P4 und P5.....	97
Abbildung A23 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P6.....	98
Abbildung A24 : Vergleich der Ergebnisse für die Probe P7.....	98
Abbildung A25 : Vergleich der Ergebnisse für die Proben P6 und P7.....	99

---

Abbildung A26 : Verformungsbild der Probe P6 der FE-Rechnung, Rißlänge $a_P = 5,98$ mm .....	99
Abbildung A27 : Verformungsbild der Probe P1 der FE-Rechnung, Rißlänge $a_P = 5,80$ mm .....	100
Abbildung A28 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte .....	100
Abbildung A29 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte .....	101
Abbildung A30 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes .....	101
Abbildung A31 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes .....	102
Abbildung A32 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung des Durchmessers des Lastübertragungspunktes .....	102
Abbildung A33 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung des Durchmessers des Lastübertragungspunktes .....	103
Abbildung A34 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung des Flächenträgheitsmoments .....	103
Abbildung A35 : Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung des Flächenträgheitsmoments .....	104



**Abbildung A1:** FE-Modell eines Vollmodells, Probe 1



**Abbildung A2:** Geometrie der Probenform 1

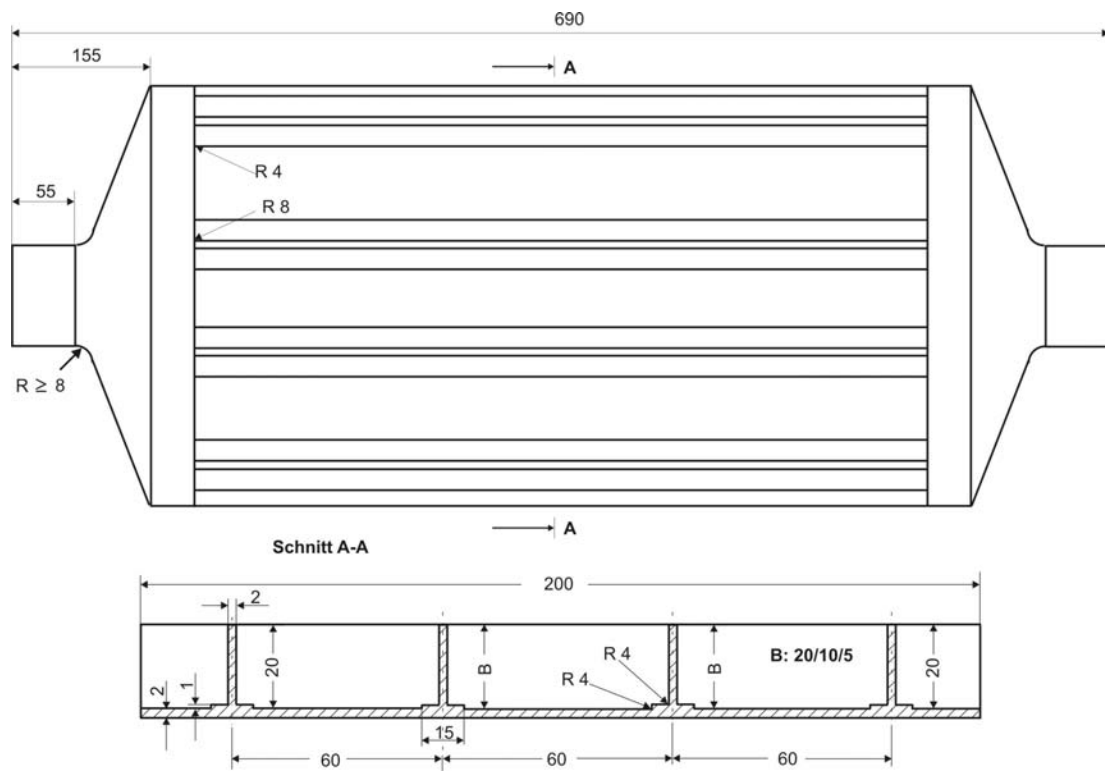


Abbildung A3: Geometrie der Probenform 2

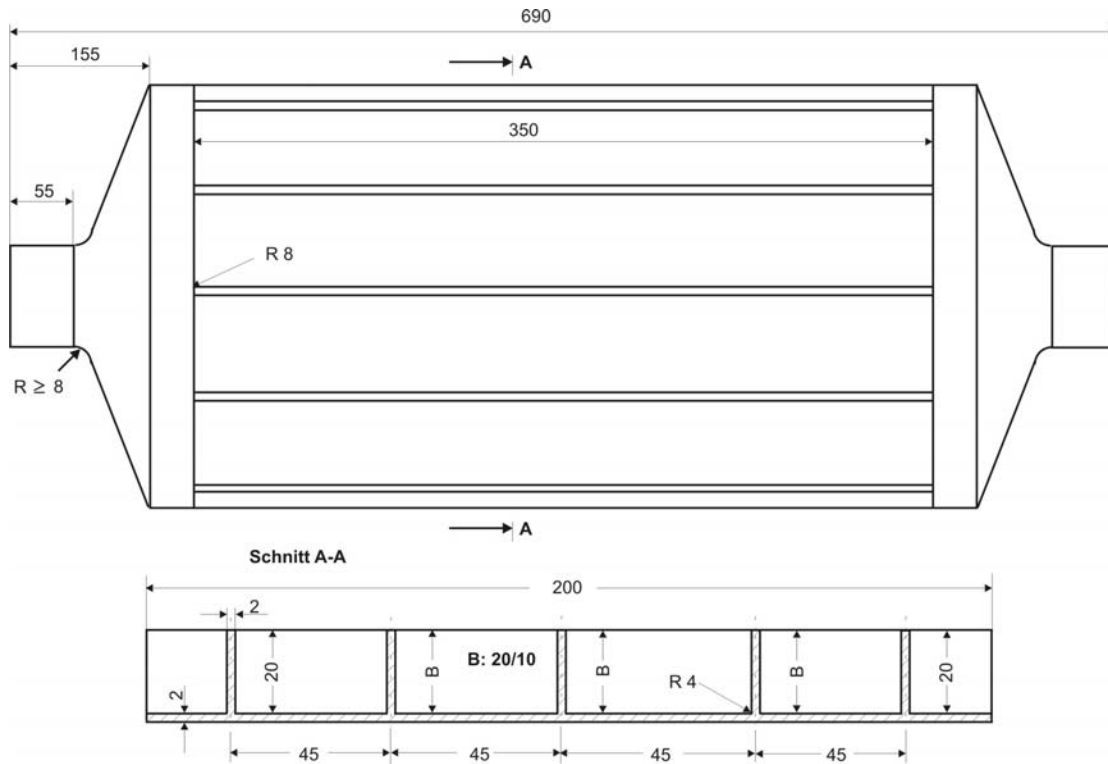
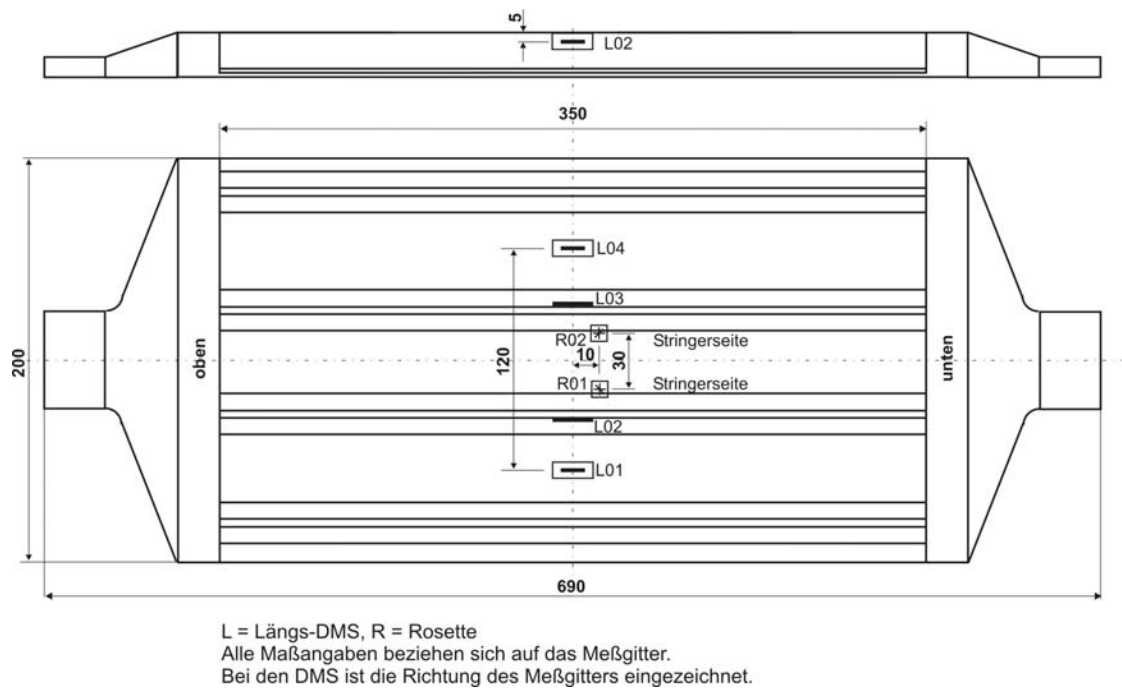
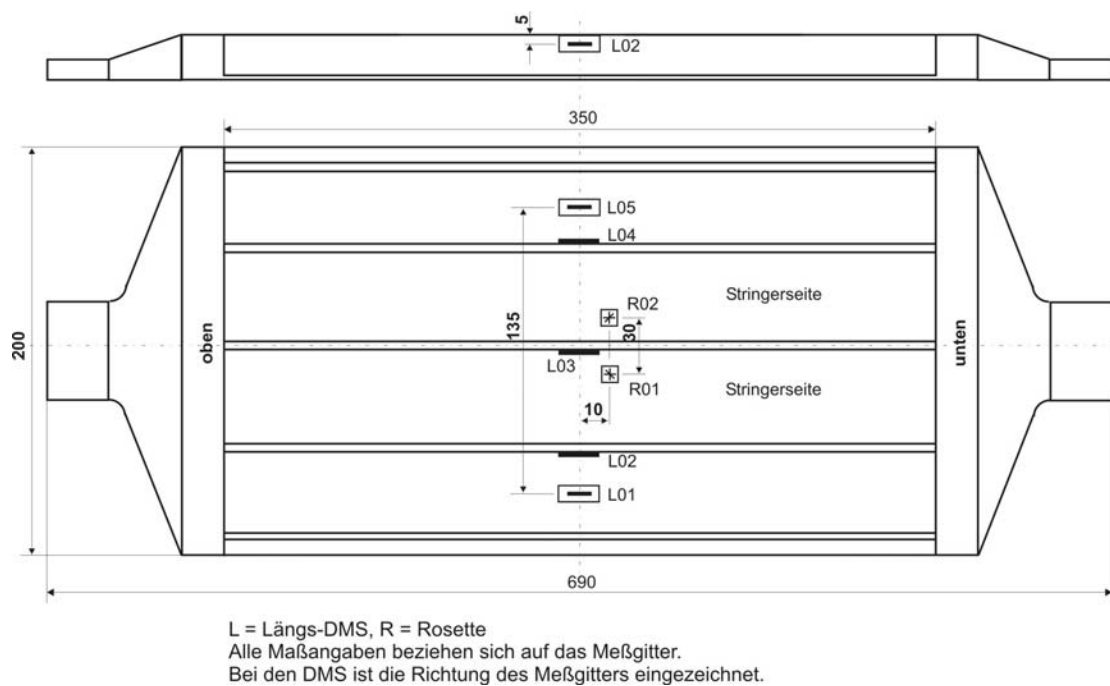


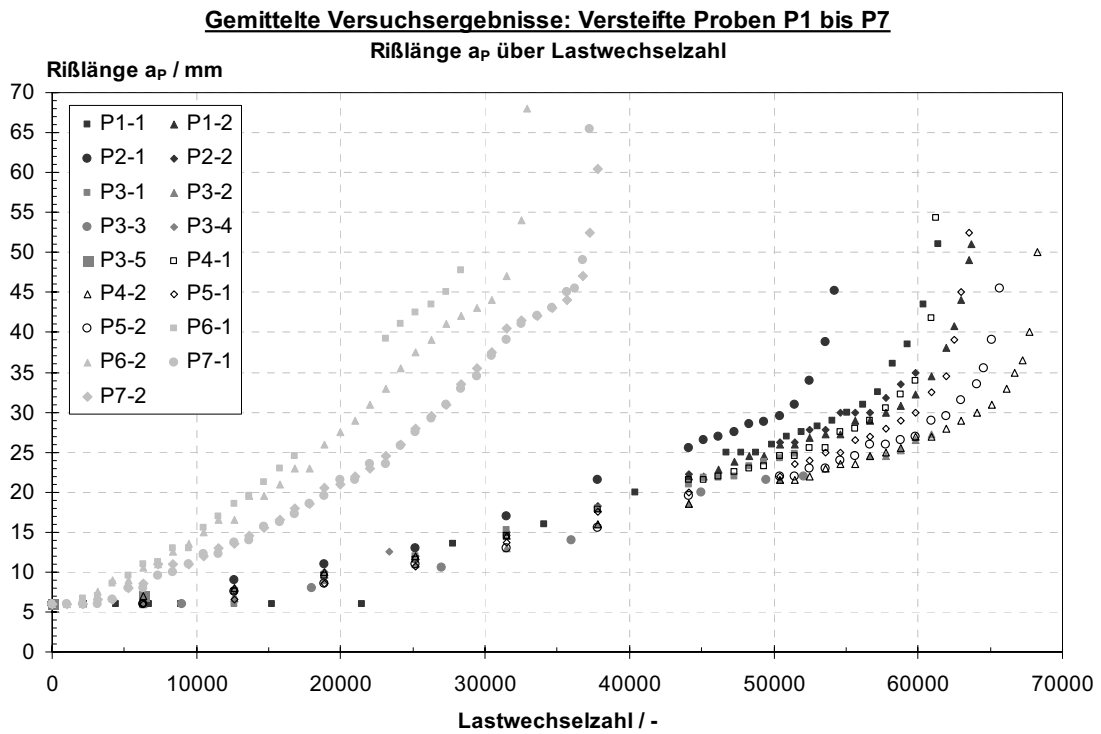
Abbildung A4: Geometrie der Probenform 3



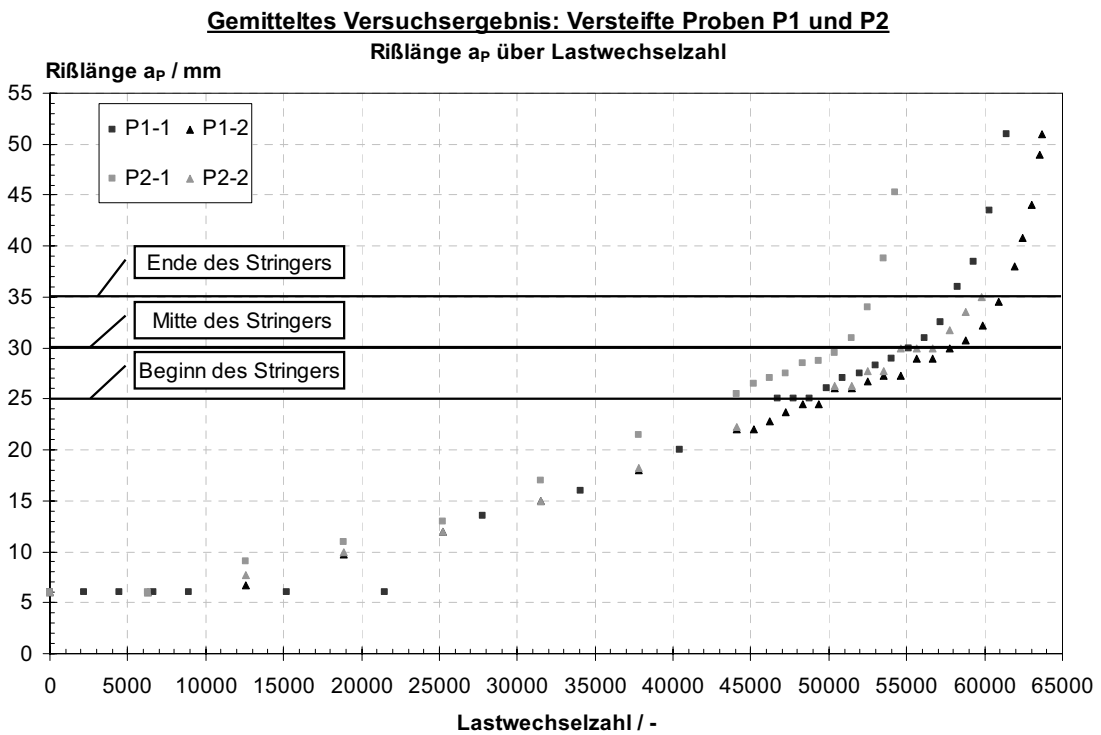
**Abbildung A5:** Position und Ausrichtung der DMS der Proben mit vier Versteifungen



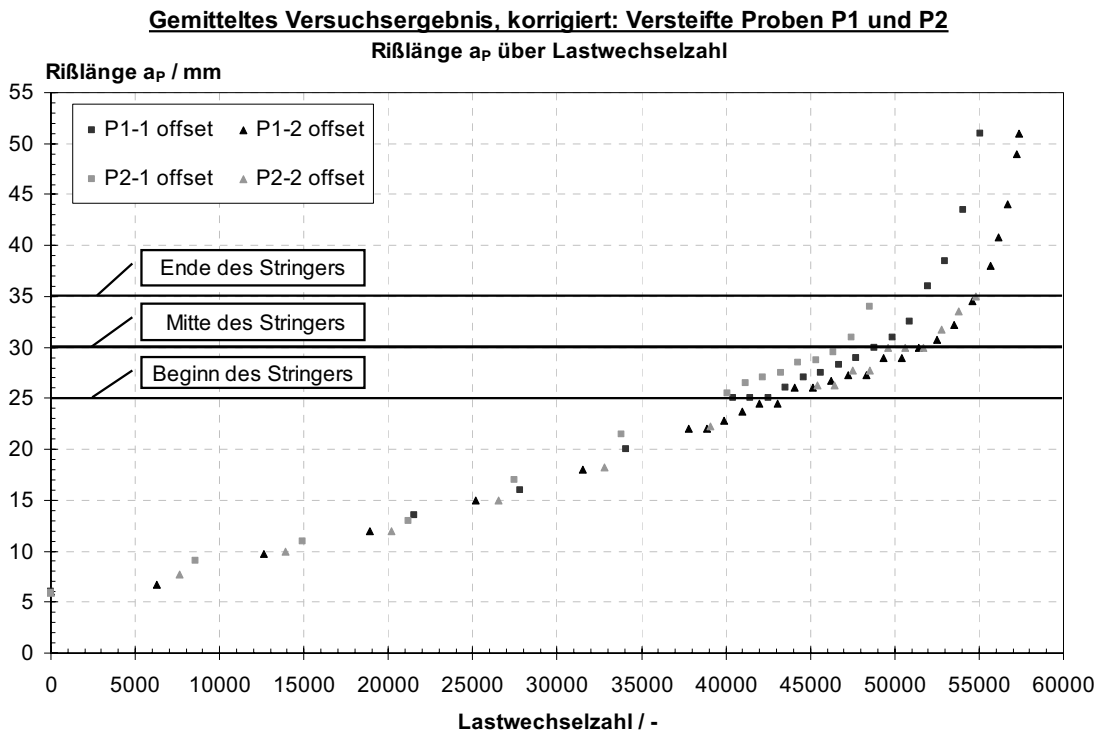
**Abbildung A6:** Position und Ausrichtung der DMS der Proben mit fünf Versteifungen



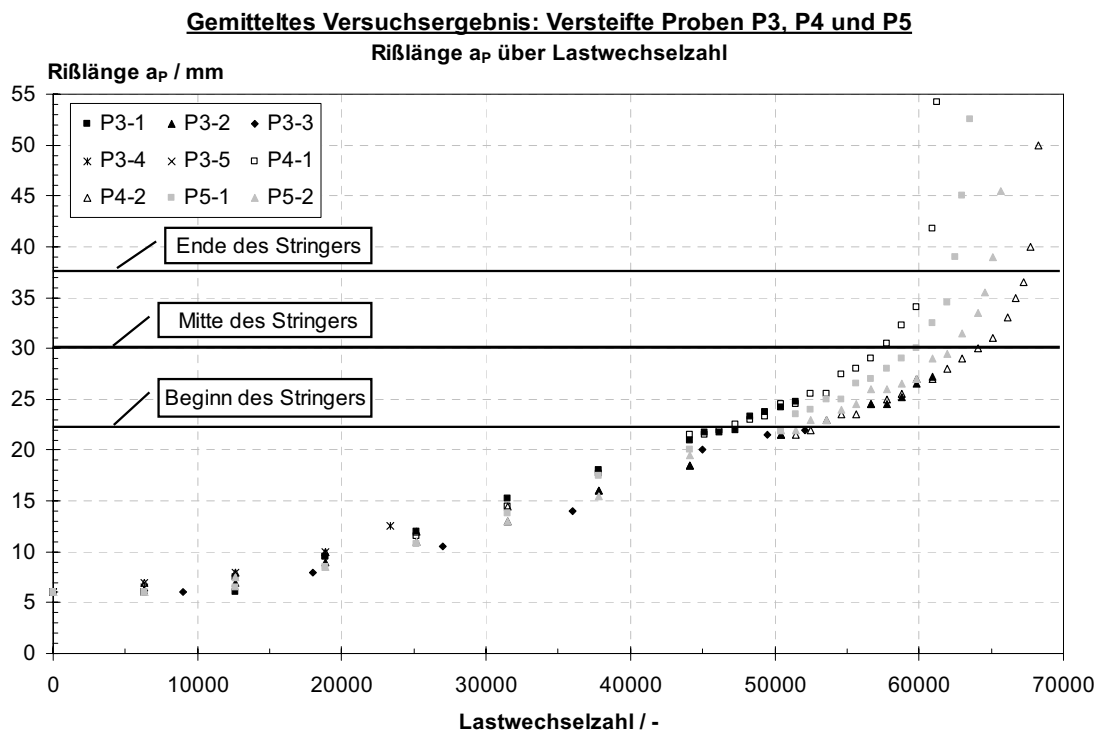
**Abbildung A7:** Gemittelte Versuchsergebnisse aller getesteten 17 Probekörper



**Abbildung A8:** Gemitteltes Rißwachstum der Proben P1 und P2 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl

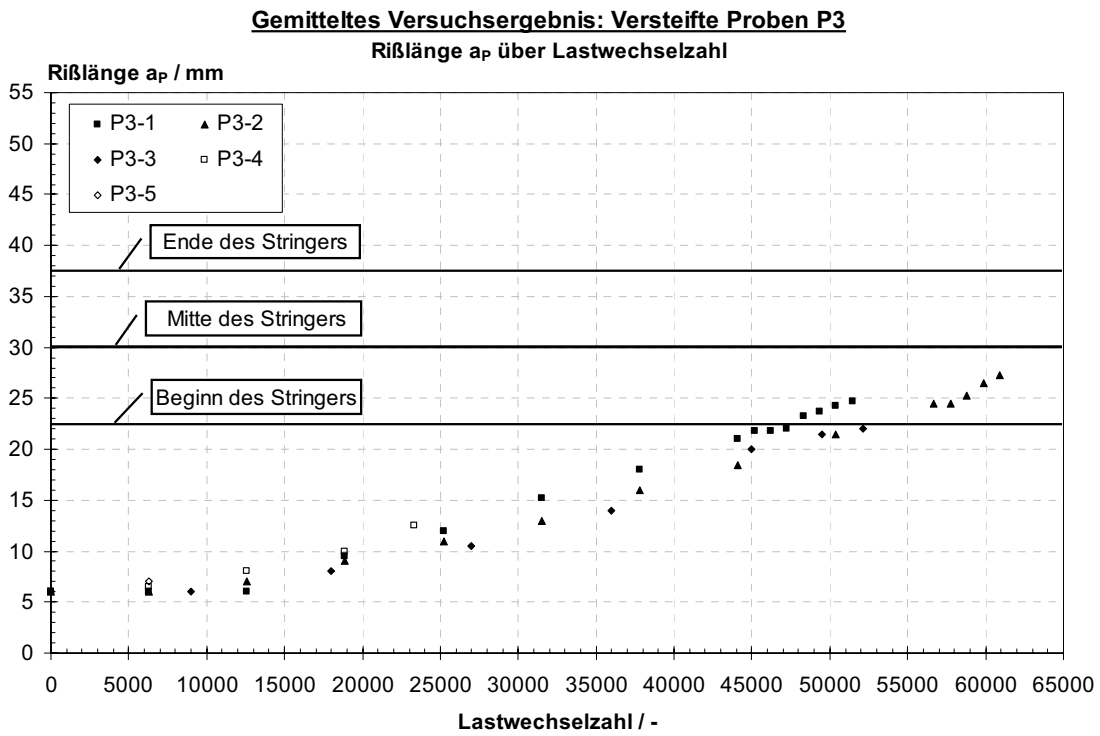


**Abbildung A9:** Korrigierte, gemittelte Darstellung des Rißwachstums der Proben P1 und P2 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl

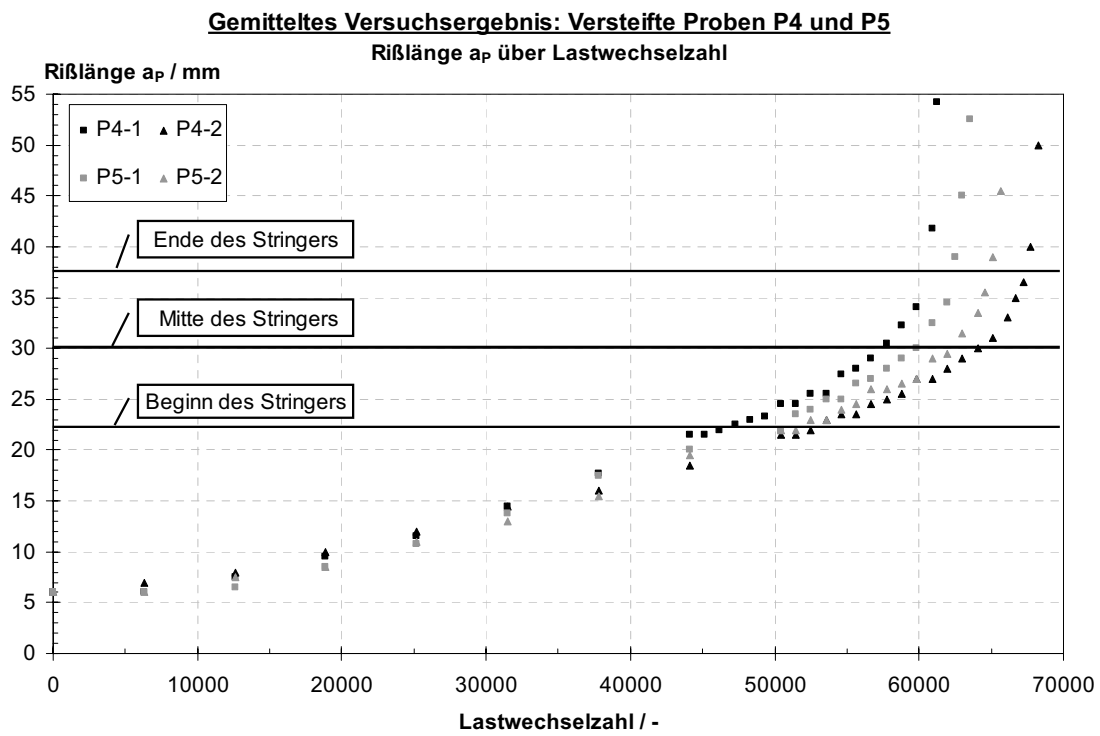


**Abbildung A10:** Gemittelt Rißwachstum der Proben P3, P4, P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl

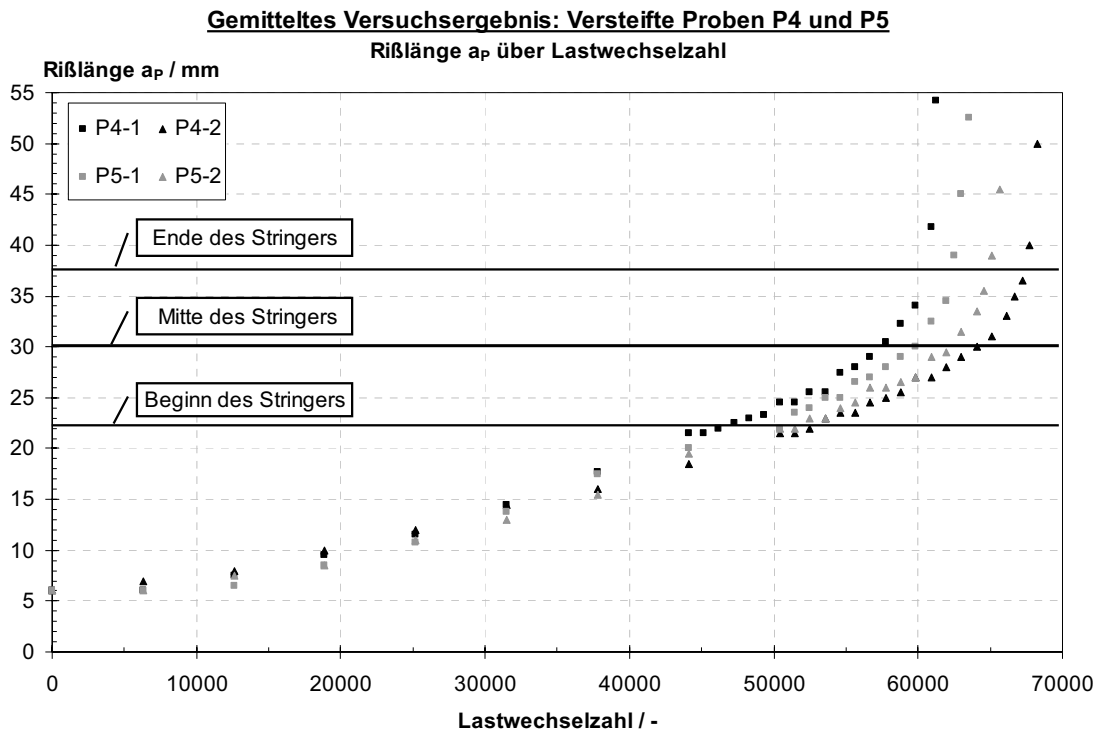




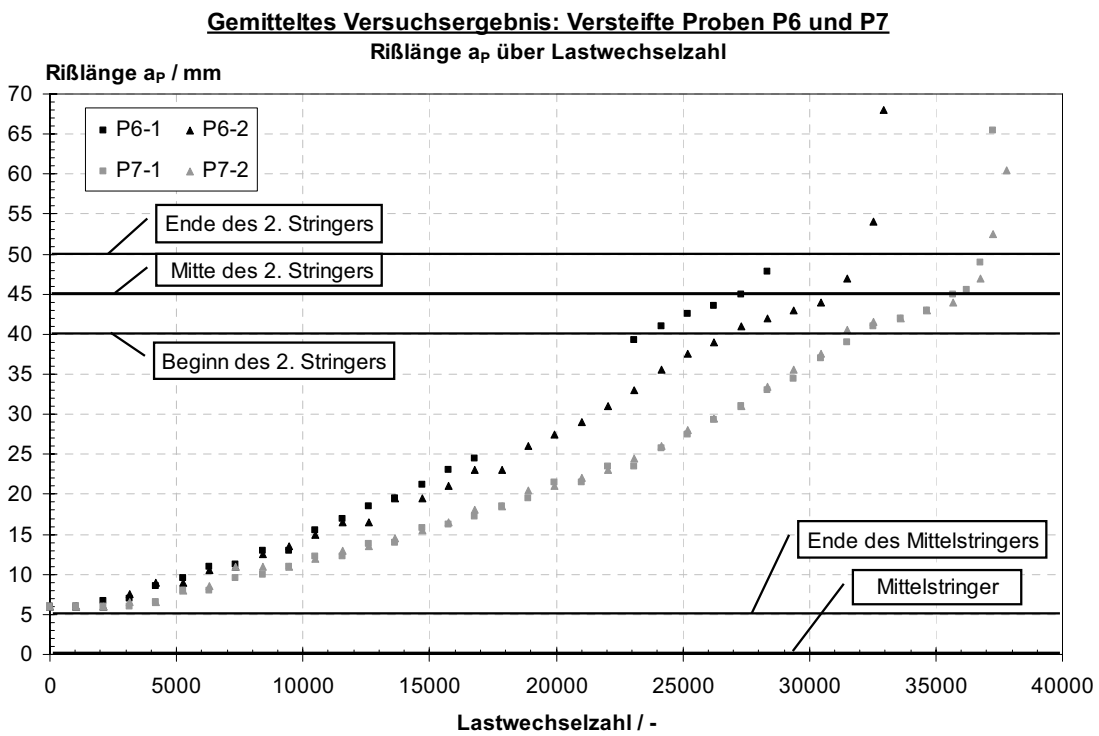
**Abbildung A11:** Gemitteltetes Rißwachstums der Probe P3 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl



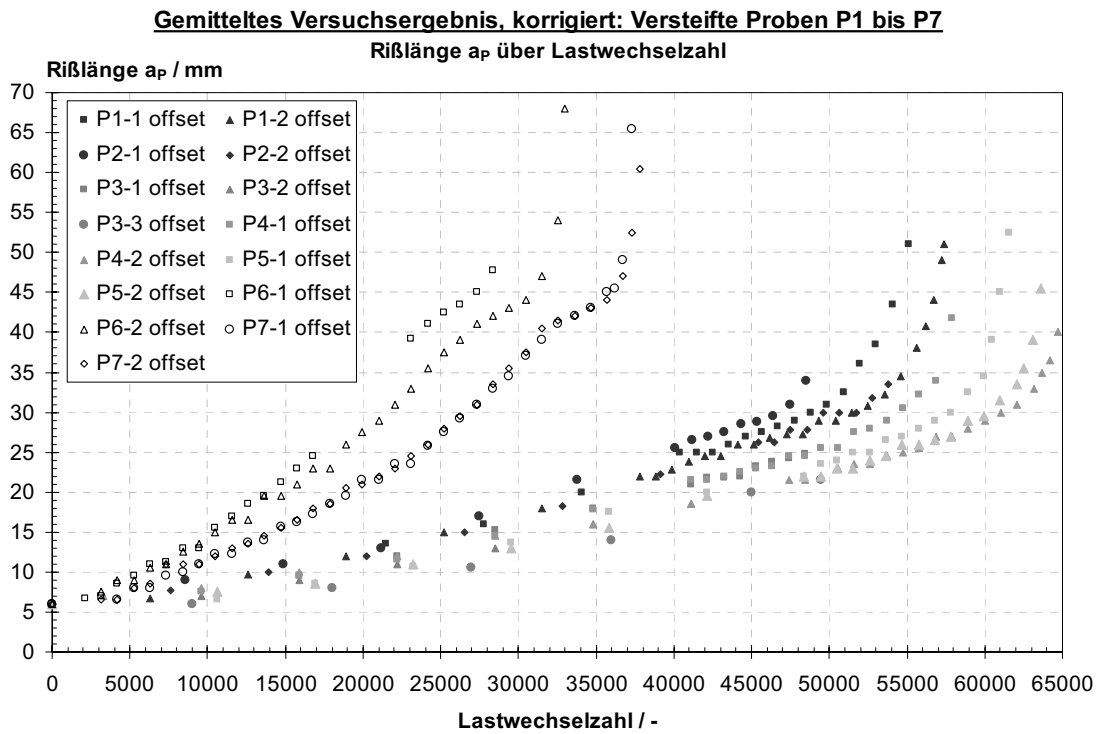
**Abbildung A12:** Gemitteltetes Rißwachstum der Proben P4 und P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl



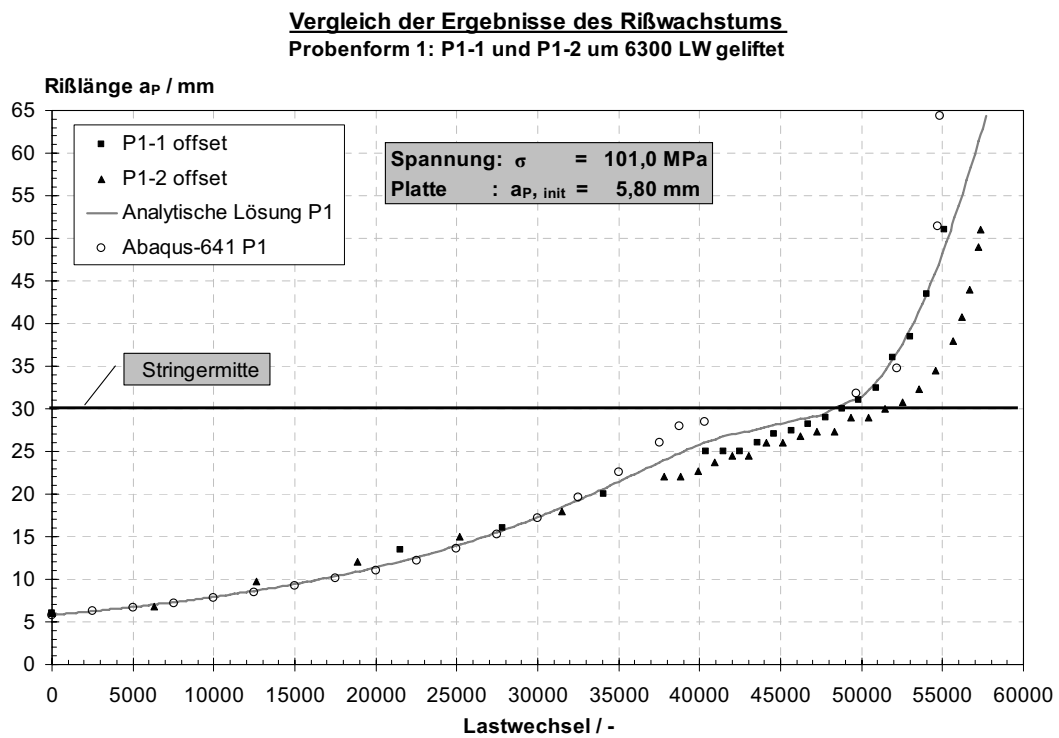
**Abbildung A13:** Korrigierte, gemittelte Darstellung des Rißwachstums der Proben P3, P4, P5 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl



**Abbildung A14:** Gemitteltetes Rißwachstum der Proben P6 und P7 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl

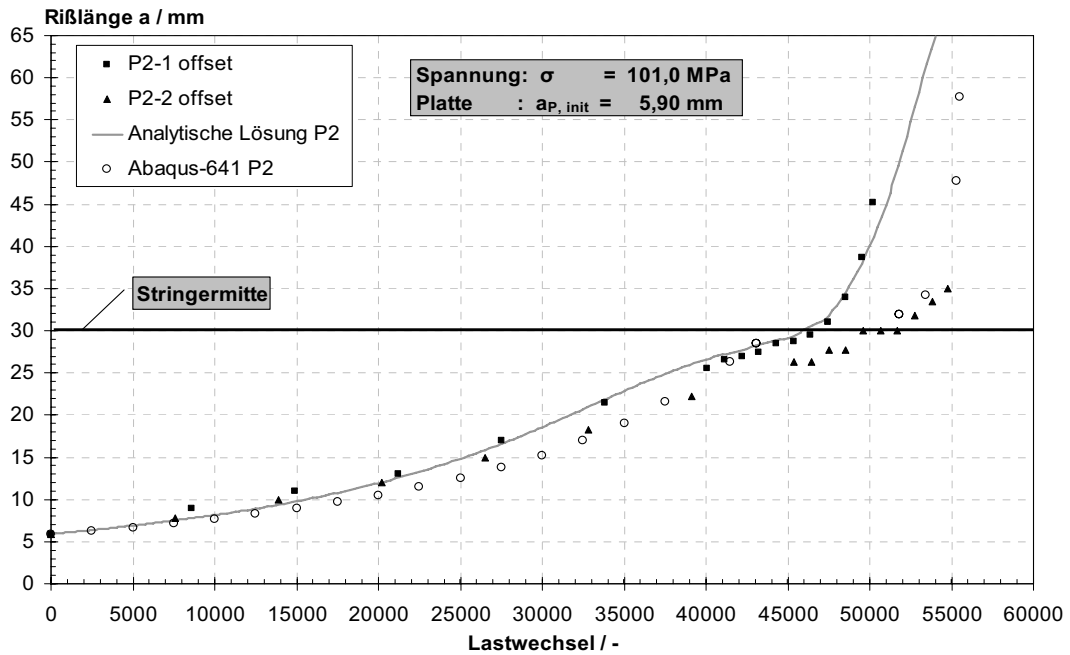


**Abbildung A15:** Korrigierte, gemittelte Darstellung des Rißwachstums der Proben P1 bis P7 in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl



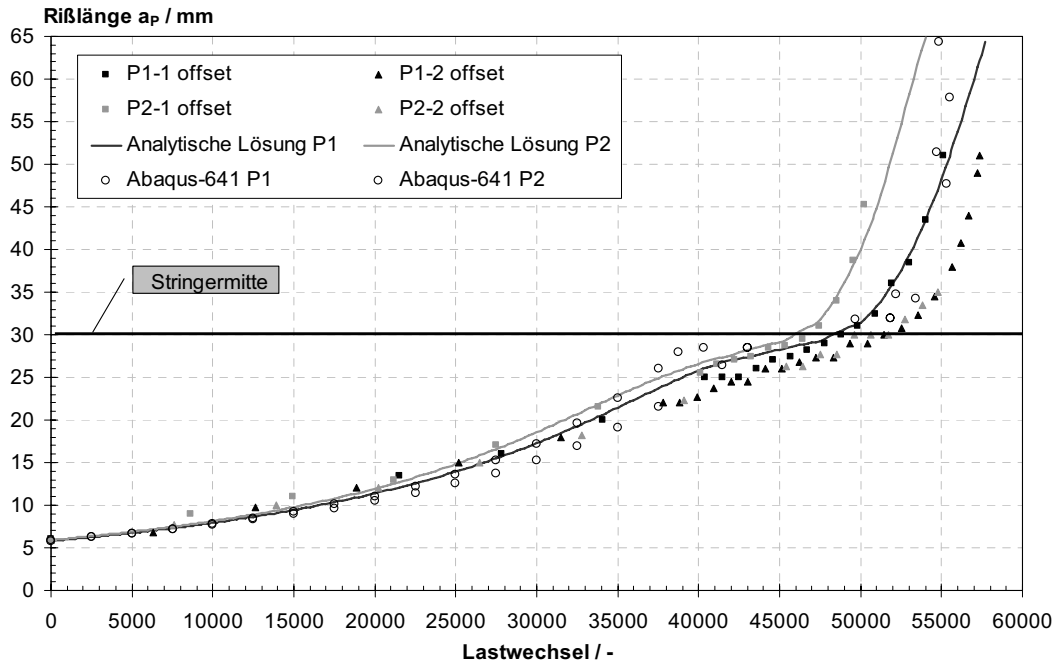
**Abbildung A16:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P1

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probenform 1: P2-1 um 4000 Lastwechsel, P2-2 um 5000 LW geliftet**



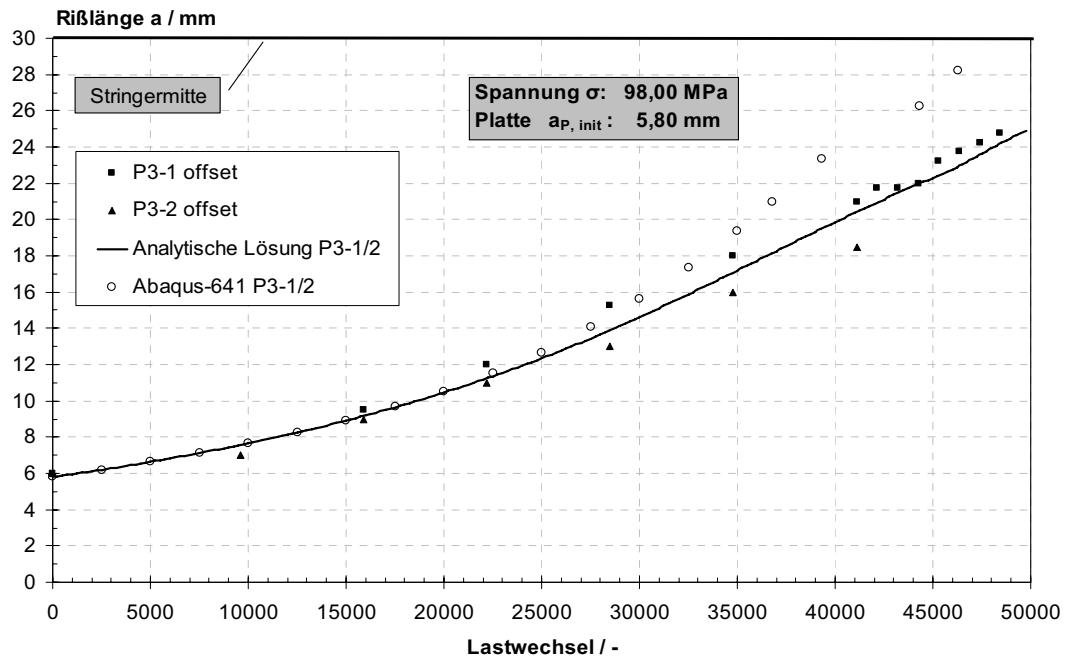
**Abbildung A17:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P2

**Vergleich der Ergebnisse der Probenform 1: korrigierte Versuchsergebnisse**  
**Rißlänge  $a_p$  über Lastwechselzahl**



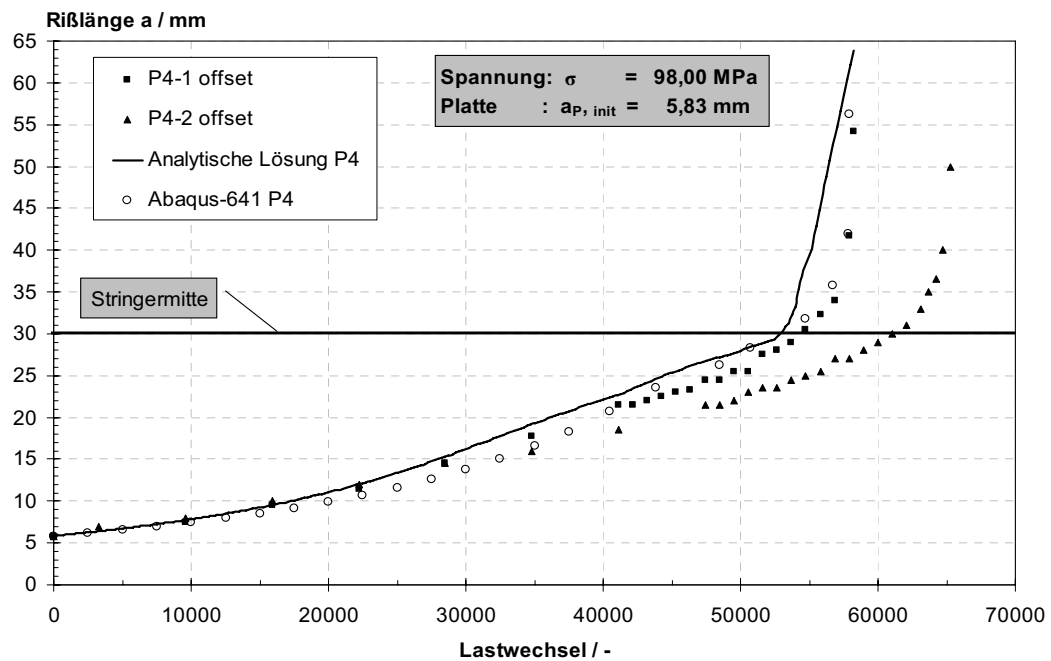
**Abbildung A18:** Vergleich der Ergebnisse für die Probenform 1 (P1 und P2)

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probeform 2: P3-1 und P3-2 um 3000 Lastwechsel geliftet**



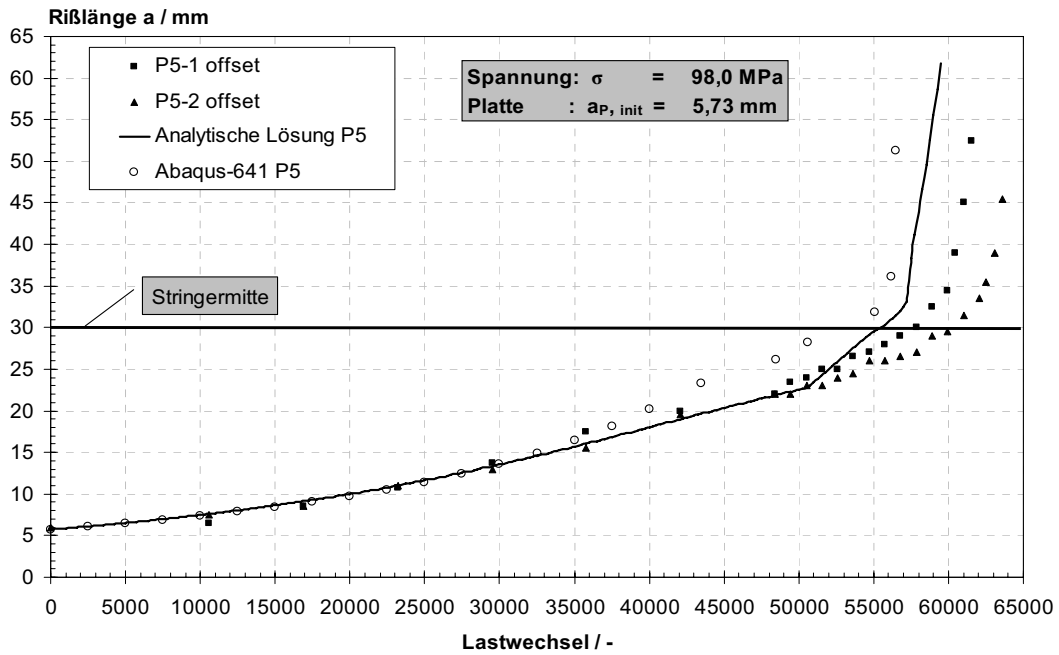
**Abbildung A19:** Vergleich der Ergebnisse für die Proben P3-1 und P3-2

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probenform 2: P4-1 und P4-2 um 3000 LW geliftet**



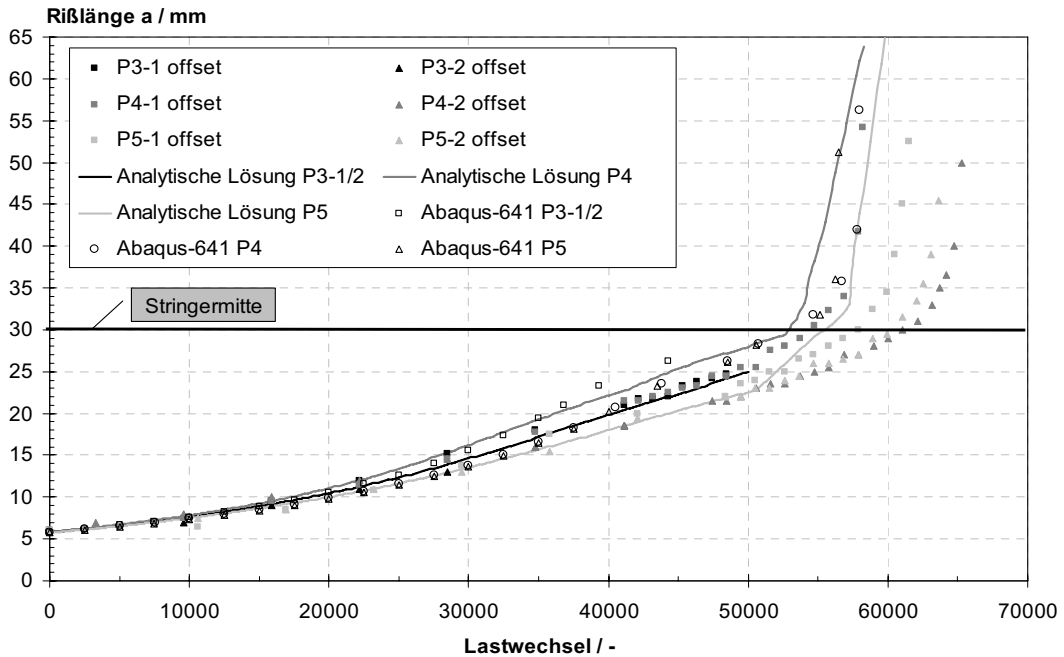
**Abbildung A20:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P4

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probenform 2: P5-1 und P5-2 um 2000 Lastwechsel geliftet**



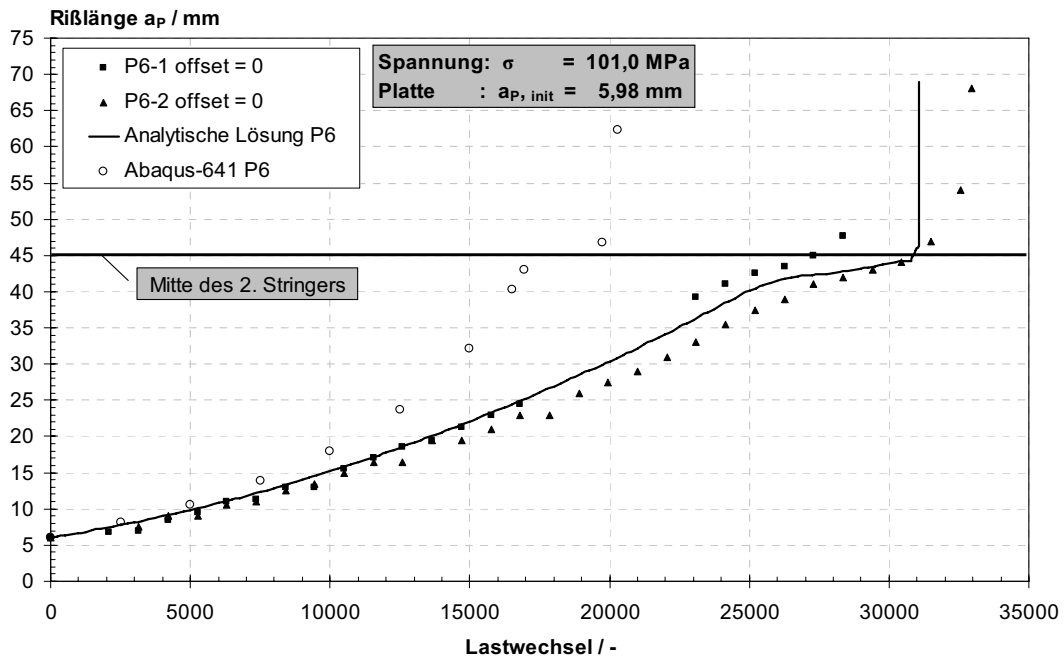
**Abbildung A21:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P5

**Vergleich der Ergebnisse der Probenform 2: korrigierte Versuchsergebnisse**  
**Rißlänge  $a_P$  über Lastwechselzahl**



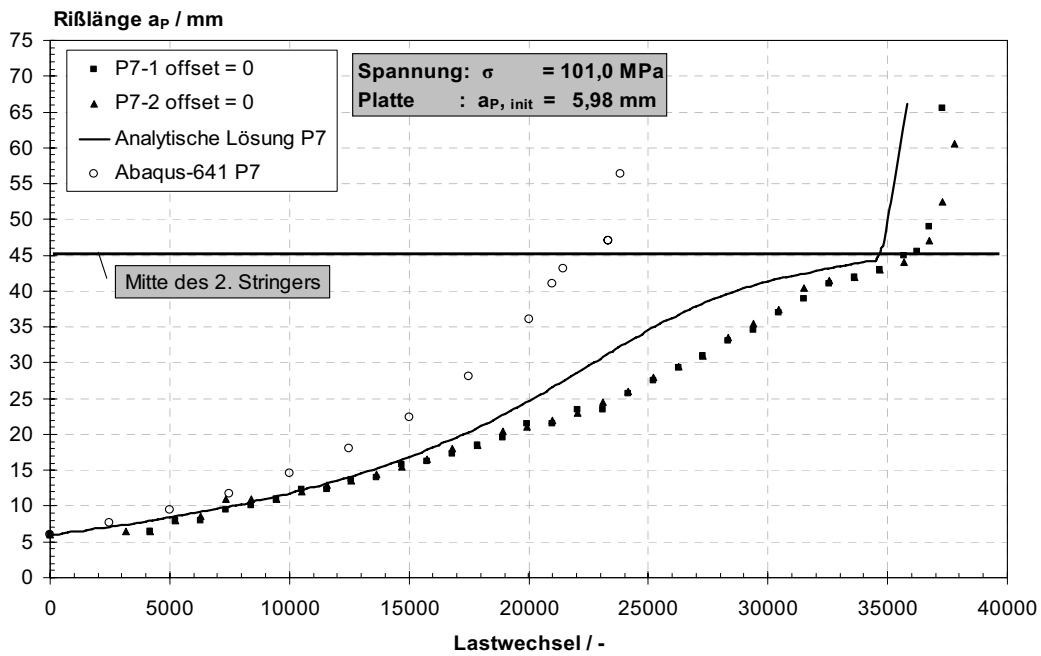
**Abbildung A22:** Vergleich der Ergebnisse für die Proben P3, P4 und P5

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probenform 3: P6-1 und P6-2 ungeliftet**



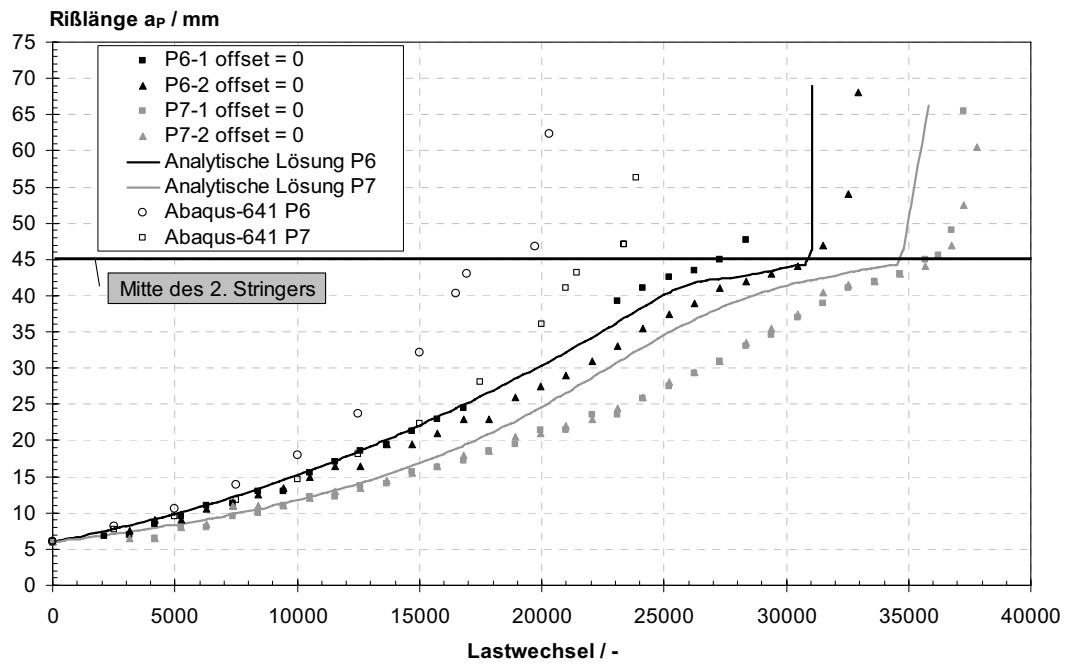
**Abbildung A23:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P6

**Vergleich der Ergebnisse des Rißwachstums**  
**Probenform 3: P7-1 und P7-2 ungeliftet**



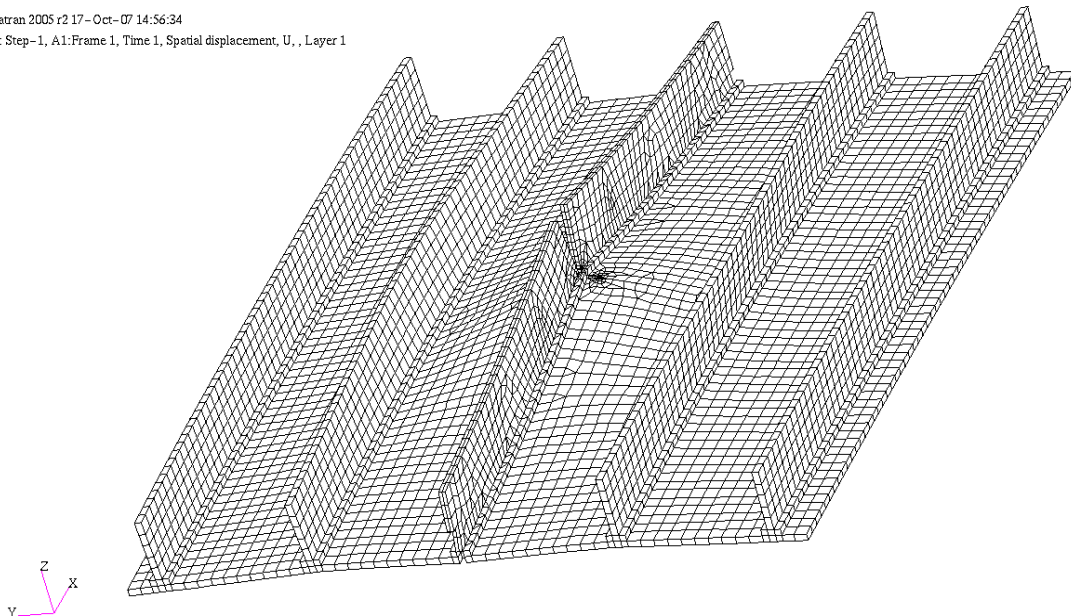
**Abbildung A24:** Vergleich der Ergebnisse für die Probe P7

**Vergleich der Ergebnisse der Probenform 3**  
**Rißlänge  $a_P$  über Lastwechselzahl**



**Abbildung A25:** Vergleich der Ergebnisse für die Proben P6 und P7

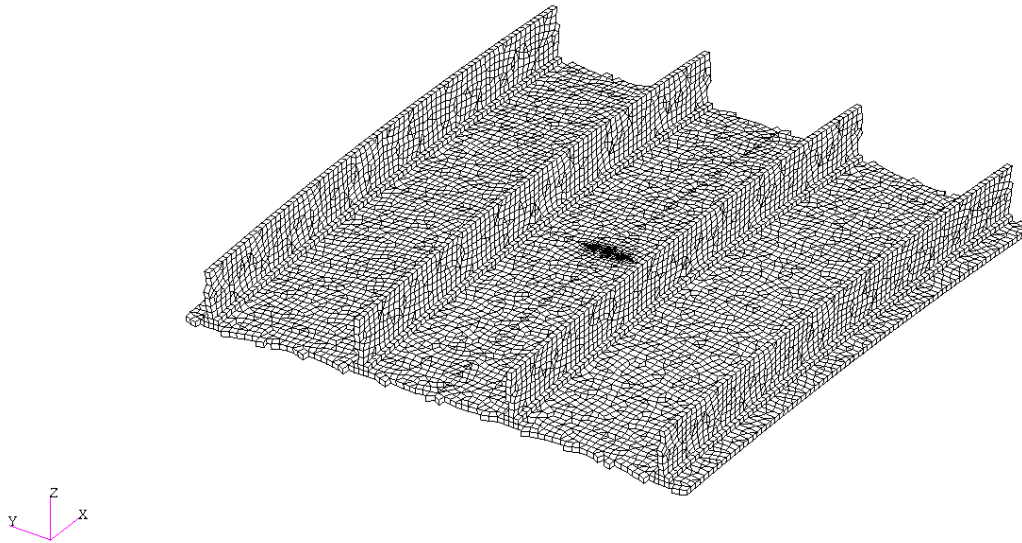
MSC.Patran 2005 r2 17-Oct-07 14:56:34  
 Deform: Step-1, A1:Frame 1, Time 1, Spatial displacement, U., Layer 1



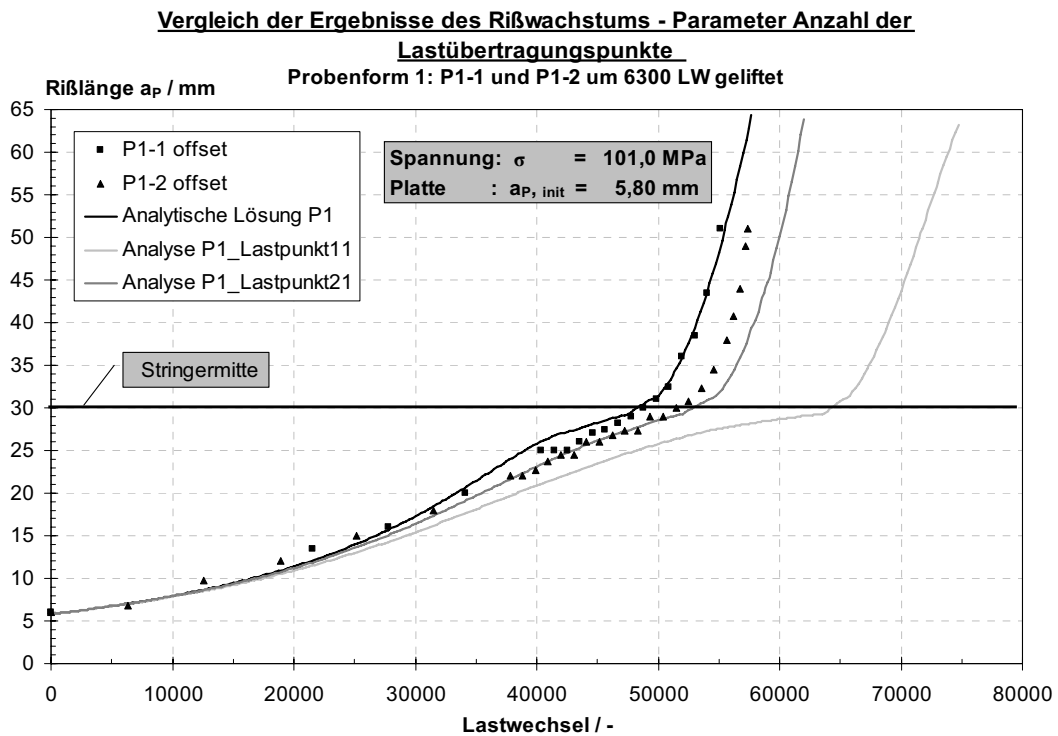
**Abbildung A26:** Verformungsbild der Probe P6 der FE-Rechnung, Rißlänge  $a_P = 5,98$  mm



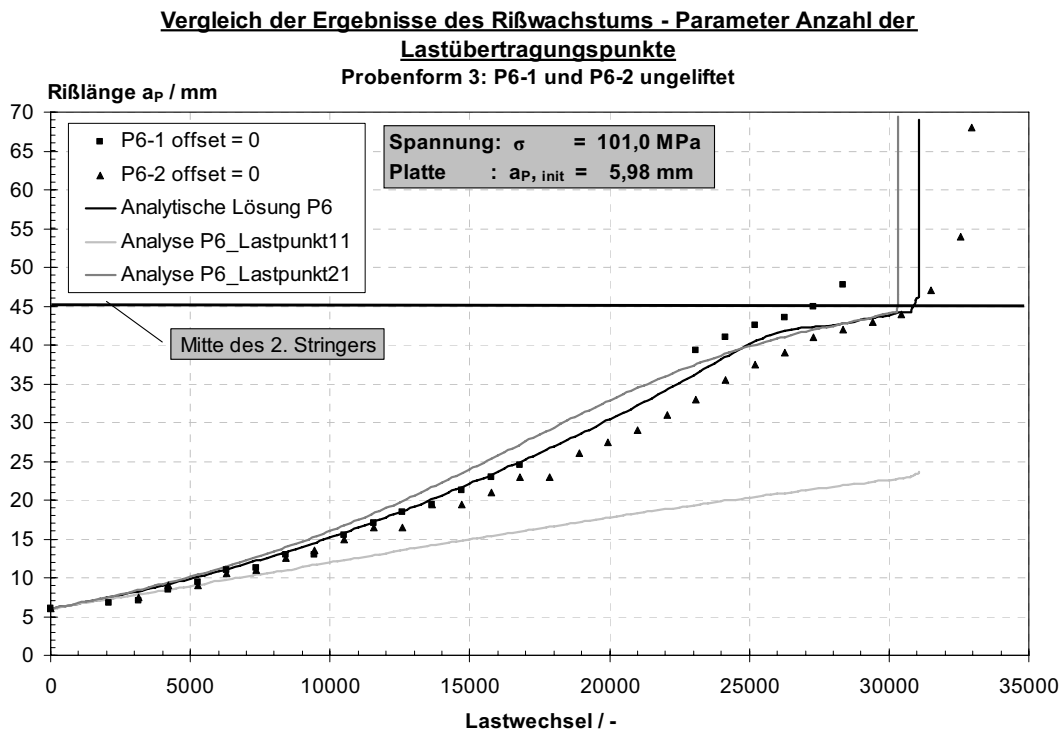
MSC.Patran 2005 r2 18 - Oct-07 07:53:50  
 Deform: Step-1, A1:Frame 1, Time 1, Spatial displacement, U, , Layer 1



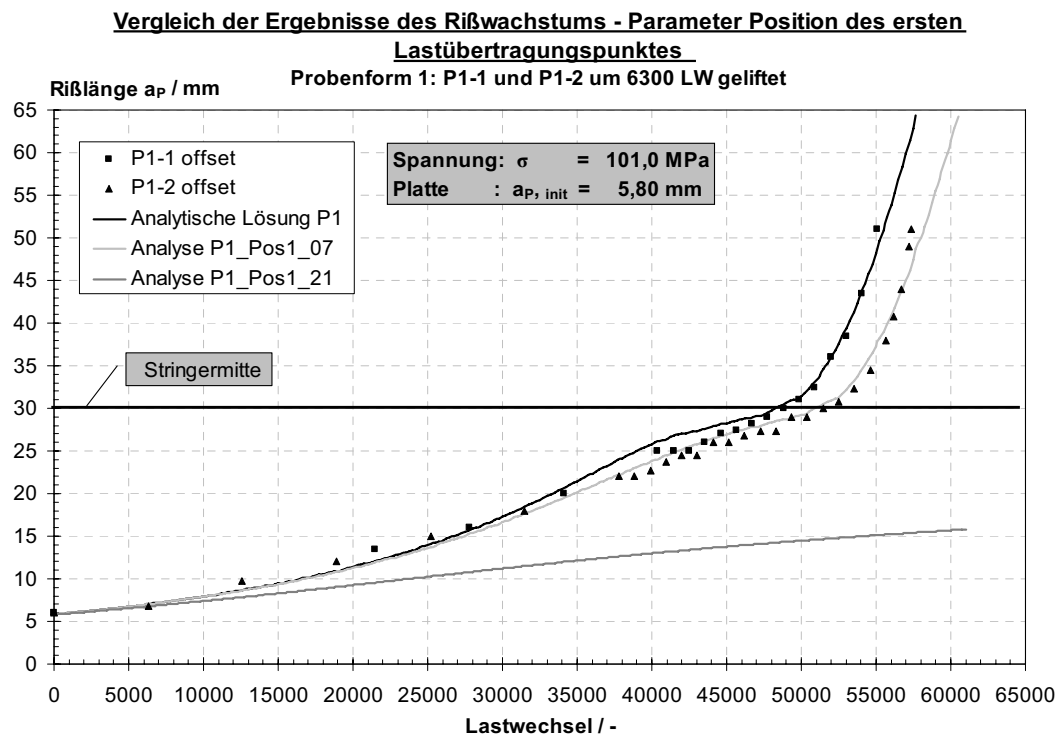
**Abbildung A27:** Verformungsbild der Probe P1 der FE-Rechnung, Rißlänge  $a_P = 5,80$  mm



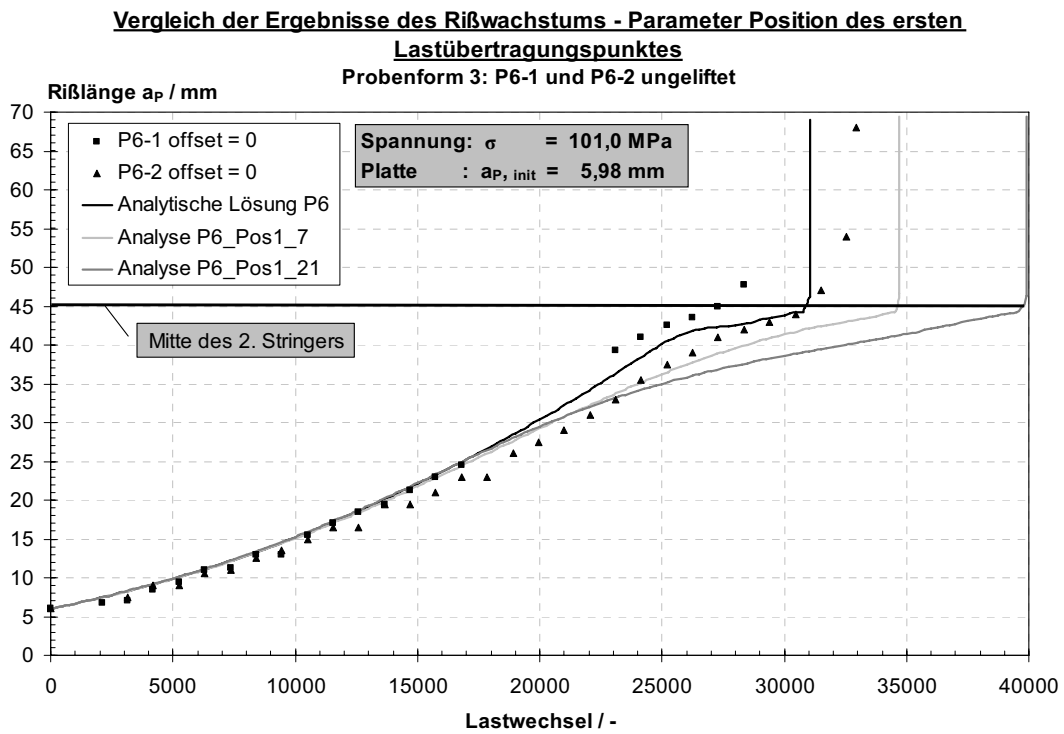
**Abbildung A28:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte



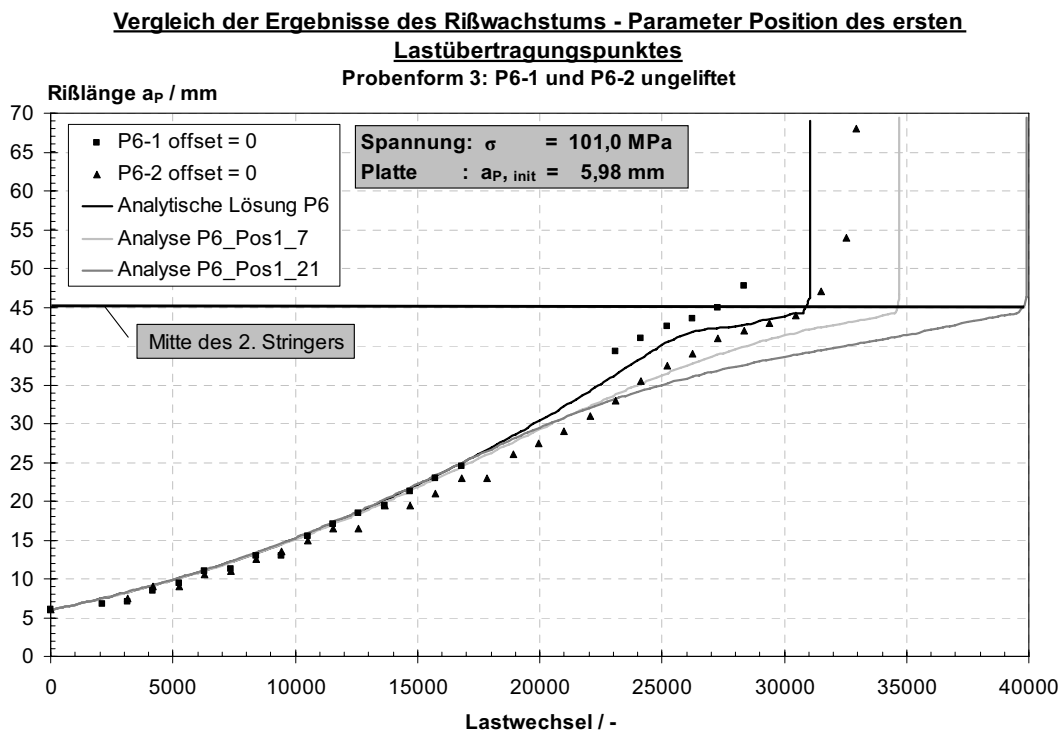
**Abbildung A29:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte



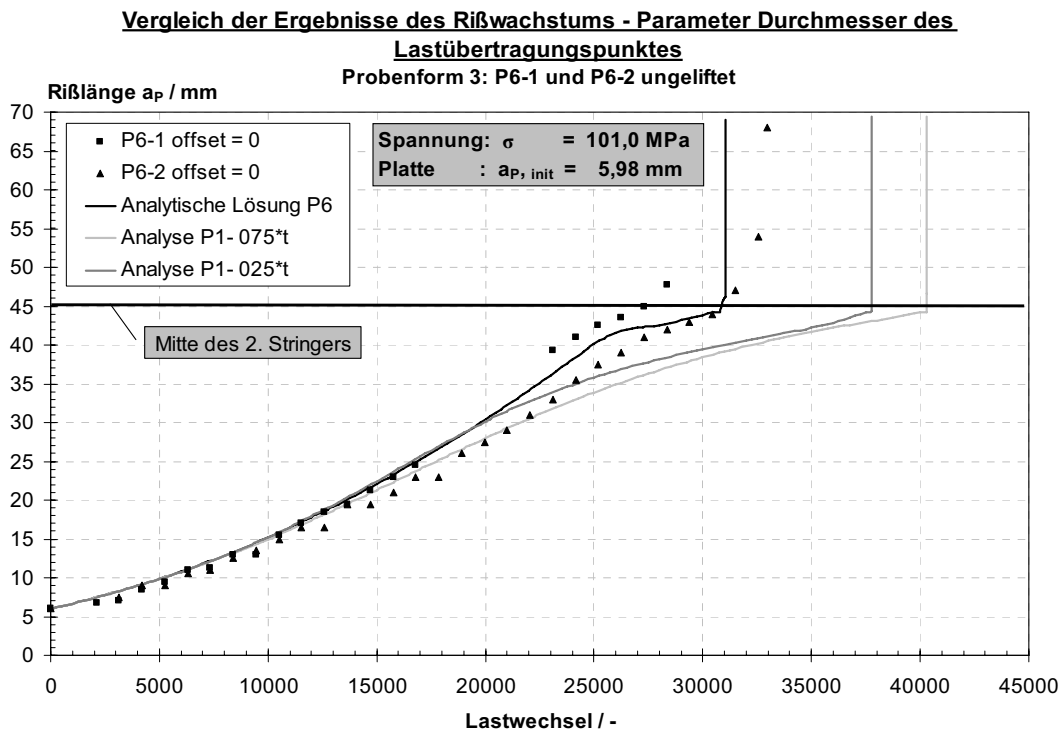
**Abbildung A30:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes



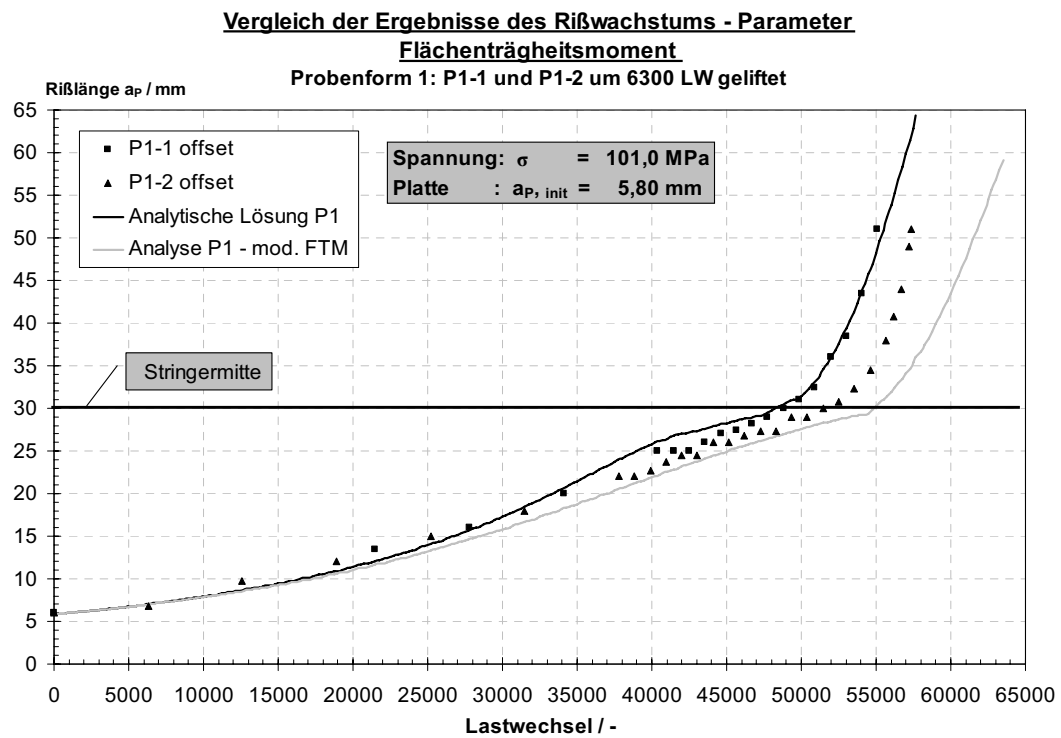
**Abbildung A31:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes



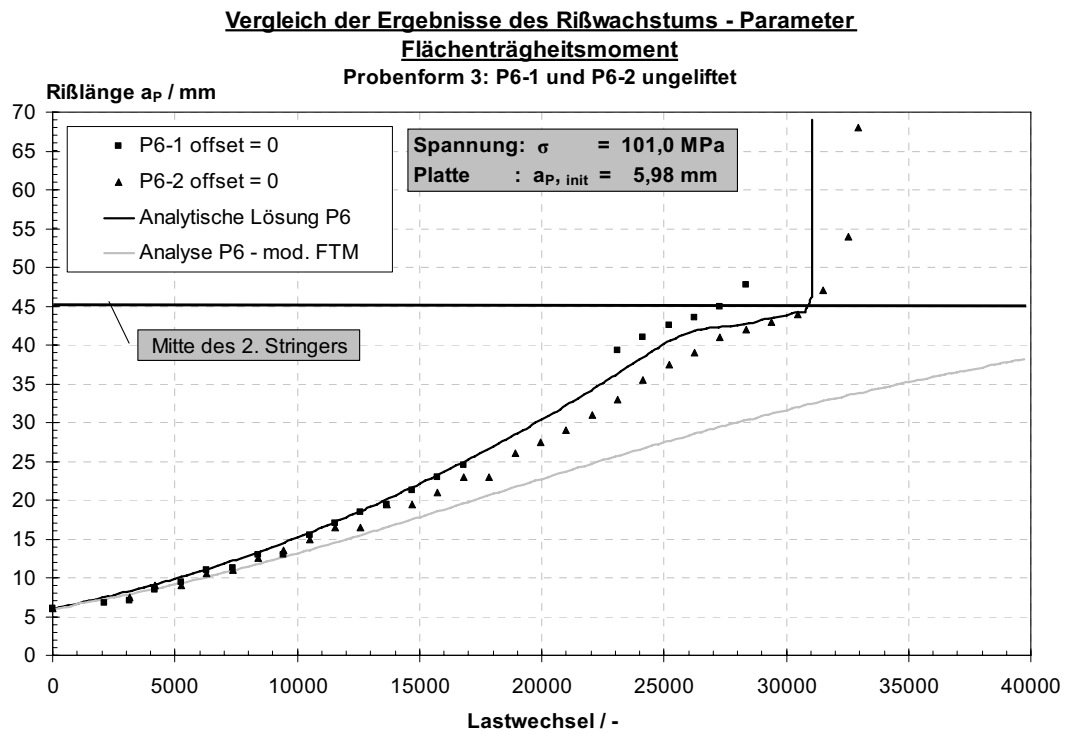
**Abbildung A32:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung des Durchmessers des Lastübertragungspunktes



**Abbildung A33:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung des Durchmessers des Lastübertragungspunktes



**Abbildung A34:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 1 bei Änderung des Flächenträgheitsmoments



**Abbildung A35:** Vergleich der Ergebnisse für Probe 6 bei Änderung des Flächenträgheitsmoments

# 11 Tabellen

## Verzeichnis der Tabellen

Tabelle B1 : Netzparameter und ihre Funktion bzw. ihre Werte .....	106
Tabelle B2 : Versuchsparameter der einzelnen Probekörper .....	107
Tabelle B3 : Versuchsergebnisse, ertragene Lastwechselzahl der unterschiedlichen Probekörper.	108
Tabelle B4 : Parameter zur analytischen Bestimmung der Reißfortschrittes .....	108
Tabelle B5 : Eingabewerte bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte für Probe 1.....	108
Tabelle B6 : Eingabewerte bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte für Probe 6.....	109
Tabelle B7 : Eingabe bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes für Probe 1	109
Tabelle B8 : Eingabe bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes für Probe 6	109

Parameter	Funktion bzw. Wert
para.nr	Anzahl der Elemente in radialer Richtung
para.np	Anzahl der Elemente in Umfangsrichtung
para.r_min	minimale Kantenlänge der Elemente an der Rißspitze
para.r_max	maximaler Radius für die Elemente um die Rißspitze
para.r_med	maximale Kantenlänge der unstrukturierten Elemente
para.tol	Genauigkeit, bei der die Romberg_Integration abbricht
para.d	Übergangslänge
para.nit	Anzahl der Iterationen für die programmintern benutzte Romberg-Integration
mesh_para.alpha1	1,2: Optimierungsparameter
mesh_para.alpha2	1,0: Optimierungsparameter
mesh_para.alpha3	0,5: Optimierungsparameter
mesh_para.alpha4	0,5: Optimierungsparameter
mesh_para.alpha5	0,5: Optimierungsparameter
mesh_para.epsilon	0,3
mesh_para.epsilon1	0,3
mesh_para.epsilon2	2,0
mesh_para.quadmode	1
mesh_para.ratio	2
mesh_para.divide_n_times	0: minimale Anzahl der Gebietszerlegungen, bis die Vernetzung durch Gebiete vom Typ Dreieck und Viereck möglich ist
mesh_para.number_of_smoothings	3: Anzahl der Glättungsoperationen; dreifache Anwendung der Operation erweist sich als geeignet
mesh_para.laplace_f	1: beliebiger Wert, gibt den Einfluß der Laplace-Glättung an; der Einfluß wird prozentual zwischen $mesh\_para.laplace\_f$ und $mesh\_para.edge\_f$ aufgeteilt $\frac{mesh\_para.laplace\_f}{mesh\_para.laplace\_f + mesh\_para.edge\_f}$
mesh_para.edge_f	1: beliebiger Wert, gibt den Einfluß der Kanten-Glättung an; der Einfluß wird prozentual zwischen $mesh\_para.laplace\_f$ und $mesh\_para.edge\_f$ aufgeteilt $\frac{mesh\_para.edge\_f}{mesh\_para.laplace\_f + mesh\_para.edge\_f}$
mesh_para.angle_f	0
mesh_para.delta	0,1
mesh_para.area_adj	0,5
mesh_para.tol	0,001
mesh_para.area_tol	para.r_min

**Tabelle B1:** Netzparameter und ihre Funktion bzw. ihre Werte

Probencode	Frequenz in Hz	Maximalkraft in kN	Belastungs- verhältnis R	Anzahl unter- schiedlicher Blöcke	Lastwechsel pro Block
P1-1	2	63,0	0,1	2	6300 1050
P1-2	2	63,0	0,1	3	6300 1050 525
P2-1	2	59,0	0,1	2	6300 1050
P2-2	2	59,0	0,1	2	6300 1050
P3-1	2	68,0	0,1	2	6300 1050
P3-2	2	68,0	0,1	2	6300 1050
P3-3	2	55,0	0,1	2	9000 4500
P3-4	2	63,0	0,1	1	6300
P3-5	2	66,0	0,1	1	6300
P4-1	2	64,0	0,1	2	6300 1050
P4-2	2	64,0	0,1	3	6300 1050 525
P5-1	2	62,0	0,1	3	6300 1050 525
P5-2	2	62,0	0,1	3	6300 1050 525
P6-1	2	68,0	0,1	2	6300 1050
P6-2	2	68,0	0,1	3	6300 1050 525
P7-1	2	62,0	0,1	2	1050 525
P7-2	2	62,0	0,1	2	1050 525

**Tabelle B2:** Versuchsparameter der einzelnen Probekörper



Probencode	Lastwechsel	Rißlänge $2a_p$ / mm	Bemerkung
P1-1	61400	102,0	Mittelstringer je ca. 13,5 mm gerissen, unsymmetrisches Rißwachstum
P1-2	63649	104,0	linker Mittelstringer je 12,0 mm gerissen, rechter Stringer 14,5 mm
P2-1	54225	90,5	Mittelstringer gebrochen
P2-2	59792	70,0	Mittelstringer je ca. 13,0 mm gerissen, untere Einspannung abgerissen
P3-1	51450	49,5	untere Einspannung abgerissen
P3-2	60900	54,5	untere Einspannung gerissen
P3-3	52096	43,0	gemessen bei 49500 Lastwechseln, untere Einspannung abgerissen
P3-4	23353	25,0	obere Einspannung gerissen
P3-5	9091	14,0	gemessen bei 6300 Lastwechseln, obere Einspannung abgerissen
P4-1	61215	108,5	Mittelstringer gebrochen
P4-2	68250	100,0	Mittelstringer gebrochen
P5-1	63525	105,0	Mittelstringer gebrochen
P5-2	65625	91,0	Mittelstringer gebrochen
P6-1	29400	95,5	gemessen bei 28350 Lastwechseln, linker Stringer gebrochen → Gewaltbruch
P6-2	32947	136,0	
P7-1	37275	131,0	Mittel- und die beiden angrenzenden Stringer gebrochen
P7-2	37800	121,0	

**Tabelle B3:** Versuchsergebnisse, ertragene Lastwechselzahl der unterschiedlichen Probekörper

Parameter	Einheit	Wert
Anzahl der Lastübertragungspunkte	---	15
Position des ersten Lastübertragungspunktes	mm	1,40
Abstand zwischen zwei benachbarten Lastübertragungspunkten	mm	12,30
Durchmesser Lastübertragungspunkt	mm	$0,5 \cdot t_s$
Schrittweite der Lastwechsel für Rißfortschritt	---	250

**Tabelle B4:** Parameter zur analytischen Bestimmung der Rißfortschrittes

Parameter	Einheit	15 Lastpunkte	11 Lastpunkte	21 Lastpunkte
Position des 1. Lastübertragungspunktes	mm	1,4	1,4	1,4
Abstand zw. den Lastübertragungspunkten	mm	12,3	17,22	8,61
Durchmesser der Lastübertragungspunkte	mm	$0,5 \cdot t_s$	$0,5 \cdot t_s$	$0,5 \cdot t_s$
Schrittweite der Lastwechsel	---	250	250	250
Angelegte Spannung	MPa	101	101	101

**Tabelle B5:** Eingabewerte bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte für Probe 1

Parameter	Einheit	15 Lastpunkte	11 Lastpunkte	21 Lastpunkte
Position des 1. Lastübertragungspunktes	mm	1,4	1,4	1,4
Abstand zw. den Lastübertragungspunkten	mm	12,3	17,22	8,61
Durchmesser der Lastübertragungspunkte	mm	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$
Schrittweite der Lastwechsel	---	250	250	250
Angelegte Spannung	MPa	101	101	101

**Tabelle B6:** Eingabewerte bei Änderung der Anzahl der Lastübertragungspunkte für Probe 6

Parameter	Einheit	Pos. 1,4 mm	Pos. 0,7 mm	Pos. 2,1 mm
Anzahl der Lastübertragungspunkte	---	15	15	15
Abstand zw. den Lastübertragungspunkten	mm	12,3	12,4	12,2
Durchmesser der Lastübertragungspunkte	mm	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$
Schrittweite der Lastwechsel	---	250	250	250
Angelegte Spannung	MPa	101	101	101

**Tabelle B7:** Eingabe bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes für Probe 1

Parameter	Einheit	Pos. 1,4 mm	Pos. 0,7 mm	Pos. 2,1 mm
Anzahl der Lastübertragungspunkte	---	15	15	15
Abstand zw. den Lastübertragungspunkten	mm	12,3	12,4	12,2
Durchmesser der Lastübertragungspunkte	mm	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$	$0,5 \cdot t_S$
Schrittweite der Lastwechsel	---	250	250	250
Angelegte Spannung	MPa	101	101	101

**Tabelle B8:** Eingabe bei Änderung der Position des ersten Lastübertragungspunktes für Probe 6





