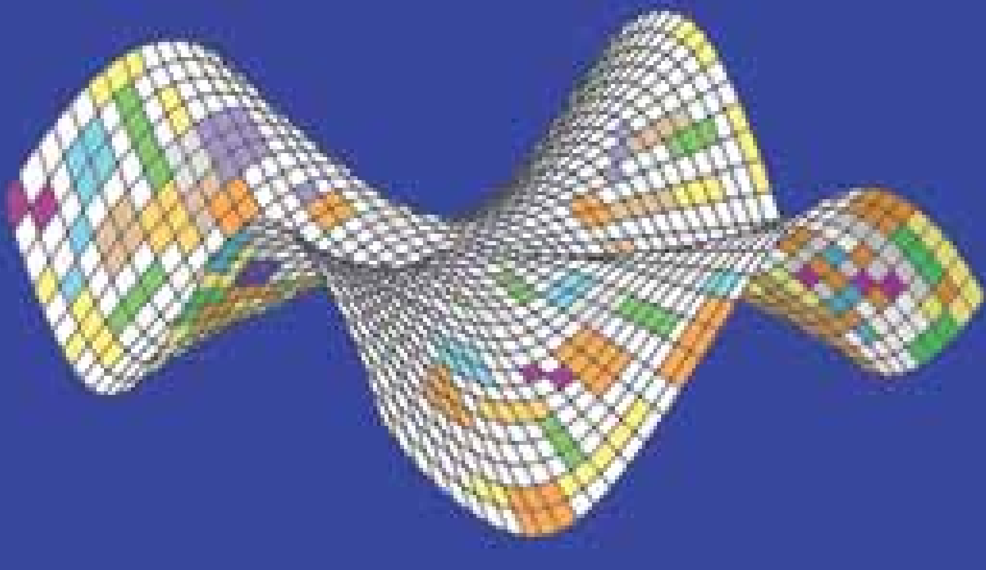
Mehrdimensionale Analysis

ein Übungsbuch



Wassim El-Benny

Mehrdimensionale Analysis

Wassim El-Benny

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.
1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2003

ISBN 3-89873-782-9

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2003
Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 3-89873-782-9

Inhaltsverzeichnis

Bevor es losgeht ...

0.1 Wofür dieses Buch

Dieses Buch richtet sich an Studenten der Mathematik, Physik, und Informatik. Der Inhalt ist auf eine zweite Analysis-Vorlesung ausgerichtet.
Es gibt viele Bücher über Analysis mehrerer Dimensionen, aber sehr wenige Bücher behandeln die Analysis-Aufgaben in einer einfachen, detaillierten Art und Weise. Für diese Leser ist dieses Buch geschrieben.

0.2 Lernen durch Aufgaben

In meinem Mathematik Studium habe ich die Erfahrung gemacht, dass das Lernen durch Aufgaben mit Lösungen die beste Methode ist. Natürlich muss man zuerst selber versuchen eine Aufgabe zu lösen, aber es ist eine Zeitverschwendung, wenn man zu lange an einer Aufgabe sitzt. Wenn man keine Musterlösung vor sich hat, dann ist es möglich dass man nie erfährt, wie eine Lösung dieser Aufgabe aussehen könnte. Deshalb habe ich mir die Mühe gemacht Lösungen zu allen Aufgaben zu schreiben. Um einen größtmöglichen Lerneffekt zu haben, ist es wichtig sich nicht zu lange mit allen Details einer Aufgabe zu beschäftigen. Viel wichtiger ist es die Methodik einer Aufgabe zu verstehen. Aus diesem Grund habe ich meine Aufgaben möglichst einfach gehalten.

0.3 Der schmale Grad zwischen Erfolg und Misserfolg

Dass immer nur eine schmale Wand zwischen Erfolg und Versagen liegt beschreibt Jeff Olsen, der Präsident einer amerikanischen Satelliten-Fernsehstation, die oft Programme zur persönlichen Weiterentwicklung anbietet, als 'den kleinen Unterschied'. Genau diesen kleinen Unterschied, der über Erfolg und Versagen entscheidet, sieht Olsen in den in leicht zu erfüllenden täglichen Aufgaben. Doch durch genau diese alltägliche Kontinuität mit der die kleinen Gewohnheiten durchgeführt werden, werden aus Ihnen entscheidende Erfolge oder Misserfolge.

0.4 Einstein und der kleine Unterschied

Auch Einstein kannte Misserfolg. So war es ihm nicht geglückt an der Universität Fuß zu fassen und er arbeitete schlecht bezahlt als Patentprüfer. Natürlich hätte er völlig resigniert und entmutigt aufgeben können. Seine gesamten Lebensumstände waren zu dieser Zeit desillusionierend. So beschrieb sein damaliger Hochschullehrer David Reichinstein Einsteins Lebensumstände als fast unerträglich: Einsteins Tür stand offen, damit die Wäsche im Flur trocknen konnte, er rauchte sehr billige Zigarren und der Ofen qualmte das ganze Zimmer voll, in dem gleichzeitig ein Kind lag. Ja, da hätte man schon aufgeben können und seine Physikstudien mit dem Einwand, dass alles hektisch und schwierig sei, beruhigt verschieben können. Mit voranschreitender Zeit bräuchte man auch keine Entschuldigungen mehr für das Hinauszögern. Einstein würde sich kaum noch an diese Zeit-Raum-Frage erinnern können.

Nein, aber genau dies geschah nicht. Es gab da nämlich diesen kleinen Unterschied, nämlich Einsteins kleinen Vorteil, der große Auswirkungen haben sollte: Physik war seine Passion. Er konnte gar nicht so beschäftigt sein keine Zeit dafür zu finden. Innerhalb von Zehn Jahren konnte er eine neue Theorie entwickeln, die weltweit Schlagzeilen machen sollte. Auch Einstein war hierüber überrascht. So war er doch nur seiner Passion gefolgt und hatte diese zu einem geliebten Hobby gemacht.

0.5 Aufgaben lösen als Spiel

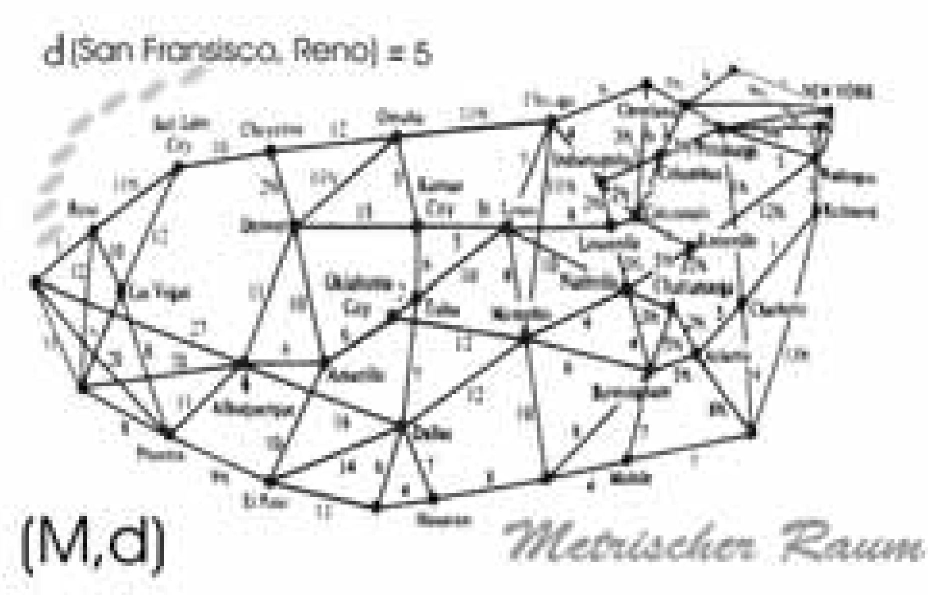
- Sie sollten ihre Aufgabe als Spiel betrachten.
- Sein Sie sich während des Spiels immer des intellektuellen Zwecks, der Sie motiviert, bewusst.
- Ihr Geist sollte von allen innerlichen oder äußerlichen Ablenkungen frei sein.
- Genießen Sie schon den Prozess der Arbeit. Versteifen Sie sich nicht darauf Ihr Ziel zu erreichen.
- Ein ekstatisches Gefühl wird Sie als natürliches Ergebnis plötzlich überraschen. Dieser Zustand eröffnet ihnen

Ihr großes Reservoir an Leistungsfähigkeit und Kreativität, wodurch Ihre Produktivität und die Qualität Ihrer Arbeit zu ihrem Höhepunkt gelangen.

Göttingen den 19.05.2003 Wassim El-Benny

Kapitel 1

Metrische Räume



Der Metrische Raum ist ein Begriff aus der Topologie. In der Topologie studiert man topologische Räume, die eine Verallgemeinerung der metrischen Räume sind. Meistens reicht es, nur metrische Räume zu betrachten.

1.1 Abstand und Norm

Den zwei dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ kann man als eine Ebene, mit x_1 und x_2 als kartesischen Komponenten darstellen. Der Abstand zwischen zwei

Punkten $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist laut dem Satz von Pythagoras

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

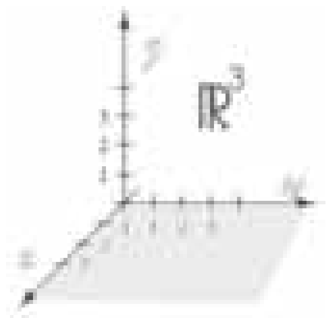
Dieser Abstand hängt nur von der Differenz $y - x$ ab und wird also mit

$$\|y - x\|_2$$

beschrieben, wobei

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{falls} \quad z = (z_1, z_2)$$

Im dreidimensionalen Raum ist der Abstand zwischen



$x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \|y - x\|_2$$

wobei

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad \text{falls} \quad z = (z_1, z_2, z_3)$$

Im n-dimensionalen Raum definieren wir

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2}$$

falls $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ist. Der Abstand zwischen $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,y) = \|y - x\|_2$$

Man nennt $\|z\|_2$ die Euklidische Norm.

1.2 Metrische Räume

1.2.1 Definition

Sei M eine nicht leere Menge. Eine Abbildung

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

heißt **Metrik** oder **Abstand** auf M, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt :

- $d(x, y) \geq 0$ (Positivität)
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecks-Ungleichung)

Auf $\mathbb{R}^n$ definiert man die **Standardmetrik**

$$d(x, y) = \langle x, y \rangle := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

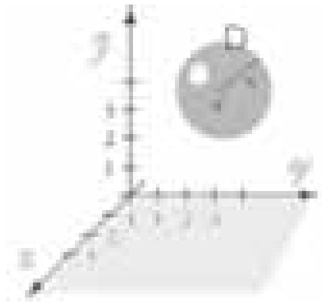
Wir werden die Menge $\mathbb{R}^n$ fast immer mit der Standardmetrik versehen.

1.3 Offene Mengen

Offene Mengen sind eine Verallgemeinerung von offenen Intervallen. Um offene Mengen zu definieren, möchten wir zuerst den Begriff von ϵ-Kugeln einführen.

1.3.1 Definition

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für jedes $x \in M$ und $\epsilon > 0$, heißt die Menge
$$D(x, \epsilon) := \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$
die **ϵ-Kugel** oder **ϵ-Umgebung** um x.



2. Eine **Umgebung** eines Punktes in M ist eine offene Menge, die diesen Punkt enthält.
3. Sei $A \subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt A **offen**, falls es für jedes $x \in A$ eine ϵ-Umgebung $D(x, \epsilon)$ gibt, die ganz in A liegt.

1.3.2 Beispiel 1

- Offene Intervalle (a, b) sind in $\mathbb{R}$ offen, aber nicht in $\mathbb{R}^2$.
- Das Intervall $[0, 1)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht offen.
- Eine endliche oder sogar abzählbar unendliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ ist stets nicht offen. Also sind offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ bis auf die leere Menge überabzählbar.
- Die Menge $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ ist offen.
- Die Menge $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ ist nicht offen.

1.3.3 Beispiel 2

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Wir definieren

$$A + B := \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in A \quad \text{und} \quad y \in B\}$$

und wir wollen zeigen dass $A+B$ ist offen ist. Dafür sei $w \in A+B$ beliebig gewählt. Es gibt $x \in A$ und $y \in B$ mit $w = x + y$. Da A offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass

$$D(x, \epsilon) \subset A$$

gilt. Wir wollen zeigen dass $D(w, \epsilon) \subset A+B$ ist. Sei $z \in D(w, \epsilon)$. Dann gilt

$$\|z - w\| = \|z - (x + y)\| < \epsilon$$

Aber

$$\|z - (x + y)\| = \|(z - y) - x\|$$

Also

$$z - y \in D(x, \epsilon) \subset A$$

Da $y \in B$, gilt $z = (z - y) + y \in A + B$. Damit gilt $D(w, \epsilon) \subset A + B$, und somit ist $A + B$ offen.

1.3.4 Satz

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gilt :

- Jede ϵ-Kugel ist offen.
- Die Durchschnittsmenge enlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigungsmenge beliebiger Anzahl von offenen Mengen ist offen.
- Die leere Menge $\emptyset$ und die Menge M sind offen.
- Die Produktmenge $A \times B$ ist in $\mathbb{R}^2$ offen, falls A und B offen in $\mathbb{R}$ sind.

1.3.5 Bemerkung

Die Durchschnittsmenge unendlich vieler offener Mengen ist nicht unbedingt offen. Zum Beipiel

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n}\Big) = \{0\}$$

Dabei sind alle Mengen $(-1/n,\ 1/n)$ offen, aber ihre Durchschnittsmenge $\{0\}$ ist nicht offen.

1.4 Innerer Kern

1.4.1 Definition

1. Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von A falls es eine offene Umgebung U von x gibt die ganz in A liegt.

2. Der **innere Kern** A° von A ist die Menge aller inneren Punkte von A. Diese kann auch leer sein.

1.4.2 Beispiele

- Der Punkt 1 ist ein innerer Punkt von [0,2].
- Der Punkt 2 ist kein innerer Punkt von [0,2].
- Der Punkt $(0, 0)$ ist ein innerer Punkt von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.
- Der Punkt $(1, 1)$ ist kein innerer Punkt von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

1.4.3 Satz

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$ dann gilt

$$A^\circ = \bigcup \{G \subset M \mid G \subset A \text{ und } G \text{ offen}\}$$

mit anderen Worten, A° ist die größte offene Teilmenge von A.

1.4.4 Beispiel 1

Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ dann gilt

$$S^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$$

1.4.5 Beispiel 2

Wir wollen wissen ob $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.
Dafür betrachten wir in $\mathbb{R}$

$$A := [0, 1] \quad \text{und} \quad B := [1, 2]$$

Dann gilt $A^\circ = (0, 1)$ und $B^\circ = (1, 2)$, und damit

$$A^\circ \cup B^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$$

während

$$(A \cup B)^\circ = (0, 2)$$

Also ist $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ im Allgemeinen falsch.

1.5 Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen sind eine Verallgemeinerung von abgeschlossenen Intervallen.

1.5.1 Definition

Eine Menge B in einem metrischen Raum M heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $M \backslash B$ offen ist.

1.5.2 Beispiele

- Ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist immer abgeschlossen.
- Abgeschlossene Intervalle sind in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen.
- Das Intervall $[0,1)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht abgeschlossen.
- Eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ ist stets abgeschlossen.
- Die Menge $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ist abgeschlossen.
- Die Menge $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ ist nicht abgeschlossen.
- Abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^n$ können sehr kompliziert sein, zum Beispiel die Cantor Menge. Deswegen verwendet man in den meisten Sätzen offenen Mengen.

1.5.3 Satz

1. Die Vereinigungsmenge enlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
2. Die Durchschnittmenge einer beliebigen Anzahl von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
3. Die leere Menge $\emptyset$ und die Menge M sind stets abgeschlossen.
4. Die Produktmenge $A \times B$ ist in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen, falls A und B abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind.

1.5.4 Bemerkung

Die Vereinigungsmenge unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist nicht unbedingt abgeschlossen. Zum Beipiel

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \quad 2\right] = (0,2]$$

Dabei sind alle Mengen $[1/n,\ 2]$ abgeschlossen, aber ihre Vereinigungsmenge $(0,2]$ ist nicht abgeschlossen.

1.6 Häufungspunkte

Eine andere wichtige Weise, um zu wissen ob eine Menge abgeschlossen ist, ist mit dem Begriff Häufungspunkt möglich.

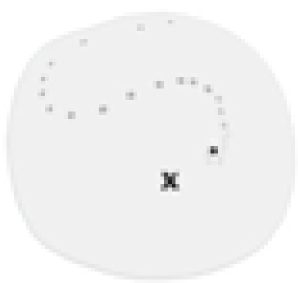
1.6.1 Definition

1. Eine **Umgebung** eines Punktes x in einem metrischen Raum M ist eine Menge U, die eine offene Menge A enthält, so dass $x \in A \subset U$ ist.

2. Ein Punkt x in einem metrischen Raum M heißt **Häufungspunkt** von A, falls für jede offene Umgebung U von x gilt

$$U \cap \big(A \backslash \{x\}\big) \neq \emptyset$$

Mit anderen Worten, ein Häufungspunkt von A ist ein Punkt, der



anderen Punkten von A beliebig nahe kommt.
Die **Menge der Häufungspunkte** werden wir mit A' bezeichnen.

$$A' := \{x \in M \mid x \quad \text{ist Häufungspunkt von } A\}$$

3. Eine Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ in einem metrischen Raum M heißt **konvergent** gegen x, falls gilt:

$$\text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N},$$

$$\text{so dass } d(x_k, x) < \epsilon \text{ für alle } k \geq N$$

Wir sagen $\lim_{k\to\infty} x_k = x$

1.6.2 Beispiele

- Die Menge
$$A := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$
hat nur einen Häufungspunkt, nämlich 0.

- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ hat als Häufungspunkte alle reellen Zahlen.

- Die Menge
$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2 + 1\}$$
hat alle Punkte der Menge
$$A' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 + 1\}$$
als Häufungspunkte.

1.6.3 Satz

Eine Menge $A \subset M$ ist abgeschlossen genau dann, wenn alle Häufungspunkte von A in A liegen.

1.6.4 Beispiele

Die Menge
$$A := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$
ist nicht abgeschlossen, weil der Häufungspunkt $0 \notin A$ ist.

1.7 Abgeschlossene Hülle

Der innere Kern einer Menge A ist die größte offene Teilmenge von A. Analog kann man die kleinste abgeschlossene Menge $\overline{A}$, die A enthält, definieren. Diese Menge heißt die abgeschlossene Hülle von A.

1.7.1 Definition

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Die **abgeschlossene Hülle** von A ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen die A enthalten.

$$\overline{A} := \bigcap \{G \subset M \mid G \text{ abgeschlossen }\}$$

1.7.2 Satz

Es gilt

$$\overline{A} = A \cup A'$$

das heißt, die abgeschlossene Hülle von A ist gleich die Häufungspunkte von A plus die Punkte von A.

1.7.3 Beispiel

Sei $A := [0,1) \cup \{2\}$ in $\mathbb{R}$, dann gilt

$$A' = [0,1] \quad \text{und} \quad \overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$$

1.8 Rand

Wenn wir eine Kreisscheibe betrachten, dann verstehen wir unter Rand dieser Kreisscheibe einen Kreis. Genau das wollen wir jetzt mathematisch formulieren.

1.8.1 Definition

Seien (M,d) ein metrischer Raum und $A \subset M$, dann definiert man den **Rand** von A durch

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{M \backslash A}$$

1.8.2 Beispiel

- Sei $A := [0, 1) \cup \{2\}$ in $\mathbb{R}$, dann gilt
$$\partial A = \{0, 1, 2\}$$

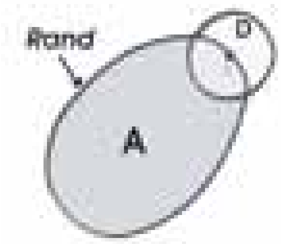
- Sei
$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [0, 1] \text{ und } x \text{ ist rational}\}$$
Dann gilt $\partial A = [0, 1]$

- Sei
$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$$
Dann gilt $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

Eine andere Beschreibung von Randpunkte bietet folgender Satz.

1.8.3 Satz

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$, dann gilt:



$$x \in \partial A \iff$$

$$\text{für alle } \epsilon > 0, \text{ enthält } D(x, \epsilon) \text{ Punkte aus } A \text{ und aus } M \backslash A.$$

1.9 Aufgaben

1. Welche der folgenden Räume (M, d) sind metrische Räume

   (a) $M = \{a, b, c\}$; $d : M \times M \to \mathbb{R}$
   $d(a, b) = d(b, a) = 1$
   $d(b, c) = d(c, b) = 2$
   $d(a, c) = d(c, a) = 3$
   $d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$

   (b) $M = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $d(x, y) = 1/x - 1/y$

   (c) $M = \mathbb{R}$ $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

   (d) $M = \mathbb{R}^2$ $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1^2 - y_2^2|$$

2. Welche der folgenden Mengen ist offen, und welche abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ (ohne Beweis):

   (a) $\{(x, y) \mid x > y\}$
   (b) $\{(x, y) \mid xy \neq 0\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = 5\}$
   (d) $\{(x, y) \mid |x| > 3\}$
   (e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$
   (f) $\{(x, y) \mid x^2 > -1\}$
   (g) $\{(x, y) \mid 2x + 3y - 5 < 1\}$
   (h) $\{(x, y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$
   (i) $\{(x, y) \mid x - y \leq 3\}$
   (j) $\{(x, y) \mid x \geq |y|\}$

3. Welche der folgenden Mengen ist offen, und welche abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$ (ohne Beweis):

   - $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$
   - $\{(x, y, z) \mid x < 0\ , y < 0\ z < 0\}$
   - $\{(x, y, z) \mid x \geq y + z\}$

- $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $\{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \neq 0\}$

4. Zeige dass $\mathbb{R}^2$ selbst in $\mathbb{R}^2$ offen und abgeschlossen ist.

5. Zeige dass die leere Menge $\emptyset$ offen und abgeschlossen ist.

6. Gib ein Beispiel von einer Menge in $\mathbb{R}^4$, die weder offen noch abgeschlossen ist.

7. Zeige dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

8. Sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$. Zeige dass S offen ist.

9. Zeige dass die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ weder offen noch abgeschlossen ist.

10. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$. Zeige dass B offen ist.

11. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ irgendeine Menge. Wir definieren die Menge C durch $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \quad y \in B$ so dass $d(x, y) < 1\}$. Zeige dass C offen ist.

12. Gib ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ von unendlich vielen offenen Mengen deren Durchschnittsmenge nicht offen ist.

13. Gib ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

14. Gib ein Beispiel in $\mathbb{R}^4$ von unendlich vielen offenen Mengen deren Durchschnittsmenge nicht offen ist.

15. Gib ein Beispiel in $\mathbb{R}^4$ von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

16. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $B \subset \mathbb{R}$. Wir definieren $AB := \{xy \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$. Ist AB stets eine offene Menge ?

17. Finde S°, $\overline{S}$ und ∂S in $\mathbb{R}^2$ (ohne Beweis):
    (a) $S := \{(x, y) \mid x + y < 2\}$
    (b) $S := \{(x, y) \mid xy \neq 0\}$
    (c) $S := \{(x, y) \mid y > x^2\}$
    (d) $S := \{(x, y) \mid |x| > 3y\}$
    (e) $S := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$
    (f) $S := \{(x, y) \mid x^2 - y^2 > 0\}$
    (g) $S := \{(x, y) \mid 2x + 3y2 - 5 < 1\}$
    (h) $S := \{(x, y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$
    (i) $S := \{(x, y) \mid x - y \leq 3\}$
    (j) $S := \{(x, y) \mid x \geq |y|\}$

18. Falls $A \subsetneqq B$, muss dann gelten, dass $A^\circ \subsetneqq B^\circ$?

19. Gilt im Allgemeinen, dass $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$?

20. Sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ und } y \geq 1\}$. Ist S abgeschlossen?

21. Sei $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } 0 < y < 1\}$. Ist S abgeschlossen?

22. Sei $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ irrational}\}$. Ist S abgeschlossen?

23. Finde die Häufungspunkte von $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ und } 0 < x < 1\}$.

24. Sei $A \subset B$ und x ein Häufungspunkt von A. Zeige dass x auch ein Häufungspunkt von B ist.

25. Finde die Häufungspunkte von
$A = \{(1/n + 1/m\ ,\ 0) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \text{ positive natürliche Zahlen}\}$.

26. Finde die abgeschlossene Hülle von $A = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$.

27. Finde die abgeschlossene Hülle von
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \quad \text{ist irrational}\}$.

28. Finde den Rand von
$A = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$.

29. Seien M ein metrischer Raum und A eine Teilmenge. Falls $x \in \overline{A} \setminus A$, zeige, dass $x \in \partial A$ ist.

30. Finde den Rand von
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.

31. Gilt im Allgemeinen, dass $\partial A = \partial(A^\circ)$?

32. Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $N \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige dass
$$M \text{ vollständig } \Rightarrow N \text{ vollständig}$$

33. Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $N \subset M$. Zeige dass
$$N \text{ vollständig } \Rightarrow N \text{ abgeschlossen}$$

1.10 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❋

   (a) Die Abstandsfunktion d erfüllt alle drei Axiome der Metrik wie man leicht nachprüfen kann. Also ist
   $(\{a, b, c\}, d)$ ein metrischer Raum.

   (b) Die Abstandsfunktion d ist negativ für $x = 2,\ y = 1$, also ist $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, d)$ kein metrischer Raum.

   (c) Für $x = -1,\ y = 1$

   $$d(-1, 1) = |(-1)^2 - 1^2| = 0$$

   Die Abstandsfunktion d erfüllt das erste Axiom nicht. Also ist (M, d) kein metrischer Raum.

   (d) Für $x = (-1, 1), y = (1, 1)$

   $$d\big((-1, 1), (1, 1)\big) = |(-1)^2 - 1^2| = 0$$

   Die Abstandsfunktion d erfüllt das erste Axiom nicht. Also ist (M, d) kein metrischer Raum.

2. ✎*Lösung* ❋

   (a) $\{(x, y) \mid x > y\}$ ist offen.

   (b) $\{(x, y) \mid xy \neq 0\}$ ist offen.

   (c) $\{(x, y) \mid y = 5\}$ ist abgeschlossen.

   (d) $\{(x, y) \mid |x| > 3\}$ ist offen.

   (e) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ist abgeschlossen.

   (f) $\{(x, y) \mid x^2 > -1\}$ ist offen.

   (g) $\{(x, y) \mid 2x + 3y - 5 < 1\}$ ist offen.

   (h) $\{(x, y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$ ist offen.

   (i) $\{(x, y) \mid x - y \leq 3\}$ ist abgeschlossen.

   (j) $\{(x, y) \mid x \geq |y|\}$ ist abgeschlossen.

3. ✎*Lösung* ❋

   (a) $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ ist abgeschlossen.

   (b) $\{(x, y, z) \mid x < 0\ , y < 0\, z < 0\}$ ist offen.

   (c) $\{(x, y, z) \mid x \geq y + z\}$ ist abgeschlossen.

(d) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist abgeschlossen.

(e) $\{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| \neq 0\}$ ist offen.

4. ✎*Lösung* ❃
Wir müssen zeigen, dass alle Punkte aus $\mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung in $\mathbb{R}^2$ haben. Das ist aber offensichtlich weil $\mathbb{R}^2$ der ganze Raum ist,und damit alle Umgebungen enhält.
Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist brauchen wir nur zu zeigen, dass die leere Menge $\emptyset = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ offen ist. Wir müssen zeigen, dass alle Punkte aus $\emptyset$ eine offene Umgebung in $\emptyset$ haben. Da $\emptyset$ aber keine Punkte enhält, ist die Aussage trivialerweise richtig.

5. ✎*Lösung* ❃
Wir müssen zeigen, dass alle Punkte aus $\emptyset$ eine offene Umgebung in $\emptyset$ haben. Da $\emptyset$ aber keine Punkte enhält, ist die Aussage trivialerweise richtig. Die leere Menge $\emptyset$ abgeschlossen, weil alle Häufungspunkte von $\emptyset$ in $\emptyset$ liegen.

6. ✎*Lösung* ❃
Die Menge
$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| < 1\} \cup (2, 0, 0, 0)$$
ist ein Beispiel von einer Menge in $\mathbb{R}^4$, die weder offen noch abgeschlossen.

7. ✎*Lösung* ❃
Ein Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ besitzt immer die Umgebung
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$
Wobei $\epsilon = (x_0^2 + y_0^2)$. Also ist jeder Punkt in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ ein innerer Punkt und damit ist $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ offen.

8. ✎*Lösung* ❃
Es ist einfacher zu zeigen, dass
$$\mathbb{R}^2 \backslash S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$$
abgeschlossen ist. Wir brauchen nur zu zeigen, dass alle Häufungspunkte (a, b) aus $\mathbb{R}^2 \backslash S$ in $\mathbb{R}^2 \backslash S$ liegen. Falls (a, b) ein Häufungspunkt ist, dann gibt es eine Folge (x_n, y_n) von Punkten aus $\mathbb{R}^2 \backslash S$ die gegen (a, b) konvergiert. Das heißt
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

Es gilt $x_n y_n \le 1$ für alle n, weil $x_n, y_n \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ sind. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab \le 1$$

Also ist $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash S$.

9. ✎*Lösung* ❃
   Die Menge $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$ ist nicht offen, weil der Punkt $(0,1) \in S$ keine Umgebung in S hat.
   Die Menge $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$ ist nicht abgeschlossen, weil der Punkt $(0,0) \in S$ ein Häufungspunkt von S ist, der nicht in S liegt.

10. ✎*Lösung* ❃
    Man kann die Menge B als Produkt von zwei offenen Mengen schreiben

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\} = A \times \mathbb{R}$$

also ist B in $\mathbb{R}^2$ offen.

11. ✎*Lösung* ❃
    Wir können die Menge C in einer andere Weise schreiben

$$C = \bigcup_{y \in B} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < 1\}$$

Also C ist eine Vereinigung von offenen Kugeln, und ist damit offen.

12. ✎*Lösung* ❃
    Sei

$$U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 - 1/n\}$$

Dann ist U_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ offen aber

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} U_n = \{(0,0)\}$$

nicht mehr offen.

13. ✎*Lösung* ❃
    Sei

$$U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1/n\}$$

Dann ist U_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ abgeschlossen aber

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

nicht mehr abgeschlossen.

14. ✎*Lösung* ❃
Sei
$$U_n := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| < 1 - 1/n\}$$
Dann ist U_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ offen aber
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{(0,0,0,0)\}$$
nicht mehr offen.

15. ✎*Lösung* ❃
Sei
$$U_n := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| \geq 1/n\}$$
Dann ist U_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ abgeschlossen aber
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$$
nicht mehr abgeschlossen, weil der Punkt $(0,0,0,0)$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$, der ausserhalb von $\mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$ liegt.

16. ✎*Lösung* ❃
Ja. Das kann man direkt mit der Definition zeigen, wir wollen es aber mit Hilfe von stetigen Funktionen beweisen (Kapitel 5). Wir brauchen nur zu wissen, dass stetige Funktionen offene Mengen auf offene Mengen abbilden.
Da A und B offen sind, ist $A \times B$ in $\mathbb{R}^2$ offen. Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x, y) = xy$$
dann ist f stetig, und damit ist $AB = f(A \times B)$ offen.

17. ✎*Lösung* ❃

(a) $S^\circ := \{(x, y) \mid x + y < 2\}$
$\overline{S} := \{(x, y) \mid x + y \leq 2\}$
$\partial S := \{(x, y) \mid x + y = 2\}$

(b) $S^\circ := \{(x,y) \mid xy \neq 0\}$
$\overline{S} := \mathbb{R}^2$
$\partial S := \{(x,y) \mid xy = 0\}$

(c) $S^\circ := \{(x,y) \mid y > x^2\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid y = x^2\}$

(d) $S^\circ := \{(x,y) \mid |x| > 3y\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid |x| \geq 3y\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid |x| = 3y\}$

(e) $S^\circ := \emptyset$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$

(f) $S^\circ := \{(x,y) \mid x^2 - y^2 > 0\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 0\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$

(g) $S^\circ := \{(x,y) \mid 2x + 3y2 - 5 < 1\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid 2x + 3y2 - 5 \leq 1\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid 2x + 3y2 - 5 = 1\}$

(h) $S^\circ := \{(x,y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid x^2/2 + y^2 \leq 3\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid x^2/2 + y^2 = 3\}$

(i) $S^\circ := \{(x,y) \mid x - y < 3\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid x - y \leq 3\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid x - y = 3\}$

(j) $S^\circ := \{(x,y) \mid x < |y|\}$
$\overline{S} := \{(x,y) \mid x \geq |y|\}$
$\partial S := \{(x,y) \mid x = |y|\}$

18. ✎*Lösung* ❋
Das muss nicht gelten. Zum Beispiel sei $A = (0,1)$ und $B = [0,1]$, dann gilt $A \subsetneqq B$, aber $A^\circ \subsetneqq B^\circ$ gilt nicht.

19. ✎*Lösung* ❃
Das muss nicht gelten. Zum Beispiel sei $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, dann gilt $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$, aber $\overline{(A \cap B)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

20. ✎*Lösung* ❃
Die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ und } y \geq 1\}$ ist abgeschlossen, weil $\mathbb{R}^2\backslash S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \text{ oder } y < 1\}$ offen ist.

21. ✎*Lösung* ❃
Die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } 0 < y < 1\}$ ist nicht abgeschlossen, weil $(0, 1)$ ein Häufungspunkt von S, der nicht in S liegt.

22. ✎*Lösung* ❃
Die Menge $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ irrational}\}$ ist nicht abgeschlossen, weil zum Beisiel $0 \notin S$ ein Häufungspunkt von S ist. Um zu beweisen, dass 0 ein Häufungspunkt von S, ist können wir zum Beispiel die irrationale Folge $x_n = 1/\sqrt{n}$, die gegen 0 konvergiert, betrachten.

23. ✎*Lösung* ❃
Die Häufungspunkte von $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ und } 0 < x < 1\}$ sind $[0, 1] \times \{0\}$.

24. ✎*Lösung* ❃
Wenn x ein Häufungspunkt von A ist, dann heißt das per Definition, dass es eine Folge $x_n \in A$ gibt, die gegen x konvergiert. Also liegt die Folge x_n auch in B. Damit ist auch x ein Häufungspunkt von B.

25. ✎*Lösung* ❃
Die Häufungspunkte von
$A = \{(1/n + 1/m\ ,\ 0) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \text{ positive natürliche Zahlen}\}$ sind $(0, 0)$ und $(1/i, 0)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$.
$(0, 0)$ ist ein Häufungspunkt, weil die Folge

$$\big(1/n + 1/n\big)_{n=1}^{\infty} \in A$$

gegen 0 konvergiert.
$(1/i, 0)$ ist ein Häufungspunkt, weil die Folge

$$\big(1/i + 1/n\big)_{n=1}^{\infty} \in A$$

gegen $1/i$ konvergiert.

26. ✎*Lösung* ❋
    Die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von
    $A = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist

$$\overline{A} = A \cup \{0\}$$

27. ✎*Lösung* ❋
    Die abgeschlossene Hülle von
    $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ ist irrational}\}$ ist $\mathbb{R}^2$.

28. ✎*Lösung* ❋
    Der Rand von
    $A = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist $\partial A = A \cup \{0\}$.

29. ✎*Lösung* ❋
    Falls $x \in \overline{A} \backslash A$, dann ist $x \in \overline{A}$ und $x \notin A$. Oder $x \in \overline{A}$ und $x \in M \backslash A$. Das heißt $x \in \overline{A} \cap \overline{M \backslash A} = \partial A$.

30. ✎*Lösung* ❋
    Der Rand von der Halbebene
    $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ ist die Gerade $y = x$.

31. ✎*Lösung* ❋
    Sei $A = \mathbb{Q}^2$. Dann gilt

$$\partial A = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2 \quad , \quad \partial(A^\circ) = \partial(\emptyset) = \emptyset$$

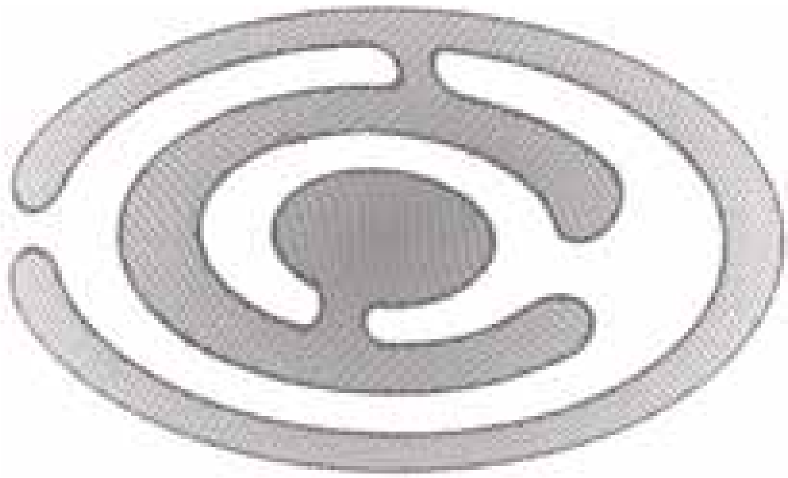
    Also gilt $\partial A = \partial(A^\circ)$ im Allgemeinen nicht.

32. ✎*Lösung* ❋
    Wir nehmen an, dass N nicht vollständig ist. Sei y_k eine Cauchy-Folge aus N, die in N nicht konvergiert. Da M vollständig ist, konvergiert die Folge gegen ein $\xi \in M \backslash N$. Dann ist ξ ein Häufungspunkt aus $\overline{N} \backslash N$. Also ist N nicht abgeschlossen: Widerspruch!

33. ✎*Lösung* ❋
    Wir nehmen an, dass N nicht abgeschlossen ist. Sei ν ein Häufungspunkt aus $\overline{N} \backslash N$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $y_k \in N$ mit $d(y_k, \nu) < 1/k$. Die Folge y_k ist eine Cauchy-Folge in Y. Sie konvergiert gegen $\nu \in M \backslash N$ und kann daher in N nicht konvergieren. Also ist N nicht vollständig: Widerspruch!

Kapitel 2

Zusammenhang



2.1 Definition von Zusammenhang

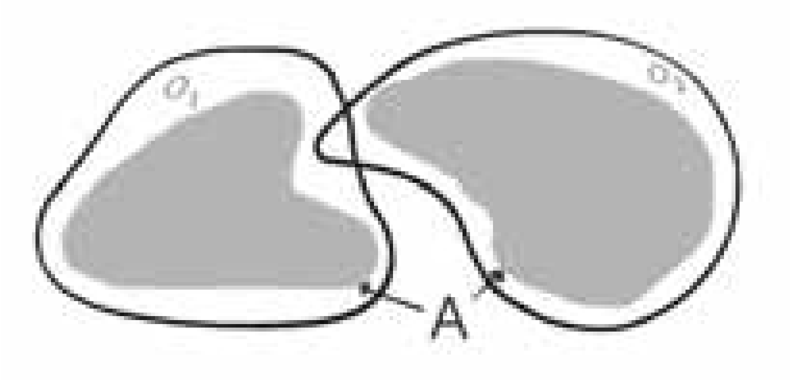
2.1.1 Definition

1. Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Die Menge A heißt **zusammenhängend** , wenn für alle offenen Teilmengen $O_1, O_2 \subset M$ gilt:

$$\text{Aus } A \cap O_1 \neq \emptyset \text{ und } A \subset O_1 \cup O_2 \text{ und } A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

folgt

$$A \cap O_2 = \emptyset$$



Einfacher ist es zu wissen, wann eine Menge unzusammenhängend ist. Die Menge A heißt **unzusammenhängend**, wenn offenen Teilmengen $O_1, O_2 \subset M$ gibt so, dass

$$A \cap O_1 \neq \emptyset;\ A \subset O_1 \cup O_2;\ A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset;\ A \cap O_2 \neq \emptyset$$

2. Jeder Punkt $x \in A$ liegt in einer maximalen zusammenhängenden Teilmenge X von A. X nennt man eine **Zusammenhangskomponente** von A.

2.1.2 Beispiele

- Die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle von $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ ist nicht zusammenhängend.
- Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ist zusammenhängend.
- Die Menge $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 1\}$ ist zusammenhängend.
- Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$ ist nicht zusammenhängend.

2.1.3 Satz

1. Sind A und B zusammenhängend so ist $A \cap B$ auch zusammenhängend.
2. Sind A und B zusammenhängend und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ auch zusammenhängend.

3. Ist A zusammenhängend so ist $\overline{A}$ auch zusammenhängend.
4. Sind A und B zusammenhängend so ist $A \times B$ auch zusammenhängend.
5. Ein metrischer Raum M ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und M die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offenen und abgeschlossenen sind.

2.1.4 Beispiel

Die Menge $[0,1]$ ist zusammenhängend in $\mathbb{R}$. Also folgt, dass die Menge $[0,1] \times [0,1]$ auch zusammenhängend ist.

2.1.5 Warnung

Das Innere einer zusammenhängenden Menge ist nicht unbedingt zusammenhängend.

In dem nächsten Satz brauchen wir die Defintion von stetigen Funktionen über $\mathbb{R}^n$. Diese werden wir im Kapitel 5 einführen.

2.1.6 Satz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, und $A \in \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende Menge, dann ist die Bildmenge $f(A)$ auch zusammenhängend.

2.1.7 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion definiert durch

$$f(x,y) = (x^3 + y,\ x - y^2).$$

Dann ist das Bild von der zusammenhängenden Menge $[0,1] \times [0,1]$

$$f\big([0,1] \times [0,1]\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^3 + y \leq 1 \text{ und } 0 \leq x - y^2 \leq 1\}$$

auch zusammenhängend.

2.2 Wegzusammenhang

2.2.1 Definition

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Die Menge A heißt **wegzusammenhängend** , wenn es für zwei beliebig gewählte Punkte x_1 und x_2 aus dieser Menge einen Weg gibt, der beide Punkte verbindet. Ein **Weg** ist nichts anderes als eine stetige Funktion

$$\gamma : [0,1] \to M$$

mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$.

2.2.2 Satz

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Es gilt :

$$A \text{ wegzusammenhängend } \Rightarrow A \text{ zusammenhängend}$$

Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch, da es komplizierte Mengen gibt, die zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend sind. Für die offenen Mengen aber, ist zusammenhängend gleichbedeutend mit wegzusammenhängend.

2.2.3 Beispiel

Wir wollen zeigen, dass die Menge $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ wegzusammenhängend ist. Seien $x_1, x_2 \in A$. Dann müssen wir einen Weg γ von x_1

nach x_2 folgendermaßen definieren :

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto (1-t)x_1 + tx_2$$

Nun müssen wir zeigen, dass dieser Weg γ in A liegt. Das heißt, wir müssen zeigen, dass jeder Punkt $\gamma(t)$ von γ die Ungleichung $\|\gamma(t)\| \leq 1$ erfüllt. Es gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)\| = \|(1-t)x_1 + tx_2\| &\leq \|(1-t)x_1\| + \|tx_2\| \\ &= (1-t)\|x_1\| + t\|x_2\| \leq (1-t) + t = 1\end{aligned}$$

weil $\|x_1\| \leq 1$ und $\|x_2\| \leq 1$ sind, da sie in A liegen.

2.2.4 Satz

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine offene Menge. Es gilt :

$$A \text{ wegzusammenhängend} \iff A \text{ zusammenhängend}$$

2.3 Aufgaben

1. Welche der folgenden Mengen sind zusammenhängend? (ohne Beweis)
   (a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 2\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 2 \leq \|x\|_2 \leq 3\}$ in $\mathbb{R}^n$
   (c) $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}\ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
   (e) $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$
   (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| > 4\}$ in $\mathbb{R}$
   (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ und } |x| < 1\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (m) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 2| > 4\}$ in $\mathbb{R}^2$
   (n) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 - y^2 \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^3$

2. Zeige dass eine Menge $A \in \mathbb{R}^n$ genau dann nicht zusammenhängend ist, wenn es abgeschlossene Mengen F_1, F_2 gibt, so dass
$$A \subset F_1 \cup F_2; \quad A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset; \quad F_1 \cap A \neq \emptyset; \quad F_2 \cap A \neq \emptyset$$

3. Zeige oder widerlege:
   (a) A zusammenhängend in $\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \mathbb{R}^n \backslash A$ zusammenhängend.
   (b) A zusammenhängend in $\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; A$ ist entweder offen oder abgeschlossen.
   (c) $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \;\Rightarrow\; \mathbb{R}^n \backslash A$ zusammenhängend.

4. Ein metrischer Raum M heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls alle Punkte in M eine Umgebung U haben, so dass U wegzusammenhängend ist. Zeige dass wenn
$$M \quad \text{zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend}$$
$$\Rightarrow M \quad \text{wegzusammenhängend}$$

5. Zeige dass wenn A zusammenhängend ist und $A \subset B \subset \overline{A}$, dann ist auch B zusammenhängend.

6. Seien $K_1 \subset M_1$ und $K_2 \subset M_2$ beide wegzusammenhängend. Zeige dass $K_1 \times K_2$ wegzusammenhängend in $M_1 \times M_2$ ist.

7. Zeige dass eine Menge $A \subset M$ genau dann zusammenhängend ist, wenn $\emptyset$ und A die einzigen Mengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen in A sind.

8. Zeige dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ die einzigen Untermengen von $\mathbb{R}^n$ sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

9. Finde zwei Untermengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ so, dass $A \cup B$ nicht zusammenhängend ist, aber $A \cup B \cup \{x_0\}$ zusammenhängend ist.

10. Sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$. Ist A zusammenhängend ?

11. Seien $A, B \in M$ zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$. Zeige dass $A \cup B$ zusammenhängend ist.

12. Sei $A := \{(0, 0)\} \cup \big\{\big(x, \sin(1/x)\big) \mid 0 < x < 1\big\}$. Zeige, dass A zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

2.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 2\}$ in $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend.

   (b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 2 \leq \|x\|_2 \leq 3\}$ in $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

   (c) $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

   (d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$ ist zusammenhängend.

   (e) $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend.

   (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| > 4\}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend.

   (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend.

   (h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ nicht zusammenhängend.

   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend.

   (j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend.

   (k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ und } |x| < 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ nicht zusammenhängend.

   (l) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ nicht zusammenhängend.

   (m) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 2| > 4\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ nicht zusammenhängend.

   (n) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 - y^2 \geq 0\}$ ist zusammenhängend.

2. ✎*Lösung* ❃

   Nach der Definition von Zusammenhang, ist $A \subset M$ nicht zusammenhängend, genau dann wenn es offenen Teilmengen $O_1, O_2 \subset M$ gibt mit

   $$A \cap O_1 \neq \emptyset;\ A \subset O_1 \cup O_2;\ A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset;\ A \cap O_2 \neq \emptyset$$

   Falls $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ so setzen wir einfach $F_1 = \overline{O_1}$ und $F_2 = \overline{O_2}$, und die Aufgabe ist bewiesen. Sonst wählen wir $F_1 = \overline{O_1 \backslash O_2}$ und $F_2 = \overline{O_2 \backslash O_1}$.

3. ✎*Lösung* ❃

   (a) Falsch! Sei $A = [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist A zusammenhängend aber $\mathbb{R}^n \backslash A$ ist in $\mathbb{R}^n$ nicht zusammenhängend.

   (b) Falsch! Sei $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}^n$ dann ist A weder offen noch abgeschlossen.

(c) Gilt nur für $n \geq 2$. Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \backslash A$ zusammenhängend ist, zeigt man dass A zusammenhängend ist. Für zwei Punkte a und b wählt man einfach einen Weg, der die abgeschlossene Einheitskugel nicht berührt. Dieser Weg ist nicht ganz einfach in einer Formel zu geben. Trotzdem ist es intuitiv offensichtlich, dass es ihn gibt, und dass reicht als Argument den meisten Mathematikern aus.

Für $n = 1$ ist $\mathbb{R}^n \backslash A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Mit $O_1 = (-\infty, -1)$ und $O_2 = (1, \infty)$ gilt

$$A \cap O_1 \neq \emptyset; \quad A \subset O_1 \cup O_2; \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

aber

$$A \cap O_2 \neq \emptyset$$

Also ist A nicht zusammenhängend.

4. ✎*Lösung* ❃

Wir nehmen an, dass M nicht wegzusammenhängend ist. Dann gibt es mindestens zwei Punkte a und b in M so, dass es keinen Weg zwischen a und b in M gibt. Wir nehmen die maximale wegzusammenhängende Teilmenge von M, die a enhält, als O_1 und den Rest von M als O_2. Dann sind O_1 und O_2 offen wegen des lokalen Wegzusammenhangs von M. Außerdem gilt :

$$M \cap O_1 \neq \emptyset; \; M \subset O_1 \cup O_2; \; M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset; \; M \cap O_2 \neq \emptyset$$

Also ist M nicht zusammenhängend: Widerspruch!

5. ✎*Lösung* ❃

Wir nehmen an, dass B nicht zusammenhängend ist. Also gibt es zwei offenen Mengen O_1, O_2 so, dass

$$B \cap O_1 \neq \emptyset; \; B \subset O_1 \cup O_2; \; B \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset; \; B \cap O_2 \neq \emptyset$$

Also gibt es $b_1 \in \overline{A}$ und O_1 ist eine Umgebung von b_1 und $b_2 \in \overline{A}$ und O_2 ist eine Umgebung von b_2. Also existiert ein $a_1 \in A \cap O_1$ und ein $a_2 \in A \cap O_2$. Und es gilt $A \cap O_1 \neq \emptyset$ und $A \cap O_2 \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass A nicht zusammenhängend ist: Widerspruch!

6. ✎*Lösung* ❃

Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2$. Wir suchen einen Weg γ der die beiden Punkte (x_1, x_2) und (y_1, y_2) verbindet. Dann gibt es einen Weg $\gamma_1 : [0, 1] \to K_1$ mit $\gamma_1(a) = x_1$ und $\gamma_1(b) = y_1$. Genauso gibt es einen Weg $\gamma_2 : [0, 1] \to K_2$ mit $\gamma_2(a) = x_2$ und $\gamma_2(b) = y_2$. Also definieren wir

$$\gamma : [0, 1] \to K_1 \times K_2$$
$$\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Dann ist γ ein Weg mit $\gamma(a) = (x_1, x_2)$ und $\gamma(b) = (y_1, y_2)$. Also ist γ der gesuchte Weg und $K_1 \times K_2$ ist wegzusammenhängend.

7. ✎*Lösung* ❃

Sei $B \subsetneqq A$ eine Teilmenge die gleichzeitig offen und abgeschlossen in A ist. Setzen wir $O_1 := B$ und $O_2 := A \backslash B$, dann sind O_1 und O_2 offen, und es gilt :

$$A \cap O_1 \neq \emptyset;\ A \subset O_1 \cup O_2;\ A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset;\ A \cap O_2 \neq \emptyset$$

Daraus folgt dass A nicht zusammenhängend ist.
Umgekehrt, falls A nicht zusammenhngend ist, so gibt es O_1 und O_2 offen mit :

$$A \cap O_1 \neq \emptyset;\ A \subset O_1 \cup O_2;\ A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset;\ A \cap O_2 \neq \emptyset$$

Setzen wir $B := O_1 \cap A$ dann ist $B \subsetneqq A$. Außerdem ist B gleichzeitig offen und abgeschlossen in A.

8. ✎*Lösung* ❃

Wir wissen dass $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist:
je zwei Punkten x und y können durch einen Weg

$$\gamma(t) := tx + (1 - t)y$$

verbunden werden.
Also ist $\mathbb{R}^n$ ein zusammenhängender Raum. Nach den vorigen Aufgabe sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ die einzigen Untermengen von $\mathbb{R}^n$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

9. ✎*Lösung* ❃

 Zum Beispiel :

$$A = (-1,0) \times \{0\} \quad , \quad B = (0,1) \times \{0\} \quad , \quad x_0 = (0,0)$$

 Dann gilt : $A \cup B = (-1,0) \cup (0,1)$ ist nicht zusammenhängend, aber $A \cup B \cup \{x_0\} = (-1,1)$ ist zusammenhängend.

10. ✎*Lösung* ❃

 Es gilt $A = f(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\})$ mit der stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = (x^2, y^2).$$

 Da das Bild einer zusammenhängenden Menge auch zusammenhängend ist, müssen wir nur zeigen, dass die Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ zusammenhängend ist. Nun ist $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend. Um das zu sehen betrachten wir zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus A. Also ist $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$ und $y_2 = \sqrt{1 - x_2^2}$. Setzen wir

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

 mit $t \in [\arccos x_1, \arccos x_2]$. Dann ist

$$\gamma(\arccos x_1) = (x_1, \sin(\arccos(x_1)))$$

$$= (x_1, \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x_1))}) = \left(x_1, \sqrt{1 - x_1^2}\right) = (x_1, y_1)$$

 Außerdem ist

$$\gamma(\arccos(x_2)) = (x_2, \sin(\arccos(x_2)))$$

$$= (x_2, \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x_2))}) = \left(x_2, \sqrt{1 - x_2^2}\right) = (x_2, y_2)$$

 Dass $\gamma \in B$ ist, sieht man durch die Formel

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

11. ✎*Lösung* ❃ Nehmen wir an, dass $A \cup B$ nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es offenen Mengen O_1 und O_2 mit

$$(A \cup B) \cap O_1 \neq \emptyset; \quad (A \cup B) \subset O_1 \cup O_2;$$

$$(A \cup B) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset; \quad (A \cup B) \cap O_2 \neq \emptyset$$

Dann gilt

$$A \subset O_1 \cup O_2 \quad \text{und} \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Da A zusammenhängend ist, gilt $A \cap O_1 = \emptyset$ und $A \subset O_2$, oder $A \cap O_1 = \emptyset$ und $A \subset O_2$.
Dasselbe gilt für B:

$$B \subset O_1 \cup O_2 \quad \text{und} \quad B \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Da B zusammenhängend ist, gilt $B \cap O_1 = \emptyset$ und damit $B \subset O_2$, oder $B \cap O_1 = \emptyset$ und $B \subset O_2$.
O.B.d.A., sei $A \subset O_2$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ muss auch $B \subset O_2$ und $B \cap O_1 = \emptyset$ sein. Daraus folgt $(A \cup B) \cap O_1 = \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $A \cup B$ nicht zusammenhängend ist.

12. ✎*Lösung* ❃

Das ist einer der schwierigsten Beweise in der Topologie.

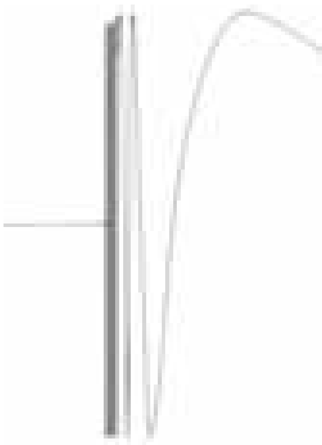
Zuerst, wollen wir beweisen, dass A zusammenhängend ist. Die Menge $B := \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid 0 < x < 1\right\} \subset A$ ist als Bild des Intervalls $(0, 1]$ mit der stetige Funktion

$$f(x) := \left(x, \sin \frac{1}{x}\right))$$

zusammenhängend. Wegen $B \subset A \subset \overline{B}$, ist A auch zusammenhängend (nach Aufgabe 5).

Nun wollen wir zeigen, dass A nicht wegzusammenhängend ist. Anschaulich ist es klar, weil die Länge von A unendlich ist. Also wollen wir beweisen dass ,zum Beispiel, $(0, 0)$ und $(1/\pi, 0)$ sich in A nicht durch einen stetigen Weg verbinden lassen. Nehmen wir an, dass es

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \to A$$



gibt so, dass $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$.
Wir wollen eien Widerspruch erreichen, in dem wir zeigen dass der Weg nicht stetig sein kann. Sei

$$t_0 := \sup_{\gamma(t)=(0,0)} \{t \in [0,1)\}$$

Dann gilt

$$t_0 < 1 \quad \text{und} \gamma(t_0) = (0,0)$$

Setzen wir $\epsilon := 1/2$ und $\delta \in (0, 1-t_0)$ beliebig. Also wollen wir erreichen, dass es, egal wie klein wir δ wählen, immer t_k mit $|t_0 - t_k| < \delta$ gibt, so dass

$$\|\gamma(t_0) - \gamma(t_k)\| > \epsilon$$

Für $t_0 < t < t_0 + \delta$ ist $\gamma_1(t) > 0$. Das γ_1-Bild von $[t_0, t_0+\delta]$ ist ein Intervall de Form $[0, \alpha]$ mit $\alpha > 0$. Also gibt es ein $t_k \in [t_0, t_0+\delta]$ so, dass

$$\gamma_2(t_k) = 1 \quad \text{und} \quad \gamma_1(t_k) = \frac{2}{\pi(4k+1)}$$

Damit gilt aber

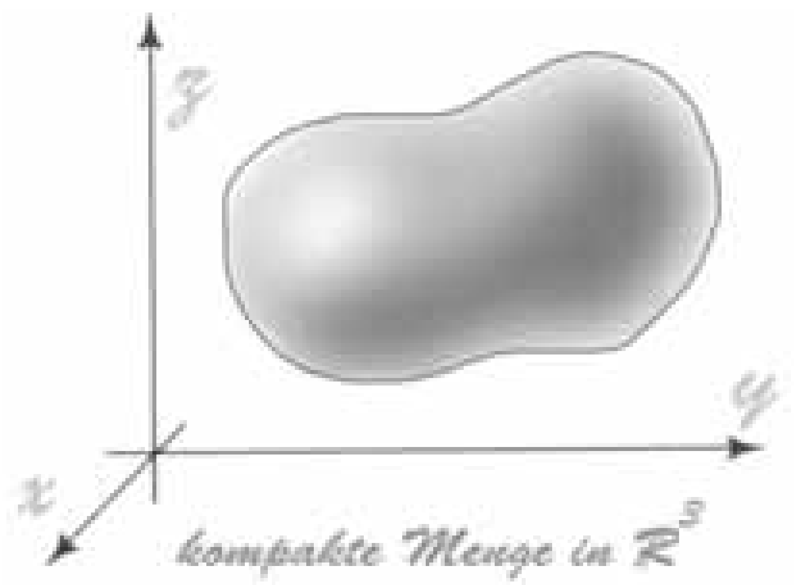
$$\|\gamma(t_0) - \gamma(t_k)\| \geq |\gamma_2(t_0) - \gamma_2(t_k)| = 1 > \epsilon$$

Für $t_0 < t < t_0 + \delta$ ist $\gamma_1(t) > 0$ ein Widerspruch und damit lassen sich $(0,0)$ und $(1/\pi, 0)$ in A nicht durch einen stetigen Weg verbinden.

Kapitel 3

Kompaktheit

Intuitiv wollen wir sagen, dass eine Menge kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Es stellt sich heraus, dass es eine allgemeinere Definition gibt, die nicht nur in metrischen Räumen funktioniert, sondern auch in topologischen Räumen. Mit dieser allgemeineren Definition kann man meistens besser arbeiten.

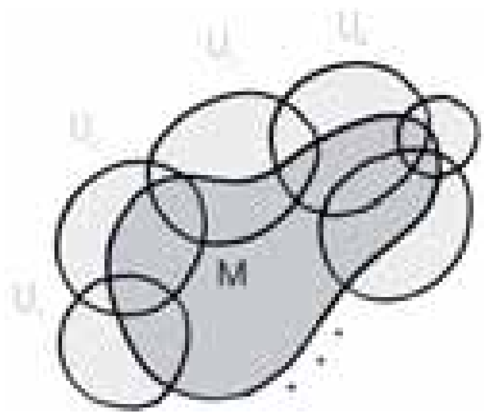


3.1 Kompaktheit

3.1.1 Definition

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von M. Eine Kollektion von offenen Mengen U_i, mit i in einer Index-Menge I, heißt **offene Überdeckung** von M, falls gilt

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$



2. Eine Menge A heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält.

3. Eine Menge A heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge aus A einen Häufungswert in A besitzt.

3.1.2 Beispiele

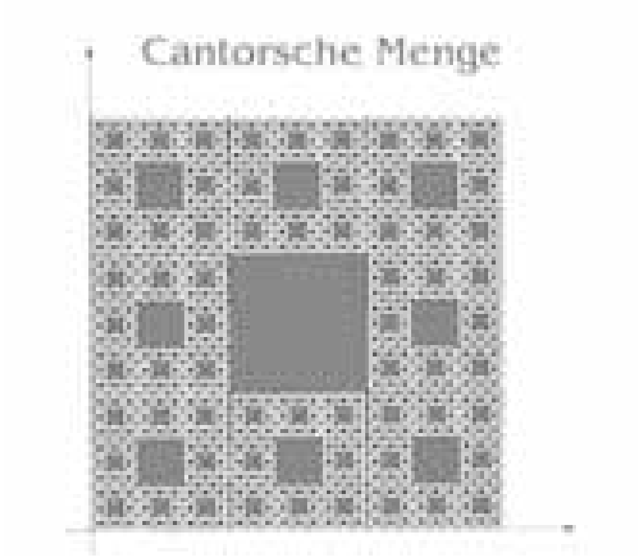
- Sei $A = \{\frac{1}{2n} \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$. Sei $U_i = (\frac{1}{2i-1}, \frac{1}{2i+1})$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$. Dann ist die Kollektion von offenen Mengen U_i, eine offene Überdeckung von A, weil $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ist.

- Die Menge $A = \{\frac{1}{2n} \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist nicht kompakt, weil es eine offene Überdeckung $U_i = (\frac{1}{2i-1}, \frac{1}{2i+1})$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$ gibt, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

- Die Menge $A = \{\frac{1}{2n} \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ ist nicht kompakt, weil sie den Häufungspunkt $0 \notin A$ besitzt.

3.1.3 Bemerkung

Kompakte Mengen können sehr kompliziert sein wie zum Beispiel die Cantorsche Menge in $\mathbb{R}^n$.



3.2 Wichtige Sätze über Kompakte Mengen

3.2.1 Satz (Bolzano-Weierstrass)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von M. Dann ist die Menge A genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

3.2.2 Satz (Heine-Borel)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

3.2.3 Satz (Maximum-Satz)

Seien M und N metrische Räume,$f : M \to N$ eine stetige Funktion,und $A \subset M$ eine Kompakte Menge, dann ist die Bildmenge $f(A)$ auch kompakt. Insbesondere für $f : M \to \mathbb{R}$ stetig und M kompakt, dann besitzt f ein Maximum und ein Minimum auf M.

3.3 Aufgaben

1. Welche der folgenden Mengen ist kompakt in $\mathbb{R}^2$ (ohne Beweis):
   (a) $\{(x,y) \mid x > y\}$
   (b) $\{(x,y) \mid xy \neq 0\}$
   (c) $\{(x,y) \mid y = 5\}$
   (d) $\{(x,y) \mid |x| > 3\}$
   (e) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$
   (f) $\{(x,y) \mid x^2 > -1\}$
   (g) $\{(x,y) \mid 2x + 3y - 5 < 1\}$
   (h) $\{(x,y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$
   (i) $\{(x,y) \mid x - y \leq 3\}$
   (j) $\{(x,y) \mid x \geq |y|\}$

2. Zeige, dass jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist.

3. Seien A, B kompakte Mengen. Zeige, dass $A \cup B$ auch kompakt ist.

4. Seien A, B kompakte Mengen. Zeige, dass $A \cap B$ auch kompakt ist.

5. Zeige, dass die Menge $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ nicht kompakt ist.

6. Zeige dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

7. Zeige oder widerlege
   A kompakt in $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash A$ zusammenhängend

8. Zeige, dass die Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$ kompakt ist.

9. Sei U_k eine Folge offener Mengen in $\mathbb{R}^n$. Zeige oder widerlege : Die Menge
   $$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \backslash U_k) \qquad \text{ist kompakt.}$$

10. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht kompakte Menge. Zeige, dass es eine Folge von abgeschlossenen Mengen $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots$ gibt mit $F_k \cap A = \emptyset$ so, dass
$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \bigcap A = \emptyset$$

11. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine überabzählbare Menge. Zeige, dass A mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

12. **Cantorsche Menge**: Sei
$$F_1 = \left[0,\ \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\ 1\right]$$
die von $[0, 1]$ hergeleitete Menge, die durch die Beseitigung des mittleren Intervalls $[1/3,\ 2/3]$ entsteht. Wir wiederholen diesen Prozess für beide Intervalle $[0,\ 1/3]$ und $[2/3,\ 1]$ und definieren
$$F_2 = \left[0,\ \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$
Durch Induktion definieren wir die Mengen $F_3, F_4, \ldots$. Die Menge
$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$
heißt dann die **Cantorsche Menge**. Zeige, dass die Cantorsche Men-

ge C kompakt ist.

13. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$ Finde eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ die weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

3.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❋

   (a) $\{(x,y) \mid x > y\}$ ist nicht kompakt.
   (b) $\{(x,y) \mid xy \neq 0\}$ ist nicht kompakt.
   (c) $\{(x,y) \mid y = 5\}$ ist nicht kompakt.
   (d) $\{(x,y) \mid |x| > 3\}$ ist nicht kompakt.
   (e) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ist kompakt.
   (f) $\{(x,y) \mid x^2 > -1\}$ ist nicht kompakt.
   (g) $\{(x,y) \mid 2x + 3y - 5 < 1\}$ ist nicht kompakt.
   (h) $\{(x,y) \mid x^2/2 + y^2 < 3\}$ ist nicht kompakt.
   (i) $\{(x,y) \mid x - y \leq 3\}$ ist nicht kompakt.
   (j) $\{(x,y) \mid x \geq |y|\}$ ist nicht kompakt.

2. ✎*Lösung* ❋
   Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine endliche Teilmenge. Dann kann man M in folgender Form

   $$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

   schreiben. Um zu zeigen, dass M kompakt ist, sei U_i eine offene Überdeckung von M, das heißt

   $$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

   Dann gilt für jedes $a_j \in M$ gibt es mindestens ein U_{i_j} so, dass

   $$a_j \in U_i$$

   Bilden wir die Vereinigung von a_j für $j = 1, 2, \ldots, m$ dann gilt

   $$M = \bigcup_{j=1,2,\ldots,} a_j \subset \bigcup_{j=1,2,\ldots,} U_{i_j}$$

   Also die Menge M ist kompakt, weil jede offene Überdeckung U_i von M eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{j=1,2,\ldots,} U_{i_j}$ enthält.

3. ✎*Lösung* ❋
   Seien A, B kompakte Mengen. Wir wollen zeigen, dass $A \cup B$ auch kompakt ist. Sei U_i eine offene Überdeckung von $A \cup B$. Also

   $$A \cup B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Damit folgt

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i \text{ ist eine offene Überdeckung von } A$$

$$B \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i \text{ ist eine offene Überdeckung von } B$$

Da A kompakt ist, gibt es eine enliche Indexmenge I_A so, dass

$$A \subset \bigcup_{i \in I_A} U_i$$

Da B kompakt ist, gibt es eine enliche Indexmenge I_B so, dass

$$B \subset \bigcup_{i \in I_B} U_i$$

Daraus folgt

$$A \cup B \subset \bigcup_{i \in I_A \cup I_B} U_i$$

Also ist $A \cup B$ auch kompakt.

4. ✎*Lösung* ❃
Seien A, B kompakte Mengen. Wir wollen zeigen, dass $A \cap B$ auch kompakt ist. Sei U_i eine offene Überdeckung von $A \cap B$. Also

$$A \cap B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Damit folgt

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i \text{ ist eine offene Überdeckung von } A$$

$$B \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad U_i \text{ ist eine offene Überdeckung von } B$$

Da A kompakt ist, gibt es eine enliche Indexmenge I_A so, dass

$$A \subset \bigcup_{i \in I_A} U_i$$

Da B kompakt ist, gibt es eine enliche Indexmenge I_B so, dass

$$B \subset \bigcup_{i \in I_B} U_i$$

Daraus folgt

$$A \cap B \subset \bigcup_{i \in I_A \cap I_B} U_i$$

Also ist $A \cap B$ auch kompakt.

5. ✎*Lösung* ❋
   Um zu zeigen, dass die Menge $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ nicht kompakt ist, sei
   $$U_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 - 1/i\}$$
   Dann ist die Kollektion U_i eine Überdeckung von $\mathbb{Z}$ die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Daraus folgt dass $\mathbb{Z}$ nicht kompakt ist.

6. ✎*Lösung* ❋
   Um zu zeige dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt ist, sei
   $$U_i := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - i| < 1/4\}$$
   Dann ist die Kollektion U_i eine Überdeckung von A die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Daraus folgt dass A nicht kompakt ist.

7. ✎*Lösung* ❋

   Die Aussage ist falsch für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Falls $n = 1$ ist die Aussage falsch, weil für $A = \{0\}$ ist A kompakt aber $\mathbb{R} \backslash A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ nicht zusammenhängen.

   Falls $n \geq 2$ betrachten wir die Menge
   $$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$
   Die Menge ist kompakt, weil sie abgeschlossen und beschränkt ist. Außerdem ist $\mathbb{R}^n \backslash A$ keine zusammenhängende Menge, weil sie offen und nicht wegzusammenhngend ist. Um zu zeigen dass $\mathbb{R}^n \backslash A$ nicht wegzusammenhngend ist, kann man den Zwischenwertsatz benutzen (Kapitel 5).

8. ✎*Lösung* ❋
   Die Menge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^2$ also nach Heine-Borel kompakt.

9. ✎*Lösung* ❃
   Die Aussage ist falsch.
   Sei
   $$U_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - (k, 0, \ldots, 0)\| = 1/4\}$$
   Dann ist
   $$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \backslash U_k)$$
   nicht beschränkt ($(-a, 0, \ldots, 0) \in A$ mit a beliebig groß) und damit auch nicht kompakt.

10. ✎*Lösung* ❃
    Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht kompakte Menge. Also existiert eine Überdeckung U_k von A, die keine Teilüberdeckung enthält. Wir definieren
    $$F_{i+1} = (\mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{k=i}^{\infty} U_k)$$
    und daraus folgt
    $$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \right) \bigcap A = \emptyset$$

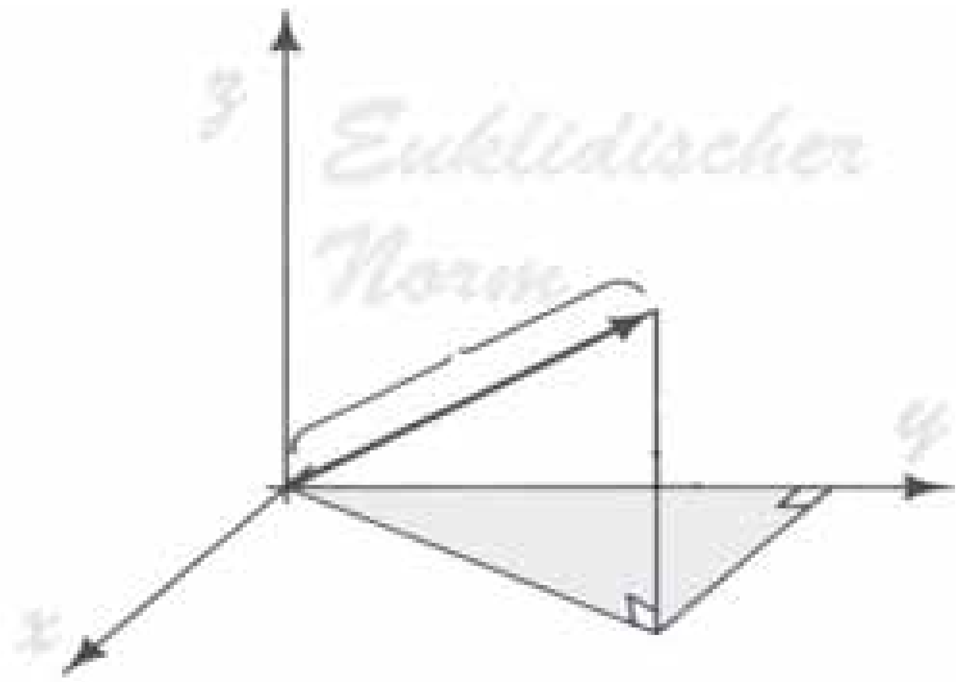
11. ✎*Lösung* ❃
    Wir zeigen die Aussagen für $n = 1$. Für $n \geq 2$ funktioniert der Beweis genau so.
    Wir teilen die Menge $\mathbb{R}^n$ in Intervallen der Länge 1 :
    $$\mathbb{R} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} (i, i+1]$$
    Da $A \subset \mathbb{R}$ eine überabzählbare Menge, gibt es ein Intervall $(i, i+1]$ der unendlich viele Punkte aus A enthält. Sonst wäre A eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, also abzählbar.
    Nun besitzt die unendliche Teilmenge von A in $(i, i+1]$ einen Häufungspunkt.

12. ✎*Lösung* ❃
    Die Cantor-Menge C ist zwischen 0 und 1 beschränkt. Außerdem, ist
    $$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$
    als Vereinigunng von abgeschlossenen Menge auch abgeschlossen. Daraus folgt nach Heine-Borel, dass C kompakt ist.

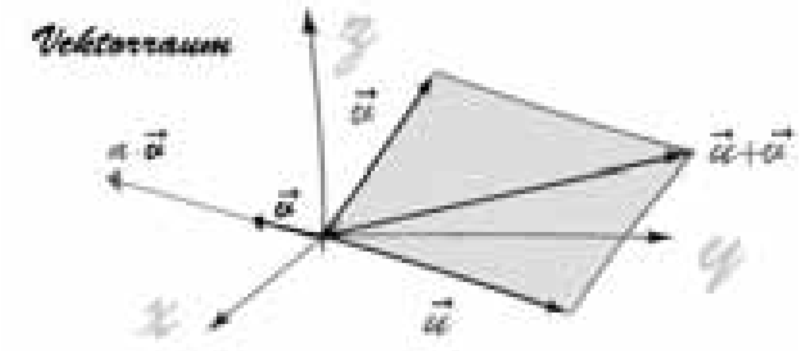
13. ✎*Lösung* ❋
Sei
$$f : S \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$$
Dann hat f weder ein Maximum noch ein Minimum.

Kapitel 4

Normierte Räume



Ein Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Operationen: Addition und Skalarmultiplikation. Wir wollen ein Abstandsfunktion auf diese Vektorraum definieren so, dass wir von Stetigkeit oder Differenzierbarkeit von Funktionen über einem Vektorraum reden können. Unser Ziel ist, einen metrischen Raum aus einem Vektorraum zu machen, ohne die Vektorraumstruktur zu verlieren. Dafür gibt es den Begriff Norm.



4.1 Normierte Räume

4.1.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$

heißt **Norm** , falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\|x\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positive Definitheit)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

4.1.2 Bemerkung

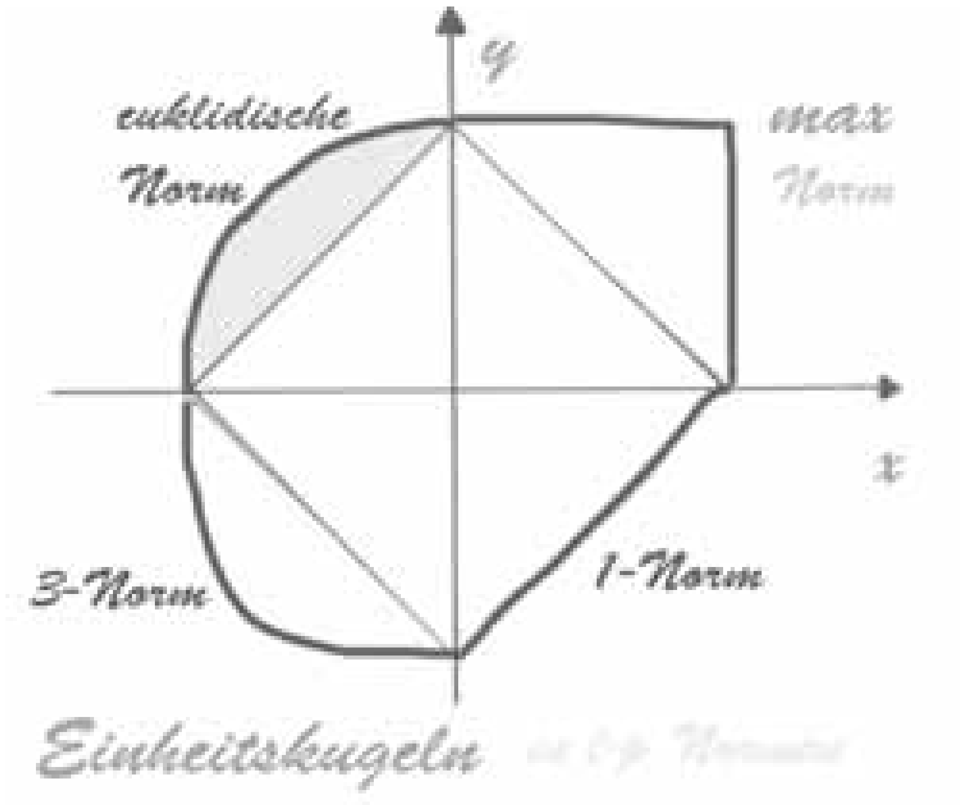
Die Norm in $\mathbb{R}^n$ ist eindeutig fetgelegt, wenn man die Einheitskugel

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

dieser Norm definiert.

4.1.3 Definition

Ein **normierter Raum** $(V, \| \ \|)$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer Norm.



4.1.4 Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ dann definiert man

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad l_1\text{-Norm}$$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \qquad l_p\text{-Norm}$$

$$\|x\|_\infty := max\ |x_k| \qquad l_\infty\text{-Norm}$$

4.1.5 Definition

Zwei Normen $\| \ \|_p$ und $\| \ \|_q$ heißen **äquivalent** falls es C_1 und C_2 gibt so, dass

$$C_1.\|x\|_p \le \|x\|_q \le C_2.\|x\|_p \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

4.1.6 Satz

Es gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n.\|x\|_\infty.$$

Das heißt alle Normen $\|x\|_p$ sind äquivalent.

Für äquivalente Normen gelten dieselben qualitative Sätze wie stetigkeits- oder differenzierbarkeits-Sätze. Eine Verallgemeinerung von diesem Satz ist folgender Satz

4.1.7 Satz

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

4.2 Banach-Räume

Ein Banachraum kann sehr groß und kompliziert sein. Wir werden uns mit dem Rest dieses Buches auf den endlich dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ beschränken. Jedenfalls ist es sinnvoll eine Ahnung von der Vielfalt der Banachräumen zu haben.

4.2.1 Definition

Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

4.2.2 Beispiele

- Die Menge $\mathbb{R}^n$ bezüglich jede Norm ist ein Banachraum, weil alle Normen von $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

- Für $1 \leq p < \infty$ ist der Folgenraum l^p definiert als

$$l^p := \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x-k|^p < \infty\}$$

zusammen mit der $l^p - Norm$

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$$

ein Banachraum.

- Die L^p-Räume sind für $1 \leq p < \infty$ erklärt als

$$L^p(G) := \left\{ u : G \to \bar{\mathbb{R}} \mid G \in \mathbb{R}^n, \int_G |u|^p dx < \infty \right\}$$

zusammen mit der $L^p - Norm$

$$\|u\|_p := \sqrt[p]{\int_G |u|^p dx}$$

sind Banachräume.

- Sei $G \in \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Der Raum der stetigen Funktionen $C^0(G)$

$$C^0(G) := \{f : G \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

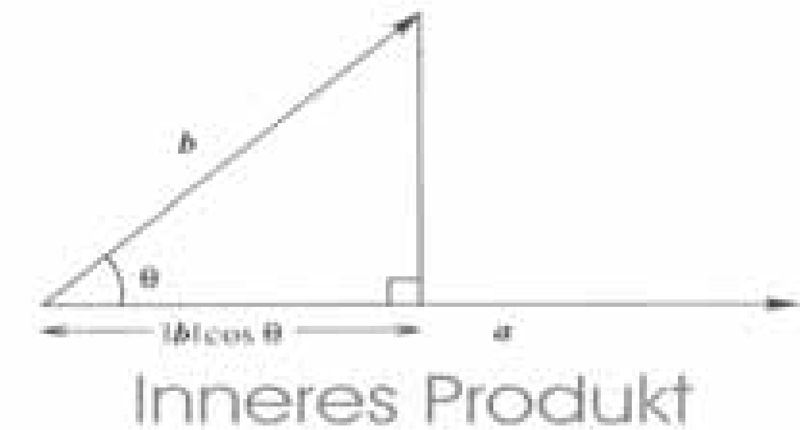
zusammen mit der $Maximum - Norm$

$$\|f\| := \max_{x \in G} |f(x)|$$

ist ein Banachraum.

4.3 Inneres Produkt

Das innere Produkt oder Skalarprodukt ist das was man aus der Schule kennt, allerdings ein bischen allgemeiner für $\mathbb{R}^n$ oder für irgend ein Vektorraum.



4.3.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **inneres Produkt** oder **Skalar-Produkt**, falls gilt

- $\langle x, x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ (Positive Definitheit)
- $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ (Linearität)
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (Symmetrie)

Dann heißt $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein **Prähilbert-Raum**.

4.3.2 Bemerkung

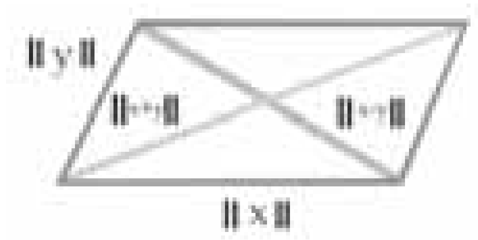
Man kann leicht beweisen, dass

$$\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle$$

4.3.3 Satz (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

Es gilt

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|.\|y\|$$



4.3.4 Satz (Parallelogramm-Identität)

In einem Prähilbert-Raum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ gilt die Parallelogramm-Identität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4.3.5 Satz (Polarisations-Identität)

In einem Prähilbert-Raum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ gilt die Polarisations-Identität

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

4.3.6 Satz (Stetigkeit des Skalarprodukts)

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Prähilbert-Raum, und sei $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ und $\lim_{k\to\infty} y_k = y$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle x, y\rangle$$

4.4 Hilberträume

Eine besondere Art von metrischen Räumen sind diejenigen, die mit einer Vektorraumstruktur versehen sind. Man möchte eine Metrik definieren die verträglich mit der Vektorraumstruktur und seinem Skalarprodukt ist.

4.4.1 Definition

Ein Vektorraum mit innenem Produkt heißt **Hilbert-Raum**, falls er vollständig ist.

4.4.2 Beispiele

- Der $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

ist ein Hilbert-Raum.

- Der **Hilbertsche Folgenraum** l^2

$$l^2 := \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x-k|^2 < \infty\}$$

mit der Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

ist ein Hilbert-Raum.

4.5 Aufgaben

1. Welche der folgenden definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\|(x_1, x_2)\| := x_1^2 + x_2^2$
   (b) $\|(x_1, x_2)\| := x_1$
   (c) $\|(x_1, x_2)\| := 1$
   (d) $\|(x_1, x_2)\| := min\ (|x_1|, |x_2|)$
   (e) $\|(x_1, x_2)\| := |x_2|$
   (f) $\|(x_1, x_2)\| := |x_1 x_2|$
   (g) $\|(x_1, x_2)\| := |\sin(x_1 + x_2)|$
   (h) $\|(x_1, x_2)\| := max\ (|x_1|, |x_2|)$

2. Welche der folgenden definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$:

   (a) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$
   (b) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_1 + 2 x_2 y_2$
   (c) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := 2 x_1 y_1 + 3 x_2 y_2$
   (d) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_2 + y_1 x_2$
   (e) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2$
   (f) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

3. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, und $x, y \in X$. Zeige, dass

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

4. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, und $x, y \in X$. Zeige, dass

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

5. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum. Wir definieren

$$d : X \times X \to [0, \infty)$$

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

   Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

6. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, und sei $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Zeige, dass die Norm $\|\ \|$ stetig ist, das heißt :

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$$

7. Sei $C^0[0,1]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Ist
$$\|f\| := f(0) + f(1)$$
eine Norm auf $C^0[0,1]$?

8. Sei $C^0[0,1]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$ zusammen mit der Norm
$$\|f\| := \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right)^{1/2}$$
Ist $(C^0[0,1], \| \ \|)$ ein Banachraum ?

4.6 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

(a) $\|(x_1, x_2)\| := x_1^2 + x_2^2$ ist kein Norm da

$$\|2(1,1)\| = \|(2,2)\| = 2^2 + 2^2 = 8 \neq$$

$$2\|(1,1)\| = 2(1^2 + 1^2) = 2$$

Also die Homogenität der Norm ist nicht erfült.

(b) $\|(x_1, x_2)\| := x_1$ ist kein Norm da

$$\|(-1,1)\| = -1 < 0$$

Also die Positivität der Norm ist nicht erfült.

(c) $\|(x_1, x_2)\| := 1$ ist kein Norm da

$$\|2(1,1)\| = \|(2,2)\| = 1 \neq 2\|(1,1)\| = 2$$

Also die Homogenität der Norm ist nicht erfült.

(d) $\|(x_1, x_2)\| := min\ (|x_1|, |x_2|)$ ist kein Norm da

$$\|(1,0)\| = 0 \quad \text{aber } (1,0) \neq (0,0)$$

Also die Positivität der Norm ist nicht erfült.

(e) $\|(x_1, x_2)\| := |x_2|$ ist kein Norm da

$$\|(1,0)\| = 0 \quad \text{aber } (1,0) \neq (0,0)$$

Also die Positivität der Norm ist nicht erfült.

(f) $\|(x_1, x_2)\| := |x_1 x_2|$ ist kein Norm da

$$\|(1,0)\| = 0 \quad \text{aber } (1,0) \neq (0,0)$$

Also die Positivität der Norm ist nicht erfült.

(g) $\|(x_1, x_2)\| := |\sin(x_1 + x_2)|$ ist kein Norm da

$$\|(1,-1)\| = 0 \quad \text{aber } (1,-1) \neq (0,0)$$

Also die Positivität der Norm ist nicht erfült.

(h) $\|(x_1, x_2)\| := max\ (|x_1|, |x_2|)$ ist ein Norm da alle drei Norm-Axiome erfült sind.

2. ✎*Lösung* ❃

(a) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, da alle drei Axiome

- $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle > 0$ für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
- $\langle \lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle$ $= \lambda\langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \mu\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle$
- $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle$

erfüllt sind.

(b) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, da alle drei Axiome

- $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle > 0$ für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
- $\langle \lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle$ $= \lambda\langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \mu\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle$
- $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle$

erfüllt sind.

(c) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, da alle drei Axiome

- $\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle > 0$ für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$
- $\langle \lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle$ $= \lambda\langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \mu\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle$
- $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle$

erfüllt sind.

(d) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 y_2 + y_1 x_2$ definiert kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ da

$$\langle\ (1, 0), (1, 0)\ \rangle = 0$$

Also die Positivität ist nicht erfült.

(e) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2$ definiert kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ da

$$\langle\ (1, 0), 2(1, 0)\ \rangle \neq 2\langle\ (1, 0), (1, 0)\ \rangle$$

Also die Homogenität ist nicht erfült.

(f) $\langle\ (x_1, x_2), (y_1, y_2)\ \rangle := x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ definiert kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ da

$$\langle\ (1, 0), 2(1, 0)\ \rangle \neq 2\langle\ (1, 0), (1, 0)\ \rangle$$

Also die Homogenität ist nicht erfült.

3. ✎*Lösung* ❋
   Wir wollen zeigen, dass
   $$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$
   Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt
   $$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$
   $$\Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

4. ✎*Lösung* ❋
   Wir wollen zeigen, dass
   $$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$
   - Falls $\|x\| \geq \|y\|$ Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt
     $$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$
     $$\Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| = \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$
   - Falls $\|x\| \leq \|y\|$ Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt
     $$\|y\| = |-1|\|y\| = \|-y\| = \|-y+x-x\|$$
     $$\leq \|-y+x\| + \|-x\| = \|x-y\| + \|x\|$$
     $$\Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| = \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$$

5. ✎*Lösung* ❋
   Wir wollen zeigen, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Es gilt :
   - Positivität
     $$d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$$
   - Definitheit
     $$d(x,y) = \|x-y\| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y$$
   - Symmetrie
     $$d(x,y) == \|x-y\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

- Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| = \|x-y-z+y\| = \|(x-y)-(z-y)\| \\ &\le \|(x-y)\| + \|-(z-y)\| = \|(x-y)\| + |-1|\|(z-y)\| \\ &= \|(x-y)\| + \|(z-y)\| = d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

6. ✎*Lösung* ❋
Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, und sei $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Wir wollen zeigen, dass :

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$$

Oder

$$\big|\|x_k\| - \|x\|\big| < \epsilon \quad \text{für} \quad \|x_k - x\| < \delta$$

Nach $Aufgabe - 4$ gilt

$$\big|\|x_k\| - \|x\|\big| \le \|x_k - x\| < \delta$$

Damit wählen wir $\delta = \epsilon$ und damit gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| - \|x\| = 0$$

oder

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$$

7. ✎*Lösung* ❋
Mit

$$\|f\| := f(0) + f(1)$$

wird auf $C^0[0,1]$ keine Norm definiert weil zum Beispiel : für

$$f_1(x) = x^2 - x \quad \text{gilt} \quad \|f_1\| = 0$$

Obwohl f_1 nicht identisch 0 ist, also die Definitheit ist nicht erfült.

8. ✎*Lösung* ❋
Der Raum $(C^0[0,1], \| \ \|)$ ist ein normierter Raum aber kein Banachraum, weil er nicht vollständig ist. Um das zu sehen, betrachten wir die Funktionen-Folge aus $C^0[0,1]$:

$$f_n(x) = x^n$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Also konvergiert die Folge außerhalb von $C^0[0,1]$. Es ist jetzt nur noch zu zeigen, dass (f_n) eine Cauchy-Folge in $(C^0[0,1], \| \ \|)$ ist. um das zu sehen, betrachten wir die Differenz

$$\|f_m - f_n\| = \left(\int_0^1 (f_m - f_n)^2(x)dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 (x^m - x^n)^2 dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 (x^{2m} + x^{2n} - 2x^{m+n})dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 (x^{2m} + x^{2n})dx \right)^{1/2}$$

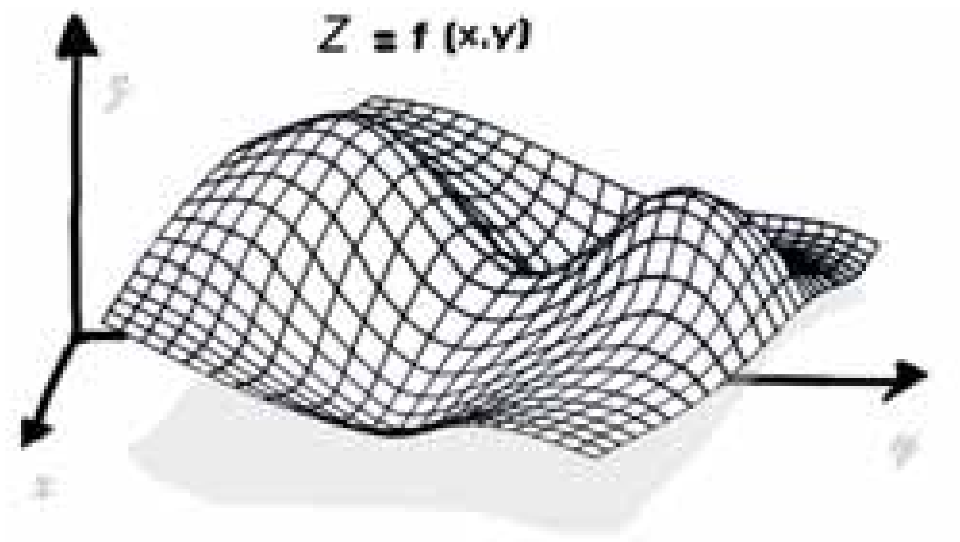
O.B.d.A sei $m > n$, also ist $x^{2m} \leq x^{2n}$ auf $[0,1]$ dann gilt :

$$\left(\int_0^1 (x^{2m} + x^{2n})dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right)^{1/2} = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

für $n \to \infty$, also (f_n) ist tatsächlich eine Cauchy-Folge

Kapitel 5

Stetige Funktionen



5.1 Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

Sei A eine Untermenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$ bildet ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ auf einen Vektor $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ab. Wir schreiben $y = f(x)$ oder

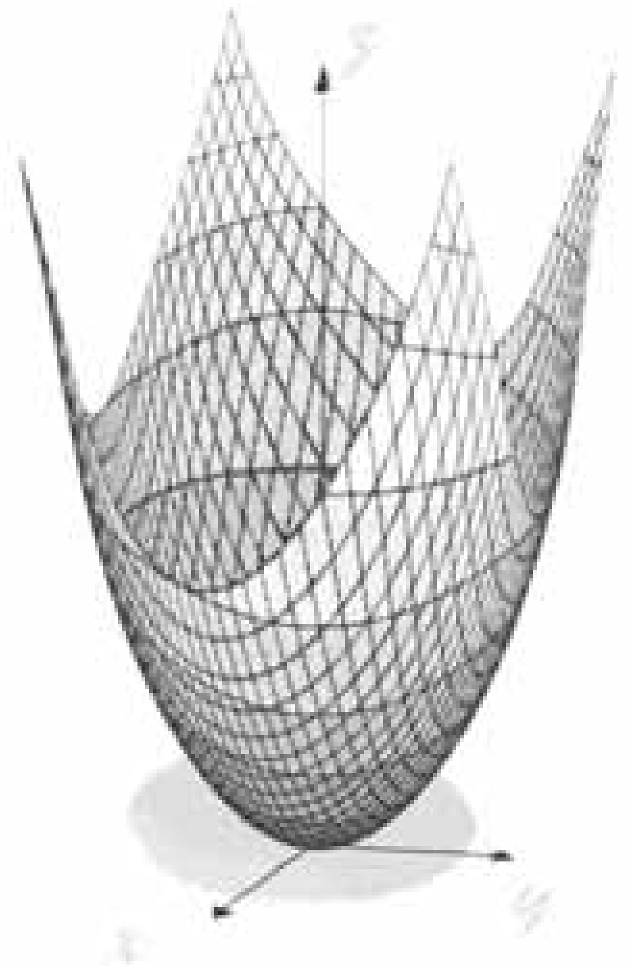
$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \quad \dots \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

5.1.1 Beispiel 1

Eine Funktion ($m = 1$) mit zwei Variablen ($n = 2$) kann man als eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ darstellen. Zum Beispiel kann man die Funktion

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

als Fläche darstellen. Diese heißt Paraboloid.

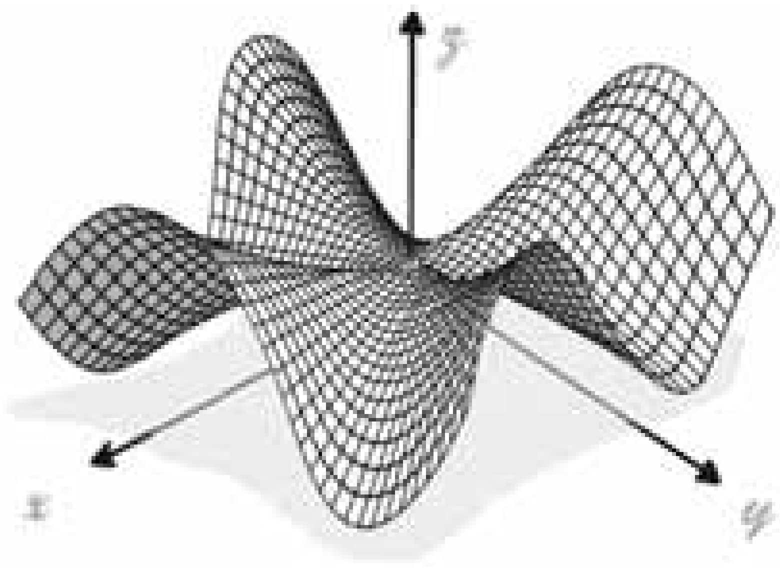


5.1.2 Beispiel 2

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

kann man als Fläche darstellen. Sie ist auf $(0, 0)$ nicht definiert!

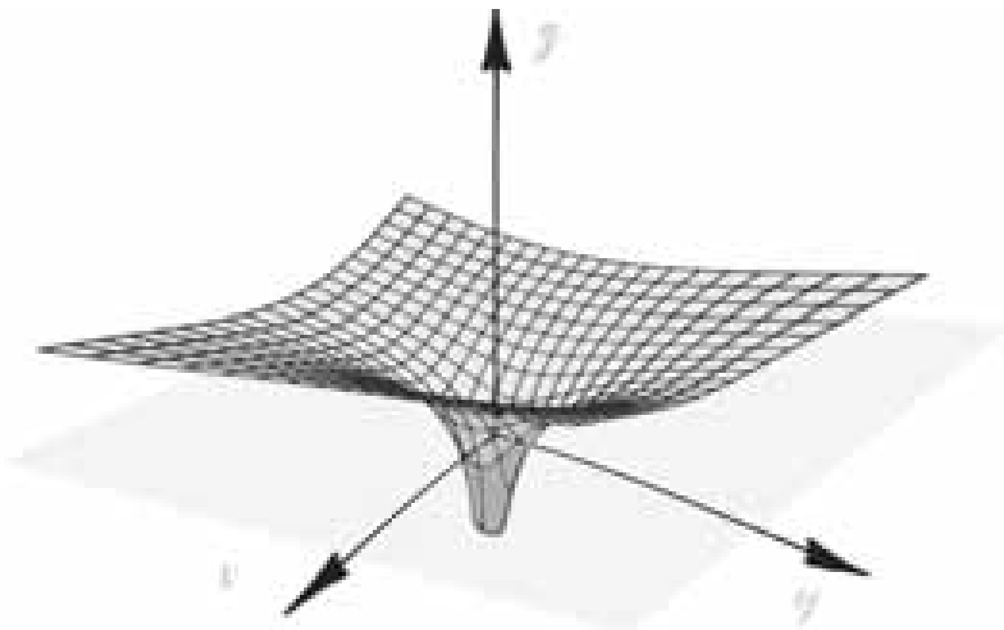


5.1.3 Beispiel 3

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

kann man als Fläche darstellen. Sie ist auf $(0, 0)$ nicht definiert!

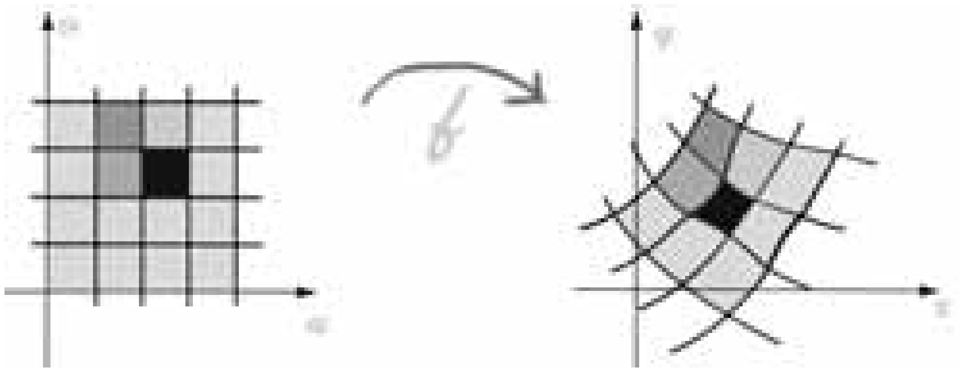


5.1.4 Beispiel 4

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(u, v) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

kann man mit Gitterverformung darstellen.



5.2 Stetigkeit

Der Begriff des Limes einer Funktion lässt sich leicht auf mehrdimensionale Funktionen erweitern.

5.2.1 Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion, und sei $x_0 \in \overline{A}$, dann sagt man

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

oder

$$f(x) \to b \quad \text{für} \quad x \to a$$

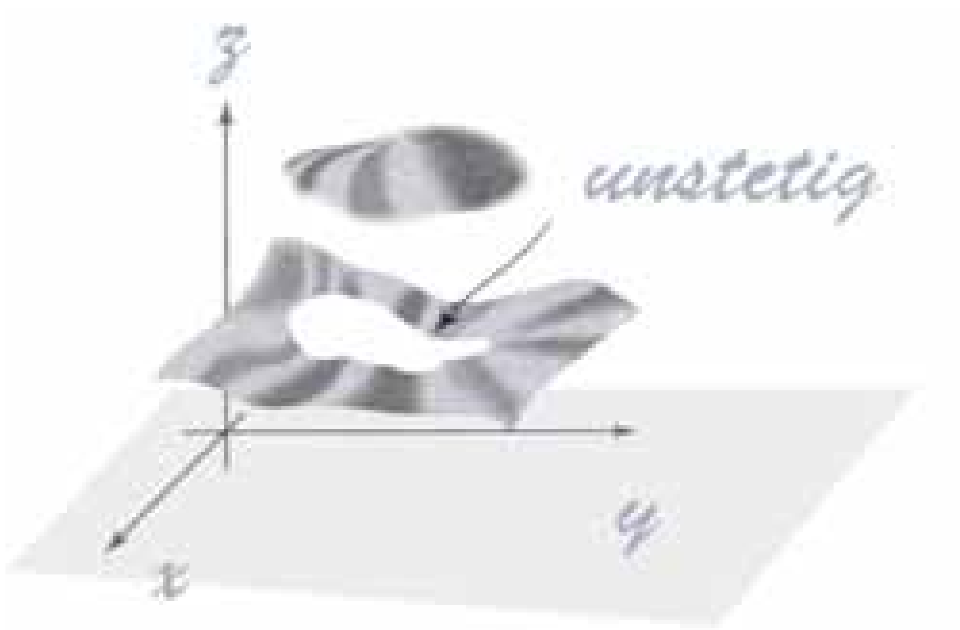
falls gilt

$$\lim_{\|x-a\| \to 0} \|f(x) - b\| = 0$$

5.2.2 Satz

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ zwei Funktionen, und es gelte $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ dann gilt:

- $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = b + c$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$
- $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|b\|$



Sei $f(x, y)$ eine Funktion die bei (x_0, y_0) definiert ist, grob gesagt heißt f bei (x_0, y_0) stetig, falls gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Insbesondere ist die eindimensionale Funktion

$$f(x, a(x - x_0) + y_0)$$

bei x_0 stetig für alle reellen a. Das heißt wir nähern den Punkt (x_0, y_0) auf die Gerade $y = a(x - x_0) + y_0$ an.

5.2.3 Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **stetig** bei $x_0 \in A$ falls gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in A \quad : \quad \|x - x_0\| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$

5.2.4 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = 2x + y$. Dann ist f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig. Um das zu beweisen, sei ϵ eine beliebige positive Zahl. Es gilt

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| = |2x + y - (2x_0 + y_0)|$$

$$= |2(x - x_0) + (y - y_0)| \le 2|x - x_0| + |y - y_0|$$

Nun gilt

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2}$$

$$\le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Genauso gilt

$$|y - y_0| = \sqrt{(y - y_0)^2}$$

$$\le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Wir wählen jetzt $\delta = \epsilon/3$, dann gilt

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \quad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{3}$$

für $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$. Daraus folgt

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \le 2|x - x_0| + |y - y_0|$$

$$< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

für $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$, und f ist stetig in (x_0, y_0).

5.2.5 Beispiel 2

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x,y) = xy$. Dann ist h in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ stetig. Es gilt

$$\|h(x,y) - h(a,b)\| = |xy - ab|$$

$$= |xy - ay + ay - ab| \leq |xy - ay| + |ay - ab| = |x-a||y| + |a||y-b|$$

Nun sei $|y - b| < 1$. Dann gilt

$$|y| = |y - b + b| \leq |y - b| + |b| < 1 + |b|$$

Damit folgt

$$\|h(x,y) - h(a,b)\| < |x-a|(1+|b|) + |a||y-b|$$

für $|y - b| < 1$. Weiterhin gilt

$$|x - a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\leq \|(x,y) - (a,b)\|$$

Nun können wir δ als die kleinste Zahl der drei Zahlen

$$1 \qquad \frac{\epsilon}{2(1+|b|)} \qquad \frac{\epsilon}{2|a|}$$

wählen. Dann können wir die Stetigkeit von h mit folgender Abschätzung beweisen

$$\|h(x,y) - h(a,b)\| < \frac{\epsilon}{2(1+|b|)}(1+|b|) + |a|\frac{\epsilon}{2|a|}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$.

Zum Glück muss man diesen langen Beweis nicht bei jeder Überprüfung der Stetigkeit einer Funktion ausführen. Um zu entscheiden wo eine Funktion stetig ist, benutzt man folgende Rechenregeln. An den Stellen an dernen die Rechenregeln nicht gelten benutzt man die Definition.

5.2.6 Satz

1. Eine konstante Abbildung ist immer stetig.

2. Die Identitätsabbildung ist immer stetig.

3. Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ zwei stetige Funktionen in $x_0 \in A$, dann sind $f + g, f - g, f.g$ stetig. Außerdem, falls $g(x_0) \neq 0$ ist f/g auch stetig.

4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig in x_0 und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ stetig in $f(x_0)$,dann ist die Funktion $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ stetig in x_0.

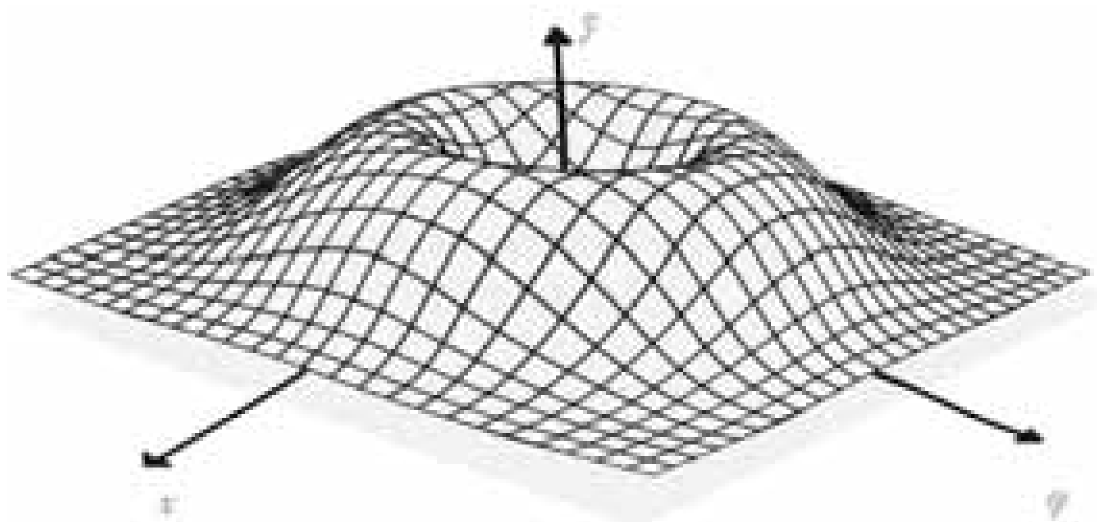
5. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ist stetig bei x_0 genau dann, wenn $f_i : A \to \mathbb{R}$ stetig bei x_0 für alle $j = 1, \ldots, m$ ist.

5.2.7 Beispiel 1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$$

ist überall stetig.

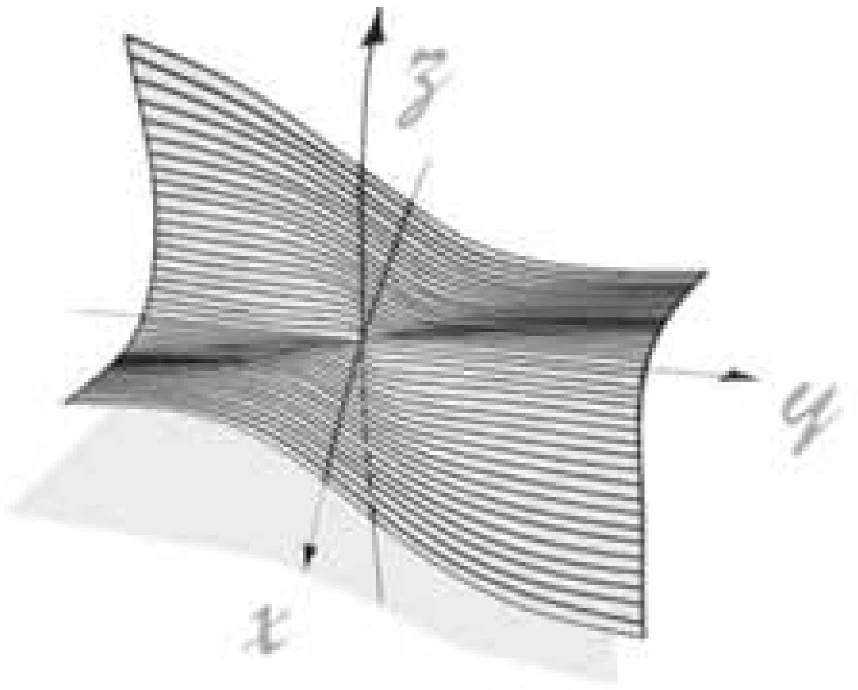


5.2.8 Beispiel 2

Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann ist f nach den Rechenregeln überall stetig wo $(x,y) \neq (0,0)$. Bei



$(x,y) = (0,0)$ gilt :

$$\lim_{t \to 0} f(t,0) = 0$$

Während

$$\lim_{t \to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$$

Also ist f bei $(0,0)$ nicht stetig.

5.2.9 Warnung

Eine Funktion von zwei Variablen könnte stetig in jeder Variablen (als eindimensionale Funktion betrachtet) sein, aber dennoch unstetig als Funktion von zwei Variablen. Zum Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5.2.10 Satz

Sei $f(x,y)$ eine stetige Funktion, dann gilt

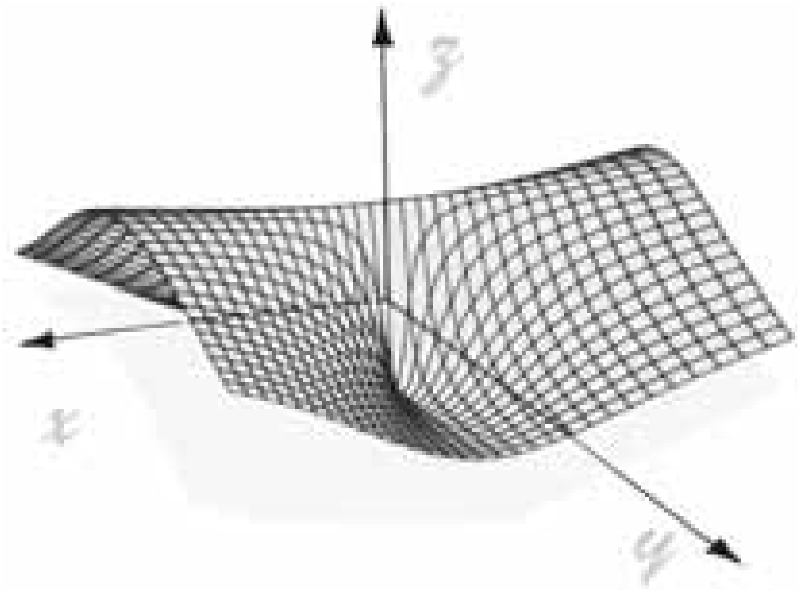
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

5.2.11 Beispiele

- Sei
$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \quad \text{für} \quad x+y \neq 0$$
Dann gilt
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = +1$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1$$
Damit ist die Funktion bei $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar.

- Manchmal kann man die Unstetigkeit einer Funktion nicht so schnell beweisen. Man braucht dann eine geeignete Annäherungskurve.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y) := \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}} + y^2}$$
$$f(0,0) := 0$$
besitzt bei Annäherung an $(0,0)$ längs aller Geraden der Form
$$y = ax$$
f den Grenzwert 0, aber f ist bei $(0,0)$ nicht stetig weil
$$\lim_{t\to 0^+} f(t, e^{-\frac{1}{t^2}}) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

- Sei
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Die Funktion ist bei $(0,0)$ nicht stetig.



5.2.12 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}$$

sei stetig auf der zusammenhängenden Mengen $X \subset M$. Es seien $a, b \in X$ mit $f(a) \leq f(b)$. Ferner sei ν eine reelle Zahl mit

$$f(a) \leq \nu \leq f(b)$$

Dann gibt es mindestens ein $\xi \in X$ mit $f(\xi) = \nu$.

5.2.13 Satz (Norm-unabhängigkeit)

Seien

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

eine Funktion, $\| \, \|_1$ und $\| \, \|_2$ zwei äquivalente Normen. Dann gilt:

$$f \quad \text{stetig bezüglich } \| \, \|_1 \iff f \quad \text{stetig bezüglich } \| \, \|_2$$

5.3 Aufgaben

1. Bestimme den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}^2$ für folgende Funktionen $f(x,y)$:
   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$
   (b) $f(x,y) = x^4+y^4-5x^2y^2$
   (c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
   (d) $f(x,y) = \frac{1}{y}\cos(x^2)$
   (e) $f(x,y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$
   (f) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Berechne folgende Grenzwerte falls sie existieren :
   (a) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2y+x^2$$
   (b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^3}$$
   (c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}$$
   (d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$
   (e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$
   (f) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$$
   (g) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^6}$$
   (h) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+3y^4}$$

3. Sei
   $$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{für} \quad x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0$$
   Ist diese Funktion bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

4. Sei
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y} \quad \text{für} \quad x+y \neq 0$$
ist diese Funktion bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

5. Sei
$$f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^6+y^4} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)$$
ist diese Funktion bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

6. Sei
$$f(x,y) = \frac{x^3e^{xy}}{e^x-1} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$
ist diese Funktion bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar?

7. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion definiert durch
$$F(x,y,z) = \Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)\Big)$$
Das heißt, f_1 und f_2 sind die Koordinaten-Komponenten von F. Zeige, dass F genau dann stetig ist, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

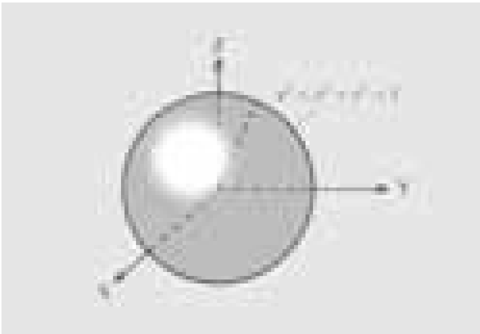
8. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **lokal beschränkt**, falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$, ein $r > 0$ gibt so, dass f auf der Menge
$$B_r(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-v\| < r\}$$
beschränkt ist. Zeige, dass
$$f \quad \text{stetig} \Rightarrow f \quad \text{lokal beschränkt}$$

9. Zeige mit dem Zwischenwertsatz, dass die Menge
$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \neq 1\}$$
nicht wegzusammenhängend ist.

5.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Die Funktion $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$ macht nur Sinn, wenn
   $$x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0$$
   Also ist der Definitionsbereich
   $$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$
   Das ist die Menge aller Punkte von $\mathbb{R}^3$ die auf und außerhalb den



   Einheitskugel.

   (b) Die Funktion $f(x, y) = x^4 + y^4 - 5x^2y^2$ macht Sinn für alle reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist der Definitionsbereich
   $$D = \mathbb{R}^2$$

   (c) Die Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ macht Sinn nur, wenn
   $$x^2 + y^2 \geq 0 \quad \text{oder} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$
   Also ist der Definitionsbereich
   $$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$$

   (d) Die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos(x^2)$ macht Sinn nur, wenn
   $$y \neq 0$$
   Also ist der Definitionsbereich
   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$$

(e) Die Funktion $f(x,y)=\tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$ macht Sinn nur, wenn

$$y \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Also ist der Definitionsbereich

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

(f) Die Funktion $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ macht Sinn nur, wenn

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \quad \text{oder} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Also ist der Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$

2. ✎*Lösung* ❃

(a) Es gilt : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2y + x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

(b) Das Limes : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^3}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2} = \infty$$

Während für $(x,y)=(0,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^3} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(c) Das Limes : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

Während für $(x,y)=(t^2,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4} = 1$$

(d) Die Funktionen sin und cos sind stetig. Außerdem

$$\cos(0) = 1 \neq 0$$

Also ist

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} \text{bei } (0,0) \text{ stetig}$$

Damit gilt :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(0-0)}{\cos(0+0)} = 0$$

(e) Das Limes : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 0}{t^2} = 0$$

Während für $(x,y)=(t,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

(f) Das Limes : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{4t^2} = \frac{1}{2}$$

Während für $(x,y)=(t,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2-t^2}{4t^2-t^2} = \frac{1}{3}$$

(g) Das Limes : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^6}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^6} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^4} = 0$$

Während für $(x,y)=(t,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^6} = 1$$

(h) Das Limes : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{2x^4+3y^4}$ existiert nicht, weil

Für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+3y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{2t^4} = 0$$

Während für $(x,y)=(t,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+3y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4-3t^4} = -1$$

3. ✎*Lösung* ❃

Die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{für} \quad x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0$$

ist bei $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar, weil für $(x,y)=(t,0)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

Während für $(x,y)=(t,t)$ ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4} = 1$$

4. ✎*Lösung* ❃

   Die Funktion
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y} \quad \text{für} \quad x+y \neq 0$$
   ist bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar, weil für $x+y \neq 0$ gilt :
$$f(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$$
$$= \frac{(x+y) + (x+y)^3/3! + (x+y)^5/5! + \dots}{(x+y)}$$
$$= 1 + (x+y)^2/3! + (x+y)^4/5! + \dots \to 1$$
   wenn $(x,y) \to (0,0)$

5. ✎*Lösung* ❃

   Die Funktion
$$f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^6+y^4} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)$$
   ist bei $(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar, weil für $(x,y) = (t,0)$ ist
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6+y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^6} = 0$$
   Während für $(x,y) = (t^{1/6}, t^{1/8})$ ist
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6+y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t+t^{1/2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{1/2}}{t^{1/2}+1} = 1$$

6. ✎*Lösung* ❃

   Die Funktion
$$f(x,y) = \frac{x^3e^{xy}}{e^x-1} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$
   ist bei $(0,0)$ stetig fortsetzbar, weil für $x \neq 0$ gilt :
$$f(x,y) = \frac{x^3e^{xy}}{e^x-1} = \frac{x^3(1+xy+(xy)^2/2!+\dots)}{(1+x+x^2/2!+\dots)-1}$$

$$= \frac{x^3 + x^4y + x^5y^2/2! + \dots}{x + x^2/2! + \dots} = \frac{x^2 + x^4y + x^5y^2/2! + \dots}{1 + x/2! + \dots}$$

Die Funktion im Nenner und im Zähler stetig sind und es gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x/2! + \dots) = 1 \neq 0$$

7. ✎*Lösung* ❃

Wir wollen zeigen dass

$$F(x,y,z) = \Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)\Big)$$

genau dann stetig ist, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

Falls F stetig ist, gilt :

$$\left\|\Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)\Big) - \Big(f_1(x_0,y_0,z_0),\ f_2(x_0,y_0,z_0)\Big)\right\| < \epsilon$$

für $\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|$ klein genug. Da alle Normen $\|\ \|$ äquivalent auf $\mathbb{R}^3$, können wir eine Norm wählen, so dass der Beweis einfacher wird. Wir wählen die $Maximum - Norm$. Damit gilt

$$\left\|\Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)\Big) - \Big(f_1(x_0,y_0,z_0),\ f_2(x_0,y_0,z_0)\Big)\right\|$$

$$= max\ \Big(\big|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0)\big|,$$

$$\big|f_2(x,y,z) - f_2(x_0,y_0,z_0)\big|\Big) < \epsilon$$

für $\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|$ klein genug. Daraus folgt

$$\big|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0)\big| < \epsilon$$

und

$$\big|f_2(x,y,z) - f_2(x_0,y_0,z_0)\big| < \epsilon$$

für $\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|$ klein genug. Das heißt, f_1 und f_2 sind stetig.

Falls f_1 und f_2 stetig sind, gilt :

$$\big|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0)\big| < \epsilon$$

und

$$\big|f_2(x,y,z) - f_2(x_0,y_0,z_0)\big| < \epsilon$$

für $\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|$ klein genug. Daraus folgt

$$\left\|\Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)\Big) - \Big(f_1(x_0,y_0,z_0),\ f_2(x_0,y_0,z_0)\Big)\right\|$$

$$= max\ \Big(\big|f_1(x,y,z) - f_1(x_0,y_0,z_0)\big|,$$

$$\big|f_2(x,y,z) - f_2(x_0,y_0,z_0)\big|\Big) < \epsilon$$

für $\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|$ klein genug. Das heißt, F ist stetig.

8. Wir möchten zeigen, dass f auf der Menge

$$B_r(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - v\| < r\}$$

für ein geeignetes r beschränkt ist. Das heißt es gibt ein $R \in \mathbb{R}$ so, dass $\|f(x)\| < R$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da f stetig an der Stelle $x = v$ ist gilt nach Defintion:

$$\|f(x) - f(v)\| < \epsilon$$

für $\|x-v\|$ klein genug. Also wählen wir r klein genug so, dass $\|f(x)- f(v)\| < \epsilon$ daraus folgt:

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(v) + f(v)\|$$

$$\leq \|f(x) - f(v)\| + \|f(v)\| < \epsilon + \|f(v)\|$$

Da wir R beliebig Wählen können, setzen wir

$$R = \epsilon + \|f(v)\|$$

und damit ist $\|f(x)\| < R$.

9. wir wollen, dass die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \neq 1\}$$

nicht wegzusammenhängend ist. Wir nehmen an, dass A wegzusammenhängend ist. Dann gibt es einen Weg γ der ganz in A liegt, so dass

$$\gamma(0) = (0,0,\dots,0) \in A \quad \text{und} \quad \gamma(1) = (2,0,\dots,0) \in A$$

Betrachten wir die stetige Funktion:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \|x\|$$

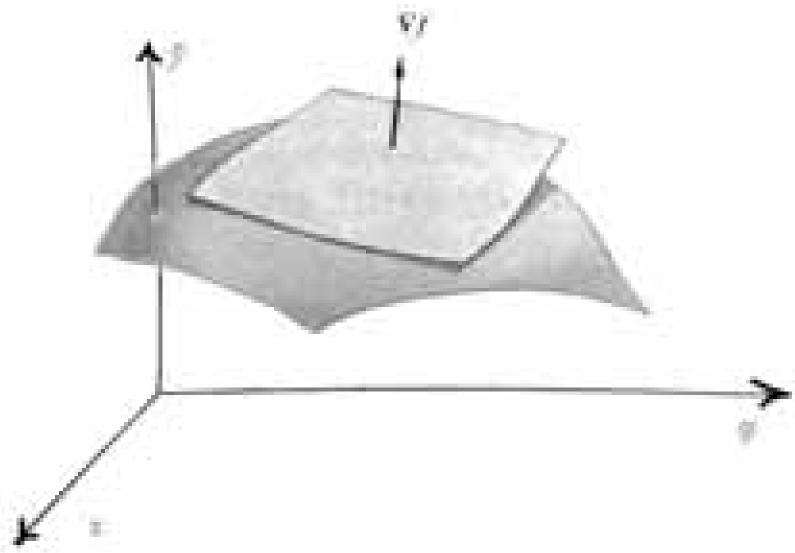
Dann gilt

$$f(\gamma(0)) = f(0,0,\ldots,0) = 0 \quad \text{und} \quad f(\gamma(1)) = f((2,0,\ldots,0) = 2$$

Da die Funktion $f \circ \gamma$ auf $[0,1]$ stetig und die Menge $[0,1]$ zusammenhängend ist, können wir den Zwischenwertsatz verwenden. Also gibt es ein $\xi \in [0,1]$ so, dass $f(\gamma(\xi)) = 1$. Das heißt, $\gamma(\xi) \in A$ und $\|\gamma(\xi)\| = 1$: Widerspruch!

Kapitel 6

Differenzierbarkeit



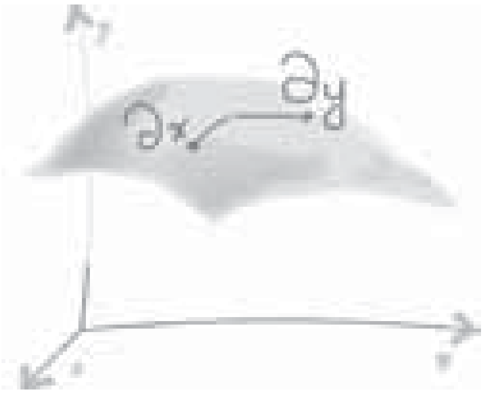
6.1 Partielle Ableitung

Sei $f(x, y)$ eine Funktion in Abhängigkeit der Variablen x und y. Da x und y voneinander unabhängig sind, kann man folgendes machen:
Ist y fest und x veränderlich, so ist $f(x, y)$ eine Funktion von x und ihre **Partielle Ableitung** bezüglich x ist

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Ist x fest und y veränderlich, so ist $f(x,y)$ eine Funktion von y und ihre **Partielle Ableitung** bezüglich y ist

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



6.1.1 Beispiel

Sei $f(x,y) := x^3 - xy + y^3$ dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3y^2$$

6.2 Partielle Ableitungen Höherer Ordnung

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ können auch wieder partiell (nach x oder nach y) abgeleitet werden. Es entstehen vier zweite Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

6.2.1 Beispiel

Sei

$$f(x, y) := x^2 + 3xy + y^2$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

6.3 Partielle Ableitung Impliziter Funktionen

Manche Funktionen können nur in einer impliziten Form ausgedrückt werden. In solchen Fällen kann man die Funktion auch partiell ableiten, indem man die partielle Ableitung der Funktion als unbekannt betrachtet und danach die Gleichung löst.

6.3.1 Beispiel

Sei z:=f(x,y) eine Funktion definiert durch

$$xy + xz + zx = 1$$

Differentiation nach x :

$$y + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$$

Differentiation nach y :

$$x + y\frac{\partial z}{\partial y} + z + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$$

6.4 Totales Differential

6.4.1 Definition

Das **totale Differential** einer Funktion f

$$z = f(x, y)$$

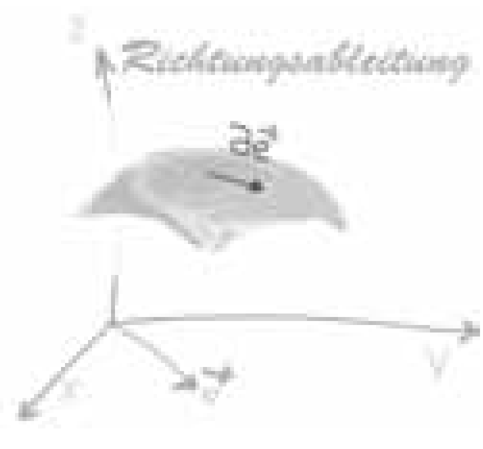
ist definiert durch

$$dz := \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

6.4.2 Beispiel

Für $z = xy$ gilt $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy$

6.5 Richtungsableitung



Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung ist die Richtungsableitung
.

6.5.1 Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $e \in \mathbb{R}$ ein Vektor mit $\|e\| = 1$. Dann

$$\frac{d}{de} f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

heißt die Richtungsableitung von f and der Stelle x_0 in Richtung e.

6.5.2 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Wir wollen die Richtungsableitung von f an der Stelle $x_0 = (1, 1)$ in die Richtung von $v = (3, 4)$ berechnen. Zuerst, sollen wir den Richtungsvektor e berechnen :

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

nach der Definition gilt

$$\frac{d}{de} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((1,1) + t\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{3}{5}t, 1 + \frac{4}{5}t\right) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{3}{5}t\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{5}t\right)^2 - 2}{t} = \frac{14}{5}$$

6.5.3 Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x, y) = x^2 y$$

Wir wollen die Richtungsableitung von f an der Stelle (x, y) in die Richtung von $e = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ berechnen. Es gilt

$$\frac{d}{de} f(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{f((x, y) + he) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\Big(x + h\sqrt{2}/2, y + h\sqrt{2}/2\Big) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h\sqrt{2}/2)^2 (y + h\sqrt{2}/2) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 h\sqrt{2}/2 + xyh\sqrt{2}/2 + 2xh^2 \frac{1}{2} + yh^2 \frac{1}{h} + h^3 \sqrt{2}/4}{h}$$

$$= x^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + xy\sqrt{2}$$

6.5.4 Spezialfälle

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Wenn $e = (1, 0, 0)$ dann gilt

$$\frac{d}{de} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Wenn $e = (0, 1, 0)$ dann gilt

$$\frac{d}{de} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Wenn $e = (0, 0, 1)$ dann gilt

$$\frac{d}{de} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

6.5.5 Satz

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann ist die Richtungsableitung im Punkt $P = (x_0, y_0)$ für den Winkel θ

$$\frac{df}{de} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\theta$$

6.5.6 Satz

Sei $f(x, y) = x^2 - 6y^2$ und $P = (7, 2)$ dann ist die Richtungsableitung im Punkt P für den Winkel $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{df}{de} = 2x\cos\theta - 12y\sin\theta = -5\sqrt{2}$$

6.5.7 Satz

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dann ist die Richtungsableitung im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ in Richtung $e = (e_1, e_2, e_3)$ ($\|e\| = 1$)

$$\frac{df}{de} = \frac{\partial f}{\partial x}e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}e_2 + \frac{\partial f}{\partial z}e_3$$

6.5.8 Satz

Sei $f(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ Dann ist die Richtungsableitung im Punkt $(1, -2, 1)$ in Richtung $e = (1, 1, 2)$ gleich

$$\frac{df}{de} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{e_1}{\|e\|} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{e_2}{\|e\|} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{e_3}{\|e\|} = 0 \times \frac{1}{\sqrt{6}} + 5 \times \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

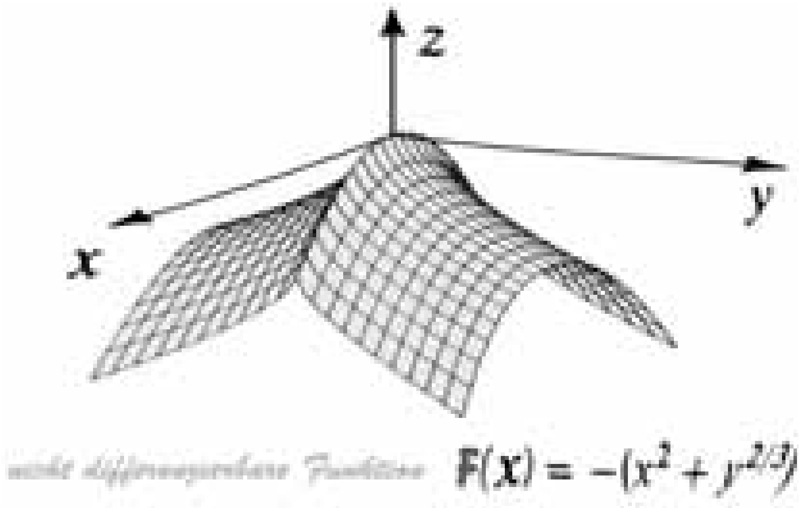
6.6 Totale Ableitung

6.6.1 Definition

Eine Abbildung $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in A$ falls es eine lineare Abbildung $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt so, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - D(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

dann heißt D die **totale Ableitung** (oder einfach Ableitung) von f an der Stelle x_0 und wird mit f' bezeichnet.



6.6.2 Satz (Jacobi-Matrix)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbare Funktion auf A. Dann exitieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ und die totale Ableitung ist gegeben durch

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt die **Jacobi-Matrix**. Die Determinante von der Jacobi-Matrix heißt **Funktionaldeterminante**. Falls $m = 1$ ist diese Matrix ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ und sie heißt auch **Gradient** von f. Man bezeichtet sie mit

$$\bigtriangledown f = \text{grad } f$$

6.6.3 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung deiniert durch

$$f(x, y) = (x^2, x^3 y, x^4 y^2)$$

Dann ist die totale Ableitung durch folgende Jacobi-Matrix gegeben

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 3x^2 y & x^3 \\ 4x^3 y^2 & 2x^4 y \end{pmatrix}$$

6.6.4 Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung definiert durch

$$f(x, y, z) = \frac{x \sin y}{z}$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\sin y}{z}, \frac{x \cos y}{z}, -\frac{x \sin y}{z^2}\right)$$

Noch ist etwas nicht ganz geklärt und zwar, wie können wir wissen, dass die totale Ableitung für eine bestimmte Funktion an einer bestimmten Stelle überhaupt existiert. Der nächste Satz garantiert diese Existenz.

6.6.5 Satz (Differenzierbarkeitsbedingung)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

eine Funktion auf A. Falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ existieren und stetig auf A sind, dann ist f garantiert total differenzierbar auf ganz A.

6.6.6 Beispiel

Dieses Beispiel zeigt, dass die partielle Ableitung einer Funktion nicht unbedingt stetig sein muss.
Sei

$$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für } x \neq 0,$$

und

$$f(x,y) = 0 \quad \text{für } x = 0$$

dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für } x \neq 0,$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - 0}{x - 0} = 0$$

Also existiert die partielle Ableitung nach x überall. Allerdings oszilliert für $x \to 0$ die Ableitung zwischen -1 und $+1$, und damit ist die Ableitung nicht stetig. Daher erfüllt diese Funktion nicht die Differenzierbarkeitsbedingung.

6.6.7 Satz (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

eine (total) differenzierbare Funktion auf A. Dann ist f stetig.

Die totale Ableitung kann auch ein Mittel sein um die Richtungsableitung zu berechnen wie folgender Satz zeigt.

6.6.8 Satz (Richtungsableitung)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

eine (total) differenzierbare Funktion auf A mit Ableitung f'. Dann existieren alle partielle Ableitungen und die Richtungsableitung in alle Richtungen e und es gilt

$$\frac{df}{de} = f'.e$$

6.6.9 Beispiel

Dieses Beipiel, zeigt dass die Existenz der Richtungsableitung in alle Richtungen e nicht impliziert dass die totale Ableitung existiert (wie man sich intiutiv vorstellt).
Sei $f.\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y} \quad \text{für} \quad x^2 \neq -y$$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad x^2 = -y$$

Mit dem Richtungsvektor $e = (e_1, e_2)$ gilt

$$\frac{df}{de}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(te_1, te_2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \, \frac{t^2 e_1 e_2}{t^2 e_1^2 + te_2} = \lim_{t \to 0} \frac{e_1 e_2}{te_1^2 + e_2} = e_1$$

Also existieren alle Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$. Allerdings ist f bei $(0,0)$ nicht stetig, da

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \neq f(0,0)$$

Also kann f bei $(0,0)$ nicht diffenrenzierbar sein.

6.7 Aufgaben

1. Berechne die partiellen Ableitungen der Funktionen:
   (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$
   (b) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$
   (c) $f(x,y) = \arctan(x+y)$
   (d) $f(x,y,z) = e^{x^2+xyz+1}$
   (e) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}$
   (f) $f(x,y) = \sin(2x^2 - 5xy)$
   (g) $f(x,y) = \tan(xy^2+1)$
   (h) $f(x,y,z,t) = xyz + x^2y^2z - xyz^3 + x^4y^5z^7$

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x,y) := f(x/y)$. Zeige dass
$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x,y) := f(x^2+y^2)$. Zeige dass
$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x,y) := f(x^2-y^2)$. Zeige dass
$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

5. Berechne die zweiten Partiellen Ableitungen der Funktionen:
   (a) $f(x,y) = x^3y^4$
   (b) $f(x,y) = \cos(2x+3y)$
   (c) $f(x,y) = x^2y + \sin x$
   (d) $f(x,y) = e^{x^2y}$

6. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige dass die Funktion

$$w(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct)$$

die partielle Diferentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

erfüllt.

7. Berechne die Richtungsableitungen der Funktionen an der Stelle P in die Richtung von v:

   (a) $f(x,y) = x^2y^3$ $\quad P = (1,2) \quad v = (1,2)$
   (b) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ $\quad P = (\pi, 2\pi) \quad v = (2,1)$
   (c) $f(x,y) = \arctan(x^2y)$ $\quad P = (3,0) \quad v = (3,2)$
   (d) $f(x,y) = e^{x^2+xy}$ $\quad P = (-1,3) \quad v = (2,3)$
   (e) $f(x,y) = x^2y\sin(xy)$ $\quad P = (1,\pi) \quad v = (4,2)$
   (f) $f(x,y) = \sin(2xy)$ $\quad P = (-1,\pi) \quad v = (5,2)$
   (g) $f(x,y) = \tan(x^2y)$ $\quad P = (3,0) \quad v = (6,1)$
   (h) $f(x,y) = e^{x^2y}$ $\quad P = (-1,3) \quad v = (1,9)$

8. Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\text{grad}\,(af + bg) = a\,\text{grad}\,(f) + b\,\text{grad}\,(g)$$

9. Berechne den Gradient der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x,y) = xy$
   (b) $f(x,y) = \sin(2xy)$
   (c) $f(x,y) = \cos(x^2y)$
   (d) $f(x,y) = e^{xy}$
   (e) $f(x,y) = \sin x + y\sin(xy)$
   (f) $f(x,y,z) = \sin(2x^2y + xyz^2)$

10. Berechne die totale Ableitung f' der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x,y) = (xy, x)$

(b) $f(x, y) = (\sin(2xy), x^2y)$

(c) $f(x, y) = (\cos(x^2y), x^2, xy)$

(d) $f(x, y, z) = (e^{xyz}, x \sin x, yz)$

(e) $f(x) = (x^2 \sin x, x^2, x - 1)$

(f) $f(x, y, z) = (z, y, x)$

11. Benutze die Differenzierbarkeitsbedingung um zu zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

überall total differenzierbar ist.

12. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für} x \neq 0 \\ 0 & \text{für} x = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass f überall differenzierbar, aber ihre Ableitung f' nicht überall stetig ist.

6.8 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

(a) $\partial f/\partial x = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$, $\partial f/\partial y = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$

(b) $\partial f/\partial x = 2\cos(2x+3y)$, $\partial f/\partial y = 3\cos(2x+3y)$

(c) $\partial f/\partial x = \dfrac{1}{1+(x+y)^2}$, $\partial f/\partial y = \dfrac{1}{1+(x+y)^2}$

(d) $\partial f/\partial x = (2x+yz)e^{x^2+xyz+1}$, $\partial f/\partial y = xze^{x^2+xyz+1}$,

$\partial f/\partial z = xye^{x^2+xyz+1}$

(e) $\partial f/\partial x = \dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{2xy^2}{x^4}$, $\partial f/\partial y = -\dfrac{2yx^2}{y^4} - \dfrac{2y}{x^2}$

(f) $\partial f/\partial x = (4x-y)\cos(2x^2-5xy)$

$\partial f/\partial y = -5x\cos(2x^2-5xy)$

(g) $\partial f/\partial x = \dfrac{y^2}{1+(xy^2+1)^2}$, $\partial f/\partial y = \dfrac{2x}{1+(xy^2+1)^2}$

(h) $\partial f/\partial x = yz + 2xy^2z - yz^3 + 4x^3y^5z^7$

$\partial f/\partial y = xz + 2x^2yz - xz^3 + 5x^4y^4z^7$

$\partial f/\partial z = xy + x^2y^2 - 3xyz^2 + 7x^4y^5z^6$

$\partial f/\partial t = 0$

2. ✎*Lösung* ❃

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x,y) := f(x/y)$. Wir wollen zeige dass

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Nach der Kettenregel $(f(u))' = u'f'(u)$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} f'(x/y) \quad , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} f'(x/y)$$

Daraus folgt

$$x\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{y} f'(x/y) \quad , \qquad y\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-x}{y} f'(x/y)$$

Also gilt

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

3. ✎*Lösung* ❃

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x, y) := f(x^2 + y^2)$. Wir wollen zeige dass

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Nach der Kettenregel $(f(u))' = u'f'(u)$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2) \quad , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2)$$

Daraus folgt

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = 2xyf'(x^2 + y^2) \quad , \quad x\frac{\partial g}{\partial y} = 2xyf'(x^2 + y^2)$$

Also gilt

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

4. ✎*Lösung* ❃

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und $g(x, y) := f(x^2 - y^2)$. Wir wollen zeige dass

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Nach der Kettenregel $(f(u))' = u'f'(u)$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xf'(x^2 - y^2) \quad , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2yf'(x^2 - y^2)$$

Daraus folgt

$$y\frac{\partial g}{\partial x} = 2xyf'(x^2+y^2) \quad , \quad x\frac{\partial g}{\partial y} = -2xyf'(x^2+y^2)$$

Also gilt

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

5. ✎*Lösung* ❃

Um die zweiten Partiellen Ableitungen zu berechnen müssen wir zuerst die ersten Partiellen Ableitungen berechnen.

(a) $\partial f/\partial x = 3x^2y^4 \quad , \quad \partial f/\partial y = 4x^3y^3$

$\partial^2 f/\partial x^2 = 6xy^4 \quad , \quad \partial^2 f/\partial y^2 = 12x^3y^2$

$\partial^2 f/\partial x\partial y = 12x^2y^3 \quad , \quad \partial^2 f/\partial y\partial x = 12x^2y^3$

(b) $\partial f/\partial x = -2\sin(2x+3y)$,

$\partial f/\partial y = -3\sin(2x+3y)$,

$\partial^2 f/\partial x^2 = -4\cos(2x+3y)$,

$\partial^2 f/\partial y^2 = -9\cos(2x+3y)$,

$\partial^2 f/\partial x\partial y = -6\cos(2x+3y)$,

$\partial^2 f/\partial y\partial x = -6\cos(2x+3y)$.

(c) $\partial f/\partial x = 2xy + \cos x$,

$\partial f/\partial y = x^2$,

$\partial^2 f/\partial x^2 = 2y - \sin x$,

$\partial^2 f/\partial y^2 = 0$,

$\partial^2 f/\partial x\partial y = 2x$,

$\partial^2 f/\partial y \partial x = 2x.$

(d) $\partial f/\partial x = 2xye^{x^2y},$

$\partial f/\partial y = x^2 e^{x^2y},$

$\partial^2 f/\partial x^2 = 4x^2y^2e^{x^2y},$

$\partial^2 f/\partial y^2 = x^4e^{x^2y},$

$\partial^2 f/\partial x \partial y = 2x^3ye^{x^2y},$

$\partial^2 f/\partial y \partial x = 2x^3ye^{x^2y}.$

6. ✎*Lösung* ❃

Für die Funktion

$$w(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct)$$

gilt

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

Weiterhin

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

Also folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

7. ✎*Lösung* ❃

Um die Richtungsableitung zu berechnen, berechnen wir zuerst die totale Ableitung und das Noprmierte verktor $e = v/\|v\|$, und dann die Richtungsableitung mit der Formel

$$\frac{df}{de} = f'.e$$

(a) Für $f(x,y) = x^2y^3$ gilt

$$f'(x,y) = (2xy^2, 3x^2y^2) \Rightarrow f'(1,2) = (8,12)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (8,12)\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{24}{\sqrt{5}} = \frac{32}{\sqrt{5}}$$

(b) Für $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ gilt

$$f'(x,y) = (2\cos(2x+3y), 3\cos(2x+3y)) \Rightarrow f'(\pi, 2\pi) = (2,3)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (2,3)\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

(c) Für $f(x,y) = \arctan(x^2y)$ gilt

$$f'(x,y) = \Big(\frac{2xy}{1+(x^2y)^2}, \frac{x^2}{1+(x^2y)^2}\Big) \Rightarrow f'(3,0) = (0,9)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (0,9)\Big(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\Big) = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

(d) Für $f(x,y) = e^{x^2+xy}$ gilt

$$f'(x,y) = ((2x+y)e^{x^2+xy}, xe^{x^2+xy}) \Rightarrow f'(-1,3) = (e^{-2}, -e^{-2})$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (e^{-2}, -e^{-2})\Big(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\Big) = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{13}} + \frac{-3e^{-2}}{\sqrt{13}} = \frac{-e^{-2}}{\sqrt{13}}$$

(e) Für $f(x,y) = x^2 y \sin xy$ gilt

$$f'(x,y) = (2xy \sin xy + x^2y^2 \cos xy, x^2 \sin xy + x^3 y \cos xy)$$

$$\Rightarrow f'(1,\pi) = (\pi^2 \cos \pi, \pi \cos \pi) = (-\pi^2, -\pi)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (-\pi^2, -\pi)\Big(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\Big) = \frac{-4\pi^2}{\sqrt{20}} + \frac{-2\pi}{\sqrt{20}} = \frac{-2\pi^2 - \pi}{\sqrt{5}}$$

(f) Für $f(x,y) = \sin(2xy)$ gilt

$$f'(x,y) = (2y \cos(2xy), 2x \cos(2xy))$$

$$\Rightarrow f'(-1,2) = (2\pi, -2)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (2\pi, -2)\Big(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\Big) = \frac{10\pi}{\sqrt{29}} + \frac{-4}{\sqrt{29}} = \frac{10\pi - 4}{\sqrt{29}}$$

(g) Für $f(x,y) = \tan(x^2y)$ gilt

$$f'(x,y) = \big(2xy/\cos^2(x^2y), x^2/\cos^2(x^2y)\big)$$

$$\Rightarrow f'(3,0) = (0,9)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (0,9)\Big(\frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\Big) = \frac{9}{\sqrt{37}}$$

(h) $f(x,y) = e^{x^2y}$ $\qquad P = (-1,3) \qquad v = (1,9)$ Für $f(x,y) = e^{x^2y}$ gilt

$$f'(x,y) = \big(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}\big)$$

$$\Rightarrow f'(-1,3) = (-6e^3, e^3)$$

Weiterhin

$$e = \frac{v}{\|v\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{82}}, \frac{9}{\sqrt{82}}\Big)$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{de} = f'.e = (-6e^3, e^3)\Big(\frac{1}{\sqrt{82}}, \frac{9}{\sqrt{82}}\Big) = \frac{3e^3}{\sqrt{82}}$$

8. ✎*Lösung* ❋

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\text{grad}\,(af + bg) = a\,\text{grad}\,(f) + b\,\text{grad}\,(g)$$

Es gilt

$$\text{grad}\,(f) = \Big(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z\Big)$$

$$\text{grad}\,(g) = \Big(\partial g/\partial x,\ \partial g/\partial y,\ \partial g/\partial z\Big)$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}\text{grad }(af+bg) &= \Big(\partial(af+bg)/\partial x,\ \partial(af+bg)/\partial y,\ \partial(af+bg)/\partial z\Big)\\ &= \Big(a\partial f/\partial x + b\partial g/\partial x,\ a\partial f/\partial y + b\partial g/\partial y,\ a\partial f/\partial z + b\partial g/\partial z\Big)\\ &= a\Big(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ \partial f/\partial z\Big) + b\Big(\partial g/\partial x,\ \partial g/\partial y,\ \partial g/\partial z\Big)\\ &= a \text{ grad }(f) + b \text{ grad }(g)\end{aligned}$$

9. ✎*Lösung* ❋

(a) Für $f(x,y) = xy$ gilt

$$\bigtriangledown f = (y, x)$$

(b) Für $f(x,y) = \sin(2xy)$ gilt

$$\bigtriangledown f = \Big(2y\cos(2xy), 2x\cos(2xy)\Big)$$

(c) Für $f(x,y) = \cos(x^2y)$ gilt

$$\bigtriangledown f = \Big(-2xy\sin(x^2y), -x^2\sin(x^2y)\Big)$$

(d) Für $f(x,y) = e^{xy}$ gilt

$$\bigtriangledown f = \Big(ye^{xy}, xe^{xy}\Big)$$

(e) Für $f(x,y) = \sin x + y\sin(xy)$ gilt

$$\bigtriangledown f = \Big(\cos x + y\sin(xy) + y\sin x + y\cos(xy),$$

$$\cos x + y\sin(xy) + x\sin x + y\cos(xy)\Big)$$

(f) Für $f(x,y,z) = \sin(2x^2y + xyz^2)$ gilt

$$\bigtriangledown f = \Big((4xy + yz^2)\cos(2x^2y + xyz^2),$$

$$(2x^2 + xz^2)\cos(2x^2y + xyz^2),\ xy\cos(2x^2y + xyz^2)\Big)$$

10. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x, y) = (xy, x)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Für $f(x, y) = (\sin(2xy), x^2 y)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} 2y\cos(2xy) & 2x\cos(2xy) \\ \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

(c) Für $f(x, y) = (\cos(x^2 y), x^2, xy)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} -2xy\sin(x^2 y) & -x^2\sin(x^2 y) \\ \\ 2x & 0 \\ \\ y & y \end{pmatrix}$$

(d) Für $f(x, y, z) = (e^{xyz}, x \sin x, yz)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ \\ \sin x + x\cos x & 0 & 0 \\ \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

(e) Für $f(x) = (x^2 \sin x, x^2, x - 1)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} 2x\sin x + x^2\cos x \\ \\ 2x \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

(f) Für $f(x, y, z) = (z, y, x)$ gilt

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. ✎*Lösung* ❃

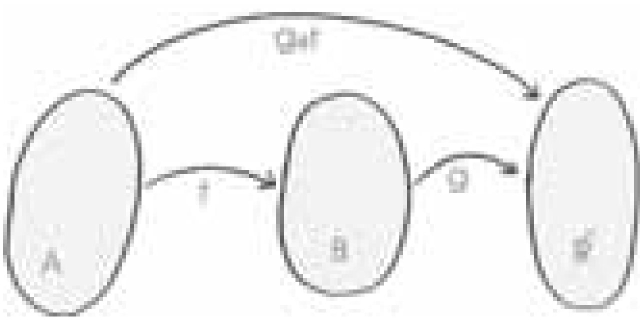
Für
$$f(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1}$$
gilt
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2}$$
Da ist Partiellen Ableitungen stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ sind, ist $f(x,y)$ überall total differenzierbar.

12. ✎*Lösung* ❃

Für
$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für} x \neq 0 \\ 0 & \text{für} x = 0 \end{cases}$$
gilt:
Falls $x \neq 0$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
Falls $x = 0$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/h) = 0$$
Während
$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) = \lim_{x\to 0} -\cos(1/x)$$
existiert nicht. Also die Partielle Ableitung nach x ist nicht stetig.

Kapitel 7

Kettenregel und Mittelwertsatz



7.1 Kettenregel

Ist $z = f(x, y)$ eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen und sind x und y differenzierbare Funktionen

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$

einer Veränderlichen t, so ist z eine differenzierbare Funktion von t, und es gilt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Das war ein Spezialfall der Kettenregel.

7.1.1 Satz (Kettenregel)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f : A \to \mathbb{R}^m$$

eine differenzierbar Funktion an der Stelle $x_0 \in A$. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $f(A) \subset B$ und

$$g : B \to \mathbb{R}^p$$

eine differenzierbare Funktion an der Stelle $y_0 := f(x_0)$. Dann ist die Komposition $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0).f'(x_0)$$

7.1.2 Beispiel 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := (x_1 x_2^2, x_2)$$

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(x_1, x_2) := (x_1, \sin x_2)$$

Dann gilt

$$f \circ g(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = f(x_1, \sin x_2) = (x_1 \sin^2 x_2, \sin x_2)$$

und damit ist die totale Ableitung von $f \circ g$

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \sin^2 x_2 & 2x_1 \cos x_2 \sin x_2 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

Man kann dasselbe Ergebnis mit der Kettenregel erreichen. Es gilt nämlich

$$f' = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1 x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f'(g(x_1, x_2)) = f'(x_1, \sin x_2) = \begin{pmatrix} \sin^2 x_2 & 2x_1 \sin x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)' &= \begin{pmatrix} \sin^2 x_2 & 2x_1 \sin x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 x_2 & 2x_1 \cos x_2 \sin x_2 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

7.1.3 Beispiel 2

Sei $f(u, v, w) := u^2 v + wv^2$ und $g(x, y) = (u, v, w) = (xy, \sin x, e^x)$. und wir wollen die Kettenregel für $h := f \circ g(x, y)$ verifizieren. Es gilt

$$h(x, y) = f(xy, \sin x, e^x) = x^2 y^2 \sin x + e^x \sin^2 x$$

Also ist die partielle Ableitung nach x gleich

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2xy^2 \sin x + x^2 y^2 \cos x + e^x \sin^2 x + 2e^x \sin x \cos x$$

Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= 2xy^2 \sin x + x^2 y^2 \cos x + e^x \sin^2 x + 2e^x \sin x \cos x\end{aligned}$$

7.1.4 Beispiel 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) := f(xy)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial y}$$

Sei $g(x, y) = xy$, dann gilt $F(y, x) = f(g(x, y))$ das heißt

$$F = f \circ g$$

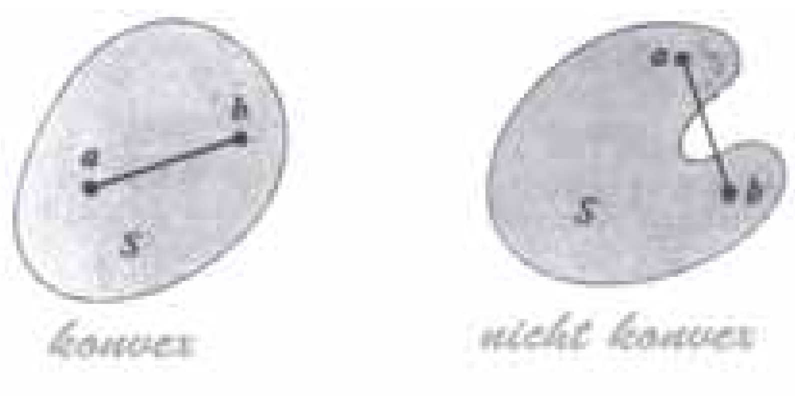
Mit der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(xy)y \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(xy)x$$

damit gilt

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial y}$$

7.2 Mittelwertsatz



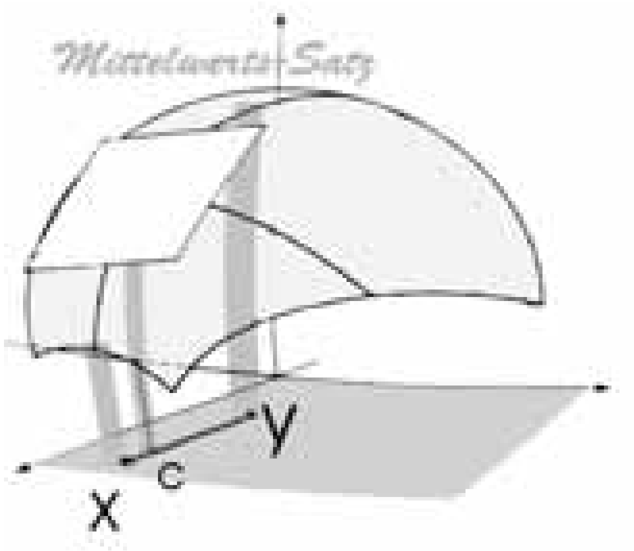
7.2.1 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. A heißt **konvex** , falls für alle $x, y \in A$ das Segment zwischen x und y in A liegt.

7.2.2 Satz (Mittelwertsatz)

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge A. Für alle $x, y \in A$ so, dass das Segment zwischen x und y in A liegt, existiert ein Punkt c auf diesem Segment so, dass

$$f(y) - f(x) = f'(c).(y - x)$$



7.2.3 Beispiel

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen konvexen Menge A. Falls

$$f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in A$$

dann gilt

$$f(x) = konstant$$

wegen

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0 \times (y - x) = 0$$
$$\Rightarrow f(y) = f(x) = konstant$$

7.3 Aufgaben

1. Seien f, g, h, F, G, H, K Funktionen definiert durch
   - $f(x, y) = x - y$
   - $g(x, y) = yx \cos y$
   - $h(x, y, z) = xyz$
   - $F(x, y) = (x - y, x + y)$
   - $G(x, y) = (z, y, x)$
   - $H(x, y, z) = (xe^z, xyz)$
   - $K(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

   Berechne mit der Kettenregel folgende Ableitungen:

   (a) $(f \circ F)'$ $(g \circ H)'$
   (b) $(h \circ G)'$ $(h \circ K)'$
   (c) $(F \circ H)'$ $(f \circ H)'$
   (d) $(H \circ G)'$ $(F \circ F)'$

2. Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen,und definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$
   Zeige mit der Kettenregel, dass f differenzierbar ist und berechne ihre Ableitung.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und definiere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$
   Berechne die Ableitung F' bezüglich r,θ,$\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$.

4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und definiere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch
$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$
   Berechne die Ableitung F' bezüglich ρ,φ,θ, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ und $\partial f/\partial z$.

5. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Berechne die Ableitung von $H := g \circ f$ bezüglich der partiellen Ableitungen von f und g.

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Berechne die Ableitung von
$$H(x) := \int_1^{f(x)} t^2 dt$$
bezüglich der partiellen Ableitungen von f.

7. Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Berechne die Ableitung von
$$H(x,y) := \int_1^{f(x,y)} g(t) dt$$
bezüglich der partiellen Ableitungen von f und g.

8. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Berechne die Ableitung von
$$H(x) := \int_{f(x)}^{g(x)} \sin t dt$$
bezüglich der partiellen Ableitungen von f und g.

7.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃ Wir berechnen zuerst alle Ableitungen.

   - $f'(x,y) = (1,-1)$
   - $g'(x,y) = (y\cos y, x\cos y - yx\sin y)$
   - $h'(x,y,z) = (yz, xz, xy)$
   - $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $G'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $H'(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z & 0 & xe^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$
   - $K'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$

   Nun berechnen wir mit der Kettenregel:

   (a) $(f \circ F)' = f'F' = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,-2)$

   (b) $$\begin{aligned}(g \circ H)' &= g'(H)H' \\ &= (xyz\cos xyz, xe^z\cos xyz - yxe^z\sin xyz)\begin{pmatrix} e^z & 0 & xe^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \\ &= \Big(xyz\cos xyze^z + yzxe^z\cos xyz - zy^2xe^z\sin xyz, \\ &\qquad zx^2e^z\cos xyz - zyx^2e^z\sin xyz, \\ &\qquad x^2yz\cos xyze^z + yx^2e^z\cos xyz - y^2x^2e^z\sin xyz\Big)\end{aligned}$$

   (c) $(h \circ G)' = h'(G)G' = (yx, zx, zy)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (zy, zx, yx)$

   (d) $$\begin{aligned}(h \circ K)' &= h'(K)K' \\ &= (y^2z^2, x^2z^2, x^2y^2)\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} = (2xy^2z^2, 2yx^2z^2, 2zx^2y^2)\end{aligned}$$

(e) $(F \circ H)' = F'(H)H'$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^z & 0 & xe^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z - yz & -xz & xe^z - xy \\ e^z + yz & xz & xe^z + xy \end{pmatrix}$$

(f) $(f \circ H)' = f'(H)H'$
$$= (1, -1) \begin{pmatrix} e^z & 0 & xe^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (e^z - yz, -xz, xe^z - xy)$$

(g) $(H \circ G)' = H'(G)G'$
$$= \begin{pmatrix} e^x & 0 & ze^x \\ yx & zx & zy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ zy & zx & yx \end{pmatrix}$$

(h) $(F \circ F)' = F'(F)F'$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. ✎*Lösung* ❋

Für
$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$
gilt
$$f(x, y) = Add(g(x), h(y)) = Add \circ \big(g(x), h(y)\big)$$
wobei $Add(u, v) = u + v$ Also f ist eine Verknüpfung von zwei differenzierbare Funktionen. Nach dem Kettenregel, muss f auch differenzierbar sein, und es gilt:
$$f' = Add'\big(g(x), h(y)\big)' = (1, 1) \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(y) \end{pmatrix} = g'(x) + h'(y)$$

3. ✎*Lösung* ❋

Für
$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$
gilt
$$F(r, \theta) = f \circ g(r, \theta) \text{ mit } g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$
Nach dem Kettenregel folgt
$$F'(r, \theta) = f'(g)g'$$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \Big(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

4. ✎*Lösung* ❃

   Für
   $$F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$
   gilt
   $$F(\rho,\theta,\varphi) = f\circ g\ (\rho,\theta,\varphi)$$
   mit
   $$g(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$
   Nach dem Kettenregel folgt
   $$F'(\rho,\theta,\varphi) = f'(g)g'$$
   $$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$
   $$= \Bigg(\sin\varphi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - \sin\varphi\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial z},$$
   $$-\rho\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\sin\varphi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$
   $$\rho\cos\varphi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} - \rho\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial z}\Bigg)$$

5. ✎*Lösung* ❃ Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Berechne die Ableitung von $H := g \circ f$ bezüglich der partiellen Sei
   $$f = (f_1, f_2) \Rightarrow f' = \Big(f_1', f_2'\Big)^T$$
   Dann gilt
   $$H' = g'(f)f' = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\Big(f_1', f_2'\Big)^T = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}f_1', \frac{\partial g}{\partial y}f_2'\Big)$$

6. ✎*Lösung* ❋
   Es gilt
$$H(x)=\int_1^{f(x)}x^2dx=\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^{f(x)}=\frac{f^3(x)-1}{3}$$
   Damit gilt
$$H'(x)=\frac{3f^2(x)f'(x)}{3}$$

7. ✎*Lösung* ❋

   Es gilt
$$H(x,y)=\int_1^{f(x,y)}g(x)dx=G(f(x,y))=G\circ f(x,y)$$
   wobei $G(u):=\int_1^u g(x)dx$. Damit gilt
$$G'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_1^u g(x)dx=g(x)$$
   Also
$$\begin{aligned}H'=G'(f)f'&=g(f(x,y))\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\&=\Big(g(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x},\ g(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\end{aligned}$$

8. ✎*Lösung* ❋

   Es gilt
$$H(x)=\int_{f(x)}^{g(x)}\sin xdx=F\circ G(x)$$
   wobei
$$F(u,v):=\int_u^v\sin xdx\qquad\text{und}\qquad G(x):=(f(x),g(x))$$
   Also folgt
$$F'(u,v)=\Big(\frac{\partial}{\partial u}\int_u^v\sin xdx,\frac{\partial}{\partial v}\int_u^v\sin xdx\Big)$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial u} [\sin x]_u^v, \frac{\partial}{\partial v} [\sin x]_u^v \Big) = \big(\sin u, -\sin v \big)$$

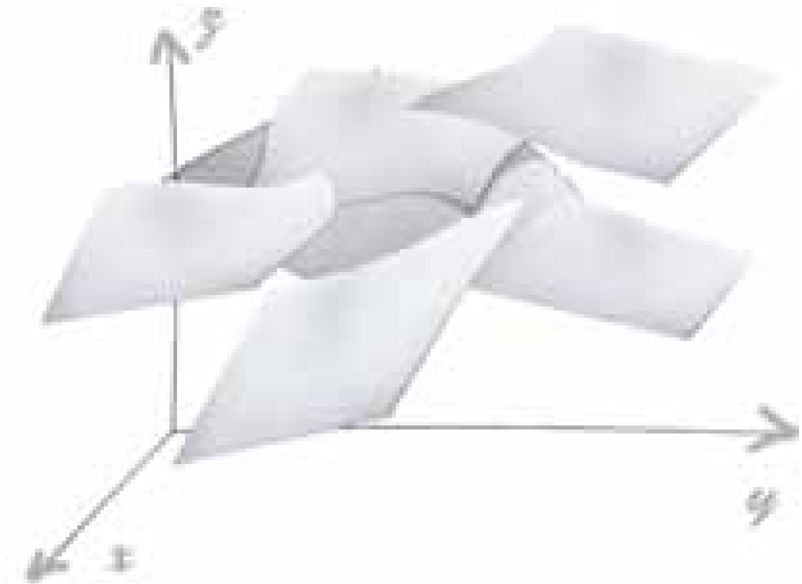
Dann gilt mit der Kettenregel

$$H(x) = F'(G)G'(x) = \Bigg(\sin\big(f(x)\big), -\sin\big(g(x)\big) \Bigg) \big(f'(x), g'(x)\big)^T$$

$$= f'(x)\sin\big(f(x)\big) - g'(x)\sin\big(g(x)\big)$$

Kapitel 8

Taylorformel



8.1 Satz von Schwarz

8.1.1 Einfürung

Sei $f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion. Eine wichtige Frage ist ob die zweite Ableitung nach x und dann nach y gleich die zweite Ableitung nach

y und dann nach x. Der große mathematiker Euler hat im Jahr 1734 an einem Beispiel

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+ny^2}$$

gemerkt, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{nxy}{\sqrt[3]{(x^2+ny^2)^2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

und hat vermutet dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

für alle Funktionen gilt.
Allerdings, hat Schwarz im Jahr 1873 ein Gegenbeispiel gegeben, und danach hat Peano noch eine Funktion als Gegenbeispiel gegeben, die etwas einfacher war als die von Schwarz, und sie lautet

$$f(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{für} \quad x^2+y^2>0$$

und

$$f(x,y) := 0 \quad \text{für} \quad (x,y)=(0,0)$$

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1$$

8.1.2 Beispiel (Schwarz)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

existieren und sind stetig in einer offenen Menge die (x_0,y_0) enthält. Dann existiert $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bei (x_0,y_0) und es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

8.2 Der Satz von Taylor

Sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

mit $f(x) := \Big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\Big)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, dann existiert ein $\theta \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + h) \;&=\; f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) h_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) h_j h_k + \\ & \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_0 + \theta_i h) h_j h_k h_l \end{aligned}$$

Das war nur ein Spezialfall der Taylorformel. Den allgemeinen Fall kann man leicht nachvollziehen, was aber leider nicht angenehm Aufzuschreiben ist. Man kann sogar die Taylor-Reihe betrachten, wenn sie konvergiert; dann gilt

$$f_i(x_0 + h) =$$

$$f_i(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_3=1}^{n} \frac{\partial^m f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}}(x_0)\; h_{j_1} h_{j_2} \ldots h_{j_m}$$

Um solche Formeln geschickter schreiben zu können, hat Dieudonné folgende Bezeichnungen verwendet

$$f''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definiert durch

$$\Big(f''(x)(u, v)\Big)_i := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) u_j v_k$$

und

$$f'''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

definiert durch

$$\Big(f'''(x)(u, v, w)\Big)_i := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_k}(x) u_j v_k w_l$$

und so weiter, und somit kann man die nichteinfache Taylorformel in einer einfachen Form schreiben

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)(h,h) + \frac{1}{3!}f'''(x_0+\theta h)(h,h,h)$$

8.2.1 Beispiel 1

Sei

$$f(x,y) := e^{-x^2-y^2}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (4y^2-2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xe^{-x^2-y^2}$$

Also kann man die Funktion f für $x_0 = 0,9$, und $y_0 = 1,2$ folgendermaßen approximieren

$$f(0,9+h,\ 1,2+k) \backsimeq e^{-2,25}(1 - 1,8h - 2,4k + 0,62h^2 + 2,16hk + 1,88k^2)$$

8.2.2 Beispiel 2

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

unendlich oft differenzierbar. Dann gibt es ein $\theta \in (0,1)$ so, dass

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) \\ &+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \\ &+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\Big) \\ &+\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,\eta)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi,\eta)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^3}(\xi,\eta)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,\eta)k^3\Big) \end{aligned}$$

Wobei $\xi := x_0 + \theta h$ und $\eta := y_0 + \theta k$.

8.2.3 Beispiel 3

Sei

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-y^2}$$

Wir können die ganze Taylor-Reihe um den Punkt $(0,0)$ aufschreiben. Die Formel für eine geometrische Reihe lautet

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

wobei $|r| < 1$ ist. Also können wir schreiben

$$f(x,y) = \frac{1}{1-(x+y^2)} = 1 + (x+y^2) + (x+y^2)^2 + (x+y^2)^3 + \dots$$

für $|x+y^2| < 1$. Das ist die Taylor-Reihe, weil die Taylor-Reihe eindeutig ist. Nun ordnen wir die Glieder um

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x + y^2 + x^2 + 2xy^2 + y^4 + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6 + \dots \\ &= 1 + x + (y^2 + x^2) + (2xy^2 + x^3) + \dots \end{aligned}$$

8.3 Aufgaben

1. Berechne die (Dieudonné Bezeichnungen) $f'(x)(u)$, $f''(x)(u,u)$ der Funktionen:
   (a) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$
   (b) $f(x,y) = \cos y - y\cos x$
   (c) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$
   (d) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
   (e) $f(x,y) = (x-1)^2/(y-3)^2$
   (f) $f(x,y,z,t) = \sin(xyzt)$
2. Schreibe eine Polynom-Aproximation den Punkt P für jede der folgenden Funktionen :
   (a) $f(x,y) = x^2/y \qquad P = (0,1)$
   (b) $f(x,y) = \cos y - y\cos x \qquad P = (\pi,\pi)$
   (c) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \qquad P = (1,1)$
   (d) $f(x,y,z) = e^{xyz} \qquad P = (1,1,1)$
3. Schreibe das Taylor-Polynom vom Grad 3 um den Punkt P für

$$f(x,y) = \sin xe^y \quad \text{bei } P = (0,1)$$

8.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x,y) = x^2/y$ gilt

$$f'(x,y)(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)u_2 = \frac{2x}{y}u_1 - \frac{x^2}{y^2}u_2$$

$$\begin{aligned} f''(x,y)(u,u) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)u_2^2 \\ &+\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y)u_1u_2 + \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x,y)u_2u_1 \\ &= \frac{2}{y}u_1^2 + \frac{2yx^2}{y^4}u_2^2 - \frac{2x}{y^2}u_1u_2 - \frac{2x}{y^2}u_2u_1 \\ &= \frac{2}{y}u_1^2 + \frac{2yx^2}{y^4}u_2^2 - 2\frac{2x}{y^2}u_1u_2 \end{aligned}$$

(b) Für $f(x,y) = x\cos y - y\cos x$ gilt

$$f'(x,y)(u) = (\cos y + y\sin x)u_1 + (-x\sin y - \cos x)u_2$$

$$f''(x,y)(u,u) = y\cos x u_1^2 - x\cos y u_2^2 + 2(-\sin y + \sin x)u_1u_2$$

(c) Für $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ gilt

$$f'(x,y)(u) = (2x+3y)u_1 + (3x+2y)u_2$$

$$f''(x,y)(u,u) = 2u_1^2 + 2u_2^2 + 6u_1u_2$$

(d) Für $f(x,y,z) = e^{xyz}$ gilt

$$f'(x,y,z)(u) = yze^{xyz}u_1 + xze^{xyz}u_2 + xye^{xyz}u_3$$

$$\begin{aligned} f''(x,y,z)(u,u) &= y^2z^2e^{xyz}u_1^2 + x^2z^2e^{xyz}u_2^2 + x^2y^2e^{xyz}u_3^2 \\ &+2(ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz})u_1u_2 + 2(ye^{xyz} + xy^2ze^{xyz})u_1u_3 \\ &+2(xe^{xyz} + x^2yze^{xyz})u_2u_3 \end{aligned}$$

(e) Für $f(x,y) = (x-1)^2/(y-3)^2$ gilt

$$f'(x,y)(u) = \frac{2(x-1)}{(y-3)^2}u_1 + \frac{-2(x-1)^2}{(y-3)^3}u_2$$

$$f''(x,y)(u,u) = \frac{2}{(y-3)^2}u_1^2 + \frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}u_2^2 + \frac{-4(x-1)}{(y-3)^3}u_1u_2$$

(f) Für $f(x,y,z,t) = \sin(xyzt)$ gilt

$$f'(x,y,z,t)(u) = yzt\cos(xyzt)u_1 + xzt\cos(xyzt)u_2$$
$$+xyt\cos(xyzt)u_3 + yzt\cos(xyzt)u_4$$
$$f''(x,y,z,t)(u,u) = y^2z^2t^2\cos(xyzt)u_1^2 + x^2z^2t^2\cos(xyzt)u_2^2$$
$$+x^2y^2t^2\cos(xyzt)u_3^2 + y^2z^2t^2\cos(xyzt)u_4^2$$
$$+2xyz^2t^2\cos(xyzt)u_1u_2 + 2xy^2zt^2\cos(xyzt)u_1u_3$$
$$+2xy^2z^2t\cos(xyzt)u_1u_4 + 2x^2yzt^2\cos(xyzt)u_2u_3$$
$$+2x^2yz^2t\cos(xyzt)u_2u_4 + 2x^2y^2zt\cos(xyzt)u_3u_4$$

2. Um eine Polynom-Aproximation von f zu berechnen, benutzen wir die Formel:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(h,h) + Rest$$

(a) Für $f(x,y) = x^2/y$ gilt

$$f((x_0,y_0)+h) = x_0^2/y_0 + \frac{2x_0}{y_0}h_1 - \frac{x_0^2}{y_0^2}h_2$$
$$+\frac{1}{2!}\Big(\frac{2}{y_0}h_1^2 + \frac{2y_0x_0^2}{y_0^4}h_2^2 - 2\frac{2x_0}{y_0^2}h_1h_2\Big) + Rest$$

Mit $P = (x_0,y_0) = (0,1)$ folgt

$$f((0,1)+h) = h_1^2 + Rest$$

(b) Für $f(x,y) = x\cos y - y\cos x$ gilt

$$f((x,y)+h) = x\cos y - y\cos x + (\cos y + y\sin x)h_1$$
$$+(-x\sin y - \cos x)h_2 + \frac{1}{2!}\Big(y\cos xh_1^2$$
$$-x\cos yh_2^2 + 2(-\sin y + \sin x)h_1h_2\Big) + Rest$$

Mit $P = (x,y) = (\pi,\pi)$ folgt

$$f((\pi,\pi)+h) = \pi h_1 + h_2 - \frac{1}{2}(\pi h_1^2 - \pi h_2^2) + Rest$$

(c) Für $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ gilt

$$f((x,y)+h) = x^2 + 3xy + y^2$$
$$+(2x+3y)h_1 + (3x+2y)h_2 + \frac{1}{2!}(2h_1^2 + 2h_2^2 + 6h_1h_2) + Rest$$

Mit $P = (x,y) = (1,1)$ folgt

$$f((1,1)+h) = 5 + 5h_1 + 5h_2 + h_1^2 + h_2^2 + 3h_1h_2 + Rest$$

Hier gilt sogar $Rest = 0$.

(d) Für $f(x,y,z) = e^{xyz}$ gilt

$$f((x,y,z)+h) = e^{xyz}$$
$$+yze^{xyz}h_1 + xze^{xyz}h_2 + xye^{xyz}h_3 + \frac{1}{2!}\Big(y^2z^2e^{xyz}h_1^2$$
$$+x^2z^2e^{xyz}h_2^2 + x^2y^2e^{xyz}h_3^2 + 2(ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz})h_1h_2$$
$$+2(ye^{xyz} + xy^2ze^{xyz})h_1h_3 + 2(xe^{xyz} + x^2yze^{xyz})h_2h_3\Big) + Rest$$

Mit $P = (x,y) = (1,1,1)$ folgt

$$f((1,1,1)+h) = e + e(h_1 + h_2 + h_3)$$
$$+\frac{e}{2}\Big(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + 4h_1h_2 + 4h_1h_3 + 4h_2h_3\Big) + Rest$$

3. Wir wissen, dass

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$
$$e^y = ee^{y-1}$$
$$= e\Big(1 + (y-1) + \frac{1}{2!}(y-1)^2 + \frac{1}{3!}(y-1)^3 + \dots\Big)$$

daraus folgt

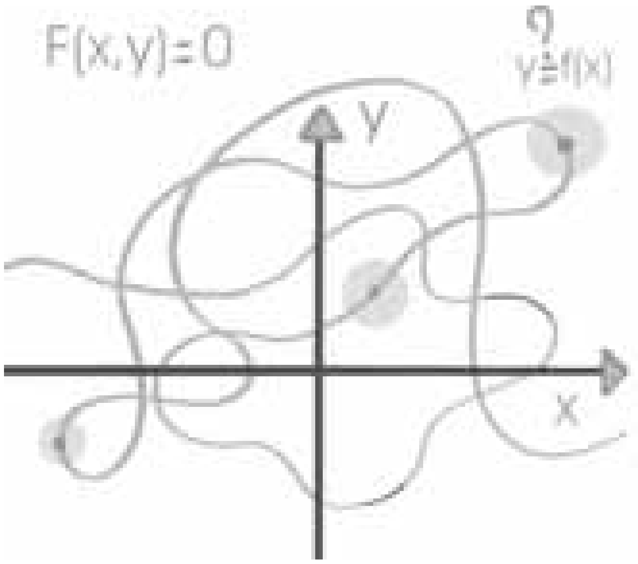
$$f(x,y) = \sin xe^y$$
$$= e\Big(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\Big)\Big(1 + (y-1) + \frac{1}{2!}(y-1)^2 + \frac{1}{3!}(y-1)^3 + \dots\Big)$$
$$= e\Big(x + x(y-1) + \frac{1}{2}x(y-1)^2 - \frac{1}{6}x^3\Big) + Rest$$
$$\Rightarrow f((0,1)+(h_1,h_2)) = e\Big(h_1 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_1h_2^2 - \frac{1}{6}h_1^3\Big) + Rest$$

Alle Glieder der *Rest* haben ein Potenz-Summe größer 3.

Kapitel 9

Implizite Funktionen

9.1 Einführung



In der Mathematik kommt es oft vor , dass man Gleichungen und Relationen betrachten muss die keine Funktionen sind. Zum Beispiel kann man die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

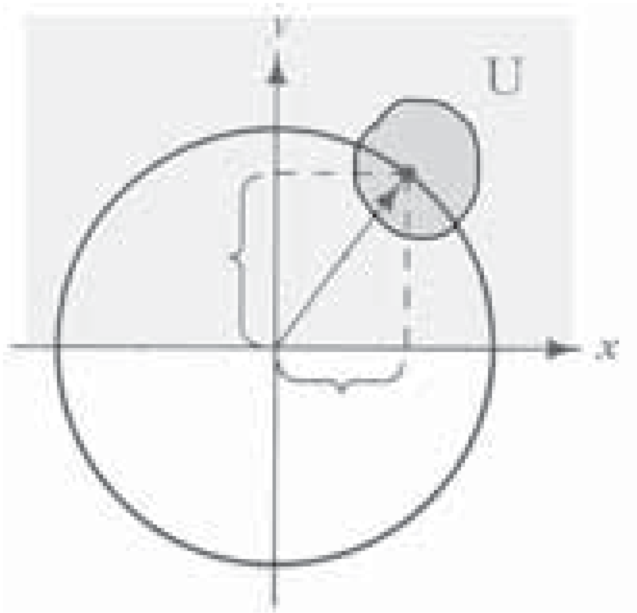
in $\mathbb{R}^2$ kann nicht als eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = f(y)$ schreiben. Wir können aber diese Gleichung meistens lösen, wenn wir uns auf eine kleinere Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ beschränken. Wenn wir

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

wählen, dann können wir ohne Informationen zu verlieren, die Relation $x^2 + y^2 = 1$ als die Funktion

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ansehen. Und das ist meistens ein praktischer Weg um eine Relation zu



studieren und daraus eine Funktion (zumindest Teilweise) zu machen. Der Grund ist, dass man mit Funktionen Gleichungen und Ungleichungen und andere Sachen einfacher lösen kann.

Nun betrachten wir dieses Problem allgemeiner für $F(x, y) = 0$, wobei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir suchen eine stetig differenzierbare Funktion f und eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ so, dass

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad \text{in } U$$

Das heißt

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{in } U$$

Meistens interessieren wir uns dafür ob dieses Problem in einer Umgebung U (egal wie klein) eines bestimmten Punktes (x_0, y_0) lösbar ist. Da wir im Allgemeinen nicht wissen wie diese Kurve in $\mathbb{R}^2$ aussieht, suchen wir U der Form

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \epsilon\}$$

wobei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Kurve und ϵ eine beliebige positive Zahl ist. Es ist meistens unwichtig welche Größe ϵ hat. Es ist nur wichtig, dass

es ein solches ϵ gibt.
Dieses Problem eine Lösung genau dann, wenn die partielle Ableitung

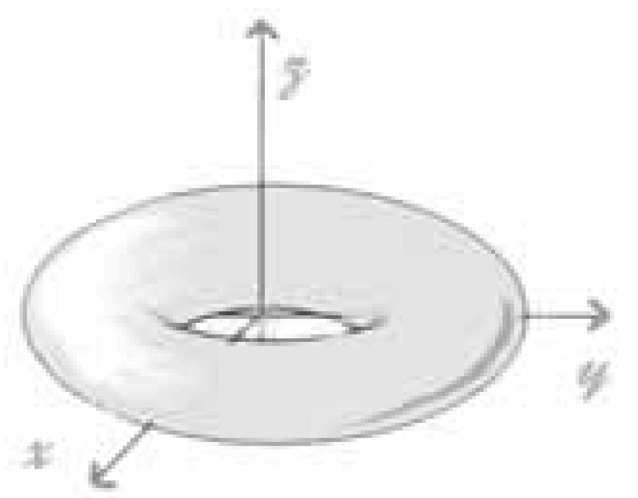
$$\partial F/\partial y\ (x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein f so, dass $F(x, f(x)) = 0$. Genau diese Idee läßt sich auf meherere Variablen verallgemeinern.

9.1.1 Beispiel 1

Hier ist eine Graphische Darstellung der impliziten Funktion

$$F(x, y, z) = \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 - 1 = 0$$



9.1.2 Beispiel 2

Sei

$$F(x, y) = e^{x-y} + x^2 - y - 1$$

Dann gilt

$$\partial F/\partial y\ (0, 0) = -2 \neq 0$$

Also gibt es eine Funktion f und einer Umgebung von $(0, 0)$ so, dass

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad \text{in } U$$

In diesem fall können wir f nicht explizit ausrechnen, aber wir können f definieren und einen Name geben wie zum Beispiel nei $\ln x, \sin x, \arctan x, \sqrt{x}, \ldots$. Und dann kann man damit besser arbeiten.

9.2 Satz über Implizite Funktionen

Betrachten wir folgendes allgemeine Problem:
Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Wir wollen etwas über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgender Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

wissen, oder anders geschrieben

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$
$$\ldots$$
$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

mit y als unbekanntem und x als bekanntem Vektor. Das heißt wir suchen eine Lösung der Form

$$y = f(x)$$

Das Problem dieser Lösung ist, dass f eine Funktion sein muss. Das heißt $f(x)$ hat einen eindeutigen Wert.

9.2.1 Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, und sei

$$F : A \to \mathbb{R}^m$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Für $(x_0, y_0) \in A$ definieren wir folgende Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

ausgewertet bei (x_0, y_0), wobei $F := (F_1, \ldots, F_m)$. Dann gilt

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists\, f \quad \text{so, dass} \quad F(x, f(x)) = 0$$

für alle x in einer Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}^n$. Weiterhin ist f auch unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f' = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

9.2.2 Beispiel

Betrachten wir folgende Gleichungssystem

$$xu + yv^2 = 0$$

$$xv^3 + y^2u^6 = 0$$

Es gilt

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}$$

An der Stelle $x = 1, y = -1, u = 1, v = -1$ gilt

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Also gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung für u, v in einer Umgebung dieses Punktes.
Andererseits gilt an der Stelle $x = 0, y = 1, u = 0, v = 0$:

$$\Delta = 0$$

Also muss es keine eindeutig bestimmte Lösung für u, v in einer Umgebung dieses Punktes geben. Der Satz über imlizite Funktionen sagt hier nichts über die Existenz einer Lösung aus.

9.3 Aufgaben

1. Untersuche, ob die Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden kann

   (a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 3$,
   $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, 0)$

   (b) $F(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 11$,
   $(x_0, y_0) = (1, 2)$

   (c) $F(x, y) = \sin x + \cos y - 1$,
   $(x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/2)$

   (d) $F(x, y) = x^2 + y^3 - 12$,
   $(x_0, y_0) = (-2, 2)$

   (e) $F(x, y) = e^x + \tan y - 1$,
   $(x_0, y_0) = (0, 0)$

   (f) $F(x, y) = xy - x^2 + y^6 + 1$,
   $(x_0, y_0) = (2, 1)$

2. Untersuche, ob die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0) nach z theoretisch gelöst werden kann

   (a) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$,
   $(x_0, y_0, z_0) = (6, -3, -2)$

   (b) $F(x, y, z) = xy + yz + xz - xyz - 4$,
   $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, -3)$

   (c) $F(x, y, z) = xye^z + z\cos(x^2 + y^2)$,
   $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

   (d) $F(x, y, z) = 2xy + e^{xz} - z\ln y - 1$,
   $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$

(e) $F(x, y, z) = xy^6 - yz^3 + z - xy - 11$,
$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$

(f) $F(x, y, z) = x + y + z + \cos xyz - 1$,
$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

3. Betrachten wir folgendes Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 20$$

$$x - xy + z = 4$$

Kann man y und z als Funktion von x in einer Umgebung von $(0, 2, 4)$ definieren?

4. Betrachten wir folgendes Gleichungssystem

$$x^3 - xyu + yv^4 = 0$$

$$u^2 - 2v^2 + x^2y = 0$$

Kann man u und v als Funktion von x und y in einer Umgebung von $(u, v, x, y) = (1, -1, 0, 2)$ definieren?

9.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

Wir müssen einfach die Determinante $\partial F/\partial y$ ausrechnen.

(a) Für $F(x,y) = x^2 + y^2 - 3$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = 2y \Rightarrow \partial F/\partial y\ (\sqrt{3},0) = 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(\sqrt{3},0)$ nicht als $y = f(x)$ geschriben werden.

(b) Für $F(x,y) = x^2 + xy + y^3 - 11$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = x + 3y^2 \Rightarrow \partial F/\partial y\ (1,2) = 1 + 3 \times 2^2 = 13 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(1,2)$ theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden.

(c) Für $F(x,y) = \sin x + \cos y - 1$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = \cos x - \sin y \Rightarrow \partial F/\partial y\ (\pi/2,\pi/2) = -1 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(\pi/2,\pi/2)$ theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden.

(d) Für $F(x,y) = x^2 + y^3 - 12$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = 3y^2 \Rightarrow \partial F/\partial y\ (-2,2) = 12 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(-2,2)$ theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden.

(e) Für $F(x,y) = e^x + \tan y - 1$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = 1/\cos^2 y \Rightarrow \partial F/\partial y\ (0,0) = 1 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden.

(f) Für $F(x,y) = xy - x^2 + y^6 + 1$ gilt

$$\partial F/\partial y\ (x,y) = x + 6y^5 \Rightarrow \partial F/\partial y\ (2,1) = 8 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(2,1)$ theoretisch als $y = f(x)$ geschriben werden.

2. ✎*Lösung* ❃

Wir müssen einfach die Determinante $\partial F/\partial z$ ausrechnen.

(a) Für $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = 2z \Rightarrow \partial F/\partial z\ (6,-3,-2) = -6 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(6,-3,-2)$ theoretisch als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

(b) Für $F(x,y,z) = xy + yz + xz - xyz - 4$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = y + x - xy \Rightarrow \partial F/\partial z\ (2,2,-3) = 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(2,2,-3)$ nicht als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

(c) Für $F(x,y,z) = xye^z + z\cos(x^2 + y^2)$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = xye^z + 1 \Rightarrow \partial F/\partial z\ (0,0,0) = 1$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ theoretisch als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

(d) Für $F(x,y,z) = 2xy + e^{xz} - z\ln y - 1$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = xe^{xz} - \ln y \Rightarrow \partial F/\partial z\ (0,1,1) = 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(0,1,1)$ nicht als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

(e) Für $F(x,y,z) = xy^6 - yz^3 + z - xy - 11$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = -3yz^2 + 1 \Rightarrow \partial F/\partial z\ (1,2,3) = -63 \neq 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(1,2,3)$ theoretisch als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

(f) Für $F(x,y,z) = x + y + z + \cos xyz - 1$ gilt

$$\partial F/\partial z\ (x,y,z) = -xy \sin xyz \Rightarrow \partial F/\partial z\ (0,0,0) = 0$$

Also kann die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ nicht als $z = f(x,y)$ geschriben werden.

3. ✎*Lösung* ❃

Um zu wissen ob folgendes Gleichungssystem

$$F_1 := x^2 + y^2 + z^2 - 20 = 0 \quad ; \quad F_2 := x - xy + z - 4 = 0$$

nach y und z in einer Umgebung von $(0,2,4)$ gelöst werden kann, berechnen wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 2y + 2xz$$

Mit $(x,y,z) = (0,2,4)$ gilt

$$\Delta = 4 \neq 0$$

Also kann die Gleichungssystem in einer Umgebung von $(0,2,4)$ theoretisch als

$$(y,z) = G(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

geschriben werden.

4. ✎*Lösung* ❃

Um zu wissen ob folgendes Gleichungssystem

$$F_1 := x^3 - xyu + yv^4 = 0 \quad ; \quad F_2 := u^2 - 2v^2 + x^2 y = 0$$

nach u und v in einer Umgebung von $(1,-1,0,2)$ gelöst werden kann, berechnen wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -xy & 4yv^3 \\ 2u & -4v \end{vmatrix} = 4xyv - 8yuv^3$$

Mit $(u, v, x, y) = (1, -1, 0, 2)$ gilt

$$\Delta = -8 \neq 0$$

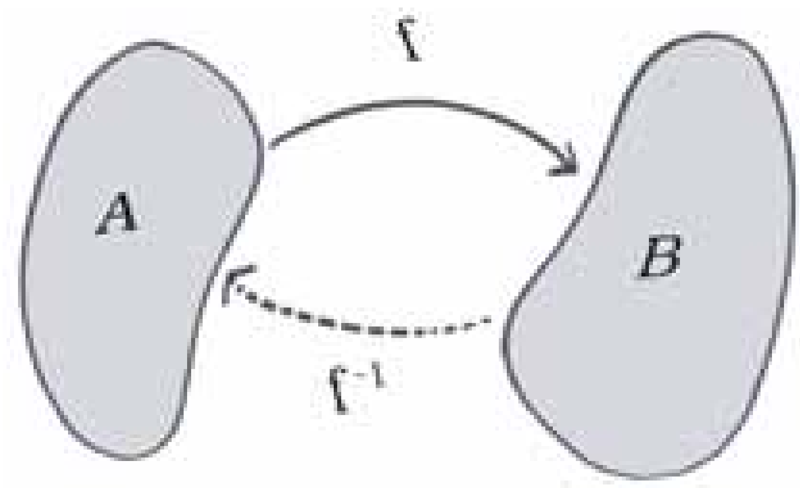
Also kann die Gleichungssystem in einer Umgebung von $(1, -1, 0, 2)$ theoretisch als

$$(u, v) = G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

geschriben werden.

Kapitel 10

Umkehrbarkeit



10.1 Einfürung

Wir lernen in der linearen Algebra, dass ein lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1$$
$$\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n$$

eine eindeutige Lösung für $x_1, \ldots, x_n$ besitzt genau dann, wenn die Matrix

$$A := (a_{ij})$$

regulär ist, das heißt, $detA \neq 0$.
Wir wollen eine Verallgemeinerung dieses Problems betrachten. Sei

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1 \\ &\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

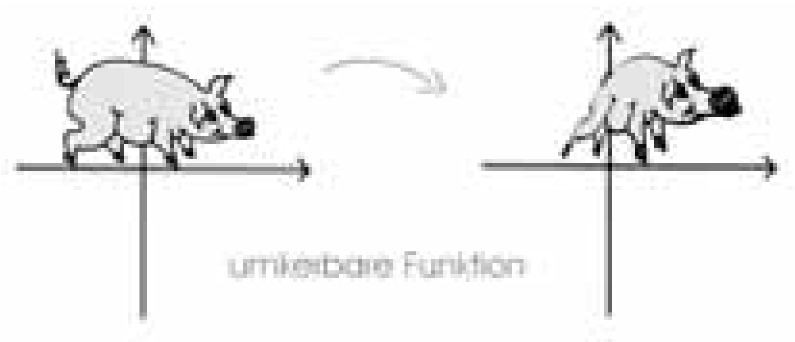
Wann hat dieses Gleichungssystem (das nicht unbedingt linear sein muss) eine eindeutige Lösung für $x_1, \ldots, x_n$?
Die Antwort ist eigentlich sehr einfach : wenn

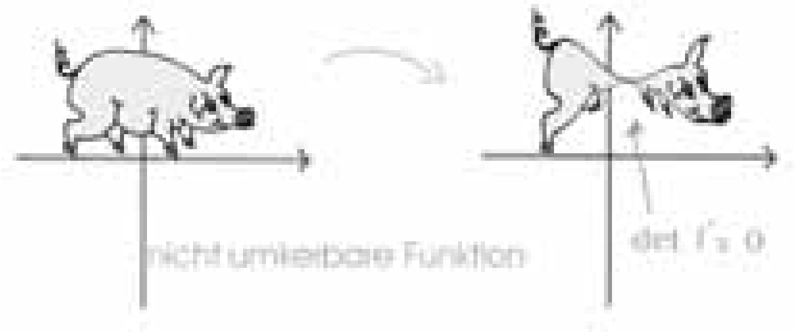
$$\det f' \neq 0$$

mit $f := (f_1, \ldots, f_n)$.
Die nächste Frage die uns in diesem Kapitel beschäftigt ist die Frage wie man die Ableitung einer Umkehrfunktion $(f^{-1})'$ allgemein berechnet, falls $\det f' \neq 0$. Die Antwort ist auch sehr einfach

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}$$

wobei diese -1 Potenz die Inverse der Matrix f' bezeichnet.





10.2 Satz über Umkehrbare Funktionen

10.2.1 Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $x_0 \in A$ und

$$f : A \to \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Falls

$$\det\, f'(x_0) \neq 0$$

dann ist die Funktion f in einer Umgebung von x_0 umkehrbar , und die Umkehrfunktion f^{-1} ist auch stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}$$

10.2.2 Bemerkung

Dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt bedeutet genau, dass die Gleichung

$$f(x) = y$$

eine eindeutige Lösung für x besitzt: $x = f^{-1}(y)$. Das heißt auch, dass die Funktion f bijektiv ist.

10.2.3 Beispiel

Sei

$$u(x,y) = f_1(x,y) = \frac{(x^4 + y^4)}{x}$$

und

$$v(x,y) = f_2(x,y) = \sin x \cos y$$

wir wollen die Punkte bestimmen, wo die Funktion $f = (f_1, f_2)$ umkehrbar ist. Der Definitionsbereich von f ist offensichtlich

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

es gilt

$$\begin{aligned}\det\, f' = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x\end{aligned}$$

Also müssen wir die Ungleichung

$$\frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x \neq 0$$

lösen. So eine Ungleichung kann man im Allgemeinen nicht lösen. Wir können aber nur für einzelne bestimmte Werte von x_0, y_0 sagen ob die Ungleichung erfüllt ist oder nicht.

Der Satz über umkehrbare Funktionen ist nützlich, weil er uns sagt ob es Lösungen zu bestimmten Gleichungen gibt, obwohl es meistens unmöglich ist einen expliziten Ausdruck für die Lösung zu berechnen.

10.3 Aufgaben

1. Welche der folgenden Funktionen hat in ihren Definitionsbereich eine Umkehrfunktion ? Berechne die Umkehrfunktion falls sie existiert.

   (a) $f : [2,6] \to [9,41] \quad ; f(x) = x^2 + 5$

   (b) $f : [-3,-1] \to [6,14] \quad ; f(x) = x^2 + 5$

   (c) $f : [-3,1] \to [6,14] \quad ; f(x) = x^2 + 5$

   (d) $f : [0,2] \to [0,16] \quad ; f(x) = x^4$

   (e) $f : [0,\pi] \to [-1,1] \quad ; f(x) = \cos x$

   (f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T(x,y) = (y,x)$

   (g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T(x,y) = (x+3y, x-y)$

   (h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T(x,y) = (y,0)$

2. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\} \to \mathbb{R}^2$

   $$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

   überall lokal umkehrbar, aber nicht global umkehrbar ist.

3. Finde den größten Definitionsbereich U mit $x_0 \in U$ so, dass die Funktion f umkehrbar ist:

   (a) $f(x) = x^2 - 7x + 1 \quad , \quad x_0 = 2$

   (b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1 \quad , \quad x_0 = 3$

   (c) $f(x) = \sin x \quad , \quad x_0 = 5$

   (d) $f(x) = \sin x + \cos x \quad , \quad x_0 = 0$

(e) $f(x) = e^{x^2} \quad , \quad x_0 = 1$

4. Sei $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$. Hat f eine Umkehrfunktion in einer Umgebung von $(0, 0)$?

5. Sei $f(x, y, z) = (x^2 z, \sin xy, e^{yz})$. Hat f eine Umkehrfunktion in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$?

6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \Big(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\Big)$$

Berechne die Umkehrfunktion von f.

7. Berechne die Ableitung der Umkehfunktion $(f^{-1})'$ an den Punkt P

(a) $f(x, y) = (x^2, y^2) \quad , \quad P = (1, 2)$

(b) $f(x, y) = (\sin xy, \cos x + \cos y), \quad P = (\pi, 1)$

(c) $f(x, y) = (x^3 y^2, x^2 y^3) \quad , \quad P = (-1, 1)$

(d) $f(x, y) = (ye^x, xy^2) \quad , \quad P = (2, 2)$

8. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$$

Berechne die Umkehfunktion f^{-1}.

10.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Für $f:[2,6]\to[9,41];\quad f(x)=x^2+5$
   gilt
   $$y=f(x)=x^2+5\Rightarrow f'(x)=2x\neq 0\quad\text{für}\quad x\in[2,6]$$
   Außerdem, ist die Funktion bijektiv, weil sie monoton wachsend ist mit
   $$f(2)=9;\quad f(6)=41$$
   Also ist die Funktion Umkehrbar und es gilt
   $$f^{-1}:[9,41]\to[2,6];\quad f^{-1}(y)=\sqrt{y-5}$$

   (b) Für $f:[-3,-1]\to[6,14]\quad ;y=f(x)=x^2+5$
   gilt
   $$f(x)=x^2+5\Rightarrow f'(x)=2x\neq 0\quad\text{für}\quad x\in[-3,-1]$$
   Außerdem, ist die Funktion bijektiv, weil sie monoton fallend ist mit
   $$f(-1)=6;\quad f(-3)=14$$
   Also ist die Funktion Umkehrbar und es gilt
   $$f^{-1}:[6,14]\to[-3,-1];\quad f^{-1}(y)=-\sqrt{y-5}$$

   (c) Für $f:[-3,1]\to[6,14]\quad ;y=f(x)=x^2+5$
   gilt
   $$f(x)=x^2+5\Rightarrow f'(x)=2x=0\quad\text{für}\quad x=0\in[-3,1]$$
   Damit ist die Funktion nicht unbedingt (global) umkehrbar. Um das zu überprüfen beobachten wir dass
   $$f(-1)=f(1)=6$$
   Also ist die Funktion nicht injektiv und damit nicht umkehrbar.

   (d) Für $f:[0,2]\to[0,16]\quad ;y=f(x)=x^4$
   ist die Ableitung gleich Null bei $x=0$, aber die Funktion ist umkehrbar mit der Umkehrfunktion
   $$f^{-1}:[0,16]\to[0,2];\quad f^{-1}(y)=\sqrt[4]{y}$$

(e) Für $f : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad ; y = f(x) = \cos x$
ist die Funktion ist umkehrbar weil

$$f(x) = x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = \sin x \neq 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \in (0, \pi)$$

und die Funktion bijektiv ist. Die Umkehrfunktion hat man schon in der Literatur untersucht und einen Namen dafür gegeben $f^{-1} =$ arccos.

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad (u, v) = T(x, y) = (y, x)$
ist umkehrbar mit

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T^{-1}(u, v) = (v, u)$$

Also $T^{-1} = T$.

(g) Für $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad (u, v) = T(x, y) = (x + 3y, x - y)$ gilt

$$\det T' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

Also ist die Funktion umkehrbar mit

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{4}, \frac{u + 5v}{4}\right)$$

(h) Die Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad T(x, y) = (y, 0)$ ist nicht umkehrbar, weil sie nicht bijektiv ist; zum Beispiel:

$$T(0, 0) = T(1, 0) = (0, 0)$$

2. ✎*Lösung* ❃

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\} \to \mathbb{R}^2$

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ist nicht global umkehrbar, weil sie nicht bijektiv ist ($f(1, 0) = f(1, 2\pi)$). Trotzdem ist sie überall lokal umkehrbar, weil

$$\det f'(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ & \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0$$

3. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x) = x^2 - 7x + 1$ gilt

$$f'(x) = 2x - 7 \neq 0 \quad \text{für } x \neq \frac{7}{2}$$

Also ist $U = (-\infty, 7/2]$ der größte Definitionsbereich mit $2 \in U$.

(b) Für $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \neq 0 \quad \text{für } x \notin \{0, 1\}$$

Also ist $U = [1, \infty)$ der größte Definitionsbereich mit $x_0 = 3 \in U$.

(c) Für $f(x) = \sin x$ gilt

$$f'(x) = \cos x \neq 0 \text{ für } x \notin \{\ldots, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots\}$$

Also ist $U = [3\pi/2, 5\pi/2]$ der größte Definitionsbereich mit $x_0 = 5 \in U$.

(d) Für $f(x) = \sin x + \cos x$ gilt

$$f'(x) = \cos x - \sin x \neq 0$$

$$\text{für } x \notin \{\ldots, -3\pi/2, \pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4, \ldots\}$$

Also ist $U = [-3\pi/2, \pi/4]$ der größte Definitionsbereich mit $x_0 = 0 \in U$.

(e) Für $f(x) = e^{x^2}$ gilt

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \neq 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

Also ist $U = [0, \infty)$ der größte Definitionsbereich mit $x_0 = 1 \in U$.

4. ✎*Lösung* ❃

Für $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ gilt

$$\det f'(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2$$

Also $\det f'(0, 0) = 0$, aber daraus können wir nicht folgern, dass die Funktion bei $(0, 0)$ nicht lokal umkehrbar ist. Jedenfalls ist die Funktion in jede Umgebung von $(0, 0)$

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < \epsilon\}$$

nicht injektiv, weil

$$f(-\epsilon/2,0) = f(\epsilon/2,0) = (\epsilon^2/4,0)$$

und damit ist die Funktion bei $(0,0)$ nicht lokal umkehrbar.

5. ✎*Lösung* ❃

Für $f(x,y,z) = (x^2 z, \sin xy, e^{yz})$ gilt

$$\det\ f'(x,y,z) = \begin{vmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ y\cos xy & x\cos xy & 0 \\ 0 & ze^{yz} & ye^{yz} \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2$$

$$\Rightarrow \det\ f'(0,0,0) = 0$$

Daraus können wir nicht folgern, dass die Funktion bei $(0,0,0)$ nicht lokal umkehrbar ist. Jedenfalls ist die Funktion in jede Umgebung von $(0,0,0)$

$$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| < 2\epsilon\}$$

nicht injektiv, weil

$$f(0,-\epsilon,\epsilon) = f(0,\epsilon,-\epsilon) = (0,0,e^{-\epsilon^2})$$

und damit ist die Funktion bei $(0,0,0)$ nicht lokal umkehrbar.

6. ✎*Lösung* ❃

Für

$$(u,v) := f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

gilt

$$u^2 = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad v^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow u = \frac{y}{x^2+y^2} = y(u^2+v^2) \quad \text{und} \quad v = \frac{x}{x^2+y^2} = x(u^2+v^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{v}{u^2+v^2}$$
$$\Rightarrow (x,y) = f^{-1}(u,v) = \left(\frac{v}{u^2+v^2}, \frac{u}{u^2+v^2}\right)$$

7. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x,y) = (x^2, y^2)$ gilt
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(b) Für $f(x,y) = (\sin xy, \cos x + \cos y)$ gilt
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos xy & x\cos xy \\ -\sin x & -\sin y \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(\pi,1) = \begin{pmatrix} -1 & -\pi \\ 0 & -\sin 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
Wir benutzen die Formel für die Inverse
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(\pi,1) = \frac{1}{\sin 1 + \pi}\begin{pmatrix} -\sin 1 & \pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Für $f(x,y) = (x^3y^2, x^2y^3)$ gilt
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(-1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$
Wir benutzen die Formel für die Inverse
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(-1,1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(d) Für $f(x,y) = (ye^x, xy^2)$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \Rightarrow (f^{-1})'(2,2) = \begin{pmatrix} 2e^2 & e^2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(-1,1) = \frac{1}{12e^2} \begin{pmatrix} 8 & -e^2 \\ -4 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

8. ✎*Lösung* ❃

Für

$$(u_1, \ldots, u_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$$

gilt $f^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = (u_n, \ldots, u_1)$. Also $f^{-1} = f$.

Kapitel 11

Extremwerte in mehreren Variablen

11.1 Lokales Maximum und Minimum

11.1.1 Einfürung

Betrachten wir eine glatte Fläche $z = f(x, y)$ (d.h. f ist differenzierbar), und suchen wir ein relatives Maximum oder Minimum z_0 bei (x_0, y_0). Also müssen die partiellen Ableitungen gleich Null sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

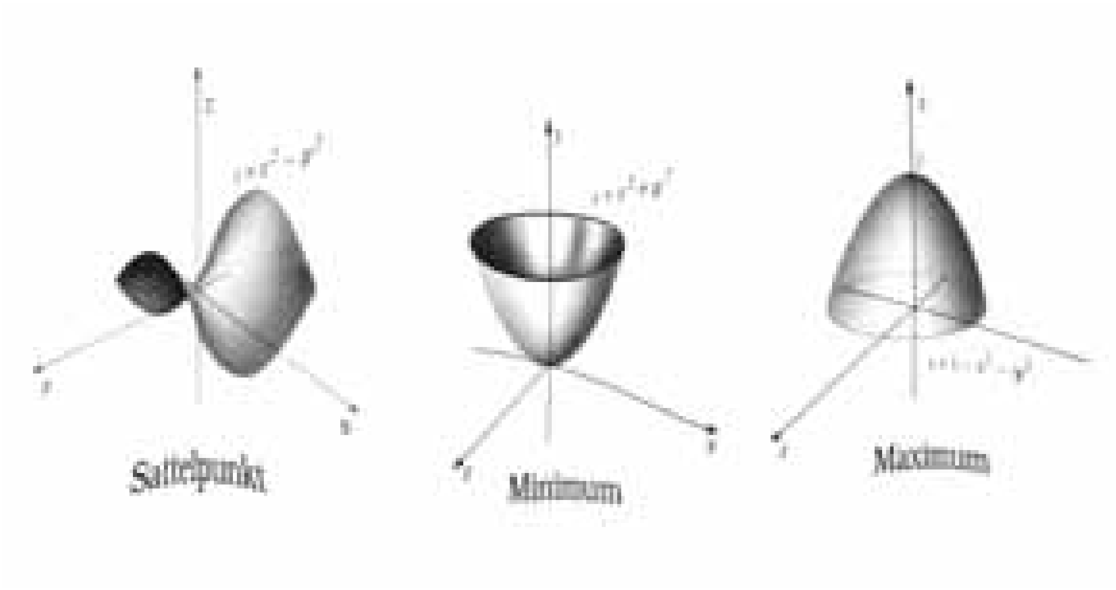
Nun gelte

$$\Delta(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$$

Dann hat $z = f(x, y)$ bei (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} &\text{ein relatives Minimum, falls} \quad && \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; > \; 0 \\ &\text{ein relatives Maximum, falls} \quad && \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; < \; 0 \end{aligned}$$

Falls $\Delta > 0$ dann haben wir weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern einen Sattelpunkt.
Falls $\Delta = 0$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ dann scheitert dieses Verfahren daran, uns irgend etwas Neues zu vermitteln.



11.1.2 Beispiel 1

Sei

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$$

Wir wollen diese Fläche auf Maxima und Minima untersuchen.
Die Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$$

sind erfüllt für $(x, y) = (0, 0)$ und $(x, y) = (-1, -1)$. Also das sind unsere **kritischen** Punkte.
Bei $(0, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

Also

$$\Delta(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 9 > 0$$

Somit haben wir bei $(0, 0)$ einen Sattelpunkt.

Bei $(-1, -1)$ gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

Also

$$\Delta(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -27 < 0$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; < \; 0$$

Somit haben wir bei $(-1, -1)$ ein Maximum.

11.1.3 Beispiel 2

Sei

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$$

Wir wollen diese Fläche auf Maxima und Minima untersuchen.
Die Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$$

sind erfüllt für $(x, y) = (2, -3)$.
Da

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 \\ &= (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 12 \end{aligned}$$

ist

$$f(2, -3) = 12$$

offensichtlich ein Minimum.

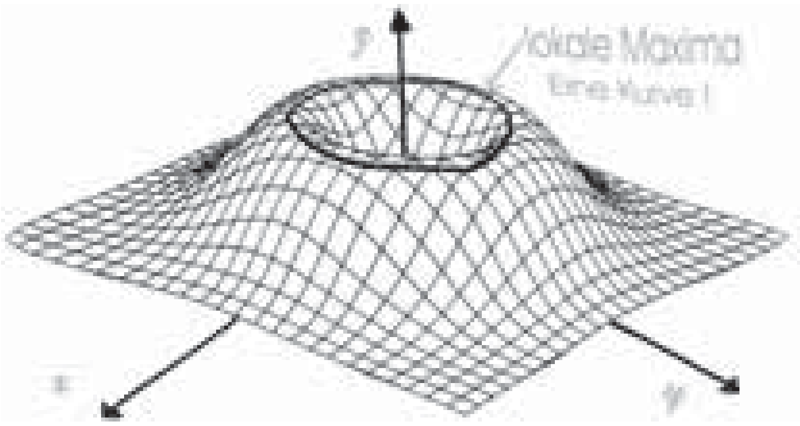
11.1.4 Beispiel 3

Manchmal gibt es unendlich viele lokalen Maxima (oder Minima) wie man bei der Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

leicht feststellen kann

Jetzt wollen wir verallgemeinern auf n-dimensionale reellwertige Funktionen. Dafür brauchen wir aber ein bisschen Vorbereitung.

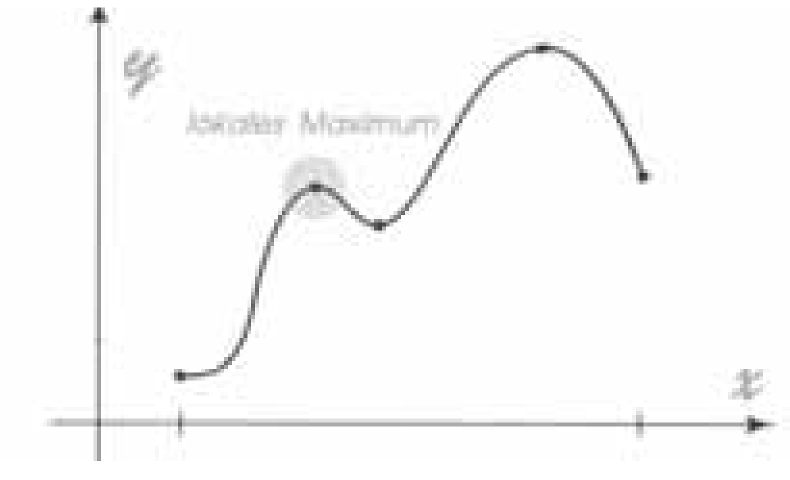


11.1.5 Definition

1. Sei

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

   Wobei A eine offene Menge ist. Falls es eine Umgebung von $x_0 \in A$ gibt, auf der $f(x_0) \geq f(x)$ für alle x in dieser Umgebung, dann nennt man x_0 einen **lokalen Maximumspunkt** und $f(x_0)$ einen **lokalen Maximumswert**. Analog, definiert man **lokalen Minimumspunkt** und **lokalen Minimumswert**.



2. Ein Punkt heißt **Extremum**, falls die Funktion ein lokales Maximum oder lokales Minimum an diesem Punkt hat.

3. Ein Punkt x_0 heißt **kritisch** falls $\bigtriangledown f(x_0) = 0$.

11.2 Die Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist für reelle Funktionen mit mehreren Variablen wie eine zweite Ableitung.

11.2.1 Definition (Hesse-Matrix)

Sei

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und A eine offene Menge ist. Dann definiert man die **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $x_0 \in A$ durch

$$H(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

11.3 Definitheit einer Matrix

11.3.1 Definition (Positiv-Negativ Definitheit)

Sei

$$Q := \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

eine $(n \times n)-$Matrix. Dann heißt die Funktion

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$Q(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$$

die **quadratische Form** der Matrix Q.
Man nennt Q :

- **positiv definit** falls $Q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$
- **positiv semidefinit** falls $Q(x) \geq 0$ für alle $x \neq 0$
- **negativ definit** falls $Q(x) < 0$ für alle $x \neq 0$
- **negativ semidefinit** falls $Q(x) \leq 0$ für alle $x \neq 0$
- **indefinit** falls keiner dieser Fälle vorliegt

11.3.2 Beispiele

- Die quadratische Form $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$ ist positiv definit.
- Die quadratische Form $Q(x_1, x_2) = -4x_1^2 - 7x_2^2$ ist negativ definit.
- Die quadratische Form $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 5x_2^2$ ist indefinit.

11.3.3 Satz (Definitheitskriterium 1)

Sei

$$Q := \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

eine $(n \times n)-$Matrix, mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ Eigenwerte. Dann ist

- Q positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$
- Q semi-positiv definit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$
- Q negativ definit, wenn $\lambda_i < 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$
- Q semi-negativ definit, wenn $\lambda_i \leq 0$ für $i = 1, 2, \dots, m$
- Q indefinit, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt.

11.3.4 Satz (Definitheitskriterium 2)

Sei

$$Q := \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

eine $(n \times n)-$Matrix. Dann ist:

- Q positiv definit, wenn folgende Determinanten positiv sind.

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & \dots & q_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Q ist negativ definit, wenn

$$(-1)^i \begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & \dots & q_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Q ist indefinit, wenn

$$\begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & \dots & q_{ii} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

  und keine der vorigen Fälle vorliegt.

11.4 Berechnung von Lokalen Extrema

11.4.1 Satz (Notwendiges Kriterium)

Sei

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und A eine offene Menge ist. Dann gilt

$$x_0 \text{ ist eine lokale Extremstelle von } f \Rightarrow \bigtriangledown f(x_0) = 0$$

11.4.2 Satz (Hinreichendes Kriterium)

Sei

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und A eine offene Menge ist, $x_0 \in A$ mit :

$$\bigtriangledown f(x_0) = 0$$

und sei $H(x_0)$ die Hesse-Matrix von f in x_0. Dann gilt:

- $H(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum
- $H(x_0)$ negativ definit $\Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Maximum
- $H(x_0)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat in x_0 einen Sattelpunkt
- $H(x_0)$ semidefinit $\Rightarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

11.4.3 Beispiel 1

Wir suchen den Punkt in der Ebene

$$2x - y + 2z = 16$$

der dem Nullpunkt am nächsten liegt. Es sei (x, y, z) der gesuchte Punkt. Dann ist das Quadrat seines Abstands vom Nullpunkt

$$d = x^2 + y^2 + z^2$$

Es gilt

$$2x - y + 2z = 16 \Rightarrow y = 2x + 2z - 16$$

Also folgt

$$d = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$$

Die kritische Punkten müssen folgende Gleichungen erfüllen

$$\frac{\partial d}{\partial x} = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial z} = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$$

Daraus folgt

$$5x + 4z = 32$$

$$4x + 5z = 32$$

$$\Rightarrow x = z = \frac{32}{9}$$

Also gibt es nur einen kritischen Punkt. Da bekannt ist, dass ein Punkt existiert, für den d minimal ist, ist dieser Punkt

$$\left(\frac{32}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{32}{9}\right)$$

der gesuchte Punkt.

11.4.4 Beispiel 2

Wir wollen zeigen, dass ein Quader bei konstanter Oberfläche S sein maximales Volumen V als Würfel annimmt. Seien x, y, z die Seitenlängen. Wir müssen zeigen, dass $x = y = z$. Es gilt

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{und} \quad S(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$$

Die zweite Beziehung kann nach z aufgelöst werden und in die erste eingesetzt werden, wodurch V zu einer Funktion von nur zwei Variablen x und y wird. Wir ziehen es hier vor, diesen Schritt zu vermeiden, indem wir z einfach als Funktion von x und y betrachten. Dann ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yx + xy\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

Ausserdem gilt

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\Big(y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\Big)$$
$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\Big(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\Big)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y};$$

die Bedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yx - \frac{xy(y+z)}{x+y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x+z)}{x+y} = 0$$

reduzieren sich auf

$$y^2(z-x) = 0 \qquad , \qquad x^2(z-y) = 0$$

daraus folgt $\quad x = y = z \quad$ was zu zeigen war.

11.4.5 Beispiel 3

Wir wollen das Volumen des größten Rechtecks, das in ein Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eingesetzt werden kann bestimmen. Es sei (x, y, z) der Eckpunkt im ersten Oktanten. Dann ist

$$V(x, y, z) = 8xyz$$

Betrachte z als eine Funktion der unabhängigen Variablen x und y, die durch die Ellipsoidgleichung definiert wird. Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum sind

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

Aus der Ellipsoidgleichung erhält man

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Eliminiert man $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ dann gilt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\Big(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\Big) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\Big(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\Big) = 0$$

und schließlich

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Aus der Ellipsoidgleichung erhält man jetzt

$$x = a\frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad y = b\frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad z = c\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ist unser einziger kritischer Punkt, und damit auch unser Maximumspunkt (anschaulich offensichtlich). Das größte Volumen ist also $V = \big(8\frac{\sqrt{3}}{9}\big)abc$.

11.5 Aufgaben

1. Finde die quadratische Form folgende Matrizen
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. Untersuche folgende Matrizen auf Definitheit
   - $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. Finde alle kritischen Punkte der Funktionen

   (a) $f(x,y) = yx - 5x^2 + 1$

   (b) $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 8$

   (c) $f(x,y) = yx - 1$

   (d) $f(x,y) = e^{xy}$

   (e) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

   (g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

   (h) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

(i) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z$

(j) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

4. Finde die lokalen Extrema der Funktionen

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x + 3y$

   (c) $f(x, y) = yx - 1$

   (d) $f(x, y) = e^{xy}$

   (e) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{y}$

   (f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

   (g) $f(x, y, z) = \dfrac{\sin z}{x^2}$

5. Finde die lokale Extrema der folgenden Funktion

$$f(x, y) = (2 + \cos x)(\sin y)$$

11.6 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} q_{ij} x_i x_j = q_{1,1} x_1^2 + q_{1,2} x_1 x_2 + q_{2,1} x_2 x_1 + q_{2,2} x_2^2$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ gilt

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} q_{ij} x_i x_j = q_{1,1} x_1^2 + q_{1,2} x_1 x_2 + q_{2,1} x_2 x_1 + q_{2,2} x_2^2$$
$$= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + x_2^2 = -x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ gilt

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 8x_2^2 = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$$

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) = & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} q_{ij} x_i x_j \\ & = q_{1,1} x_1^2 + q_{1,2} x_1 x_2 + q_{1,3} x_1 x_3 \\ & +q_{2,1} x_2 x_1 + q_{2,2} x_2^2 + q_{2,3} x_2 x_3 \\ & +q_{3,1} x_3 x_1 + q_{3,2} x_3 x_2 + q_{3,3} x_3^3 \end{aligned}$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_3x_1 + 3x_3x_2 + 4x_3^3$$
$$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^3$$

- Für $Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} q_{ij} x_i x_j$$
$$= 2x_1^2 + 5x_1x_3 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 5x_3x_1 + 3x_3x_2 + x_3^3$$
$$= 2x_1^2 + 10x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^3$$

2. ✎*Lösung* ❃

- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, weil

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 5 > 0$$

- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -37 \neq 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = -3 \neq 0$$

- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist semidefinit, weil $a_{11} = 0$.
- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -26 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 5 > 0$$

- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist indefinit, weil

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9-1) + (3-7) + 7(1-21) = 24 - 4 - 140 = -120 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 3 > 0$$

- Die Matrix $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist semidefinit, weil $a_{11} = 0$ ist.
- Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist positiv definit weil

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 4 = 20 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 = 5 > 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 1 > 0$$

3. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x, y) = yx - 5x^2 + 1$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \Big(y - 10x, x\Big) = (0, 0) \Rightarrow y - 10x = 0 \quad \text{und} \quad x = 0$$

$$\Rightarrow (0, 0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

(b) Für $f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 8$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \Big(2x - 4, 4y\Big) = (0, 0) \Rightarrow 2x - 4 = 0 \quad \text{und} \quad 4y = 0$$

$$\Rightarrow (2, 0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

(c) Für $f(x, y) = yx - 1$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \Big(y, x\Big) = (0, 0) \Rightarrow y = 0 \quad \text{und} \quad x = 0$$

$$\Rightarrow (0, 0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

(d) Für $f(x,y) = e^{xy}$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \Big(ye^{xy}, xe^{xy}\Big) = (0,0) \Rightarrow ye^{xy} = 0 \quad \text{und} \quad xe^{xy} = 0$$

$$\Rightarrow (0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

(e) Für $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) =$$

$$\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\ ,\ \cos(x+y) - \cos(x-y)\Big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(x+y) - \cos(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow \Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big) + \Big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\Big) = 0$$

und

$$\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big) - \Big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \quad \text{und} \quad x-y = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

$$\Rightarrow (x+y) + (x-y) = \Big(\frac{\pi}{2} + k_1\pi\Big) + \Big(\frac{\pi}{2} + k_2\pi\Big)$$

und

$$(x+y) - (x-y) = \Big(\frac{\pi}{2} + k_1\pi\Big) - \Big(\frac{\pi}{2} + k_2\pi\Big)$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi + \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

und

$$2y = \frac{\pi}{2} + k_1\pi - \frac{\pi}{2} - k_2\pi$$

$$\Rightarrow 2x = (k_1 + k_2 + 1)\pi$$

und

$$2y = (k_1 - k_2)\pi$$

Da k_1 und k_2 beliebig aus $\mathbb{Z}$ gewählt werden können, kann man $\alpha := (k_1 + k_2 + 1)$ und $\beta := (k_1 - k_2)$ auch beliebig aus $\mathbb{Z}$ wählen, und sogar unabhängig voneinander.

$$\Rightarrow 2x = \alpha\pi \quad \text{und} \quad 2y = \beta\pi$$

$$\Rightarrow x = \alpha\pi/2 \quad \text{und} \quad y = \beta\pi/2$$

$$\Rightarrow \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad x = \alpha\pi/2 \quad \text{und} \quad y = \beta\pi/2\Big\}$$

ist die Menge der kritischen Punkten.

(f) Für $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ gilt:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\Big) = (0,0) \Rightarrow \frac{1}{y} = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{y^2} = 0$$

Also hat die Funktion f keine kritische Punkte, weil $1/y$ stets ungleich Null ist.

(g) Für $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ gilt:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{-2y^2}{(x^2+y^2+1)^2}\Big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-2x}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

(h) Für $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ gilt:

$$\nabla f(x,y) = \Big(e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z}\Big) = (0,0,0) \Rightarrow e^{x+y+z} = 0$$

Also hat die Funktion f keine kritische Punkte, weil e^{x+y+z} stets ungleich Null ist.

(i) Für $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z$ gilt:

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(\cos x, \cos y, \cos z\Big) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos y = \cos z = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} + k_3\pi$$

Also

$$\Big\{\Big(\frac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad \frac{\pi}{2} + k_3\pi\Big) \in \mathbb{R}^3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\Big\}$$

ist die Menge der kritischen Punkten von f.

(j) Für $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

$$\Rightarrow (0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

4. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \Big(2x-2, 2y-2\Big) = (0,0) \Rightarrow 2x-2 = 2y-2 = 0$$

$$\Rightarrow (1,1) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von f:

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit, weil

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 2 > 0$$

Also handelt es an der Stelle $(1,1)$ um ein Minimum von f.

(b) Für $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x + 3y$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \Big(3x^2 - 3, 3y^2 + 3\Big) = (0,0)$$

Also hat die Funktion f keine kritische Punkte, weil $3y^2 + 3$ stets ungleich Null ist. Damit besitzt f keine lokalen Extrema.

(c) Für $f(x,y) = yx - 1$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Rightarrow (0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt.}$$

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von f:

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit, weil $a_{11} = 0$ ist. Also können wir mit der Hesse-Matrix nichts über diese kritischer Punkt wissen. Allerdings, kann man leicht sehen, dass es um ein sattelpunkt handelt, indem man x und y leicht um den Punkt (0,0) variiert. Für $x > 0, y > 0$ ist $f(x,y) > f(0,0)$. Für $x > 0, y < 0$ ist $f(x,y) < f(0,0)$. Damit kann an der Stelle $(0,0)$ kein lokales Maximum oder Minimum geben.

(d) Für $f(x,y) = e^{xy}$ gilt:

$$\triangledown f(x,y) = \left(ye^{xy}, xe^{xy}\right) = (0,0) \Rightarrow ye^{xy} = 0 \quad \text{und} \quad xe^{xy} = 0$$

$$\Rightarrow (0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von f:

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & xye^{xy} \\ \\ xye^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit, weil $a_{11} = 0$ ist. Also können wir mit der Hesse-Matrix nichts über diese kritischer Punkt wissen. Allerdings, kann man leicht sehen, dass es um ein sattelpunkt handelt, indem man x und y leicht um den Punkt (0,0) variiert. Für $x > 0, y > 0$ ist $f(x,y) > f(0,0)$. Für $x > 0, y < 0$ ist $f(x,y) < f(0,0)$. Damit kann an der Stelle $(0,0)$ kein lokales Maximum oder Minimum geben.

(e) Für $f(x,y) = \dfrac{x+y}{y}$ gilt:

$$\triangledown f(x,y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right) = (0,0) \Rightarrow \frac{1}{y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-x}{y^2} = 0$$

Da $1/y$ stets ungleich Null ist, gibt es für f keine kritische Punkte und damit keine lokalen Extrema.

(f) Für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ gilt:

$$\triangledown f(x,y,z) = \left(2x, 2y, 2z\right) = (0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\Rightarrow (0,0,0) \quad \text{ist der einzige kritische Punkt von } f.$$

Ohne die Hesse-Matrix zu berechnen können wir schon erraten dass es an der Stelle $(0,0,0)$ um ein Minimum der Funktion f handelt, weil $x^2+y^2+z^2 \geq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(g) Für $f(x,y,z) = \dfrac{\sin z}{x^2}$ gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \left(\frac{-2\sin z}{x^3}, 0, \frac{\cos z}{x^2}\right) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sin z}{x^3} = \frac{\cos z}{x^2} = 0$$

Da $-2\sin z/x^3$ stets ungleich Null ist, gibt es für f keine kritische Punkte und damit keine lokalen Extrema.

5. ✎*Lösung* ❃

Für

$$f(x,y) = (2+\cos x)(\sin y)$$

gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \Big(-\sin x \sin y, (2+\cos x)(\cos y)\Big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \sin x \sin y = (2+\cos x)(\cos y) = 0$$

Da $(2+\cos x)$ stets ungleich Null ist, folgt

$$\sin x \sin y = \cos y = 0$$

Da $\sin y$ und $\cos y$ nicht gleichzeitig Null werden können, folgt

$$\sin x = \cos y = 0$$

$$\Rightarrow x = k_1\pi \quad \text{und} \quad y = (k_2+1/2)\pi$$

Also die Menge der kritischen Punkte ist

$$\Big\{(k_1\pi, (k_2+1/2)\pi) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\Big\}$$

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von f:

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \\ -\sin x \cos y & -(2+\cos x)(\sin y) \end{pmatrix}$$

Falls k_1 gerade ist, und k_2 gerade ist gilt:

$$\cos x = \cos(k_1\pi) = 1 \quad \text{und} \quad \sin x = \sin(k_1\pi) = 0$$

$$\cos y = \cos((k_2 + 1/2)\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \sin y = \sin((k_2 + 1/2)\pi) = 1$$

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit und damit handelt es sich hier um ein Maximum.

Falls k_1 ungerade ist, und k_2 gerade ist gilt:

$$\cos x = \cos(k_1\pi) = -1 \quad \text{und} \quad \sin x = \sin(k_1\pi) = 0$$

$$\cos y = \cos((k_2 + 1/2)\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \sin y = \sin((k_2 + 1/2)\pi) = 1$$

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist indefinit und damit handelt es sich hier um einen Sattelpunkt.

Falls k_1 gerade ist, und k_2 ungerade ist gilt:

$$\cos x = \cos(k_1\pi) = 1 \quad \text{und} \quad \sin x = \sin(k_1\pi) = 0$$

$$\cos y = \cos((k_2 + 1/2)\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \sin y = \sin((k_2 + 1/2)\pi) = -1$$

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit und damit handelt es sich hier um ein Minimum.

Falls k_1 ungerade ist, und k_2 ungerade ist gilt:

$$\cos x = \cos(k_1\pi) = -1 \quad \text{und} \quad \sin x = \sin(k_1\pi) = 0$$

$$\cos y = \cos((k_2 + 1/2)\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \sin y = \sin((k_2 + 1/2)\pi) = -1$$

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit und damit handelt es sich hier um ein Maximum.

Kapitel 12

Extremwerte mit Nebenbedingungen

12.1 Langrange Multiplikatoren

12.1.1 Problem

Wir suchen ein lokales Maximum oder Minimum einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Voraussetzung das $g(x, y) = 0$.
Man kann direkt die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y lösen

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow y = G(x)$$

und dann den Extrempunkt von der Funktion

$$F(x) := f(x, G(x))$$

suchen oder allgemeiner eine parametrisierung

$$\gamma(t) := \big(x(t), y(t)\big)$$

der Kurve $g(x, y) = 0$ finden und dann den Extrempunkt von der Funktion

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

aufsuchen. Allerdings ist diese Vorgehen unpraktisch, weil es meistens schwer ist, eine geeignete Parametrisierung zu finden.

12.1.2 Lagrange Idee

Eine notwendige Bedingung dafür, ob der Punkt (x_0, y_0) ein Extrempunkt von $f(x, y)$ mit der Nebenbedingung $g(x_0, y_0) = 0$ ist, ist

$$\exists\ \lambda \quad \text{so,dass} \quad \text{grad}\ \Big(f(x,y) - \lambda g(x,y)\Big) = 0$$

12.1.3 Beispiel

Sei

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

Wir suchen das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := y - x - 1 = 0$$

Es gilt

$$\text{Grad } f(x,y) = (2x, 2t)$$

und

$$\text{Grad } g(x,y) = (-1,1)$$

Damit folgt

$$\text{Grad } \Big(f(x_0,y_0) - \lambda g(x_0,y_0) \Big) = (2x_0, 2y_0) - \lambda(-1,1) = 0$$

Also haben wir zwei Gleichungen

$$2x_0 + \lambda = 0$$

$$2y_0 - \lambda = 0$$

Eliminieren wir λ, so folgt

$$x_0 = -y_0$$

Nun gilt wegen der Nebenbedingung

$$g(x_0,y_0) := y_0 - x_0 - 1 = 0 \Rightarrow 2x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2}$$

Also wissen wir dass

$$(x_0,y_0) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big)$$

ein kritischer Punkt ist. Dieser Punkt (x_0,y_0) kann kein Maximum sein, weil die Funktion f beliebig großsein kann. Außerdem kann (x_0,y_0) kein Sattelpunkt sein, weil der Punkt auf der eindimensionalen Kurve $g(x,y)$ liegt. Also ist (x_0,y_0) ein Minimum.

12.2 Warnung

Mit Lagrange Idee (oder Lagrange Multiplikatoren) kann man nicht wissen ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum, oder ob es überhaupt um ein Extrempunkt handelt. Um dies zu wissen, muss man geometrische oder andere analytische Argunmente geben. Es gibt leider kein Allgemeines Verfahren.

12.3 Aufgaben

1. Berechne die Extrema der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung
   (a) $f(x,y,z) = x + z \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1$
   (c) $f(x,y) = xy \quad ; \quad 4x^2 + y^2 = 4$
   (d) $f(x,y,z) = 8xyz \quad ; \quad 16x^2 + 4x^2 + 9z^2 = 144$
2. Finde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ so, dass die Funktion
   $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
   unter der Bedingung
   $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
   minimal wird.
3. Finde das Minimum der Funktion
   $$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
   unter der Bedingung
   $$2x + 3y + 4z = 30$$
4. Finde die minimale Strecke zwischen $(0,0)$ und der Kurve $x^2y = 16$
5. Finde den nächsten Punkt und den weitesten Punkt zwischen $(0,0)$ und der Fläche $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$
6. Finde den Maximums- und den Minimumswert der Funktion
   $$f(x,y,z) = x + y + z$$
   unter den Nebenbedingungen
   $$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{und} \quad x + z = 1$$

7. Finde den Maximums- und den Minimumswert der Funktion

$$f(x, y, z) = xy + 2z$$

unter den Nebenbedingungen

$$x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 24$$

12.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Um die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x + z$ unter die Nebenbedingung $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ zu berechnen, benutzen wir die Idee von Lagrange. Es gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \big(1,0,1\big) \quad \text{und} \quad \bigtriangledown\, g(x,y,z) = \big(2x,2y,2z\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} &\bigtriangledown f(x,y,z) + \lambda \bigtriangledown g(x,y,z) = (0,0,0) \\ \Rightarrow\ &\big(1,0,1\big) + \lambda \bigtriangledown \big(2x,2y,2z\big) = (0,0,0) \\ \Rightarrow\ &\bigtriangledown\big(2x\lambda + 1, 2y\lambda, 2z\lambda + 1\big) = (0,0,0) \\ \Rightarrow\ &2x\lambda + 1 = 2y\lambda = 2z\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

Mit der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

können wir diese Gleichungssystem nach x, y, z folgendermaßen lösen:

$$2y\lambda = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{weil} \quad \lambda \neq 0$$

Weiterhin

$$2x\lambda + 1 = 2z\lambda + 1 = 0 \Rightarrow x = z$$

Setzen wir $z = x$ und $y = 0$ ein in

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

Damit haben wir zwei kritischen Punkte

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \quad \text{und} \quad \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)$$

Um zu wissen ob es um Maxima oder um Minima bei solche kritischen Punkte handelt, brauchen wir nur die Werte von f an solche Stellen miteinander zu vergleichen. Es gilt:

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Also haben wir ein Maximum bei $\big(1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2}\big)$ und ein Minimum bei $\big(-1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2}\big)$.

(b) Um die Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter die Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ zu berechnen, benutzen wir die Idee von Lagrange. Es gilt:

$$\triangledown f(x, y) = \big(2x, -2y\big) \quad \text{und} \quad \triangledown g(x, y) = \big(2x, 2y\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\triangledown f(x, y) + \lambda \triangledown g(x, y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \big(2x, -2y\big) + \lambda \triangledown \big(2x, 2y\big) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow 2x + 2\lambda x = 0 \quad \text{und} \quad -2y + 2\lambda y = 0$$

Also entweder ist $x = 0$ oder $\lambda = -1$.
Falls $x = 0$, dann gilt

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Weiterhin

$$-2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

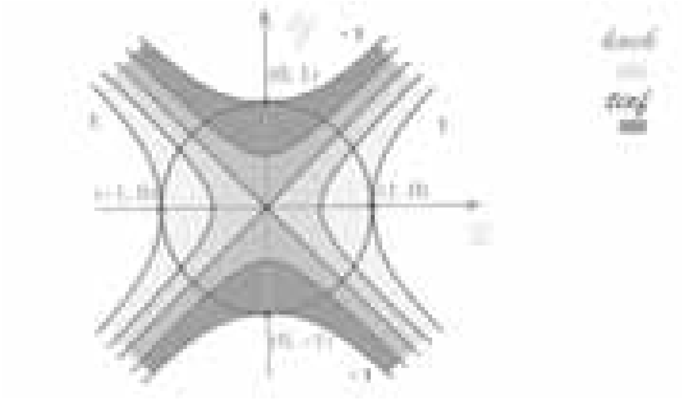
Mit $\lambda = 1$ folgt:

$$y = \pm 1$$

Also $(0, 1)$ und $(0, -1)$ sind kritische Stellen. Falls $\lambda = -1$, folgt:

$$x = \pm 1 \quad \text{und} \quad y = 0$$

Also $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ sind kritische Stellen. Um zu wissen ob



es sich um Maxima oder Minima handelt, können wir die Niveau Kurven der Funktion f betrachten. Damit sieht man, dass bei $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ ist $f(x, y) = 1$ ein Maximumwert auf der Einheitskreis, und bei $(0, 1)$ und $(0, -1)$ ist $f(x, y) = -1$ ein Minmumwert auf der Einheitskreis.

(c) Um die Extrema der Funktion $f(x,y) = xy$ unter die Nebenbedingung $g(x,y) := 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ zu berechnen, benutzen wir die Idee von Lagrange. Es gilt:

$$\bigtriangledown f(x,y) = \big(y, x\big) \quad \text{und} \quad \bigtriangledown g(x,y) = \big(8x, 2y\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x,y) + \lambda \bigtriangledown g(x,y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \big(y, x\big) + \lambda \bigtriangledown \big(8x, 2y\big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow y = -8x\lambda, \quad x = -2y\lambda, \quad 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2(-8x\lambda)\lambda = 16x\lambda^2$$

$$\Rightarrow x - 16x\lambda^2 = 0 \Rightarrow x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

Falls $\lambda = \pm 1/4$ dann gilt

$$y = -8x\lambda = -8x(\pm 1/4) \Rightarrow y = \pm 2x$$

Mit der Nebenbedingung folgt

$$4x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 + (\pm 2x)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 8x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad y = \pm 2x = \pm\sqrt{2}$$

Also bekommen wir 4 kritischen Punkten

$$\Big(\frac{+\sqrt{2}}{2}, +\sqrt{2}\Big), \quad \Big(\frac{+\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\Big), \quad \Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}, +\sqrt{2}\Big), \quad \Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\Big)$$

Falls $x = 0$ folgt nach der Nebenbedingung

$$4x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad \text{oder} \quad y = -2$$

Also bekommen wir zusätzliche 2 kritischen Punkten

$$\big(0, +2\big) \quad \text{und} \quad \big(0, -2\big)$$

Nun vergleichen wir die Werte von f an der kritische Stellen

$$f\Big(\frac{+\sqrt{2}}{2}, +\sqrt{2}\Big) = 1 \quad \text{und} \quad f\Big(\frac{+\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\Big) = -1$$

$$f\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}, +\sqrt{2}\Big) = -1 \quad \text{und} \quad f\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\Big) = 1$$

$$f\big(0, +2\big) = 0 \quad \text{und} \quad f\big(0, -2\big) = 0$$

Damit kann man leicht sehen, dass f einen Maximumwert von 1 und ein Minimumwert von -1 an den kritischen Stellen hat.

(d) Um die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = 8xyz$ unter die Nebenbedingung $g(x, y, z) := 16x^2 + 4x^2 + 9z^2 - 144 = 0$ zu berechnen, benutzen wir die Idee von Lagrange. Es gilt:

$$\bigtriangledown f(x, y) = \big(8yz, 8xz, 8xy\big) \quad \text{und} \quad \bigtriangledown g(x, y, z) = \big(32x, 8y, 18z\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x, y, z) + \lambda \bigtriangledown g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \big(8yz, 8xz, 8xy\big) + \lambda \bigtriangledown \big(32x, 8y, 18z\big) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow 8yz = -32x\lambda, \quad 8xz = -8y\lambda, \quad 8xy = -18z\lambda,$$

$$16x^2 + 4x^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow 24xyz = -32x^2\lambda - 8y^2\lambda - 18z^2\lambda = -2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

Setzen wir dies in $16x^2 + 4x^2 + 9z^2 - 144 = 0$ ein dann folgt:

$$\Rightarrow 24xyz = -288\lambda \Rightarrow xyz = -12\lambda$$

$$\Rightarrow 8xyz = -32x^2\lambda \Rightarrow 8(-12\lambda) = -32x^2\lambda$$

$$\Rightarrow 96\lambda - 32x^2\lambda = 0 \Rightarrow 32\lambda(3 - x^2) = 0$$

Also $\lambda = 0$ oder $x = \sqrt{3}$. Für $\lambda = 0$ folgt

$$xyz = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} y = 0 \quad \text{oder} z = 0$$

an solche Stellen ist $f(x, y, z) = 0$.
Falls $\lambda \neq 0$ dann folgt

$$x = \pm\sqrt{3}, \quad y = \pm 2\sqrt{3}, \quad z = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

und an diese Stelle ist $f(x, y, z) = \pm 64\sqrt{3}$. Also nimmt f ihre Maximum genau an den Stellen

$$\Big(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}\Big) \quad \text{und} \quad \Big(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$$

und ihre Minimum genau an den Stellen

$$\Big(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}\Big) \quad \text{und} \quad \Big(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$\Big(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big) \quad \text{und} \quad \Big(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, \frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$\Big(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big) \quad \text{und} \quad \Big(\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big)$$

2. ✎*Lösung* ❃

Für die Funktion

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

unter der Bedingung

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) := -1 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

gilt

$$\bigtriangledown F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n\big)$$
$$\bigtriangledown g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(1, 1, \dots, 1\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \bigtriangledown g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$$
$$\Rightarrow \bigtriangledown\big(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n\big) + \lambda \bigtriangledown \big(1, 1, \dots, 1\big) = (0, 0, \dots, 0)$$
$$\Rightarrow 2x_1 + \lambda = 0, \quad 2x_2 + \lambda = 0, \quad \dots 2x_n + \lambda = 0,$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_1 = 1 \Rightarrow nx_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{n}$$

Damit ist $\big(1/n, 1/n, \dots, 1/n\big)$ eine kritische Stelle. Diese einzige kritische Stelle muss dass globale Minimum von F unter der Nebenbedingung sein, weil die Funktion keine globale Maximum unter der Nebenbedingung hat.

3. Für die Funktion

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$$

unter die Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

gilt

$$\bigtriangledown f(x, y, z) = \big(8x, 2y, 10z\big)$$
$$\bigtriangledown g(x, y, z) = \big(2, 3, 4\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x, y, z) + \lambda \bigtriangledown g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \big(8x, 2y, 10z\big) + \lambda\big(2, 3, 4\big) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow 8x = -2\lambda, \quad 2y = -3\lambda, \quad 10z = -4\lambda \quad \text{und } 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$\Rightarrow 4x = \frac{2y}{3} = \frac{5z}{2}$$
$$\Rightarrow y = 6x \quad \text{und} \quad z = \frac{8x}{5}$$

Setzen wir $y = 6x$ und $z = \frac{8x}{5}$ in $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ ein, dann gilt

$$2x + 18x + \frac{32x}{5} - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{11}, \quad y = \frac{30}{11}, \quad z = \frac{8}{11}$$

Diese einzige kritische Stelle muss dass globale Minimum von f unter der Nebenbedingung sein, weil die Funktion keine globale Maximum unter der Nebenbedingung hat.

4. ✎*Lösung* ❋

Für die

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter der Bedingung

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 30 = 0$$

gilt

$$\bigtriangledown f(x, y, z) = \big(2x, 2y + 2z\big)$$
$$\bigtriangledown g(x, y, z) = \big(2, 3, 4\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x,y,z) + \lambda \bigtriangledown g(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \bigtriangledown\big(2x, 2y+2z\big) + \lambda \bigtriangledown \big(2,3,4\big) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow 2x + 2\lambda = 0, \quad 2y + 3\lambda = 0, \quad 2z + 4\lambda = 0, \quad 2x + 3y + 4z - 30 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\lambda, \quad y = -\frac{3}{2}\lambda, \quad z = -2\lambda$$

$$\Rightarrow -2\lambda - \frac{9}{2}\lambda - 8\lambda = 30$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{60}{21} = -\frac{20}{7} \Rightarrow x = \frac{20}{7}, \quad y = \frac{30}{7}, \quad z = \frac{40}{7}$$

Damit ist $\big(20/7, 30/7, 40/7\big)$ eine kritische Stelle. Diese einzige kritische Stelle muss dass globale Minimum von F unter der Nebenbedingung sein, weil die Funktion keine globale Maximum unter der Nebenbedingung hat.

5. ✎*Lösung* ❃

Um die minimale Strecke zwischen $(0,0)$ und der Kurve $x^2y = 9$ zu bestimmen, reicht es die Funktion

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2y - 16 = 0$$

zu minimieren. Es gilt

$$\bigtriangledown f(x,y) = \big(2x, 2y\big)$$

$$\bigtriangledown g(x,y) = \big(2xy, x^2\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x,y) + \lambda \bigtriangledown g(x,y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \bigtriangledown\big(2x, 2y\big) + \lambda \bigtriangledown \big(2xy, x^2\big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda y = 1$$

Wir können $x = 0$ ausschließen, weil sonst $x^2y - 16 = 0$ nicht mehr gilt. Also folgt

$$0 = 2y^2 + \lambda y x^2 = 2y^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm y\sqrt{2} \Rightarrow 2y^3 = 16 \Rightarrow y = 2$$

Es gibt also zwei kritische Stellen

$$(+2\sqrt{2}, 2) \quad \text{und} \quad (-2\sqrt{2}, 2)$$

Für beide haben wir $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}$, also dies ist die minimale Strecke.

6. ✎*Lösung* ❋

Um den nächsten Punkt und den weitesten Punkt zwischen $(0, 0)$ und der Fläche $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ zu finden, betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

Also wir möchten die Extrema von f finden unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$$

Es gilt

$$\triangledown f(x, y) = \big(2x, 2y\big)$$

$$\triangledown g(x, y) = \big(34x + 12y, 12x + 16y\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\triangledown f(x, y) + \lambda \triangledown g(x, y) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \triangledown\big(2x, 2y\big) + \lambda \triangledown \big(34x + 12y, 12x + 16y\big) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow 2x + \lambda(34x + 12y) = 0, \quad 2y + \lambda(12x + 16y) = 0$$

Mit der Nebenbedingung $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$, kann man λ eliminieren:

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y}$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$$

Mit der Nebenbedingung $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$ folgt

$$25x^2 = 100 \Rightarrow x = +2 \quad \textbf{oder} \quad x = -2$$

$$\Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \quad \textbf{oder} \quad y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(y+4) = 0 \quad \textbf{oder} \quad (y+1)(y-4) = 0$$
$$\Rightarrow y = \pm 1 \quad \textbf{oder} \quad y = \pm 4$$

Damit bekommen wir vier kritischen Punkte

$$(2,1), \quad (-2,-1), \quad (2,-4), \quad (-2,4)$$

Nun berechnen wir die Abstand $\sqrt{x^2+y^2}$ für jede kritischen Punkt:

$$\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \quad \textbf{und} \quad \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$
$$\sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{18} \quad \textbf{und} \quad \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{18}$$

Also sieht man, dass der nächste Punkt zu $(0,0)$ ist $(2,1)$ oder $(-2,-1)$, und die weiteste ist $(2,-4)$ oder $(-2,4)$.

7. ✎*Lösung* ❃

Für

$$f(x,y,z) = x+y+z$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) := x^2+y^2-2 = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x,y,z) := x+z-1 = 0$$

gilt

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \big(1,1,1\big)$$
$$\bigtriangledown g_1(x,y,z) = \big(2x,2y,0\big)$$
$$\bigtriangledown g_2(x,y,z) = \big(1,0,1\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x,y,z) + \lambda_1 \bigtriangledown g_1(x,y,z) + \lambda_2 \bigtriangledown g_2(x,y,z) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \big(1,1,1\big) + \lambda_1\big(2x,2y,0\big) + \lambda_2\big(1,0,1\big) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow 1+2\lambda_1 x+\lambda_2 = 0, \quad 1+2\lambda_1 y = 0, \quad 1+\lambda_2 = 0$$

Mit den Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ können wir dieses Gleichungssystem lösen:

$$\lambda_2 = 1, \quad 2x\lambda_1 = 0, \quad 2y\lambda_1 = 1$$
$$\Rightarrow x = 0, \quad y = \pm\sqrt{2}, \quad z = 1$$

Also die kritischen Punkte sind

$$(0,+\sqrt{2},1) \quad \text{und}(0,-\sqrt{2},1)$$

Damit kann man leicht sehen, dass an der Stelle $(0,+\sqrt{2},1)$ ist f maximal und an der Stelle $(0,-\sqrt{2},1)$ ist f minimal.

8. ✎*Lösung* ❋

Um den Maximums- und den Minimumswert der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + 2z$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) := x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 = 24$$

benutzen wir die Idee von Lagrange. Es gilt

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \big(y, x, 2\big)$$
$$\bigtriangledown g_1(x,y,z) = \big(1, 1, 1\big)$$
$$\bigtriangledown g_2(x,y,z) = \big(2x, 2y, 2z\big)$$

Nach Lagrange gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\bigtriangledown f(x,y,z) + \lambda_1 \bigtriangledown g_1(x,y,z) + \lambda_2 \bigtriangledown g_2(x,y,z) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \big(y,x,2\big) + \lambda_1\big(1,1,1\big) + \lambda_2\big(2x,2y,2z\big) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow y + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \quad x + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \quad 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0,$$

Also folgt

$$(x + \lambda_1 + 2\lambda_2 y) - (y + \lambda_1 + 2\lambda_2 x) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(1-2\lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 1/2 \quad \text{oder} \quad x = y$$

Falls $\lambda_2 = 1/2$ gilt

$$x + \lambda_2 + y = 0 \quad \text{und} \quad 2 + \lambda_2 + z = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 2 + z \Rightarrow z = -1 \quad \text{und} \quad x + y = 1$$

aus dies und zusammen mit den Nebenbedingungen folgt

$$x = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \quad z = -1$$

oder

$$x = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}, \quad z = -1$$

An beide solche Stellen ist

$$f(x,y,z) = -13$$

Falls $x = y$ dann folgt

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = -4$$

oder

$$x = -2, \quad y = -2, \quad z = 4$$

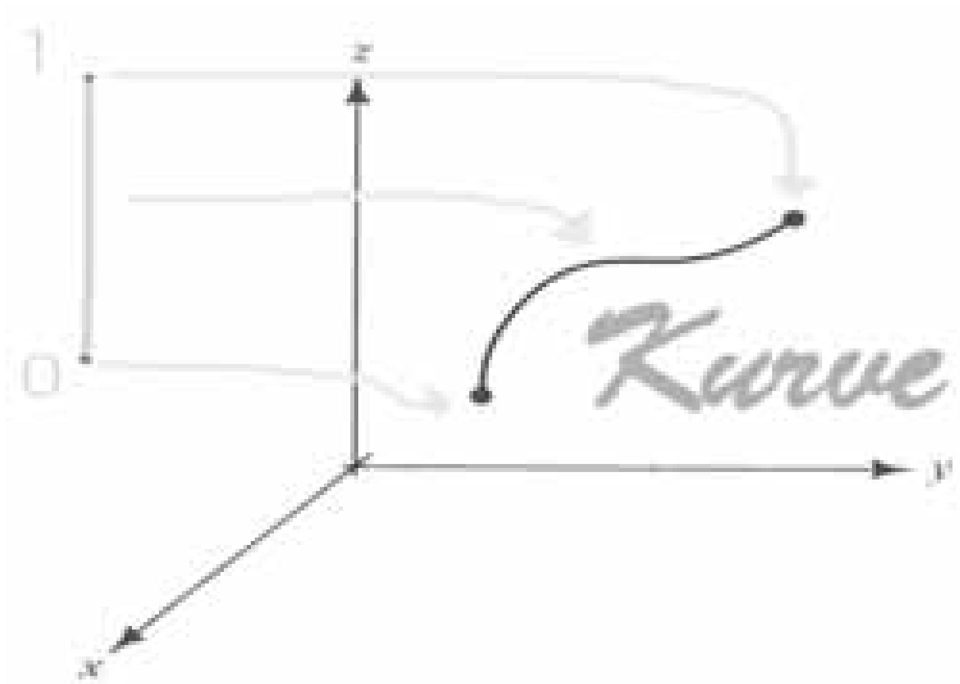
Weiterhin gilt

$$f(2, 2, -4) = -4 \quad \text{und} \quad f(-2, -2, 4) = 12$$

Also kann man daraus schließen, dass f unter die Nebenbedingungen $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ einen Maximumwert von 12 und einen Minimumwert von -13 annimmt.

Kapitel 13

Kurven



13.1 Beispiele von Kurven

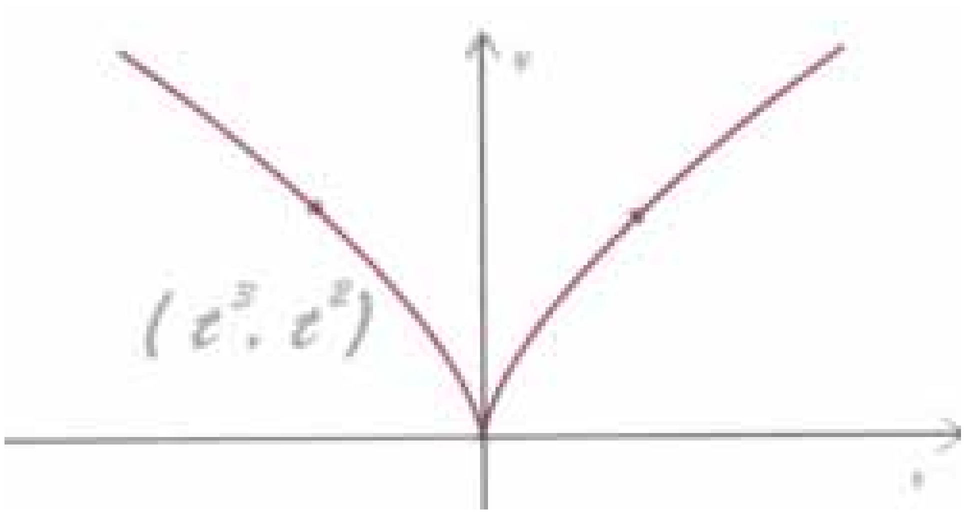
Ein glatte Kurve in $\mathbb{R}^3$ kann man parametrisch mit

$$(x, y, z) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$$

beschreiben, wobei $f(t), g(t), h(t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, und t als Zeit aufgefasst wird.

13.1.1 Warnung

Manchmal ist die parametrisierung stetig differenzierbar, aber die Kurve sieht nicht glatt aus!



13.1.2 Beispiel

Ein Teilchen bewegt sich entlang der Kurve

$$r = (x, y, z) = (4\cos t, 4\sin t, 6t)$$

Dann kann man die Geschwindigkeit v berechnen

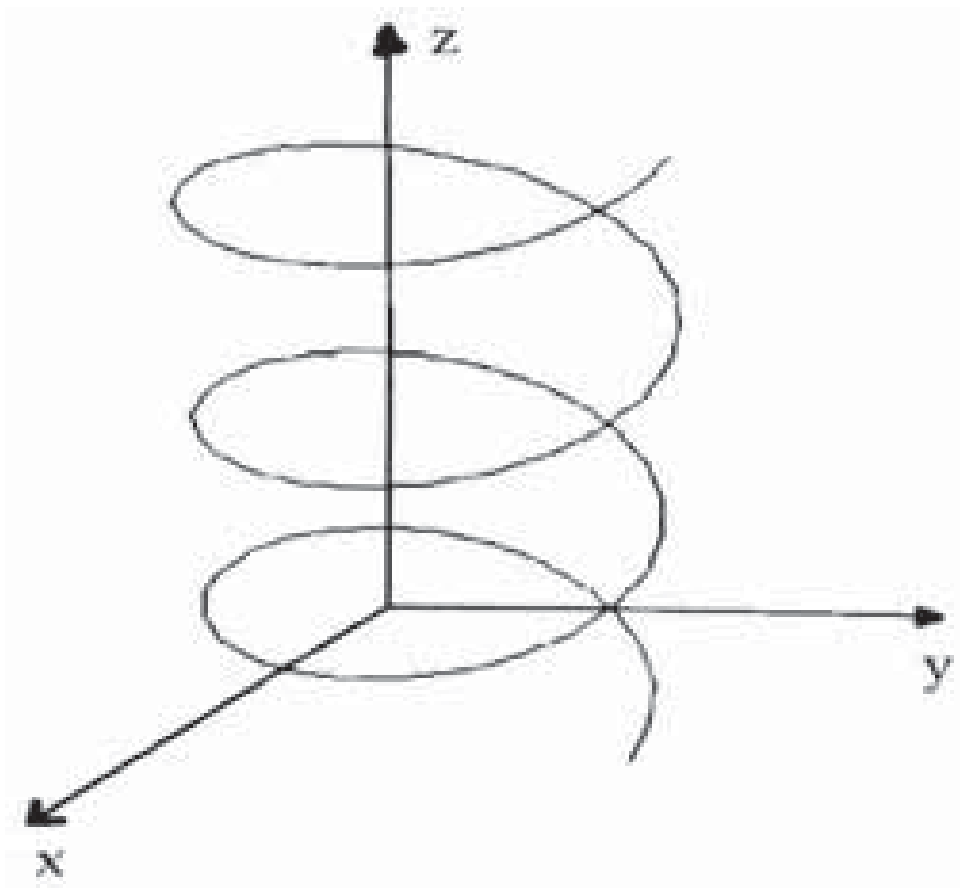
$$v := \frac{dr}{dt} = (-4\sin t, 4\cos t, 6)$$

Also ist der Betrag der Geschwindigkeit für $t = 0$

$$\|v\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

13.2 Parametrisierung von Kurven

Kurven können sehr pathologisch sein. Zum Beispiel gibt es stetige Kurven, die durch jeden Punkt eines Würfel durchgehen (die Piano Kurven). Die Vorstellung solche Kurven ist schwer. Um solche Kurven auszuschließen betrachten wir nur stetig differenzierbare Kurven.



13.2.1 Warnung

1. Differenzierbare Kurven sind nicht unbedingt glatt. Sei

$$x(t) := (t^3, t^2)$$

   eine unendlich oft differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Die Kurve ist im Nullpunkt nicht glatt, wie man aus dem Graphen sofort erkennen kann.

2. Beide folgenden parametrischen Kurven stellen dieselbe Bildmenge dar:

$$x(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \quad , \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$x(t) = (-t, \sqrt{2 - t^2}) \quad , \qquad -1 \leq t \leq 1$$

   solche Kurven heißen äquivalent.

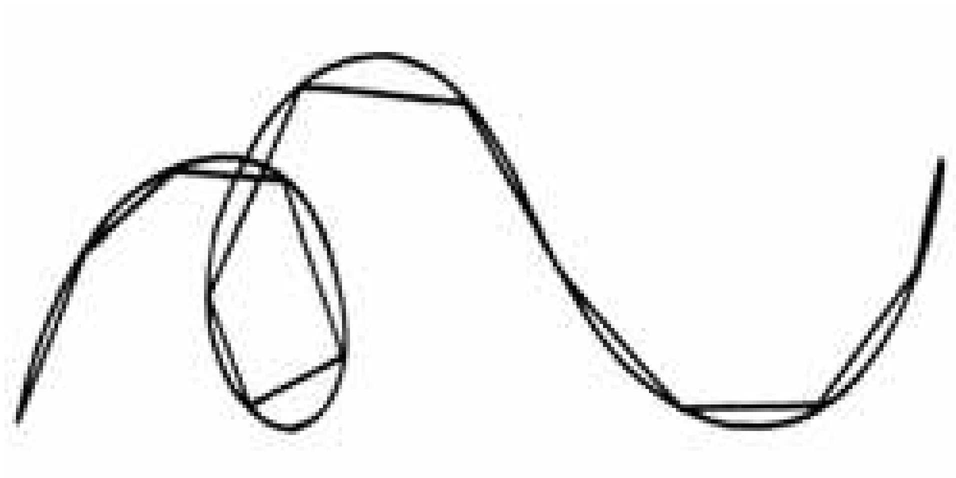
13.2.2 Definition

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt α **äquivalent** zu β, falls es einen Diffeomorphismus (eine differenzierbare Funktion mit differenzierbarer Umkehrung) $h : [c, d] \to [a, b]$ gibt so, dass

$$\alpha(h(x)) = \beta(x)$$

für alle $x \in [c, d]$

13.3 Bogenlänge einer Kurve



Die Bogenlänge einer Kurve kann man als Integral berechnen, und ist unabhängig von der Parametrisierung.

13.3.1 Satz

1. Die Bogenlänge der Kurve $\gamma : x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ mit $t \in [a, b]$ ist

$$Länge(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2}\, dt$$

2. Die Bogenlänge der Kurve $\gamma : y = y(x)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $x \in [a, b]$ ist

$$Länge(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

3. Die Bogenlänge der Kurve $\gamma : r = r(\varphi)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi \in [a, b]$ wobei r und φ die Polarkoordinaten sind, ist

$$Länge(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

13.4 Aufgaben

1. Finde eine Parametrisierung der folgenden Kurven in $\mathbb{R}^2$:
   (a) Der Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(1, 2)$.
   (b) Der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$.
   (c) Die Strecke zwischen $(0, 0)$ und $(3, 3)$.
   (d) Die Strecke zwischen $(-1, 2)$ und $(2, 3)$.
   (e) Der Ellipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$
   (f) Der Graph der Funktion $y = x^3 - x^2 + x - 1 \quad$ für $0 \leq x \leq 3$
2. Zeige, dass folgende Parametrisierungen äquivalent sind
$$\alpha(t) = (t, t + 1) \text{ mit } 1 \leq t \leq 4$$
$$\beta(s) = (s^2, s^2 + 1) \text{ mit } 1 \leq s \leq 2$$
3. Zeige, dass folgende Parametrisierungen äquivalent sind
$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t) \text{ mit } 0 \leq t \leq \pi/2$$
$$\beta(s) = (\cos s, \sin s) \text{ mit } -\pi/2 \leq s \leq 0$$
4. Finde eine Parametrisierung der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^3$:
   (a) Die Gerade zwischen $(0, 0, 0)$ und $(3, 3, 3)$.
   (b) Die Gerade zwischen $(-1, 2, 1)$ und $(2, 3, 4)$.
   (c) Die Schnittmenge von $y = x^2$ und $z = x^3$, für $0 \leq x \leq 1$.
5. Zeige, dass folgende Parametrisierungen äquivalent sind
$$\alpha(t) = \left(e^t, e^{2t}, e^{4t}\right) \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$
$$\beta(s) = (2 + s, (2 + s)^2, (2 + s)^4) \text{ mit } -1 \leq s \leq e - 2$$
6. Berechne die Bogenlänge folgender Kurven:
   (a) $\gamma(t) = (t, t^2) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1.$
   (b) $\gamma(t) = (t, t) \quad \text{mit} \quad -1 \leq t \leq 1.$
   (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   (d) $\gamma(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   (e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

13.5 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Der Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(1, 2)$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (3\cos t + 1, 3\sin t + 2) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)$$

   (b) Der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (\cos t, \sin t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)$$

   (c) Die Strecke zwischen $(0, 0)$ und $(3, 3)$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (t, t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 3]$$

   (d) Die Strecke zwischen $(-1, 2)$ und $(2, 3)$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (t, t/3 + 7/3) \quad \text{mit} \quad t \in [-1, 2]$$

   (e) Der Ellipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (3\cos t, 2\sin t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi)$$

   (f) Der Graph der Funktion $y = x^3 - x^2 + x - 1 \quad$ für $0 \leq x \leq 3$ hat die Parametrisierung

   $$(x, y) = (t,\ t^3 - t^2 + t - 1) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 3]$$

2. ✎*Lösung* ❃

   Für folgende Parametrisierungen

   $$\alpha(t) = (t, t + 1) \text{ mit } 1 \leq t \leq 4$$

   $$\beta(s) = (s^2, s^2 + 1) \text{ mit } 1 \leq s \leq 2$$

   gilt

   $$\alpha \circ h = \beta$$

   mit $h : [1, 2] \to [1, 4]$ definiert durch $h(x) = x^2$. Es ist leicht zu sehen, dass h und h^{-1} stetig differenzierbar sind; also ist h ein Diffeomorhismus. Damit sind α und β Äquivalent.

3. ✎*Lösung* ❃

   Für folgende Parametrisierungen
   $$\alpha(t) = (\sin t, \cos t) \text{ mit } 0 \leq t \leq \pi/2$$
   $$\beta(s) = (\cos s, \sin s) \text{ mit } -\pi/2 \leq s \leq 0$$
   mit $h : [-\pi/2, 0] \to [0, \pi/2]$ definiert durch $h(x) = x + \pi/2$, gilt
   $$\alpha \circ h(x) = \alpha(h(x)) = \alpha(x + \pi/2)$$
   $$= (\sin x + \pi/2, \cos x + \pi/2) = (\cos x, \sin x) = \beta(x)$$
   Es ist leicht zu sehen, dass h und h^{-1} stetig differenzierbar sind; also ist h ein Diffeomorhismus. Damit sind α und β Äquivalent.

4. ✎*Lösung* ❃

   (a) Die Gerade zwischen $(0, 0, 0)$ und $(3, 3, 3)$ hat die Parametrisierung
   $$(x, y, z) = (t, t, t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 3]$$
   (b) Die Gerade zwischen $(-1, 2, 1)$ und $(2, 3, 4)$ hat die Parametrisierung
   $$(x, y, z) = (3t - 1, t + 2, 3t + 1) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 1]$$
   (c) Die Schnittmenge von $y = x^2$ und $z = x^3$, für $0 \leq x \leq 1$ hat die Parametrisierung
   $$(x, y, z) = (t, t^2, t^3) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 1]$$

5. ✎*Lösung* ❃

   Für folgende Parametrisierungen
   $$\alpha(t) = \left(e^t, e^{2t}, e^{4t}\right) \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$
   $$\beta(s) = (2 + s, (2 + s)^2, (2 + s)^4) \text{ mit } -1 \leq s \leq e - 2$$
   mit $h : [0, 1] \to [-1, e - 2]$ definiert durch $h(x) = e^x - 2$, gilt
   $$\beta \circ h(x) = \beta(h(x)) = \beta(e^x - 2)$$
   $$= (2 + e^x - 2, (2 + e^x - 2)^2, (2 + e^x - 2)^4) = \left(e^x, e^{2x}, e^{4x}\right) = \alpha(x)$$
   Es ist leicht zu sehen, dass h und $h^{-1}(y) = \ln(y + 2)$ stetig differenzierbar sind; also ist h ein Diffeomorhismus. Damit sind α und β Äquivalent.

6. ✎*Lösung* ❋

(a) Für $\gamma(t) = (t, t^2) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
Länge(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(t)' + (t^2)'}dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2t)^{1/2} d(1+2t) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+2t)^{1/2+1}}{1/2+1}\Bigg]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2}\right] = \frac{\sqrt{27}-1}{3}
\end{aligned}
$$

(b) Für $\gamma(t) = (t, t) \quad \text{mit} \quad -1 \le t \le 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
Länge(\gamma) &= \int_{-1}^1 \sqrt{(t)' + (t)'}\, dt \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{1+1}dt \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{2}dt \\
&= \sqrt{2}\int_{-1}^1 dt \\
&= \sqrt{2}t\Big]_{-1}^1 = 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(c) Für $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 2\pi$ gilt

$$
\begin{aligned}
Länge(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi
\end{aligned}
$$

(d) Für $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$ mit $0 \le t \le 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned} \textit{Länge}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 3^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4^2 + 3^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 5\, dt = 10\pi \end{aligned}$$

(e) Für $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ mit $0 \le t \le \pi$ gilt

$$\begin{aligned} \textit{Länge}(\gamma) &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt \end{aligned}$$

Man kann eine Integrationstabelle benutzen um dieses Integral zu berechnen. Es gilt die Formula

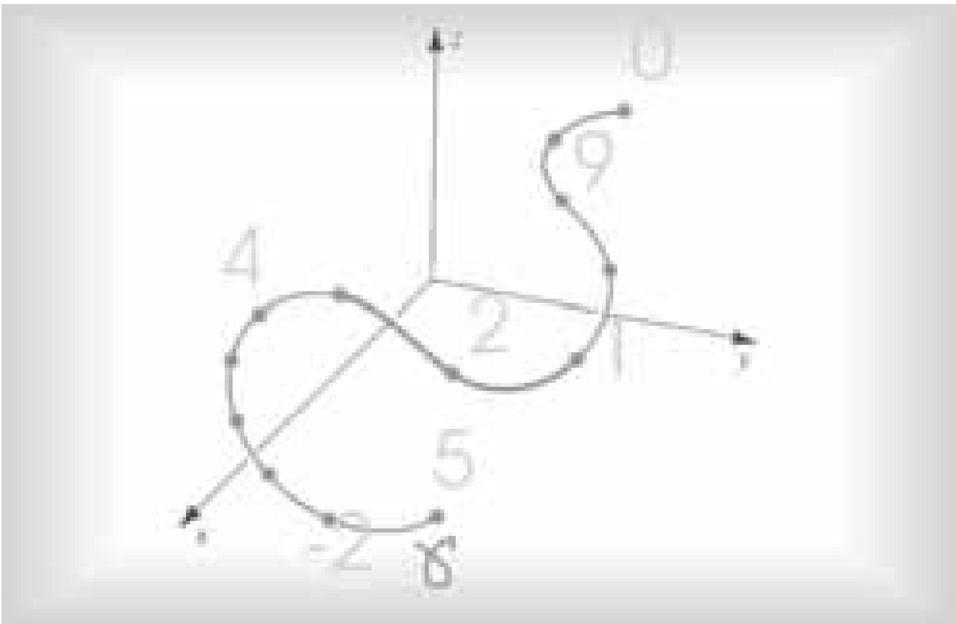
$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \textit{Länge}(\gamma) &= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 + (\frac{1}{2})^2} + (\frac{1}{2})^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + (\frac{1}{2})^2})\right)\Bigg]_0^{\pi} \\ &= \pi\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{4}\ln\sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{4}\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

Kapitel 14

Kurvenintegrale



14.1 Kurvenintegral über einem Skalarfeld

Manchmal möchte man das Gewicht einer Kurve γ berechnen. Das ist nichts anders als die Bogenlänge mal die Dichte wenn die Kurve überall dieselbe Dichte hat. Falls die Dichte $f(x, y, z)$ aber variiert mit den Punkten $(x, y, z) \in \gamma$, dann müss man sie in die Gewichtsrechnung mit einbeziehen. Dafür folgende Definition.

14.1.1 Definition

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man mit

$$\int_\gamma f(x)ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

das **Kurvenintegral** des Skalarfeldes f längs γ.

14.1.2 Beispiel

Sei γ die Helix

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

und sei

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Dann gilt

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d(\cos t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(\sin t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dt)}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

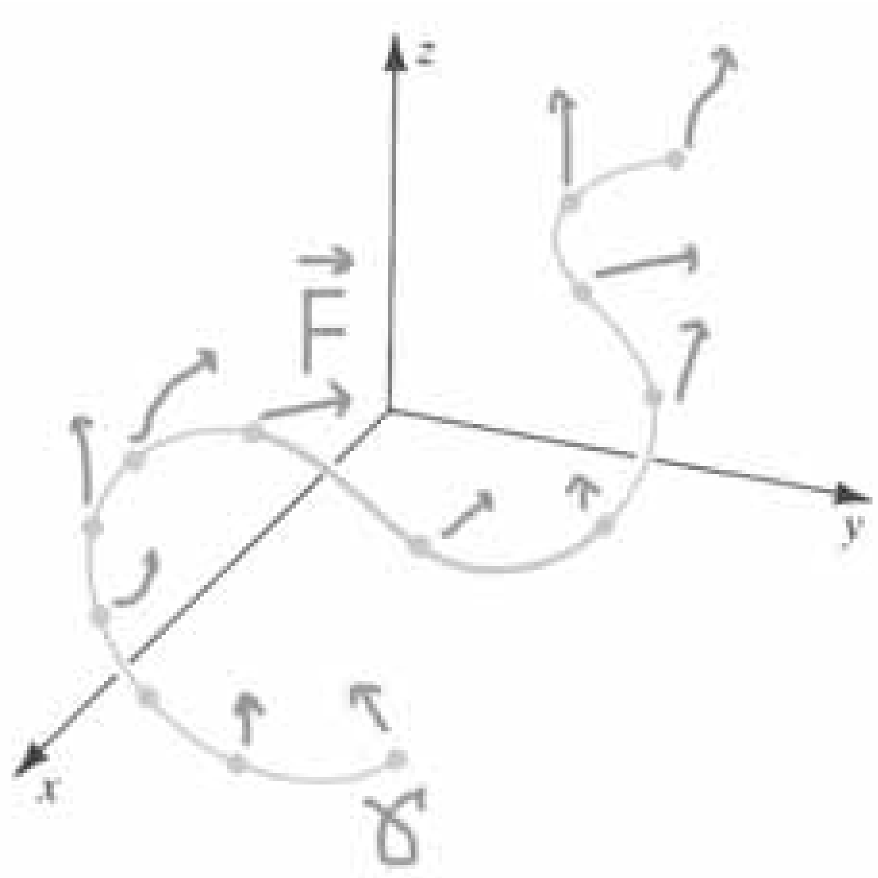
Weiterhin gilt

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2$$

Also

$$\int_\gamma f(x)ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}dt$$

$$= \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(3 + 4\pi^2)$$



14.2 Kurvenintegral über einem Vektorfeld

In der Physik definiert man die Arbeit W durch ein Skalarprodukt aus der Kraft $\vec{F}$ und der Strecke $\vec{x}$

$$W := \vec{F}.\vec{x}$$

Falls sich aber die Kraft mit der Strecke ändert $\vec{F}(\vec{x})$, dann muss man über die Kurve γ integrieren

$$W := \int_\gamma \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$$

Also hat man dieses Integral in der Mathematik genauer untersucht, und daher folgende Definition.

14.2.1 Definition

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg im $\mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, dann definiert man

$$\int_\gamma f(x)ds := \int_a^b \langle f(\gamma_(t)), \gamma'(t)\rangle \; dt$$

das **Kurvenintegral** des Vektorfeldes f längs γ

14.2.2 Beispiel

Sei $F(x_1, x_2) = (x_2^2,\ 2x_1x_2)$. Wir wollen das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(x)ds$$

berechnen, wobei $\gamma(t) = (t,t)$ mit $t \in [0,1]$. Es gilt

$$\int_\gamma F(x)ds = \int_0^1 (t^2, 2t^2).(1,1)^T \; dt = \int_0^1 3t^2 dt = [t^3]_0^1 = 1$$

14.3 Aufgaben

1. Berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes f längs γ:

   (a) $f(x,y) = 2xy, \quad \gamma(t) = (-t^3, 1-t^3) \quad , \quad -1 \leq t \leq 2$

   (b) $f(x,y) = x(1+4y), \quad \gamma(t) = (t, t^2) \quad , \quad 3 \leq t \leq 5$

2. Berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes f längs γ:

   (a) $f(x,y,z) = (x,y,z), \quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   (b) $f(x,y,z) = (x,-y,z), \quad \gamma(t) = (t,t,t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

   (c) $f(x,y,z) = (x,-y,z), \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

3. Sei $f(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$. Berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes f längs γ falls:

   (a) γ ist die Strecke zwischen $(0,0,0)$ und $(1,1,1)$

   (b) γ ist der Kreis in der $yz-$Ebene mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$

   (c) γ ist die Parabel $z = x^2, y = 0$ zwischen $(-1,0,1)$ und $(1,0,1)$

   (d) γ ist die Strecke zwischen $(-1,0,1)$ und $(1,0,1)$

4. Berechne das Kurvenintegral des Skalarfeldes f längs γ:

   (a) $f(x,y,z) = x+y+z$
   $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   (b) $f(x,y,z) = \cos z$
   $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   (c) $f(x,y,z) = x \cos z$
   $\gamma(t) = (t, t^2, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

14.4 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Für $f(x,y) = 2xy$
   $\gamma(t) = (-t^3, 1-t^3) \quad , \quad -1 \leq t \leq 2$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_{-1}^{2} f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} 2(-t^3)(1-t^3) \, \|(-3t^2, -3t^2)\| \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} 2(-t^3)(1-t^3) \, \sqrt{(-3t^2)^2 + (-3t^2)^2} \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} 2(-t^3)(1-t^3) \, \sqrt{18t^4} \, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} 2(-t^3)(1-t^3) \, 3t^2\sqrt{2} \, dt$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-1}^{2} (-t^3)(1-t^3)t^2 \, dt$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-1}^{2} -t^5 + t^8 \, dt$$

$$= 6\sqrt{2} t^9/9 - t^6/6 \Big]_{-1}^{2}$$

$$= 6\sqrt{2} - 1/9 - 1/6 - (2^9/9 - 2^6/6)$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\frac{-513}{9} + \frac{63}{6}\right)$$

   (b) Für $f(x,y) = x(1+4y), \quad \gamma(t) = (t, t^2) \quad , \quad 3 \leq t \leq 5$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_{3}^{5} f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \int_{3}^{5} t(1+4t^2) \, \|(1, 2t)\| \, dt$$

$$= \int_{3}^{5} t(1+4t^2) \, \sqrt{(1+4t^2)} \, dt$$

$$= \int_3^5 t(1+4t^2)^{3/2}\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_3^5 (1+4t^2)^{3/2}\, d(1+4t^2)$$

$$= \frac{2}{5}(1+4t^2)^{5/2}\Big]_3^5$$

$$= \frac{2}{5}\Big((37)^{5/2} - (26)^{5/2}\Big)$$

2. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x,y,z) = (x,y,z), \quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t).(\sin t, \cos t, t)'\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t).(\cos t, -\sin t, 1)^T\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t - \cos t \sin t + t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\ dt = t^2/2\Big]_0^{2\pi} = (2\pi)^2/2 = 2\pi^2$$

(b) Für $f(x,y,z) = (x,-y,z), \quad \gamma(t) = (t,t,t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt$$

$$= \int_0^1 (t,-t,t).(t,t,t)'\ dt$$

$$= \int_0^1 (t,-t,t).(1,1,1)^T\ dt$$

$$= \int_0^1 t\ dt = t^2/2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(c) Für $f(x,y,z) = (x,-y,z)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi/2$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos t, \sin t, 0).(\cos t, \sin t, 0)'\ dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos t, -\sin t, 0).(-\sin t, \cos t, 0)^T\ dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\cos t \sin t - \cos t \sin t\ dt$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\ dt$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \sin t\ d(\sin t)$$

$$= \frac{\sin t^2}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

3. (a) Für $f(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$, und γ ist die Strecke zwischen $(0,0,0)$ und $(1,1,1)$ gilt

$$\gamma(t) = (t,t,t) \quad \text{mit} \quad t \in [0,1]$$

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(\gamma(t)).\gamma'(t)\ dt$$

$$= \int_0^1 (t^2, -t^2, 1).(1,1,1)^T\ dt$$

$$= \int_0^1 dt = 1$$

(b) Für $f(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$, und γ ist der Kreis in der $yz-$Ebene mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0,0)$ gilt

$$\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)).\gamma'(t)\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0,0,1).(0,-\sin t,\cos t)^T \; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t dt = \sin t \Big]_0^{2\pi} = 0$$

(c) Für $f(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$, und γ ist die Parabel $z = x^2, y = 0$ zwischen $(-1,0,1)$ und $(1,0,1)$ gilt

$$\gamma(t) = (t, 0, t^2) \quad \text{mit} \quad t \in [-1,1]$$

$$\int_\gamma f ds = \int_{-1}^{1} f(\gamma(t)).\gamma'(t) \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2, 0, 1).(1, 0, 2t)^T \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 + 2t dt$$

$$= t^3/3 + t^2/2\Big]_{-1}^{1} = \frac{-2}{3}$$

(d) Für $f(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$, und γ ist die Strecke zwischen $(-1,0,1)$ und $(1,0,1)$ gilt

$$\gamma(t) = (t, 0, 1) \quad \text{mit} \quad t \in [-1,1]$$

$$\int_\gamma f ds = \int_{-1}^{1} f(\gamma(t)).\gamma'(t) \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2, 0, 1).(1, 0, 0)^T \; dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 dt = t^3/3\Big]_{-1}^{1} = \frac{-2}{3}$$

4. (a) Für $f(x,y,z) = x + y + z$
$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \; \|\gamma'(t)\| \; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t)\ \|(\cos t, -\sin t, 1)\|\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t)\ \sqrt{(\cos t^2 + \sin^2 t + 1)}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t)\ \sqrt{2}\ dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin t + \cos t + t\ dt$$

$$= \sqrt{2}\Big[- \cos t + \sin t + t^2/2 \Big]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

(b) Für $f(x,y,z) = \cos z$
$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\ \|(\cos t, -\sin t, 1)\|\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\ \sqrt{(\cos t^2 + \sin^2 t + 1)}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t\ \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2} \sin t \Big]_0^{2\pi} = 0$$

(c) Für $f(x,y,z) = x \cos z$
$\gamma(t) = (t, t^2, 0) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$ gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ dt$$

$$= \int_0^1 t\ \|(1, 2t, 0)\|\ dt$$

$$= \int_0^1 t\ \sqrt{(1 + 2t)}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{(1+2t)}\, d(1+2t)$$

$$= \frac{1}{2}(1+2t)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(3^{3/2}-1)$$

Kapitel 15

Gradientenfelder und Vektorfelder

15.1 Einfürung

15.1.1 Definition

1. Eine Funktion mit Definitionsbereich und Wertebereich, die Teilmengen des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ sind, nennt man **Vektorfeld** .

2. Eine Funktion mit Definitionsbereich, der Teilmenge des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist, und mit Wertebereich in $\mathbb{R}$ nennt man **Skalarfeld**.
3. Man nennt ein Skalarfeld oder ein Vektorfeld **glatt** , wenn alle Richtungsableitungen existieren und stetig sind.

15.1.2 Beispiel

Die Gravitationskraft $F(x, y, z)$ einer Masse m ist ein Vektorfeld. Der Betrag dieser Kraft

$$\|F(x, y, z)\|$$

ist also ein Skalarfeld.

15.2 Konservative Vektorfelder

Aus der Physik weiß man, dass die Arbeit der Anziehungskraft nur von der Höhe abhängt und nicht von dem Weg, den ein Körper durchläuft. Das Vektorfeld der Erdanziehungskraft ist ein Spezialfall einer großen Menge von Vektorfeldern, die auch diese Eigenschaft haben. Das sind die sogenannten konservativen Vektorfelder.

15.2.1 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann heißt f ein **konservatives Vektorfeld**, falls es eine reellwertige Funktion (die **Stammfunktion** von f) $F : A \to \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\text{grad } F = f$$

15.2.2 Beispiel

Sei $F(x, y, z) = xyz$ dann gilt

$$\text{grad } F = (yz, xz, xy)$$

Also können wir sagen, dass das Vektorfeld $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ ein konservatives Vektorfeld ist, und dass F eine Stammfunktion von f ist. Es gibt sicherlich andere Stammfunktionen von f zum Beispiel $F_1(x,y,z) = xyz+1$. Jedenfalls unterscheiden sich zwei Stammfunktionen eines Vektorfeldes nur um eine additive Konstante.

Man interessiert sich für solche konservativen Vektorfelder, weil Kurvenintegrale dort besonderes leicht zu rechnen sind, wie der folgende Satz zeigt. Außerdem ist jedes Kurvenintegral längs einer geschlossene Kurve gleich Null.

15.2.3 Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offe Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, mit der Stammfunktion $F : A \to \mathbb{R}$. Dann ist das Wegintegral wegunabhängig, und es gilt :

$$\int_\gamma f(x)dx = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

wobei $\gamma : [a,b] \to G$ eine stetig differenzierbare Kurve ist.

15.2.4 Beispiel

Sei $F(x_1, x_1) = x_1^2 + x_2^2$ dann gilt

$$\text{grad } F = (2x, 2y)$$

Also können wir sagen, dass das Vektorfeld $f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$ ein konservatives Vektorfeld ist, und dass F eine Stammfunktion von f ist. Und damit gilt

$$\int_\gamma f(x)dx = F(1,1) - F(0,0) = 2$$

Wobei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein beliebige Kurve ist, die von $(0,0)$ bis $(1,1)$ läuft.

15.3 Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion

15.3.1 Satz (Integrabilitätsbedingung)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offe Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Falls f eine Stammfunktion F besitzt, dann gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k = 1, 2, \ldots, n$

Diese Integrabilitätsbedingung ist nur notwendig und nicht hinreichend für die Existenz der Stammfunktion. Jedenfalls ist sie lokal hinreichend, das heißt, sie garantiert die Existenz einer Stammfunktion auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, aber wohl nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$.

15.3.2 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ die Funktion definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \; , \; \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Dann erfüllt f die Integrabilitätsbedingung aber ist kein konservativer Vektorfeld auf ganz $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Um das zu sehen, braucht man nur zu wissen, dass

$$\int_\gamma f(x)dx = 2\pi \neq 0$$

für $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

15.4 Aufgaben

1. Welches der folgenden Vektorfelder ist konservativ und welches nicht?

   (a) $f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$

   (b) $f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$

   (c) $f(x,y) = (e^{xy}, 3x^2y^2)$

   (d) $f(x,y) = (y\sin x, x\cos y)$

   (e) $f(x,y) = (x+1, 2y+1)$

   (f) $f(x,y) = (x^2+4xy+4y^2, 2x^2+8xy+8y^2)$

   (g) $f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

   (h) $f(x,y,z) = (2xy, x^2+z, y)$

2. Zeige, dass folgende Vektorfelder konservativ sind und berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)dx$:

   (a) $f(x,y) = \left(xy^2+3x^2y\ ,\ x^3+yx^2\right)$

   $$\gamma(t) = (t-t^3/3, t^2-1) \quad , \quad 0 \le t \le 3$$

   (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{2x}{y^2+1}\ ,\ -\dfrac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\right)$

   $$\gamma(t) = (t, t^3-6) \quad , \quad -1 \le t \le 3$$

15.5 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

Wir werden alle Rechnungen von Integrale

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ohne die Konstante C aufschreiben. Die Stammfunktion ist bis auf diese Konstante eindeutig bestimmt.

(a) Für $f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ gilt

$$\int 2xy^3 dx = x^2y^3 + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int 3x^2y^2 dy = x^2y^3 + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun kann man leicht erraten, dass

$$F(x,y) := x^2y^3$$

eine Stammfunktion von $f(x,y)$ ist, weil

$$\bigtriangledown F(x,y) = f(x,y)$$

Damit ist $f(x,y)$ ein konservativer Vektorfeld.

(b) Für $f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$ gilt

$$\int y\cos(xy)dx = \sin(xy) + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int x\cos(xy)dy = \sin(xy) + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun kann man leicht erraten, dass

$$F(x, y) := \sin(xy)$$

eine Stammfunktion von $f(x, y)$ ist, weil

$$\bigtriangledown F(x, y) = f(x, y)$$

Damit ist $f(x, y)$ ein konservativer Vektorfeld.

(c) Für $f(x, y) = (e^{xy}, 3x^2y^2)$ gilt

$$\int e^{xy} dx = \frac{e^{xy}}{y} + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int 3x^2y^2 dy = x^2y^3 + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Um $f(x, y)$ ein konservativer Vektorfeld zu sein, muss gelten

$$\frac{e^{xy}}{y} + C_1(y) = x^2y^3 + C_2(x)$$

was offensichtlich unmöglich ist. Also ist $f(x, y)$ kein konservativer Vektorfeld.

(d) Für $f(x, y) = (x + 1, 2y + 1)$ gilt

$$\int x + 1 dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int 2y + 1 dy = y^2 + y + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun $f(x, y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$\frac{x^2}{2} + x + C_1(y) = y^2 + y + C_2(x)$$

$$\iff C_1(y) = y^2 + y \quad \text{und} \quad C_2(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

Damit kann man sehen, dass

$$F(x,y) := \frac{x^2}{2} + x + y^2 + y$$

Eine Stammfunktion von f ist.

(e) Für $f(x,y) = (x^2 + 4xy + 4y^2, 2x^2 + 8xy + 8y^2)$ gilt

$$\int x^2 + 4xy + 4y^2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2y + 4y^2x + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int 2x^2 + 8xy + 8y^2 dy = 2x^2y + 4xy^2 + \frac{8y^3}{3} + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun $f(x,y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$\frac{x^3}{3} + 2x^2y + 4y^2x + C_1(y) = 2x^2y + 4xy^2 + \frac{8y^3}{3} + C_2(x)$$

$$\iff \frac{x^3}{3} + C_1(y) = \frac{8y^3}{3} + C_2(x)$$

$$\iff C_1(y) = \frac{8y^3}{3} \quad \text{und} \quad C_2(x) = \frac{x^3}{3}$$

Damit kann man sehen, dass

$$F(x,y) := \frac{x^3}{3} + 2x^2y + 4y^2x + \frac{8y^3}{3}$$

Eine Stammfunktion von f ist.

(f) Für $f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ gilt

$$\int 2x dx = x^2 + C_1(y,z)$$

Wobei $C_1(y, z)$ eine Funktion die nur von y, z abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int 2ydy = y^2 + C_2(x, z)$$

Wobei $C_2(x, z)$ eine Funktion die nur von x, z abhängt und nicht von y.

$$\int 2zdz = z^2 + C_3(x, y)$$

Wobei $C_3(x, y)$ eine Funktion die nur von x, y abhängt und nicht von z. Nun $f(x, y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$x^2 + C_1(y, z) = y^2 + C_2(x, z) = z^2 + C_3(x, y)$$

Damit kann man leicht erraten, dass

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$$

eine Stammfunktion von $f(x, y, z)$ ist.

(g) Für $f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$ gilt

$$\int 2xydx = yx^2 + C_1(y, z)$$

Wobei $C_1(y, z)$ eine Funktion die nur von y, z abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int x^2 + zdy = yx^2 + yz + C_2(x, z)$$

Wobei $C_2(x, z)$ eine Funktion die nur von x, z abhängt und nicht von y.

$$\int ydz = yz + C_3(x, y)$$

Wobei $C_3(x, y)$ eine Funktion die nur von x, y abhängt und nicht von z. Nun $f(x, y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$yx^2 + C_1(y, z) = yx^2 + yz + C_2(x, z) = yz + C_3(x, y)$$

$$\iff C_1(y, z) = yz, \quad C_2(x, z) = 0, \quad C_3(x, y) = yx^2,$$

Damit kann man leicht erraten, dass

$$F(x,y,z) := yx^2 + yz$$

eine Stammfunktion von $f(x,y,z)$ ist.

2. ✎*Lösung* ❃

(a) Für $f(x,y) = \big(xy^2 + 3x^2y\ ,\ x^3 + yx^2\big)$ gilt

$$\int xy^2 + 3x^2y dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int x^3 + yx^2 dy = x^3y + \frac{1}{2}y^2x^2 + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun $f(x,y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y + C_1(y) = x^3y + \frac{1}{2}y^2x^2 + C_2(x)$$

$$\iff C_1(y) = C_2(x)$$

Damit kann man sehen, dass

$$F(x,y) := \frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y$$

eine Stammfunktion von f ist.

Für $\gamma(t) = (t - t^3/3, t^2 - 1) \quad , \quad 0 \le t \le 3$ gilt

$$\int_\gamma f ds = F(\gamma(5)) - F(\gamma(0)) = F(-8,0) - F(0,-1) = 0$$

(b) Für $f(x,y) = \left(\frac{2x}{y^2+1}\ ,\ -\frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\right)$ gilt

$$\int \frac{2x}{y^2+1} dx = \frac{x^2}{y^2+1} + C_1(y)$$

Wobei $C_1(y)$ eine Funktion die nur von y abhängt und nicht von x. Andererseits gilt

$$\int -\frac{2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}dy = -(x^2+1)\int \frac{2y}{(y^2+1)^2}dy$$

$$= -(x^2+1)\int \frac{d(y^2+1)}{(y^2+1)^2} = -(x^2+1)\int (y^2+1)^{-2}\, d(y^2+1)$$

$$= (x^2+1)(y^2+1)^{-1} = \frac{x^2+1}{y^2+1} + C_2(x)$$

Wobei $C_2(x)$ eine Funktion die nur von x abhängt und nicht von y. Nun $f(x,y)$ ist ein konservativer Vektorfeld genau dann, wenn

$$\frac{x^2}{y^2+1} + C_1(y) = \frac{x^2+1}{y^2+1} + C_2(x)$$

$$\iff C_1(y) = \frac{1}{y^2+1} + C_2(x)$$

Also kann man leicht sehen, dass

$$F(x,y) := \frac{x^2+1}{y^2+1}$$

eine Stammfunktion von f ist.

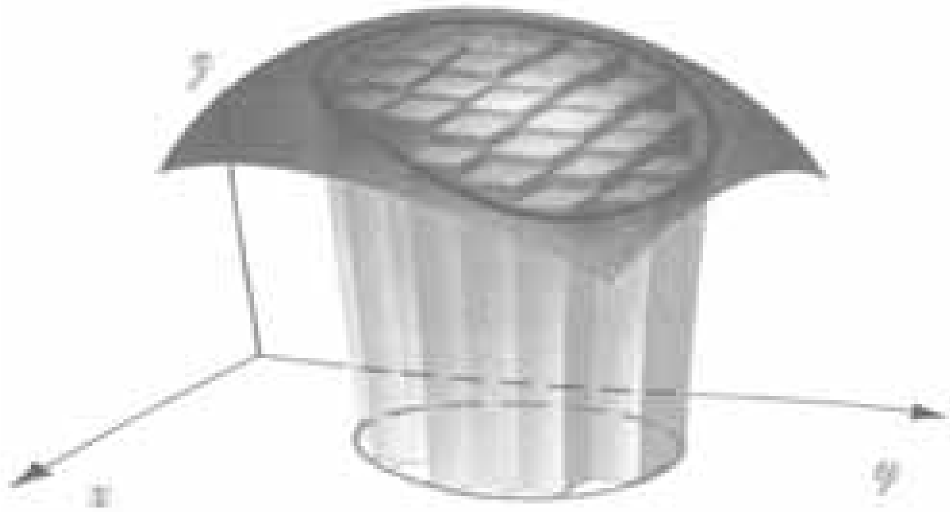
Für $\gamma(t) = (t, t^3-6) \quad , \quad -1 \leq t \leq 3$ gilt

$$\int_\gamma f ds = F(\gamma(-1)) - F(\gamma(3)) = F(-1,-7) - F(3,21) = \frac{2}{50} - \frac{10}{442}$$

Kapitel 16

Mehrdimensionale Integration

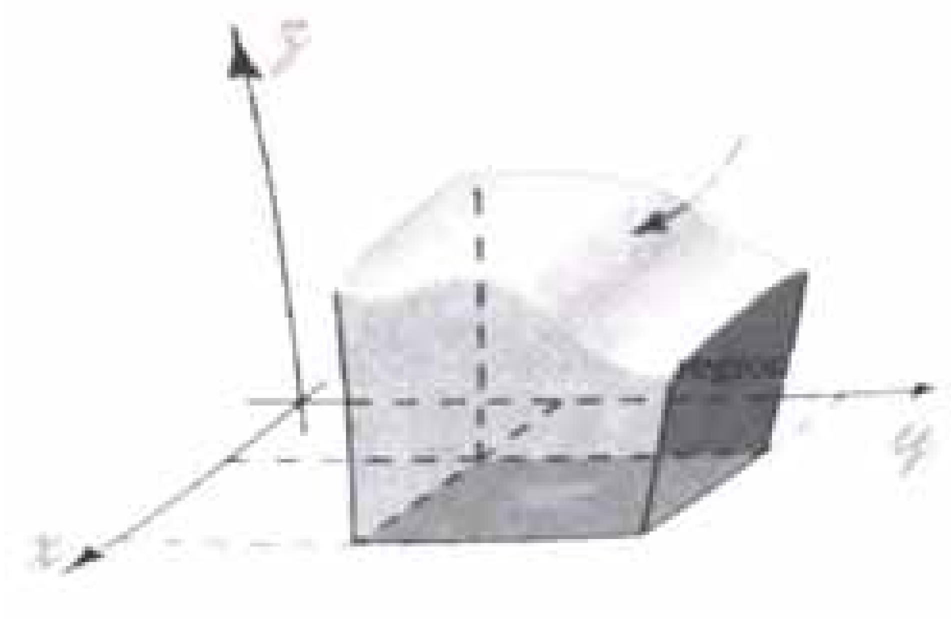
16.1 Einführung



Die Integrationstheorie ist eine lange und umständliche Ansammlung von Definitionen und Sätzen, die von verschiedenen Integraltypen handelt, wie zum Beispiel dem Riemann-Integral oder dem Lebesgue-Integral. Zum Glück sind alle solche Integraltypen äquivalent für die meisten Funktionen, wie zum Beispiel die stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Jedenfalls muss man die genauen Definitionen nicht wissen, wenn man ein Integral einer stetigen Funktionen auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ berechnen will. Zwei allgemeine

Sätze muss man aber wissen : der Satz von Fubini und die Substitutionsregel.

16.2 Mehrfachintegrale



16.2.1 Satz (Fubini)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $I := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, dann gilt:

$$\int_I f(x, y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)dx \Big) dy$$

16.2.2 Beispiel 1

Um das Integral

$$\int_I (x^2 + y)dxdy$$

auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$ zu berechnen, gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_I (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^1 (x^2 + y)dx \Big) dy$$

Wir berechnen zuerst das innere Integral, und betrachten y als Konstante

$$\int_0^1 (x^2+y)dx = \left[\frac{x^3}{3}+yx\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3}+y$$

Damit gilt

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 (x^2+y)dx\Big)dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{3}+y\Big)dy = \left[\frac{1}{3}y+\frac{y^2}{2}\right]_{x=0}^1 = \frac{5}{6}$$

16.2.3 Beispiel 2

Um das integral

$$\int_I (x+2y+3z)^2\ dxdydz$$

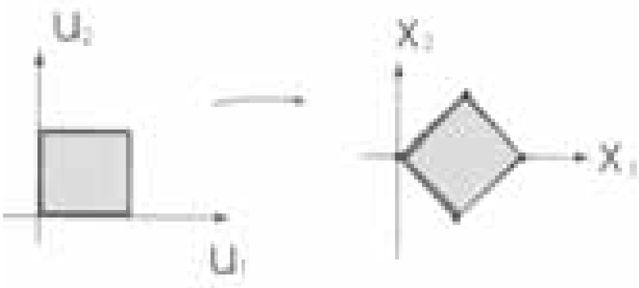
auf $I = [0,1]\times[-1/2,0]\times[0,1/3]$ zu berechnen, gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_I (x+2y+3z)^2\ dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^0\int_0^1 (x+2y+3z)^2\ dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left[\frac{(x+2y+3x)^3}{3}\Big|_{x=0}^1\right] dydz \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{3}\big[(1+2y+3z)^3-(2y+3x)^3\big]\ dydz \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24}\Big[(1+2y+3z)^4-(2y+3x)^4\Big]_{y=-1/2}^0\ dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{24}\big[(3z+1)^4-2(3z)^4+(3z-1)^4\big]\ dz \\
&= \frac{1}{24\times 15}\Big[(3z+1)^5-2(3z)^5+(3z-1)^5\Big]_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{24\times 15}(2^5-2) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

16.2.4 Satz (Substitutionsregel)

Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x = \Phi(u)$ eine injektiv und stetig differenzierbare Abbildung. Für alle $u \in \mathbb{R}^n$ sei $\det \Phi'(u) \neq 0$. Schließlich sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$

$$\int_A f(x)dx = \int_{\Phi(A)} f\big(\Phi(u)\big)\big|\ \det\Phi'(u)\ \big|\ du.$$



16.2.5 Beispiel

Sei das Integral

$$\int_D (x_1^2 - x_2^2)\ dx_1 dx_2$$

und sei D das Quadrat mit den Ecken $(0,0), (1,-1), (1,1), (2,0)$. Mit dem Satz von Fubini kann man dieses Integral nicht direkt ausrechnen. Wir können aber das Quadrat um $\pi/4$ drehen so, dass wir das Quadrat D als Produkt von zwei Intervallen $[0,1] \times [0,1]$ dartellen können. Eine geeignete Variablensubstitution $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das leistet, ist

$$(x_1, x_2) = \Phi(u_1, u_2) = (u_1 + u_2, u_1 - u_2)$$

Also gilt

$$(x_1^2 - x_2^2) = (u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 = 4u_1u_2$$

Und ihre **Funktionaldeterminante** ist

$$\Big|\det\ \Phi'\Big| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Mit der Substitutionsregel gilt

$$\begin{aligned}\int_D (x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_0^1 4u_1u_2|2|\, du_1du_2 \\ &= 8\int_0^1 \int_0^1 u_1u_2\, du_1du_2 = 2\end{aligned}$$

16.3 Flächenberechnung im $\mathbb{R}^2$

Der Flächeninhalt A_B eines Bereiches $B \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$A_B = \int_B dxdy$$

Sei B der Bereich zwischen zwei stetigen Funktionen

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) \leq g(x) \quad \text{in } [a, b]$$

das heißt

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

der Flächeninhalt A_B von B ist dann

$$A_B = \int_B dxdy = \int_a^b \Big(\int_{f(x)}^{g(x)} dy\Big)dx = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Also kann man der Flächeninhalt in $\mathbb{R}^2$ sowohl als zweidimensionales Integral, als auch als eindimensionales Integral auffassen.

16.3.1 Beispiel 1

Um den Bereich in $\mathbb{R}^2$ zwischen den Kurven

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = x^3$$

für $0 \leq x \leq 1$ zu berechnen, kann man es mit folgendem Integral bestimmen

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dxdy = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Ein Doppelintegral braucht man nicht unbedingt um eine Fläche in $\mathbb{R}^2$ zu berechnen. Wenn man aber zum Beispiel die Gesamtmasse einer inhomogenen Massenverteilung in $\mathbb{R}^2$ berechnen will, dann liegt ein Doppelintegral mit der Massendichte $f(x, y)dxdy$ als Integrand vor.

16.3.2 Beispiel 2

Um die Gesamtmasse der Fäche in $\mathbb{R}^2$ zwischen den Kurven

$$y = x^2 \quad \text{und} \quad y = x^3$$

für $0 \leq x \leq 1$ zu berechnen, die die Massendichte

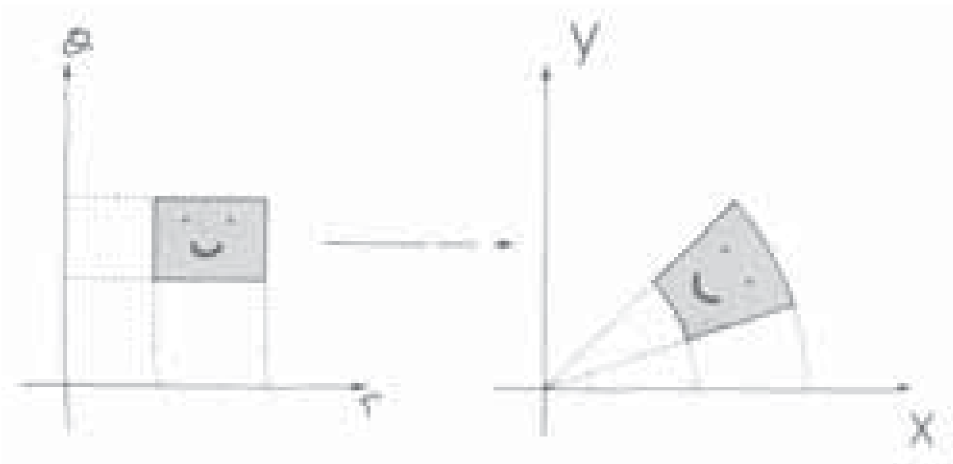
$$f(x, y) = xy$$

besitzt, benutzen wir folgendes Integral

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xydxdy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{x^2} \right) dxdy$$

16.4 Flächenberechnung in Polarkoordinaten

Manchmal ist es aber viel einfacher den Bereich in Polarkoordinaten anzugeben und zu integrieren. Sei zum Beispiel B der Bereich in Polarkoordinaten



(r, θ) zwischen zwei Strahlen $\theta = \alpha$ und $\theta = \beta$ und der Kurve $r = r(\theta) \geq 0$, einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve, dass heißt

$$B = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq r(\theta) \right\}$$

Der Flächeninhalt A_B von B ist nach der Substitutionsregel

$$A_B = \int_B dxdy = \int_\alpha^\beta \Big(\int_0^{r(\theta)} rdr \Big) d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta$$

16.4.1 Beispiel

Sei A die Fläche innerhalb der Spirale definiert in Polarkoordinaten (r, θ) durch

$$r(\theta) = \theta \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Dann können wir den Flächeninhalt von A folgendermaßen berechnen :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4\pi^3}{3}$$

16.5 Volumenberechnung im $\mathbb{R}^3$

Das Volumen V_B eines Bereichs $B \subset \mathbb{R}^3$ ist

$$V_B = \int_B dxdydz$$

Zum Beispiel, sei B der Bereich zwischen zwei stetigen Funktionen

$$f, g : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) \leq g(x) \quad \text{in } G$$

das heißt

$$B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G,\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\big\}$$

Das Volumen V_B von B ist dann

$$V_B = \int_B dxdydz = \int_G \Big(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz\Big) dxdy$$

$$= \int_G \big(g(x, y) - f(x, y)\big) dxdy$$

Also kann man das Volumen in $\mathbb{R}^3$ sowohl als zweidimensionales Integral, als auch als dreidimensionales Integral auffassen.

16.5.1 Beispiel

Wir wollen das Volumen einer Kugel K mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ berechnen, und dafür möchten wir zuerst die Ungleichung in Intervallform schreiben :

$$-1 \leq x \leq 1$$

Wenn wir nun für y und z dasselbe Interval nehmen, dann bekommen wir einen Würfel anstatt einer Kugel, also nehmen wir

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

und damit haben wir die Kugel in Intervallen beschrieben. Nun gilt

$$\int_K dzdydx = \int_1^{-1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

$$= \int_1^{-1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right) dydx$$

$$= 2 \int_1^{-1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right) dydx$$

und mit Hilfe einer Integralstabelle :

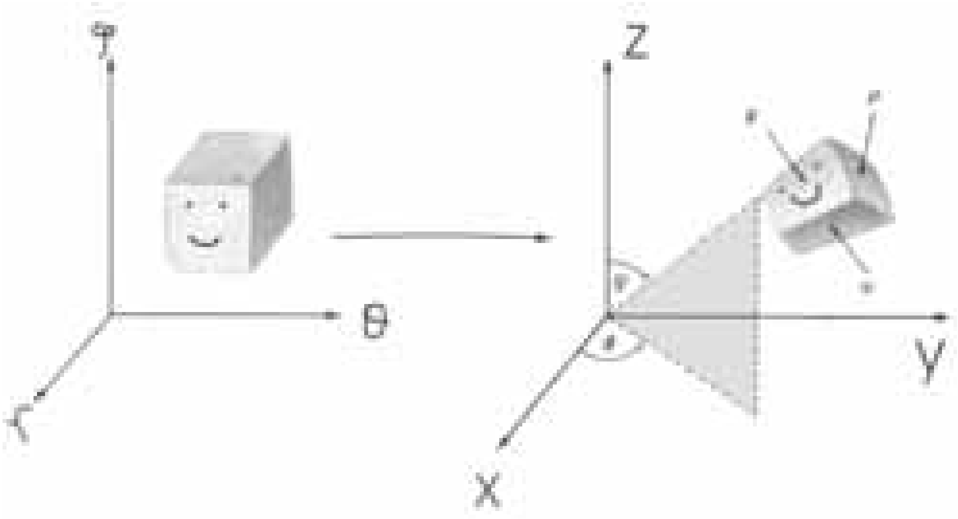
$$= 2 \int_1^{-1} \pi \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{4}{3}\pi$$

16.6 Volumenberechung in Kugelkoordinaten

Manchmal ist es aber viel einfacher den Bereich in Kugelkoordinaten anzugeben, und zu integrieren.Sei zum Beipiel B der Bereich in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) definiert durch

$$B = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ \gamma \leq \theta \leq \delta,\ 0 \leq r \leq r(\theta, \varphi)\right\}$$

mit einer stetigen Funktion $r = r(\theta, \phi)$. Das Volumen V_B von B ist nach



der Substitutionsregel

$$V_B = \int_B dxdydz = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \int_0^{r(\theta,\varphi)} r^2 \sin\theta \; dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta r^3(\theta,\varphi) \sin\theta \; d\theta d\varphi$$

16.6.1 Beispiel

Um das Volumen der Kugel K mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

zu berechnen, schreiben wir die Ungleichung in Kugelkoordinaten

$$r(\theta,\varphi) = 1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{und} \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Dann ist das Volumen gleich

$$V_K = \int_K dxdydz = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi r^3(\theta,\varphi) \sin\theta \; d\theta d\varphi$$

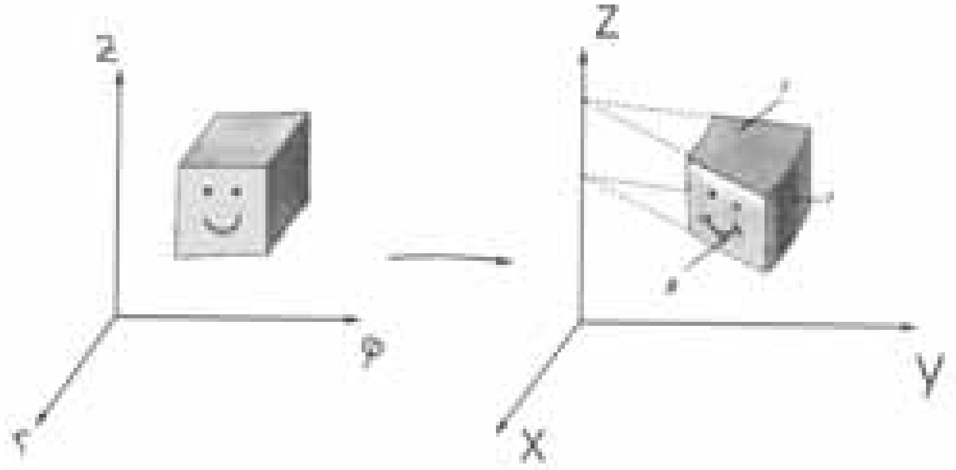
$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \; d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

16.7 Volumenberechung in Zylinderkoordinaten

Auch ist es manchmal viel einfacher den Bereich in Zylinderkoordinaten anzugeben, und zu integrieren.Sei zum Beipiel B der Bereich in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) definiert durch

$$B = \left\{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \leq \phi \leq \beta,\ a \leq z \leq b,\ 0 \leq r \leq r(\phi, z)\right\}$$

mit $r = r(\phi, z)$ einer stetigen Funktion. Das Volumen V_B von B ist nach



der Substitutionsregel

$$V_B = \int_B dxdydz = \int_\alpha^\beta \int_a^b \int_0^{r(\phi,z)} rdrdzd\phi$$

$$= \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \int_a^b r^2(\phi, z)dzd\phi$$

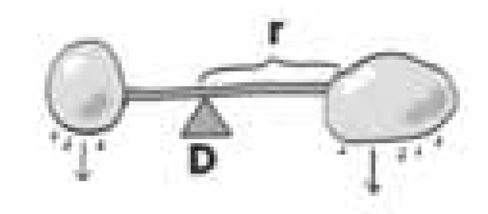
16.8 Schwerpunkte und Trägheitsmomente

16.8.1 Definition

Ein Körper $K \subset \mathbb{R}^n$ sei mit der lokalen Dichte $\rho(x, y, z)$ versehen. Dann definiert man

1. Die **Gesamtmasse** M durch
$$M = \int_K \rho(x,y,z)dxdydz$$
2. Der **Schwerpunkt** S durch
$$S = \frac{1}{M}\int_K (x,y,z)\ .\ \rho(x,y,z)\ dxdydz$$
Das ist einvektorwertiges Integral und ist koordinatenweise zu berechnen.

3. Das **Trägheitsmoment** bezüglich der Achse D durch
$$J_D = \int_K r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$$
wobei $r(x,y,z)$ der Abstand zwischen der Achse D und der Punkt $(x,y,z) \in K$.



16.8.2 Beispiel 1

Wir wollen die Gesamtmasse einer Kugel
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

bestimmen, mit der Dichte

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} =: \frac{1}{a}$$

Wir berechnen das Integral mit Kugelkoordinaten:

$$M = \int_K \rho(x,y,z)dxdydz = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{1}{a^2}a^2 \sin\varphi\; drd\varphi d\theta$$

$$= 8R\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\; d\varphi d\theta = 8R\int_0^{\pi/2} d\theta = 4R\pi$$

16.8.3 Beispiel 2

Wir wollen den Schwerpunkt $S = (x_s, y_s)$ des Quadrates $[0,1]\times[0,1]$ mit der Flächendichte

$$\rho(x,y) = e^{x+y}$$

berechnen. Zuerst berechnen wir die Gesamtmasse

$$M = \int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\; dxdy = \int_0^1 (e^{1+y} - e^y)dy = (e-1)^2$$

Andererseits gilt (Integral der x-Komponente)

$$\int_0^1\int_0^1 xe^{x+y}\; dxdy = \int_0^1 e^y dy = e-1$$

Also gilt

$$x_s = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1}$$

Wegen Symmetrie kann man x und y vertauschen, also $y_s = x_s$ und

$$S = \left(\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1}\right)$$

16.8.4 Beispiel 3

Wir wollen das Trägheitsmoment J_x (bezüglich der $x-$Achse) berechnen. Der homogene Körper K ($\rho(x, y, z) = 1$) ist beschränkt zwischen der $xy-$Ebene, dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 3^2$. Mit Zylinderkoordinaten gilt

$$J_x = \int_K r^2(x, y, z) dxdydz = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^2.r \; dzd\theta dr$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3 \; dzd\theta dr = \frac{\pi \rho 3^6}{3} = 243\pi$$

16.9 Aufgaben

1. Berechne das Integral $\int_R f(x)dx$ für folgende Funktionen

   (a) $f(x,y) = x + 2y \quad , \quad R = [1,2] \times [3,4]$
   (b) $f(x,y) = ye^{xy} \quad , \quad R = [1,2] \times [0,1]$
   (c) $f(x,y) = x^2y^2 + x \quad , \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$
   (d) $f(x,y) = \sin(x+y) \quad , \quad R = [-1,0] \times [0,1]$
   (e) $f(x,y) = x^3y \quad , \quad R = [1,2] \times [3,4]$
   (f) $f(x,y) = (xy)^2 \quad , \quad R = [1,2] \times [0,1]$
   (g) $f(x,y) = ye^x \quad , \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$
   (h) $f(x,y) = ax + by + c \quad , \quad R = [0,1] \times [0,1]$

2. Berechne folgende Integrale

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dxdy$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dydx$
   (c) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2} \, dydx$
   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos y}^{\sin y} (x \cos y) \, dxdy$

3. Berechne das Integral von $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ über dem Bereich

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

4. Berechne das Integral von

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^5}$$

   über dem Bereich S, wobei

   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0, \text{ und } y \geq 0\}$
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0, \text{ und } y \leq x\}$

5. Betrachten wir die Zylinder-Koordinaten-Transformation in $\mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Berechne die Funktionaldeterminate $\det \Phi'$

6. Betrachten wir die Kugel-Koordinaten-Transformation in $\mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$$

Berechne die Funktionaldeterminate $\det \Phi'$

7. Benutzen Kugel-Koordinaten um das Volumen des Einheitskugels:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

zu berechnen.

16.10 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❃

   (a) Für $f(x,y) = x + 2y \quad , \quad R = [1,2] \times [3,4]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\; dxdy = \int_1^2 \Big[\int_3^4 x + 2y\; dy\Big]\; dx = \int_1^2 \Big[xy + y^2\Big]_{y=3}^4 dx$$

$$= \int_1^2 \Big[3x + 9 - (4x + 16)\Big] dx = \int_1^2 (-x - 7)\; dx$$

$$= \Big[-\frac{x^2}{2} - 7x\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} - 7 - \Big(-\frac{4}{2} - 14\Big) = 9 - 1/2$$

   (b) Für $f(x,y) = ye^{xy} \quad , \quad R = [1,2] \times [0,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\; dxdy = \int_0^1 \Big[\int_1^2 ye^{xy}\; dx\Big]\; dy = \int_0^1 \Big[e^{xy}\Big]_{x=1}^2 dy$$

$$= \int_0^1 \Big[e^y - e^{2y}\Big] dy = \Big[e^y - \frac{e^{2y}}{2}\Big]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \Big(e - \frac{e^2}{2}\Big) = \frac{1 + e^2}{2} - e$$

   (c) Für $f(x,y) = x^2y^2 + x \quad , \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\; dxdy = \int_{-1}^1 \Big[\int_{-1}^1 x^2y^2 + x\; dx\Big] dy = \int_{-1}^1 \Big[\frac{x^3y^2}{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^1 \Big[\frac{y^2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{1}{2}\Big] dy = \int_{-1}^1 \Big[\frac{2y^2}{3}\Big] dy = \Big[\frac{2y^3}{9}\Big]_{-1}^1 = \frac{4}{9}$$

   (d) Für $f(x,y) = \sin(x+y) \quad , \quad R = [-1,0] \times [0,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\; dxdy = \int_0^1 \Big[\int_{-1}^0 \sin(x+y)\; dx\Big] dy$$

$$= \int_0^1 \Big[-\cos(x+y)\Big]_{x=-1}^0 dy = \int_0^1 \Big[-\cos(y-1) + \cos(y)\Big] dy$$

$$= \Big[-\sin(y-1) + \sin(y)\Big]_0^1 = -\sin(0) + \sin(1) - (-\sin(-1) + \sin(0))$$

$$= \sin(1) + \sin(-1) = 0$$

(e) Für $f(x,y) = x^3y \quad , \quad R = [1,2] \times [3,4]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_3^4 \Big[\int_1^2 x^3y\, dx\Big] dy$$

$$= \int_3^4 \Big[x^4y/4\Big]_{x=1}^2 dy = \int_3^4 \Big[y/4 - 4y\Big]\, dy$$

$$= \Big[y^2/8 - 2y^2\Big]_3^4 = 9/8 - 52$$

(f) Für $f(x,y) = (xy)^2 \quad , \quad R = [1,2] \times [0,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \Big[\int_1^2 (xy)^2\, dx\Big] dy$$

$$= \int_0^1 \Big[x^3y^2/3\Big]_{x=1}^2 dy = \int_0^1 \Big[7y^2/3\Big]\, dy$$

$$= 7y^3/3\Big]_0^1 = 7/3$$

(g) Für $f(x,y) = ye^x \quad , \quad R = [-1,1] \times [-1,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^1 \Big[\int_{-1}^1 ye^x\, dx\Big] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \Big[ye^x\Big]_{x=-1}^1 dy = \int_{-1}^1 \Big[y(e - 1/e)\Big] dy$$

$$= \Big[y^2(e-1/e)/2\Big]_{-1}^1 = (e-1/e)/2 - (e-1/e)/2 = 0$$

(h) Für $f(x,y) = ax + by + c \quad , \quad R = [0,1] \times [0,1]$ gilt

$$\int_R f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \Big[\int_0^1 (ax + by + c)\, dx\Big] dy$$

$$= \int_0^1 \Big[(ax^2/2 + byx + cx)\Big]_0^1 dy = \int_0^1 (a/2 + by + c) dy$$

$$= (ay/2 + by^2/2 + cy)\Big]_0^1 = a/2 + b/2 + c$$

2. ✎*Lösung* ❃

(a) $$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dxdy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\, dydx$$

$$= \int_0^3 e^{x^2} y\Big]_0^{x/3} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2}\, \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{6} e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{e^9-1}{6}$$

(b) $$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\, dydx = \int_0^1 xy^3/3\Big]_{y=x^2}^x dx$$

$$= \int_0^1 x^4/3 - x^7/3\, dx = \Big[x^5/15 - x^8/24\Big]_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24}$$

(c) $$\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2}\, dxdy = \int_1^2 \frac{x^2}{2y^2}\Big]_{x=0}^{y^{3/2}} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y^3}{2y^2}\, dy = \int_1^2 \frac{y}{2}\, dy = y^2/4\Big]_1^2 = 3/4$$

(d) $$\int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos y}^{\sin y} (x^2 \cos y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} \Big[\frac{x^3}{3}\cos y\Big]_{1-\cos y}^{\sin y} dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin^3 y - 1 + 3\cos y - 3\cos^2 y + \cos^2 y)\cos y\, dy$$

$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

3. ✎*Lösung* ❃

Für das Integral von $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ über dem Bereich

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

gilt

$$\int_S f(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\, dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\, dxdy = \int_0^1 x\sqrt{1-y^2}\Big]_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-y^2}\, dxdy = \int_0^1 (1-y^2)\, dxdy = \frac{2}{3}$$

4. ✎*Lösung* ❋

Um das Integral

$$\int_S \frac{1}{(x^2+y^2)^5}\, dxdy$$

zu berechnen benutzen wir polar Koordinaten.

(a) Für $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 5\}$ gilt:

$$\int_S f(x,y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \Big(\int_1^5 r \times \frac{1}{r^5} dr\Big) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_1^5 \frac{dr}{r^4}\Big) d\theta = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^{-3}}{-3}\Big]_{r=1}^5 d\theta = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{5^{-3}}{-3} - \frac{1}{-3}\Big] d\theta$$

$$= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 5^3}\Big) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{248\pi}{375}$$

(b) Für $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 5, x \geq 0, \text{ und } y \geq 0\}$ gilt

$$\int_S f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_1^5 \frac{dr}{r^4}\Big) d\theta = \int_0^{\pi/2} \Big[\frac{r^{-3}}{-3}\Big]_{r=1}^5 d\theta$$

$$= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 5^3}\Big) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{62\pi}{375}$$

(c) Für $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 5, x \geq 0, \text{ und } y \leq x\}$ gilt

$$\int_S f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\pi/4} \Big(\int_1^5 \frac{dr}{r^4}\Big) d\theta = \frac{31\pi}{375}$$

5. ✎*Lösung* ❋

Für die Zylinder-Koordinaten-Transformation

$$(x,y,z) = \Phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

gilt

$$\det\ \Phi' = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = r$$

6. ✎*Lösung* ❃

Für die Kugel-Koordinaten-Transformation

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$$

gilt

$$\det\ \Phi' = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

7. ✎*Lösung* ❃

In Kugel-Koordinaten ist der Einheitskugel:

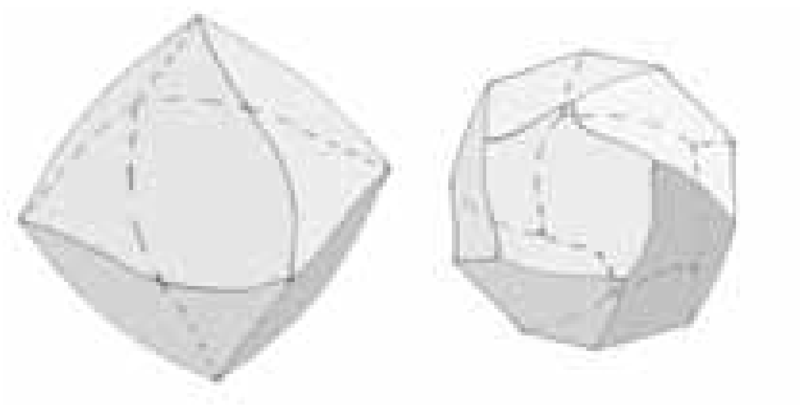
$$D := \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Damit ist das Volumen des Einheitskugels:

$$\begin{aligned} V = \int_D dxdydz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\varphi\ dr\ d\theta\ d\varphi \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\theta\ d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \sin\varphi\ d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\Big(-\cos\pi - (-\cos 0)\Big) = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Kapitel 17

Flächen



17.1 Flächen

Eine parametrische Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist eine injektive, stetige Funktion $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

17.1.1 Beispiel

1. Der Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ lässt sich als parametrische Fläche darstellen als

$$F(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

2. Die Hemisphäre $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq a^2$ lässt sich als parametrische Fläche darstellen als
$$F(u, v) = (u, v, \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}) \text{ mit } u^2 + v^2 \leq a^2$$

17.2 Flächenelement

17.2.1 Definition

Sei S eine glatte Fläche (stetig differenzierbar) mit der parametrischen Darstellung $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

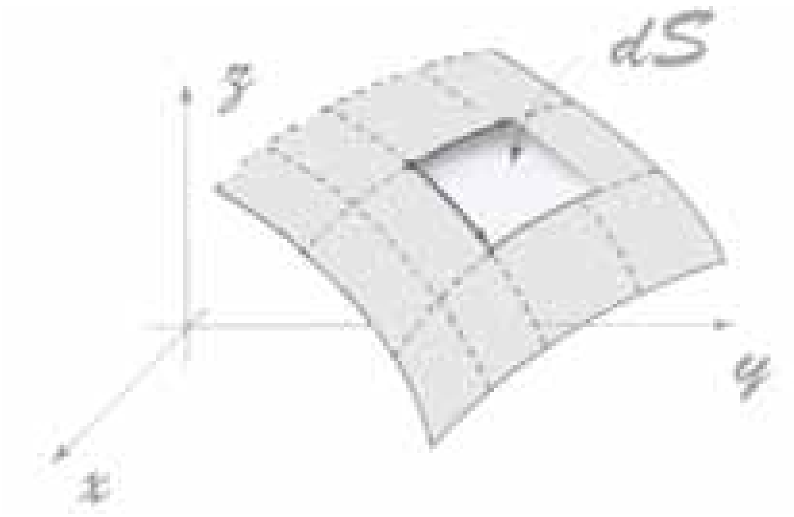
1. Der Vektor
$$n(u_0, v_0) := \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$
heißt der **Normalenvektor** zu S an der Stelle (u_0, v_0).

2. Das Differential
$$dS := \left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| dudv$$
heißt **Flächenelement**.

17.3 Flächeninhalt

17.3.1 Definition

Sei S eine glatte Fläche mit der parametrischen Darstellung $r : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Der **Flächeninhalt** von S über A ist
$$F_S := \int \int_A dS$$



17.3.2 Satz

Sei S eine glatte Fläche, die durch den Graph der Funktion $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z := g(x, y)$ definiert ist. Der Flächeninhalt von S über A ist dann durch folgende Formel gegeben

$$F_S = \int\int_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

17.4 Oberflächenintegrale

Das Integral der Flächeninhaltsberechnung ist ein Spezialfall des Oberflächenintegrals über einem Skalarfeld. Wenn man die Gesamtmasse einer inhomogenen Flächendichte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ berechnen will, dann braucht man das Oberflächenintegral.

17.4.1 Definition

Sei S eine glatte Fläche die durch den Graph von der Funktion $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z := g(x, y)$ definiert ist. Außerdem sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

ein Skalarfeld. Dann heißt folgendes Integral das **Oberflächenintegral** von S über f :

$$\int\int_A f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dxdy$$

17.4.2 Beispiel

Sei $z=\sqrt{x^2+y^2}$ eine glatte Fläche über dem Skalarfeld $f(x,y,z)=z$. Wir wollen das Oberflächenintegral zwischen $z=0$ und $z=1$ berechnen. Es gilt

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z^2=x^2+y^2\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}\text{ und }\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}$$

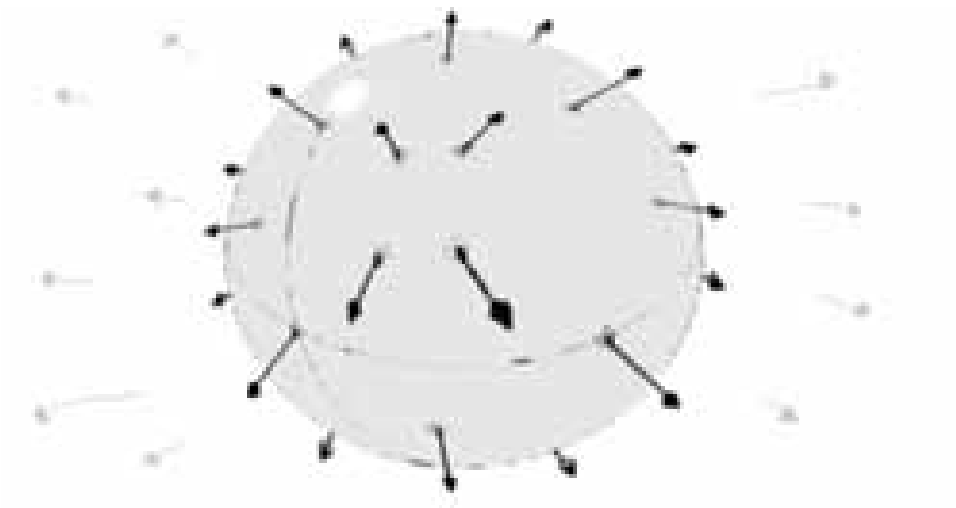
Damit folgt

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\sqrt{\frac{z^2+z^2}{z^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

Da $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ eine kegelförmige Fläche ist, ist es einfacher die Rechnung in Polarkoordinaten auszuführen:

$$\int\int_A zdS=\sqrt{2}\int\int_{x^2+y^2\leq 1}zdxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

17.5 Flußintegral



17.5.1 Definition

Sei S eine glatte Fläche mit der parametrischen Darstellung $r : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Außerdem sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

ein Vektorfeld. Dann heißt folgendes Integral

$$\int\int_A f.dS := \int\int_A \left\langle f\big(r(x,y)\big)\ ,\ \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\rangle dxdy$$

Das **Flußintegral** von S über f.

17.6 Aufgaben

1. Sei S die Fläche definiert durch

$$g : D \to \mathbb{R} \quad ; \quad g(x, y) = x^2 + y$$

Wobei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$. Weiterhin sei $f(x, y) = x$ ein Skalarfeld. Berechne das Oberflächenintegral

$$\int_S f(x, y) dS$$

2. Sei S die Fläche definiert durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Weiterhin sei $f(x, y, z) = z^2$ ein Skalarfeld. Berechne das Oberflächenintegral

$$\int_S f(x, y) dS$$

17.7 Lösungen

1. ✎*Lösung* ❋

   Es gilt

$$\int_S f(x,y)dS = \iint_D x\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x\sqrt{1+4x^2+1}\,dxdy = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} x\sqrt{2+4x^2}\,d(2+4x^2)dy$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[(2+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 dy = \frac{2}{24}\int_{-1}^{1}(6^{3/2}-2^{3/2})dy = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)}{3}$$

2. ✎*Lösung* ❋

   Die Fläche S kann man in Kugel-Koordinaten schreiben

$$S = \{(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \mid r=1,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$$

   Damit gilt nach der Substitutionsregel

$$\int_S f(x,y)dS = \int_S(\cos^2\varphi)\ \|n(\theta,\varphi)\|d\theta\ d\varphi$$

$$= \int_S(\cos^2\varphi)|\sin\varphi|d\theta\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi|\sin\varphi|\ d\varphi\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\ d\varphi\ d\theta \quad \text{da } 0\le\varphi\le\pi \quad \text{ist}$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\ \ d(\cos\varphi)\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

Stichwortverzeichnis