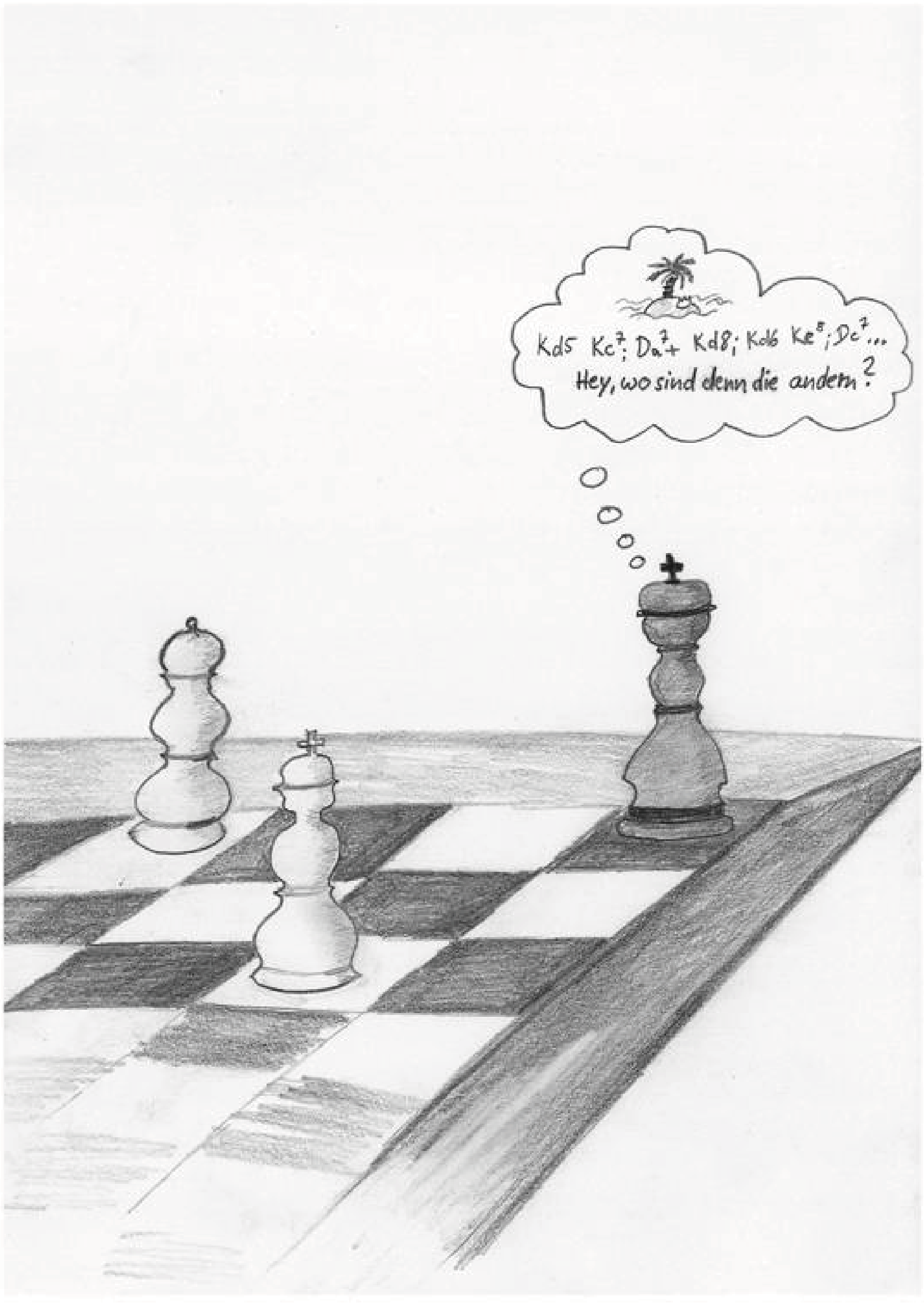
Sebastian Vollmer

Ole Riedlin

Einführung in die Hochschulmathematik



Cuvillier Verlag Göttingen

Einführung in die Hochschulmathematik

Sebastian Vollmer Ole Riedlin

Göttingen, September 2002

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Vollmer, Sebastian; Riedlin, Ole:
Einführung in die Hochschulmathematik / Sebastian Vollmer, Ole Riedlin. -
1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2002
ISBN 3-89873-537-0

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2002
Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 3-89873-537-0

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Dieses kleine Buch ist im Rahmen eines dreiwöchigen Vorkurses entstanden, den wir vor dem Wintersemester 2002/2003 am Mathematischen Institut der Georg-August-Universität Göttingen gegeben haben. Der Kurs hat sich insbesondere an zukünftige Studierende der Mathematik, Physik und Informatik gerichtet, aber auch andere Interessierte waren willkommen.
Dabei haben wir die beiden Teile „Mathematisches Handwerkszeug“ und „Die Sprache der Hochschulmathematik“ parallel unterrichtet. Dies erschien uns wegen der Verzahnung der einzelnen Abschnitte sinnvoll, denn es bedienen sich beispielsweise einige Abschnitte des ersten Teils der Mengenlehre.
Wir erheben für dieses Buch keinerlei Anspruch auf besondere Eleganz beim Zugang zur Mathematik, noch haben wir mathematische Perfektion angestrebt. Vielmehr wollten wir einen Text schreiben, der für Abiturientinnen und Abiturienten mit normalen Vorkenntnissen aus der Schulmathematik lesbar und verständlich ist.
Aus eigener Erfahrung wissen wir, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule gerade in Mathematik besonders schwierig ist. Während in der Schule das Rechnen im Vordergrund steht, ist die Mathematik an der Uni fast schon ein abstraktes Gedankengebäude, und auch Beweise bekommen im Studium eine viel größere Bedeutung. Probleme in den ersten Semestern sind in der Regel nicht durch die Schwierigkeit des Stoffes begründet, lediglich die neue Zugangsweise ist für viele Anfängerinnen und Anfänger sehr ungewohnt.
Da die schwierige Anfangszeit bei uns nur knapp drei Jahre zurückliegt, wissen wir noch recht gut, welche Dinge für uns besonders problematisch waren. Mit diesem Buch wollen wir zukünftigen Studierenden der Mathematik dabei helfen, die typischen Anfangsschwierigkeiten zu vermeiden. Es erscheint uns sinnvoll, dieses Buch noch vor dem eigentlichen Studienbeginn durchzuarbeiten. Und vielleicht kann es darüber hinaus sogar während der ersten Semester hilfreich sein, wenn man etwas nachlesen möchte.
Wir bedanken uns bei Bettina von Hindte für die schöne Illustration auf dem Cover.

Göttingen, September 2002 — Sebastian Vollmer und Ole Riedlin

Mathematisches Handwerkszeug

1 Summen, Produkte und Binomialkoeffizienten

(1.1) Das Summenzeichen Häufig treten in der Mathematik Ausdrücke wie

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf, wobei man hier die Summe der ersten n Zahlen meint. Diese Schreibweise kann jedoch in komplizierten Fällen leicht zu Verwechslungen führen, falls etwa das Bildungsprinzip nicht unmittelbar ersichtlich ist. Ist mit

$$3 + 5 + 7 + \cdots + p\,, \quad p \text{ Primzahl}\,,$$

die Summe der ungeraden Zahlen von 3 bis p gemeint oder die Summe der Primzahlen ab 3 bis p? Daher führt man die Summationsschreibweise ein, deren Vorteile Eindeutigkeit und Kürze sind. Man definiert

$$\sum_{k=1}^{n} A(k) := A(1) + A(2) + A(3) + \cdots + A(n)\,,$$

wobei $A(k)$ ein von k abhängiger Ausdruck ist. Hierbei ist k der Summationsindex, der „von 1 bis n läuft“ (Sprechweise: Summe von 1 bis n über k).

(1.2) Beispiele

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$

(1.3) Das Produktzeichen Entsprechend definiert man das Produktzeichen

$$\prod_{k=1}^{m} A(k) = A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(m).$$

(1.4) Beispiele

(a) $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

(b) $\prod_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot n^2$

(c) $\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

(1.5) Anfangs- und Endwerte Summen müssen keineswegs immer bei 1 anfangen und bei n enden. Man kann beliebige Anfangs- und Endwerte wählen. So hat die Summe

$$\sum_{k=5}^{15} k = 5 + 6 + \ldots + 15$$

zum Beispiel den Anfangswert 5 und den Endwert 15. Entsprechendes gilt auch für Produkte.

(1.6) Indexverschiebung Für manche Rechnungen kann es hilfreich sein, bei einer Summe oder einem Produkt einen bestimmten Anfangs- bzw. Endwert zu haben. Dies kann man durch ein Verfahren erreichen, das man Indexverschiebung nennt. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} A(k) = A(0) + A(1) + \cdots + A(n) = \sum_{k=m}^{n+m} A(k-m).$$

(1.7) Beispiel

(a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n = (1+m-m) + (2+m-m) + \cdots + (n+m-m) \\ &= \sum_{k=1+m}^{n+m} (k-m)\,.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \cdots + n = (1-m+m) + (2-m+m) + \cdots + (n-m+m) \\ &= \sum_{k=1-m}^{n-m} (k+m)\,.\end{aligned}$$

(c) $\sum_{k=3}^{8} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \sum_{k=1}^{6} (k+2)^2.$

(1.8) Multiindizes Um Symbolfolgen wie $\sum\sum$ zu vermeiden, falls man einmal über zwei Variablen summieren möchte, definiert man

$$\sum_{i,k=0}^{n} A(k,i) := \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} A(k,i)\,.$$

Um anzudeuten, daß über alle Zahlen außer j summiert werden soll, schreibt man

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} A(k)\,.$$

(1.9) Beispiele

(a)
$$\begin{aligned}\sum_{j,k=2}^{4} (k-j)^2 &= \sum_{k=2}^{4} \left((k-2)^2 + (k-3)^2 + (k-4)^2\right) \\ &= 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 12\,.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=3}^{4} (k^2 - i) &= \sum_{i=0}^{2} (3^2 - i + 4^2 - i) \\ &= 3^2 + 4^2 + (3^2-1) + (4^2-1) + (3^2-2) + (4^2-2) = 69\,.\end{aligned}$$

(c) $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 3}}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 = 46$

(1.10) Binomialkoeffizienten Das Zeichen ! wird Fakultät genannt und durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

definiert. Es ist also zum Beispiel $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Man legt fest $0! := 1$. Damit definiert man sogenannte Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n \geq k\,.$$

Auch wenn dies aus der Definition nicht unmittelbar ersichtlich ist, handelt es sich beim Binomialkoeffizienten immer um eine ganze Zahl.

(1.11) Eigenschaften von Binomialkoeffizienten Es gelten:

(1) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(3) $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. (Binomischer Lehrsatz)

(4) $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$.

Einige dieser Eigenschaften werden auf Seite 81 bewiesen.

Übungsaufgaben

(1) Schreibe mit Hilfe des Summenzeichens.

(a) $x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}$

(b) $a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

(d) $1 + 0 + 1 + 4 + \cdots + (n-1)^2$

(e) $(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_{10}) + (a_2b_1 + \cdots + a_2b_{10}) + \cdots + (a_5b_1 + \cdots + a_5b_{10})$

(2) Schreibe folgende Ausdrücke aus.

(a) $\sum\limits_{j=3}^{2n+1} (j+1)$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{3k+1}$

(c) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$

(d) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}y_{jk}$

(3) Berechne.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} 1$

(b) $\sum\limits_{i=1}^{5} \sum\limits_{j=1}^{i} j$

(c) $\prod\limits_{k=1}^{n} 1$

(d) $\prod\limits_{i=1}^{4} \prod\limits_{j=1}^{i} j$

(4) Vereinfache folgende Summen.

(a) $\sum\limits_{i=2}^{n-1} (a_{i+1} - a_{i-1})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)}$

(5) Berechne oder vereinfache.

(a) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

(b) $\frac{(2n)!}{n!}$

(c) $(x+y)^4$

2 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

(2.1) Ungleichungen Beim Lösen von Ungleichungen können viele verschiedene Probleme auftreten. Die einfachste Form einer Ungleichung lautet:

$$ax - b > 0 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

Die Lösungsmenge $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{b}{a}\right\}$ läßt sich hier unmittelbar ablesen. Andere Ungleichungen erfordern es, zunächst nach der Variablen aufzulösen:

$$\begin{aligned}
& & \frac{x}{2} - \frac{2}{3} &> \frac{1}{2} + \frac{x}{9} \\
&\Leftrightarrow & 9x - 12 &> 9 + 2x \\
&\Leftrightarrow & 7x &> 21 \\
&\Leftrightarrow & x &> 3 \\
&\Rightarrow & L &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} .
\end{aligned}$$

Nun kann es auch passieren, dass die Variable „wegfällt", d.h. eine von der Variablen unabhängige Aussage entsteht.

$$\begin{aligned}
& & \frac{8}{9} + 6x &\geq 2\left(\frac{5}{6} + 3x\right) \\
&\Leftrightarrow & \frac{8}{9} &\geq \frac{5}{3} \\
&\Leftrightarrow & 8 &\geq 15 \\
&\Rightarrow & L &= \varnothing .
\end{aligned}$$

(2.2) Fallunterscheidungen Wie uns das Beispiel $-x > a \Leftrightarrow x < -a$ zeigt, vertauschen sich beim Multiplizieren (Dividieren) mit -1 und damit mit einer beliebigen negativen Zahl die Ungleichungszeichen. Man muß also stets aufpassen, ob man mit einer negativen Zahl multipliziert. Dies führt dazu, daß häufig Fallunterscheidungen notwendig sind. Zum Beispiel:

$$(2x - 3)(3x - 2) > (2x - 3)(5x - 4) \tag{*}$$

Falls nun $2x - 3 > 0$ ist, d.h. $x > \frac{3}{2}$ gilt, ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& & 3x - 2 &> 5x - 4 \\
&\Leftrightarrow & 2x &< 2 \\
&\Leftrightarrow & x &< 1 .
\end{aligned}$$

Da nicht gleichzeitig $x < 1$ und $x > \frac{3}{2}$ sein kann, ergibt sich für diesen Fall die Lösungsmenge $L_1 = \varnothing$. Falls $x < \frac{3}{2}$ gilt, ist obige Gleichung (*) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& & 3x - 2 &< 5x - 4 \\
&\Leftrightarrow & x &> 1 ,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich für diesen Fall die Lösung $L_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right[$, denn es muss sowohl $x > 1$ als auch $x < \frac{3}{2}$ erfüllt sein. Die Lösungsmenge L der Ungleichung (*) ergibt sich nun als Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle, also $L = L_1 \cup L_2 = \left]1, \frac{3}{2}\right[$.

(2.3) Beträge Unter dem Betrag einer reellen Zahl versteht man

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases},$$

also die Zahl x ohne ihr Vorzeichen. Aufgrund der Definition bieten sich beim Rechnen mit Beträgen ebenfalls Fallunterscheidungen an. Wir betrachten das Beispiel

$$\left|1 - \frac{x}{2}\right| = x + \frac{5}{2}.$$

Ist $x \leq 2$, so gilt

$$1 - \frac{x}{2} = x + \frac{5}{2},$$

also $x = -1$. Da $-1 \leq 2$ ist, handelt es sich bei $x = -1$ um eine Lösung der Ausgangsleichung. Ist $x > 2$, so erhält man

$$\frac{x}{2} - 1 = x + \frac{5}{2},$$

also $x = -7$. Da nicht $-7 > 2$ ist, handelt es sich bei $x = -7$ um keine Lösung der Ausgangsgleichung. Analog wie im vorigen Absatz erhält man die Lösungsmenge der gesamten Gleichung als Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle, es ist also $L = \{-1\}$.

(2.4) Quadratische Ungleichungen Für die Bestimmung der Lösungen quadratischer Ungleichungen der Form $x^2 + ax + b > 0$ berechnet man zunächst die Nullstellen von $x^2 + ax + b$. Durch diese Nullstellen werden die übrigen reellen Zahlen in ein, zwei oder drei offene Intervalle aufgeteilt. Aus jedem der Intervalle nimmt man eine beliebige Zahl heraus und überprüft, ob sie die Ungleichung erfüllt oder nicht. Ist eine Zahl Lösung der Ungleichung, so ist auch ihr gesamtes Intervall in der Lösungsmenge enthalten. Ist eine Zahl nicht Lösung der Ungleichung, so ist auch ihr gesamtes Intervall nicht in der Lösungsmenge enthalten. Ob die Nullstellen selbst Lösung sind, hängt davon ab, ob in der Ungleichung Gleichheit zugelassen ist. Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich als Vereinigung der jeweiligen Intervalle und eventuell der Nullstellen.

Bei Ungleichungen höherer Ordnung kann man analog vorgehen.

(2.5) Beispiel Wir berechnen die Lösungsmenge von $x^2 + 3x \geq -2x - 6$. Die Nullstellen von $x^2 + 5x + 6$ sind -2 und -3. Wir setzen nun aus jedem der drei Intervalle $]-\infty, -3[$, $]-3, -2[$ und $]-2, \infty[$ eine Zahl in die obige Ungleichung ein, zum Beispiel -4, $-\frac{5}{2}$ und 0. Wir stellen fest, dass -4 und 0 die Ungleichungen erfüllen, $-\frac{5}{2}$ sie aber nicht erfüllt. Folglich gehören die beiden Intervalle $]-\infty, -3[$ und $]-2, \infty[$ zur Lösungsmenge, $]-3, -2[$ aber nicht. Wegen „$\geq$“ gehören auch -2 und -3 zur Lösungsmenge. Es ist also $L =]-\infty, -3] \cup [-2, \infty[$.

(2.6) Systeme von Ungleichungen Die Lösungsmenge eines Systems von Ungleichungen ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen. Wir betrachten das Beispiel

$$\begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 9 \leq 0\,. \end{cases}$$

Mit Hilfe von Fallunterscheidungen erhält man $L_1 =]0,5[$ als Lösungsmenge der ersten und $L_2 = [-3,3]$ als Lösungsmenge der zweiten Ungleichung. Das System hat folglich die Lösungsmenge $L = L_1 \cap L_2 =]0,3]$.

Übungsaufgaben

(1) Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

(a) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$

(b) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$

(c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$

(d) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

(e) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$

(f) $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$

(g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$

(h) $8(x-2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$

(2) Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Systeme von Ungleichungen.

(a)

$$\begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x + 2 > 2(x-1) \end{cases}$$

(c) $2 < 5x + 1 < 5$

(d) $2 < \left|\frac{5x+1}{2x-1}\right| < 5$

(3) Gleichungen mit Beträgen.

(a) $|2-3x| - |x-1| + |2x+2| = 3$

(b) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$

(c) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

(4) Ungleichungen mit Beträgen.

(a) $2 - |1-x| \geq 1 + x$

(b) $|x-4| + |2-x| \leq 2$

(c) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

(d) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

3 Abbildungen und Funktionen

(3.1) Abbildungen

(1) Unter einer Abbildung f verstehen wir eine Zuordnung $f\colon X \to Y$, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) = y \in Y$ zuweist. Für diese Zuordnung schreibt man auch $x \mapsto f(x)$, und zwar immer mit dem Pfeil "$\mapsto$".

(2) Man nennt X den Definitionsbereich und Y den Zielbereich von f. Der Wertebereich $f(X)$ ist derjenige Teil von Y, der auch tatsächlich getroffen wird, d.h. $f(X) = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in X\}$.

(3.2) Funktionen Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sind X und Y Teilmengen von $\mathbb{R}$, so nennen wir f eine Funktion.

(3.3) Beispiele

(a) Die Abbildung $f : X \to X$, $x \mapsto x$ heißt Identität und wird auch mit id_X bzw. id (wenn klar ist, welche Menge gemeint ist) bezeichnet.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(3.4) Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

(1) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt injektiv, wenn aus $f(x) = f(y)$ in Y stets $x = y$ in X folgt. Dies bedeutet, dass keine zwei Elemente aus X auf das selbe Element in Y abgebildet werden dürfen.

(2) f heißt surjektiv, wenn jeder Wert aus Y erreicht wird, d.h. wenn $f(X) = Y$ gilt.

(3) Eine Fuktion f heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

(3.5) Beispiele Sei $\mathbb{R}_0^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen mit 0.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder surjektiv noch injektiv.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

(c) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

(d) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv.

(3.6) Verknüpfung von Funktionen Seien $f : Y \to Z$ und $g : X \to Y$ Funktionen. Mit $f \circ g : X \to Z$ (Sprechweise: f nach g) wird Hintereinanderausführung bzw. Verknüpfung von f und g genannt. Darunter versteht man die Funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, die in folgender Weise von X nach Z abbildet:

$$X \xrightarrow{g} g(X) \xrightarrow{f} Z\,.$$

(3.7) Umkehrfunktion Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt umkehrbar, wenn es eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt. Diese Funktion g wird Umkehrfunktion von f genannt und oft mit f^{-1} bezeichnet. Umgekehrt ist f auch die Umkehrfunktion von g. Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

(3.8) Beispiele

(a) Die Umkehrfunktion von $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$.

Bildlich kann man sich die Umkehrung von Funktionen als Spiegelung an der Hauptdiagonalen (Graph von id) vorstellen.

(3.9) Differentialrechnung An dieser Stelle möchten wir bewußt eine Lücke lassen, um dem ersten Semester nicht unnötig vorzugreifen. Wir denken aber, dass die meisten Abiturientinnen und Abiturienten mit den Grundzügen der Differentialrechnung vertraut sind. Daher werden wir in den folgenden Abschnitten maßvoll auf dieses Wissen zurückgreifen.

Übungsaufgaben

(1) Entscheide, ob eine Funktion vorliegt.

(a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-3x+2}$

(b) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x+1$

(c) $\{0,1\} \to \{0,1\}\,,\ 0 \mapsto 1\,,\ 1 \mapsto 0$

(d) $\{0,1\} \to \{0,1\}\,,\ 0 \mapsto 1\,,\ 0 \mapsto 0$

(2) Untersuche folgende Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Gib gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

(a) $x \mapsto 2x+1$

(b) $x \mapsto x^2 - x + 1$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

(d) $x \mapsto x^3$

(3) Bestimme jeweils $f \circ g$ und $g \circ f$ in geeignetem Definitionsbereich.

(a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x - 1$

(d) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x^6$

4 Trigonometrie

(4.1) Winkelmaße Winkelgrößen kann man sowohl in Grad als auch im Bogenmaß angeben.

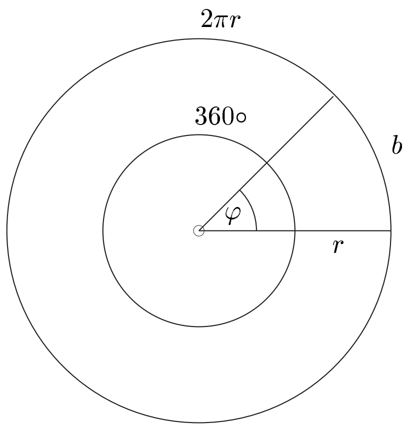


Abbildung 1: Winkelmessung

(1) Gradangabe: Eine volle Umdrehung entspricht 360°, eine halbe Umdrehung 180°. Eine Vierteldrehung, auch rechter Winkel genannt, ist ein Winkel der Größe 90°.

(2) Bogenmaß: Aus der Gleichung $u = 2\pi r$, wobei u den Umfang und r den Radius eines Kreises bezeichnet, erhält man

$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360°}{\varphi}\,,$$

da sich das Bogenstück b zum Kreisumfang u so wie φ zum Vollwinkel verhält. Der Quotient $\frac{b}{r} = \frac{\pi\varphi}{180°}$ eignet sich also zur Winkelmessung und heißt Bogenmaß.

(4.2) Beispiel Die Umrechnungsformeln zwischen Bogenmaß und Grad lauten:

$$\frac{b}{r} = \frac{\pi\varphi}{180°}\,, \qquad \varphi = \frac{b}{r}\cdot\frac{180°}{\pi}\,.$$

Das Bogenmaß für den Winkel $\varphi = 360°$ ist also zum Beispiel $\frac{b}{r} = 2\pi$.

(4.3) Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck Man kann Sinus, Kosinus und Tangens über die Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck einführen. Wie wir von den Strahlensätzen wissen, gilt für die nachfolgende Abbildung

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}\,.$$

Das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse ist also nur vom Winkel α abhängig. Damit wird klar, dass die folgende Definition Sinn macht und eindeutig ist.

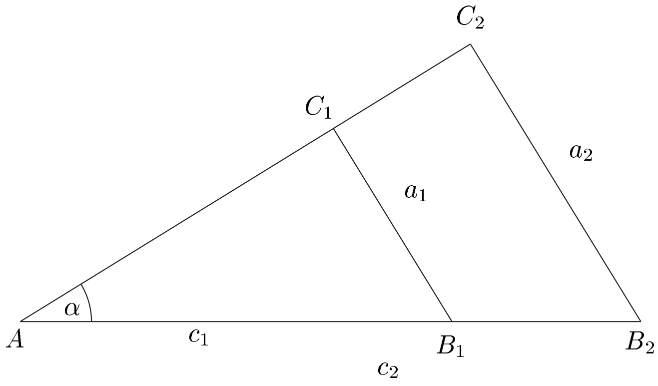


Abbildung 2: Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt das Verhältnis der Länge der Gegenkathete eines Winkels zur Länge der Hypotenuse der Sinus des Winkels.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}\,.$$

Entsprechend definiert man noch die Begriffe Kosinus und Tangens:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}\,, \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}\,.$$

(4.4) Eigenschaften von Sinus, Kosinus und Tangens Wir betrachten das folgende Dreieck mit $\beta = 90° - \alpha$.

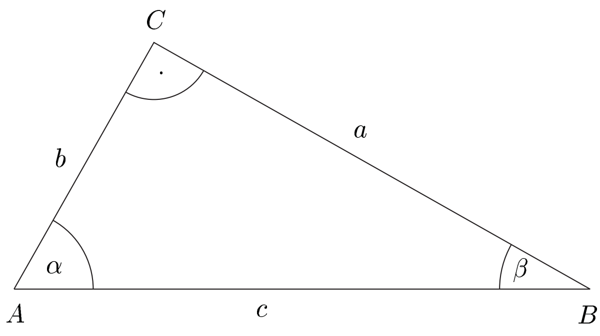


Abbildung 3: Rechtwinkliges Dreieck

Es gelten in diesem Dreieck folgende Aussagen:

(1) $\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha\,,$

(2) $\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\,,$

(3) $\tan\beta = \frac{b}{a} = \tan(90° - \alpha)\,.$

Außerdem gilt

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,,$$

und mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \qquad\qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,.$$

(4.5) Definition am Einheitskreis Jedem Winkel α mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ wird eindeutig der Sinus zugeordnet. Um auch $\alpha = 0^\circ$ und Winkel größer als 90° behandeln zu können, betrachtet man rechtwinklige Dreiecke am Einheitskreis. Dies ist nach den obigen Bemerkungen keine Einschränkung, da die genannten trigonometrischen Größen nur von der Ähnlichkeitsklasse des Dreicks abhängen. Für Winkel $\beta > 90^\circ$ definiert man:

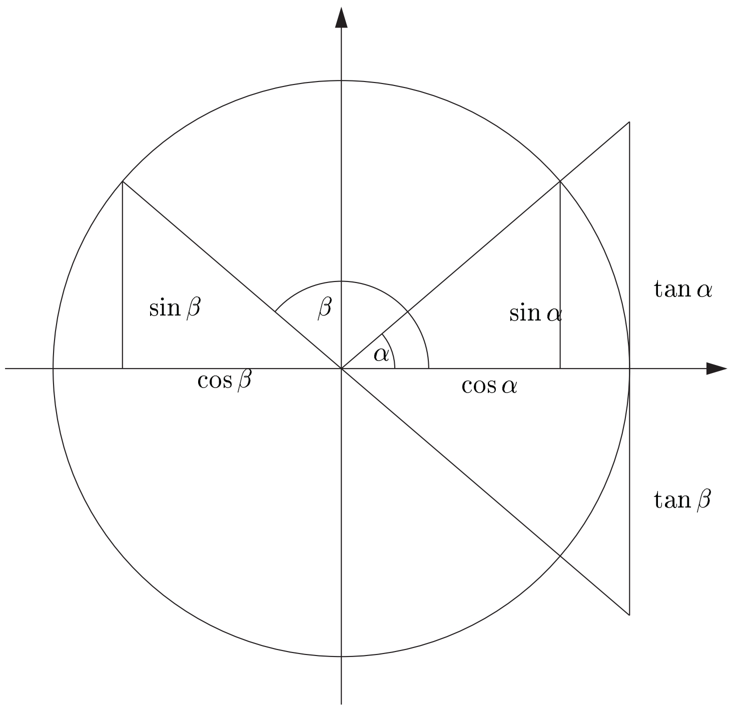


Abbildung 4: Definition am Einheitskreis

Setzt man für Winkel $\beta \geq 360^\circ$ diese Werte periodisch fort (d.h. $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 360^\circ)$), so erhält man Funktionen von α mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k\cdot 360^\circ)\,,$

(2) $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k\cdot 360^\circ)\,,$

(3) $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k\pi) = \tan(\alpha + k\cdot 180^\circ)\,,$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(4.6) Weitere Eigenschaften Es gelten:

(1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha\,,$

(2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\,,$

(3) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\,,$

(4) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha\,,$

(5) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha\,,$

(6) $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha\,,$

(7) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,$

(8) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha\,,$

(9) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha\,,$

(4.7) Der Sinussatz Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel. Also

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,.$$

Beweis Wir betrachten spitz- und stumpfwinklige Dreiecke gesondert.

(1) Für spitzwinklige Dreiecke:

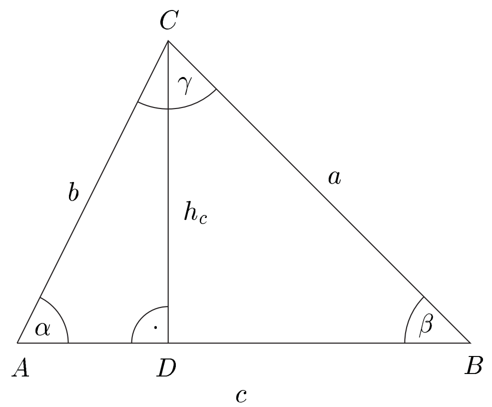


Abbildung 5: Sinussatz im spitzwinkligen Dreieck

Im Dreieck ADC ist $h_c = b \cdot \sin\alpha$, und im Dreieck BDC ist $h_c = a \cdot \sin\beta$. Zusammen folgt also

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,.$$

(2) Für stumpfwinklige Dreiecke:

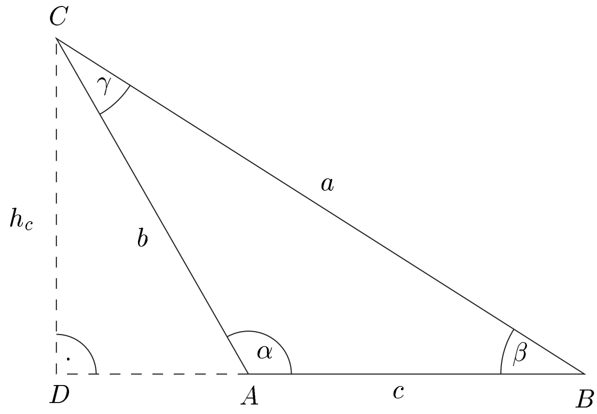


Abbildung 6: Sinussatz im stumpfwinkligen Dreieck

Im Dreieck DAC ist $h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$, und im Dreieck DBC ist $h_c = a \cdot \sin(\beta)$. Wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ folgt daraus also

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,.$$

(4.8) Der Kosinussatz Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Also

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta\,, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

Beweis Wie oben betrachten wir spitz- und stumpfwinklige Dreiecke gesondert.

(1) Für spitzwinklige Dreiecke:

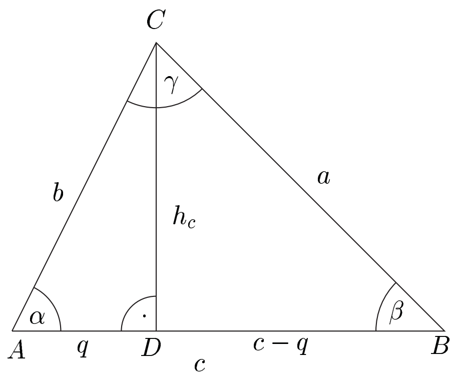


Abbildung 7: Kosinussatz im spitzwinkligen Dreieck

Im Dreieck ADC ist $h_c^2 = b^2 - q^2$, und im Dreieck BDC ist $h_c^2 = a^2 - (c-q)^2$. Zusammen folgt daraus wegen $q = b \cdot \cos\alpha$ also

$$a^2 = b^2 - q^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

(2) Für stumpfwinklige Dreiecke:

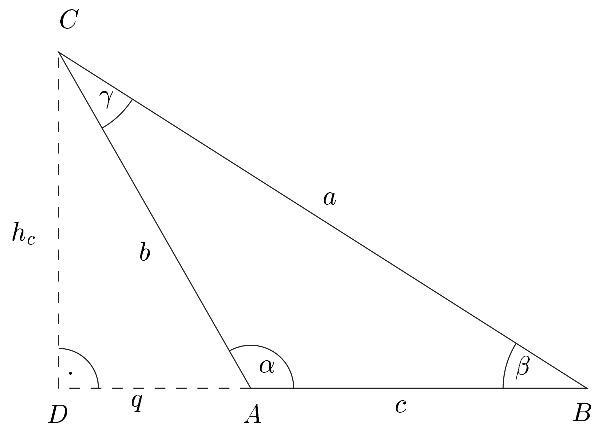


Abbildung 8: Kosinussatz im stumpfwinkligen Dreieck

Im Dreieck ADC ist $h_c^2 = b^2 - q^2$, und im Dreieck BDC ist $h_c^2 = a^2 - (c+q)^2$. Zusammen folgt daraus wegen $q = b \cdot \cos(180° - \alpha) = b(-\cos\alpha)$ also

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

(4.9) Trigonometrische Funktionen Wir betrachten Sinus, Kosinus und Tangens nun tatsächlich als Funktionen.

(1) Die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\,, x \mapsto \sin(x)$ heißt Sinusfunktion, sie hat die Periode 2π und folgende Gestalt:

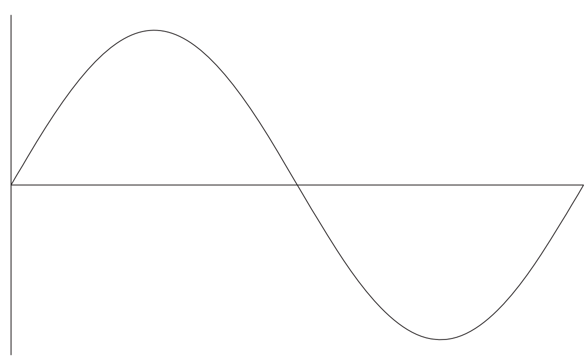


Abbildung 9: Sinus

Eine andere Darstellung des Sinus erhält man durch die unendliche Reihe

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots .$$

(2) Die Funktion $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\,, x \mapsto \cos(x)$ heißt Kosinusfunktion, sie hat die Periode 2π und folgende Gestalt:

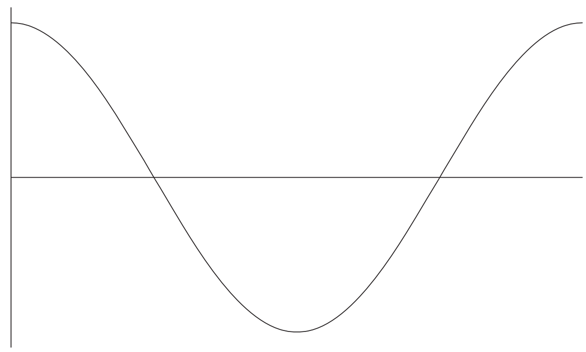


Abbildung 10: Kosinus

Eine andere Darstellung des Kosinus erhält man durch die unendliche Reihe

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

(3) Die Funktion $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to [-1,1]\,, x \mapsto \tan(x)$ heißt Tangensfunktion, sie hat die Periode π und die Gestalt:

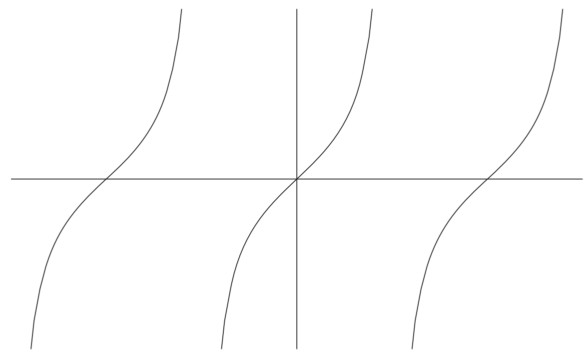


Abbildung 11: Tangens

Die Definitionsmenge kommt zustande, weil

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

gilt und der Tangens somit an den Nullstellen des Kosinus nicht definiert ist.

(4.10) Arcusfunktionen Wenn man den Definitionsbereich von Sinus, Kosinus und Tangens geeignet einschränkt, sind alle drei Funktionen auf diesem Bereich bijektiv und somit umkehrbar.

(1) Die Umkehrfunktion von $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ heißt arcus sinus

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,.$$

(2) Die Umkehrfunktion von $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ heißt arcus cosinus

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]\,.$$

(3) Die Umkehrfunktion von $\tan\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ heißt arcus tangens

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,.$$

Übungsaufgaben

(1) Der Schlußanstieg der letzten Bergetappe der Tour de France hat eine Steigung von 14 Prozent. Wie groß ist der Steigungswinkel?

(2) Eine 10 Meter lange Leiter ist an ein Baumhaus gelehnt. Das untere Ende der Leiter ist 5 Meter vom Baum entfernt. Wir groß ist der Neigungswinkel?

(3) Berechne die fehlenden Seiten folgender rechtwinkliger Dreiecke (dabei ist c die Hypotenuse).

(a) $a = 10$ cm und $\alpha = 30°$

(b) $a = 7$ cm und $\alpha = 45°$

(c) $b = 13$ cm und $\alpha = 53°$

(d) $c = 21$ cm und $\beta = 30°$

(4) Die Spitze des Eiffelturms ist aus 500 m Entfernung unter einem Erhebungswinkel von $32,7°$ zu sehen. Wie hoch ist der Eiffelturm?
(Die Augenhöhe des Beobachters sei außer acht gelassen)

(5) Berechne die fehlenden Größen in einem Dreieck ABC , wenn gegeben sind:

(a) $a = 25$ cm, $\alpha = 10°$ und $\beta = 70°$

(b) $c = 30$ cm, $\alpha = 40°$ und $\beta = 20°$

(c) $a = 50$ cm, $b = 20$ cm und $\alpha = 75°$

(6) Berechne die fehlenden Größen in einem Dreieck ABC, wenn gegeben sind:

(a) $b = 60$ cm, $c = 100$ cm und $\alpha = 80°$

(b) $a = 35$ cm, $c = 40$ cm und $\beta = 45°$

(c) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm und $\gamma = 120°$

(7) Benutze die Additionstheoreme $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ vom Sinus und $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ vom Kosinus, um zu beweisen, dass

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

für alle α und β gilt.

5 Exponential- und Logarithmusfunktion

(5.1) Rechnen mit Potenzen Ein Produkt von n gleichen Faktoren a kann als

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

geschrieben werden. Dabei nennt man a die Basis und n den Exponenten der Potenz a^n. Es gelten folgende Potenzgesetze:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$,

(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

(3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

(4) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Wir definieren weiterhin $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Damit sind Potenzen mit beliebigen rationalen Koeffizienten erklärt:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m .$$

Es gilt zum Beispiel $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 5^{\sqrt{16}} = 5^4 = 625$.

(5.2) Der Logarithmus Für $b^x = a$ mit $a, b > 0$ nennt man $x = \log_b a$ den Logarithmus von a bezüglich der Basis b . Der Logarithmus hat die Eigenschaften

$$\log_b 1 = 0 , \quad b^{\log_b a} = a, \quad \log_b b^x = x .$$

Aus $2^x = 16$ folgt zum Beispiel $x = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.

(5.3) Logarithmengesetze Es gelten folgende Gesetze für alle positiven reellen Zahlen x, y:

(1) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$,

(2) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$,

(3) $\log_b x^n = n \log_b x$,

(4) $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x$.

(5.4) Logarithmusfunktionen Sei $b > 0$. Die Funktion $\log_b \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_b x$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis b .

(5.5) Exponentialfunktionen Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ , x \mapsto a^x$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a . Die Exponentialfunktion zur Basis a ist Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_a x$.

(5.6) Die Eulersche Zahl Es stellt sich die Frage, welche Basis bei Exponentialfunktion und Logarithmus von besonderer Bedeutung ist. Die Antwort auf diese Frage liefert die die Eulersche Zahl

$$e := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.17828\,.$$

Man nennt $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \,, x \mapsto e^x$ die Exponentialfunktion.

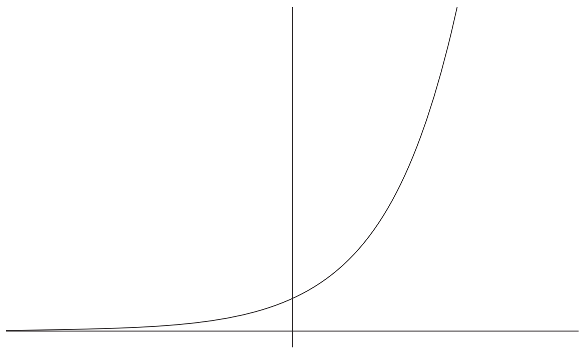


Abbildung 12: Exponentialfunktion

Es gilt $(e^x)' = e^x$, die Exponentialfunktion ist also gleich ihrer Ableitung. Neben der Nullabbildung (und allen Funktionen $x \mapsto e^{x+k}$ mit $k \in \mathbb{R}$) ist sie die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft. Für die Exponentialfunktion exp existiert die Reihendarstellung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \,, x \mapsto e^x$ heißt natürlicher Logarithmus $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_e x\,.$

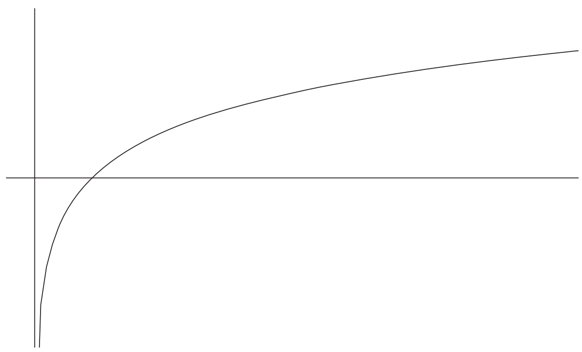


Abbildung 13: Logarithmus

(5.7) Allgemeine Potenz und Logarithmus Die allgemeine Potenz läßt sich mit Hilfe von Exponentialfunktion und natürlichem Logarithmus darstellen als

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a},$$

und den allgemeinen Logarithmus erhält man durch

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

Übungsaufgaben

(1) Stelle als Potenz dar.

(a) $(\sqrt[3]{x})^3$

(b) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^3$

(c) $\sqrt[nx]{a^n}$

(d) $\sqrt[7]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5}$

(2) Vereinfache.

(a) $\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{y-2}} \cdot \sqrt[5]{x^{4-y}}$

(b) $\frac{\sqrt[y-x]{c^{y+3x}}}{\sqrt[y-x]{c^{4x}}} + \frac{\sqrt[y+x]{c^{3y+2x}}}{\sqrt[y+x]{c^{2y+x}}}$

(c) $\sqrt[ax+bx]{(c+d)^{a+b}} + \sqrt[ax-bx]{(c+d)^{a-b}}$

(d) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$

(e) $\sqrt[9]{a^6 \sqrt[4]{a^{12}}} + \sqrt{\sqrt[6]{b^{10}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^2}}$

(f) $\sqrt[-1/2]{4} - \sqrt[-1/2]{8}$

(3) Bestimme x.

(a) $x = \log_3 81$

(b) $\log_3 x = \frac{1}{2}$

(c) $3^{\log_3 27} = x$

(d) $\log_x \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$

(4) Bestimme die Umkehrfunktion.

(a) $x \mapsto 5^x$

(b) $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$

(c) $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

(d) $x \mapsto 2^x$

(5) Bestimme die dekadischen Logarithmen der folgenden Ausdrücke und vereinfache.

(a) $\left(\frac{ab}{2}\right)^x \cdot \sqrt[3]{x}$

(b) $\sqrt[c]{\frac{m^x \sqrt[5]{a^2}}{(ax)^4 (nz)^7}}$

(c) $\sqrt[a]{\frac{a^4 b^2}{x^5}}$

(d) $a^{x+y} \cdot b^{x-y}$

6 Analytische Geometrie der Ebene

In der analytischen Geometrie werden, wie der Name schon andeutet, geometrische Objekte wie zum Beispiel Punkte, Geraden, Kreise und Ellipsen mit analytischen Mitteln behandelt. Hierzu betrachtet man Koordinatensysteme und beschreibt die geometrischen Sachverhalte in diesen Koordinatensystemen durch Gleichungen.

(6.1) Kartesische und Polarkoordinaten In der Ebene verwendet man im wesentlichen zwei Koordinatensysteme. Im kartesischen oder auch rechtwinkligen Koordinatensystem wird jeder Punkt der Ebene dargestellt durch die Abschnittslängen x und y auf zwei senkrecht stehenden Koordinatenachsen, der Abszisse und der Ordinate (auch x- und y-Achse genannt).

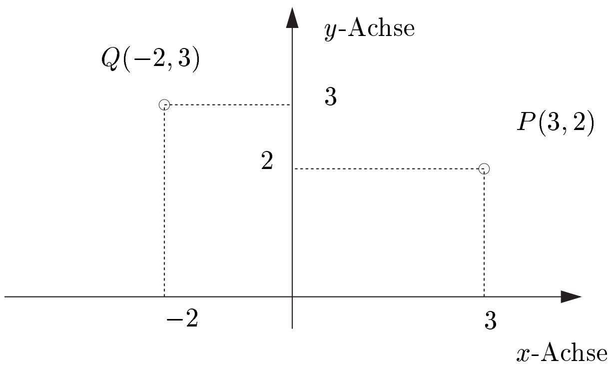


Abbildung 14: Kartesische Koordinaten

In manchen Fällen ist es sinnvoll, einen geometrischen Sachverhalt in Polarkoordinaten darzustellen. Hierbei wird jeder Punkt der Ebene dargestellt durch den Abstand r vom Ursprung und den Drehwinkel φ, um den man die x-Achse drehen muss, damit sie durch den Punkt verläuft.

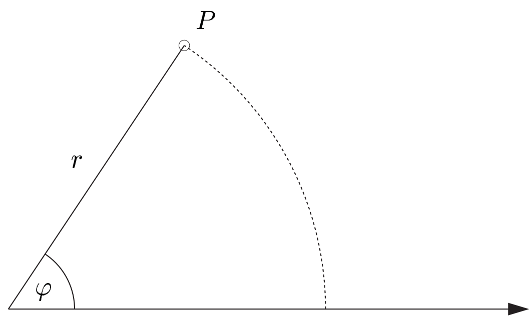


Abbildung 15: Polarkoordinaten

(6.2) Koordinatentransformation Gelegentlich ist es nötig, zwischen diesen beiden Koordinatensystemen zu wechseln.

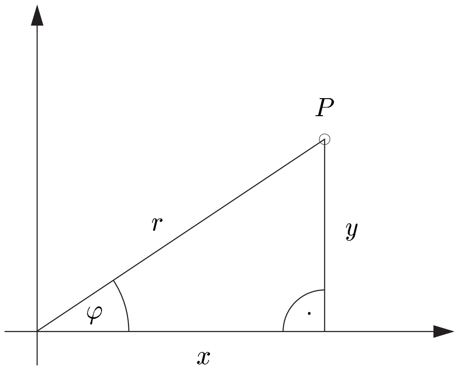


Abbildung 16: Koordinatentransformation

Dem obigen Bild entsprechend gelten

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi\,.$$

Hieraus erhält man die Umrechnungsformeln:

$$x = r\cos\varphi\ , y = r\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \varphi = \arctan\frac{y}{x}\,.$$

Der Punkt $P = (0,1)$ hat zum Beispiel die Polarkoordinaten $r = 1\ , \varphi = \frac{\pi}{2}$.

(6.3) Strecken Gegeben seien zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ in kartesischen Koordinaten.

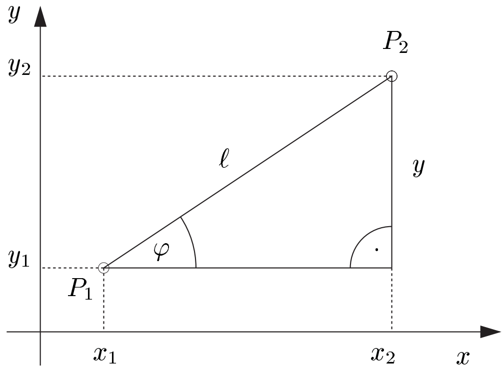


Abbildung 17: Länge und Anstiegswinkel einer Strecke

Die kürzeste Verbindung zwischen P_1 und P_2 nennt man Strecke und schreibt dafür $\overline{P_1P_2}$. Mit dem Satz des Pythagoras kann man die Länge ℓ der Strecke $\overline{P_1P_2}$ leicht berechnen. Es gilt nämlich

$$\ell = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\,.$$

Unter dem Anstieg m einer Strecke oder Geraden versteht man den Tangens des Anstiegswinkels φ. Für $x_1 \neq x_2$ folgt mit dem obigen Bild

$$m = \tan\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Für $x_1 = x_2$ sagt man, der Anstieg sei unendlich groß.

(6.4) Dreiecksungleichung Für drei beliebige Pukte A, B und C gilt stets

$$\ell_{\overline{AB}} + \ell_{\overline{BC}} \geq \ell_{\overline{AC}}\,,$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn B auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt. Diesen Zusammenhang nennt man Dreiecksungleichung, sie besagt im Prinzip nur, dass der direkte Weg immer der kürzeste ist:

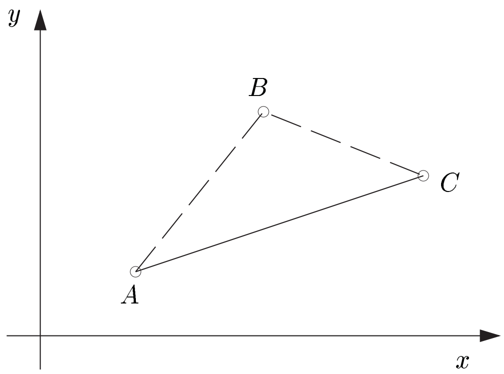


Abbildung 18: Dreiecksungleichung

(6.5) Geraden Eine Gerade entsteht, wenn man eine Strecke über ihre Endpunkte hinaus unendlich weit verlängert. Sie läßt sich auf mehrere Arten beschreiben.

(1) Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte $P = (x_1, x_2)$ und $Q = (x_2, y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ eindeutig gegeben. Ihre Gleichung ist dann:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Man nennt dies Zweipunktform einer Geraden. Eine spezielle Form der Zeipunktform ergibt sich, wenn einer der Punkte auf der x-Achse und der andere auf der y-Achse liegt. Mit $P = (a, 0)$ und $Q = (0, b)$ erhält man in diesem Fall die sogenannte Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,.$$

(2) Eine Gerade ist auch durch einen Punkt $P = (x_1, y_1)$ und ihren Anstieg m eindeutig bestimmt. Ihre Gleichung ist dann

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m\,.$$

Dies nennt man Punktrichtungsform einer Geraden. Durch Umformung vereinfacht sich diese Gleichung zur Normalform

$$y = mx + b\,,$$

dabei bezeichnet b den y-Achsenabschnitt der Geraden (d.h. die Gerade schneidet die y-Achse im Punkt $(0, b)$).

Ist in der Zweipunktform $x_1 = x_2 = k$ bzw. der Anstieg in der Punktrichtungsform unendlich groß und $x_1 = k$, so erhält man die spezielle Gerade $x = k$. Diese Gerade ist aber deshalb vom analytischen Standpunkt unschön, weil sie nicht Bild einer Funktion sein kann.

(6.6) Schnitt zweier Geraden Zwei Geraden mit Anstiegen m_1 und m_2 sind entweder parallel, gleich oder haben genau einen Schnittpunkt.

(1) Zwei Geraden sind parallel, wenn $m_1 = m_2$ gilt.

(2) Zwei Geraden sind gleich, wenn sie parallel sind und einen gemeinsamen Punkt besitzen.

(3) Sonst scheiden sich die Geraden in genau einem Punkt, den man bekommt, indem man das aus den beiden Geradengleichungen bestehende Gleichungssystem löst. Den Schnittwinkel berechnet man durch die Formel

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|\,.$$

Beträgt der Schnittwinkel 90°, so nennt man die Geraden senkrecht oder orthogonal. Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

gilt.

(6.7) Kreis Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben. M heißt Mittelpunkt und r Radius des Kreises. Der Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ und Radius r hat nach Satz des Pythagoras die Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,.$$

Ist der Mittelpunkt der Ursprung, so ergibt sich die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

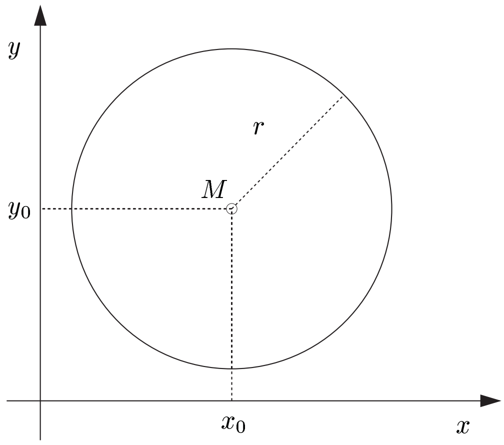


Abbildung 19: Kreis

Die allgemeine Form der Kreisgleichung ist

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (A \neq 0)\,.$$

In der Physik verwendet man häufig eine Form der Kreisgleichung, bei der der Kreis durch einen Parameter (oft der Zeit t) durchlaufen wird. Dies ist die Parameterdarstellung des Kreises:

$$x = x_0 + r\cos t\,, \quad y = y_0 + r\sin t\,.$$

Wenn hierbei t von 0 bis 2π läuft, wird der Kreis genau einmal durchlaufen.

(6.8) Ellipse Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 die konstante Summe $2a$ haben.

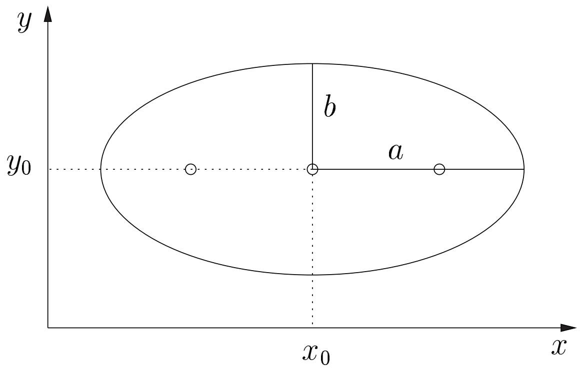


Abbildung 20: Ellipse

F_1 und F_2 heißen Brennpunkte der Ellipse. Die Gleichung der Ellipse in achsenparalleler Lage (siehe Bild) ist etwas umständlich unter Ausnutzung des Satzes des Pythagoras herzuleiten. Es ergibt sich die Mittelpunktsform

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

a und b heißen Halbachsen der Ellipse, der Kreis ist ein Spezialfall der Ellipse mit $a^2 = b^2$. Die allgemeine Form der Ellipsengleichung lautet

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0\,, \quad A \cdot B > 0\,.$$

Genau wie beim Kreis gibt es eine einfache Parameterform der Ellipsengleichung, nämlich

$$x = x_0 + a\cos t\,, \quad y = y_0 + b\sin t\,.$$

Übungsaufgaben

(1) Rechne in Polarkoordinaten um.

(a) $P_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (b) $P_2 = (1, -1)$.

(2) Rechne in kartesische Koordinaten um.

(a) Q_1 mit $r = 3$ und $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, (b) Q_2 mit $r = 1$ und $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

(3) Berechne die drei Abstände zwischen den Punkten $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Berechne auch die Anstiege der drei Strecken und daraus dann die Innenwinkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$.

(4) Berechne die Längen der Strecken zwischen den drei Punkten $A = (-2, 3)$, $B = (4, 1)$ und $C = (-5, 4)$ und entscheide danach, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen oder nicht.

(5) In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = -\frac{4}{3}x + 8$ die Koordinatenachsen?

(6) Welches ist die Normalform der Geraden, die durch den Punkt $(-1, 2)$ geht und parallel zur Geraden durch die Punkte $(0, 3)$ und $(5, 1)$ ist?

(7) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden durch die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 2)$ bzw. $(0, 0)$ und $(3, -1)$?

(8) Berechne den Abstand des Punktes $P = (0, 1)$ von der Geraden g mit dem x-Achsenabschnitt $a = -2$ und y-Achsenabschnitt $b = 4$. (Bestimme dazu die zu g senkrechte Gerade h durch P und berechne den Schnittpunkt Q von g und h. Der gesuchte Abstand ist gerade der Abstand von P und Q.)

(9) Was ist der x-Achsenabschnitt der zur Geraden $2x + 5y = 1$ senkrechten Geraden, die die y-Achse im Punkt $(0, 1)$ schneidet?

(10) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises mit der Gleichung $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y - 54 = 0$.

(11) Welchen Mittelpunkt und welchen Radius hat der Umkreis des Dreiecks ABC mit $A = (-2, 6)$, $B = (5, -1)$ und $C = (-3, 3)$?

(12) Welche Gleichung hat der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ in Polarkoordinaten?

(13) Gib eine Parameterdarstellung des Kreises $4x^2 + 4y^2 + 16x + 24y + 43 = 0$ an.

(14) Wie lautet die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in Polarkoordinaten?

Die Sprache der Hochschulmathematik

7 Logik

(7.1) Aussagen Eine Aussage ist ein sinnvoller Satz, der einen Sachverhalt der objektiven Realität beschreibt und dem eindeutig ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Eine Aussage ist wahr, wenn sie die objektive Realität richtig beschreibt. Man sagt, die Aussage besitzt den Wahrheitswert w. Andernfalls ist die Aussage falsch, sie besitzt den Wahrheitswert f.
Eine Aussage muss entweder wahr oder falsch sein, eine dritte Möglichkeit besteht nicht. Daher existieren auch keine Aussagen, die sowohl wahr als auch falsch bzw. weder wahr noch falsch sind.

(7.2) Beispiele

(a) Der Rhein fließt durch Göttingen.

(b) Mathe ist doof.

(c) 3 ist eine Primzahl.

(d) 4 ist keine Primzahl.

(e) Nicole Kidman ist schön.

Bei (a), (c) und (d) handelt es sich um Aussagen, bei (b) und (e) nicht.

(7.3) Logische Verknüpfungen

(1) Unter der Negation einer Aussage A versteht man die Aussage $\neg A$ („nicht A“), die genau dann wahr ist, wenn A nicht wahr ist.

(2) Unter der Konjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \wedge B$ („A und B“), die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind.

(3) Unter der Disjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \vee B$ („A oder B“), die genau dann wahr ist, wenn eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist. Das logische „oder“ wird niemals im Sinne von „entweder ... oder“ verwendet.

(4) Unter der Implikation $A \Rightarrow B$ („wenn A, dann B“) versteht man die logische Verknüpfung $\neg A \vee B$.

(5) Unter der Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B“) zweier Aussagen A und B versteht man die logische Verknüpfung $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

(7.4) Beispiele

(a) 5 ist eine gerade Zahl.

(b) 5 ist keine gerade Zahl.

(c) 3 ist eine Primzahl und Stefan Raab ist Bundespräsident.

(d) 3 ist eine Primzahl oder Stefan Raab ist Bundespräsident.

(e) $e > 3 \vee 1 + 1 = 0$.

(f) Rot ist eine Farbe $\wedge$ $100 < 101$.

(g) Wenn Köln an der Mosel liegt, dann hat der März 31 Tage.

(h) Wenn Köln an der Mosel liegt, dann hat der März 30 Tage.

(i) $1 + 1 = 2 \Rightarrow$ 4 ist eine Primzahl.

(j) $1 + 1 = 2 \Rightarrow$ 4 ist keine Primzahl.

(k) π ist genau dann irrational, wenn der Papst nicht evangelisch ist.

(l) π ist genau dann irrational, wenn der Papst evangelisch ist.

(7.5) Wahrheitstafeln Bei Wahrheitstafeln handelt es sich um ein nützliches Hilfsmittel, um zu verdeutlichen, wann bestimmte Aussagen wahr bzw. falsch sind.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	w	w

Man erkennt an dieser Tafel, dass die Aussagen in einer logischen Implikation nicht unbedingt inhaltlich zusammenhängen müssen. Insbesondere kann man aus falschen Aussagen alles folgern. Beim Gebrauch des Äquivalenzsymbols sollte man vorsichtig sein und es nur verwenden, wenn die Implikation in beide Richtungen wirklich gesichert ist.

(7.6) Tautologien Bei einer Tautologie handelt es sich um eine Verknüpfung von Aussagen, die immer wahr ist, völlig unabhängig davon, ob die eingesetzten Aussagen wahr oder falsch sind.

(7.7) Beispiele Einige Tautologien:

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(b) $A \vee (\neg A)$

(c) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

(d) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

(e) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$

(f) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

(g) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

(h) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(i) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(j) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(k) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(l) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(m) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(n) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(7.8) Aussageformen Bei einer Aussageform handelt es sich um einen Aussagesatz, in dem mindestens eine Variable vorkommt. Einer Aussageform kann man keinen Wahrheitswert zuordnen, man erhält aus ihr erst eine Aussage, wenn man für die Variablen Konstanten einsetzt. Dabei sind in der Regel nur Konstanten aus einem sinnvollen Variablenbereich zugelassen.
Die logischen Verknüpfungen kann man auch auf Aussageformen anwenden, als Ergebnis erhält man wieder Aussageformen.

(7.9) Beispiele

(a) x spielt bei der Band U2.

(b) $x^n + y^n = z^n$ mit $n \geq 3$.

(c) y war Bundeskanzler der Bundesrepublik Deutschland.

(d) Wenn x gerade ist, dann ist auch x^2 gerade.

(e) Wenn $x < 10$ ist, dann ist $x > 0$.

(f) $x^2 + 1 = 0$.

(g) $x \leq y$.

(7.10) Quantoren

(1) Zu einer gegebenen Aussageform $A(x)$ ist die Frage interessant, ob es eine Belegung für die Variable x gibt, so dass die Aussageform zu einer wahren Aussage wird. Um auszudrücken, dass ein Objekt mit bestimmten Eigenschaften existiert, schreibt man $\exists$ („es gibt“). Um in gewissen Fällen zu betonen, dass es genau ein solches Objekt gibt, schreibt man $\exists!$ („es gibt genau ein“).

(2) Neben der Existenzaussage ist die Frage interessant, ob eine bestimmte Aussage für alle möglichen Variablenwerte wahr ist. Für diesen Fall führt man das Zeichen $\forall$ („für alle“) ein, welches besagt, dass eine zugehörige Aussage für alle Elemente eines gewissen Variablenbereichs wahr oder falsch ist.

Die Zeichen $\exists$ und $\forall$ nennt man Quantoren, $\exists$ heißt Existenzquantor und $\forall$ Universalquantor. Besitzt eine Aussageform mehrere Variablen, so kann für jede Variable ein Quantor eingesetzt werden. Dabei ist jedoch die Reihenfolge der Quantoren zu beachten. (vgl. im folgenden Beispiel die Aussagen (e) und (d))

(7.11) Beispiele

(a) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $x^2 - 1 = 0$.

(b) Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $7x + 1 = 0$.

(c) $\exists x \in \mathbb{R} : x > 1$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 1$.

(e) $\exists y \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 1$.

(f) Für alle reellen Zahlen x ist $x^2 + 1 > 0$.

(7.12) Negation von Aussagen mit Quantoren Wie negiert man eine Aussage, in der Quantoren verwendet werden? Man überlegt sich, dass die Verneinung der Aussage $\exists x : A(x)$ gleichbedeutend mit der Aussage $\forall x : \neg A(x)$ ist. Entsprechend ist die Verneinung der Aussage $\forall x : A(x)$ gleich $\exists x : \neg A(x)$. Um eine Aussage mit Quantoren zu negieren, muss man also zunächst die betrachtete Aussageform negieren und dann alle Existenzquantoren durch Universalquantoren ersetzen und umgekehrt.

(7.13) Beispiel Wir betrachten die Aussageform „Nachts sind x Katzen grau.“ und nennen sie $A(x)$. Damit ergeben sich einige Aussagen, mit denen man sich die Zusammenhänge aus (7.12) klarmachen kann.

(1) $\forall x : A(x)$: Nachts sind alle Katzen grau.

(2) $\exists x : \neg A(x)$: Nachts gibt es eine Katze, die nicht grau ist.

(3) $\exists x : A(x)$: Nachts gibt es eine Katze, die grau ist.

(4) $\forall x : \neg A(x)$: Nachts sind alle Katzen nicht grau.

Übungsaufgaben

(1) Entscheide, bei welchen der folgenden Sätze es sich um Aussagen handelt.

  (a) Das Flugzeugt fährt grün.
  (b) Helmut Schmidt war Bundeskanzler.
  (c) Helmut Schmidt ist Bundeskanzler.
  (d) Albert Einstein war genial.
  (e) Claudia Schiffer ist schön.
  (f) Claudia Schiffer ist blond.
  (g) Claudia Schiffer ist blond oder Claudia Schiffer ist schön.
  (h) Washington ist die Hauptstadt der USA.
  (i) Washington ist die wichtigste Stadt der USA.

(2) Bestimme den Wahrheitswert der Aussagen aus (7.4).

(3) Überprüfe einige der Tautologien aus (7.7) mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

(4) Überlege Dir für die Aussageformen aus (7.9) einen sinnvollen Variablenbereich. Bestimme dann jeweils, falls dies möglich ist, alle (oder einige) Konstanten, welche die Aussageform zu einer wahren Aussage machen.

(5) Drücle die Aussagen aus (7.11) jeweils in Quantoren- bzw. Textschreibweise aus.

(6) Drücke die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

in Textform aus.

(7) Negiere die Aussagen aus (7.11).

(8) Michael Schumacher kommt mit seinem Auto an eine Weggabelung und weiß nicht, welchem Weg er nehmen muss, um zum Ziel zu kommen. An der Gabelung stehen zwei Brüder, die beide den richtigen Weg kennen. Einer von beiden lügt immer, der andere sagt immer die Wahrheit. Michael Schumacher hat nur Zeit für eine einzige Frage, sonst verliert er das Rennen gegen seinen Bruder Ralf. Welche Frage muss er an wen stellen, um den richtigen Weg zu erfahren?

8 Der mathematische Beweis

Im Studium wird man wesentlich öfter Beweise führen müssen, als man dies aus der Schule gewohnt ist. Daher ist ein intensives Training verschiedener Beweismethoden fürs Mathematikstudium äußerst hilfreich.

(8.1) Beweisstruktur Wie sieht ein ordentlicher Beweis aus? Die Beantwortung dieser Frage hängt stark von den persönlichen Vorlieben ab, in der Regel gliedert sich ein Beweis aber in drei Teile:

(1) Voraussetzung(en) V,

(2) Behauptung B,

(3) Folgerung $V \Rightarrow B$.

In der Praxis faßt man (1) und (2) oft zu einer Aussage zusammen und nennt (3) den eigentlichen Beweis. Den Beweisabschluss kennzeichnet man mit *q.e.d.* oder $\square$.

(8.2) Direkter Beweis Ausgehend von der Voraussetzung und eventuell unter Verwendung anderer wahrer Aussagen folgert man die Behauptung durch direkte Implikation.

(8.3) Beispiel Für zwei reele Zahlen a, b mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Voraussetzung: $a \geq 0$ und $b \geq 0$.
Behauptung: Es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Beweis: Aus $(a-b)^2 \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
& a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\ & a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\
\Rightarrow\ & \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq ab \\
\Rightarrow\ & \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \\
\Rightarrow\ & \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2} \geq \sqrt{ab} \\
\Rightarrow\ & \frac{|a+b|}{2} \geq \sqrt{ab} \\
\overset{V}{\Rightarrow}\ & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

(8.4) Indirekter Beweis Wie wir im Abschnitt über Logik festgestellt haben, kann man nur aus falschen Aussagen eine falsche Aussage folgern. Wenn man also aus der Negation $\neg B$ der Behauptung eine falsche Aussage folgern kann, so folgt daraus, dass $\neg B$ falsch und die Behauptung B somit wahr ist. Diese Tatsache ist oft ein nützliches Hilfsmittel beim Beweisen.

(8.5) Beispiel Für zwei reelle Zahlen a, b mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Voraussetzung: $a \geq 0$ und $b \geq 0$.
Behauptung: Es gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Beweis: Angenommen es gilt $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & a+b < 2\sqrt{ab} \\ \overset{V}{\Rightarrow} \quad & (a+b)^2 < 4ab \\ \Rightarrow \quad & a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \\ \Rightarrow \quad & a^2 - 2ab + b^2 < 0 \\ \Rightarrow \quad & (a-b)^2 < 0 \end{aligned}$$

$\square$

(8.6) Spezialfall Wie im Abschnitt über Logik festgestellt wurde, sind die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent. In manchen Fällen, kann es daher geschickt sein, $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$ zu zeigen.

(8.7) Beispiel Sei $n \in \mathbb{Z}$ und n^2 gerade, dann ist auch n gerade.
Voraussetzung: $n \in \mathbb{Z}$ und $2 \mid n^2$.
Behauptung: $2 \mid n$.
Beweis: Angenommen $2 \nmid n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k+1. \\ \Rightarrow \quad & n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ \Rightarrow \quad & n^2 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

$\square$

(8.8) Vollständige Induktion Das Prinzip der Vollständigen Induktion kann ein sehr nützliches Beweisverfahren sein, wenn man eine Aussage $A(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq n_0$ zeigen möchte. Ein Induktionsbeweis gliedert sich in folgende Schritte:

(1) Induktionsanfang IA. Man zeigt, dass $A(n_0)$ gilt.

(2) Induktionsvoraussetzung IV. Man nimmt an, dass die Behauptung für alle n bis zu einem k wahr ist.

(3) Induktionsbehauptung IB. Es wird behauptet, dass dann auch $A(k+1)$ wahr ist.

(4) Induktionsschritt IS. Man folgert $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Nun muß man sich bloß noch überlegen, dass $A(n)$ dadurch für alle $n \geq n_0$ bewiesen ist. Durch den Induktionsanfang weiss man, dass $A(n_0)$ gilt. Anwendung des Induktionsschrittes auf n_0 zeigt, dass auch $A(n_0+1)$ wahr ist. Auf n_0+1 kann man wieder den Induktionsschritt anwenden, usw.

(8.9) Beispiel Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$.
IA: Es gilt $1 = \sum_{i=1}^{1} = \frac{1+1}{2} = 1$.
IV: Es sei $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$.
IB: Dann gilt auch $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+1+1}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
IS: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \overset{\mathrm{IV}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. $\square$

(8.10) Gegenbeispiele Um eine Behauptung zu widerlegen, reicht es aus, ein Beispiel zu finden, für das die Behauptung nicht gilt. Beispielsweise gibt man zum Widerlegen der Behauptung, dass $3x+7 > 12$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, einfach das Gegenbeispiel $x = 0$ an. Umgekehrt reicht es jedoch nicht aus, allgemeine Behauptungen durch einige Beispiele beweisen zu wollen.

(8.11) Fallunterscheidung Beim Beweisen ist es manchmal zweckmäßig, verschiedene Fälle zu unterscheiden. Dies kann einerseits die Übersicht steigern, andererseits treten aber auch in manchen Situationen ganz natürlich verschiedene Fälle auf, die alle beachtet werden müssen.

(8.12) Beispiel Sei n eine ganze Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, dann ist n^2+2 durch 3 teilbar.
Voraussetzung: $3 \nmid n$.
Behauptung: Es gilt $3 \mid (n^2+2)$.
Beweis: Wegen $3 \nmid n$ gilt entweder (I) $n = 3k+1$ oder (II) $n = 3k+2$ mit geeignetem $k \in \mathbb{Z}$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

(I) Es ist $n^2+2 = (3k+1)^2+2 = 9k^2+6k+1+2 = 9k^2+6k+3 = 3(3k^2+2k+1)$.

(II) Es ist $n^2+2 = (3k+2)^2+2 = 9k^2+12k+4+2 = 9k^2+12k+6 = 3(3k^2+4k+2)$.

$\square$

Übungsaufgaben

(1) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

(2) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

(3) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

(4) Seien a, b reelle Zahlen mit $a \neq 0$ und $a + \frac{1}{a} = b$, dann gilt $a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$.

(5) Für eine Primzahl $p \geq 5$ gilt $24 \mid p^2 - 1$.

(6) $2 \nmid n^2 + n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(7) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n > 4$, dann gilt $2^n > n^2$.

(8) Sei $x > -1$, dann gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(9) Sei $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

(10) Die Summe $s = (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 1000)$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

(11) Durch n in eine Ebene gezogene Geraden kann man die Ebene in höchstens 2^n Teile zerlegen.

(12) Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$.

(13) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(14) Die Summe der Winkel in einem konvexen n-Eck ist $(n - 2) \cdot 180°$.

(15) Es gibt keine reellen Zahlen x, y, so dass $x + y = 1 = xy$ ist.

9 Mengenlehre

(9.1) Mengen Unter einer Menge kann man sich die Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einer Gesamtheit vorstellen. Ein Objekt x, das zu einer Menge M gehört, heißt Element dieser Menge. Man schreibt $x \in M$.

(9.2) Beispiele

(a) Die Menge $\{w, e, i, n\}$ enthält die vier Buchstaben w, e, i und n. Sie ist gleich den Mengen $\{w, i, e, n\}$ und $\{w, e, i, n, e, n\}$, denn Reihenfolge und Mehrfachnennung verändern die Menge nicht. Frage: Wie kommt diese Eigenschaft in der Definition zum Ausdruck? Gibt es die Menge aller Mengen?

(b) Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen.

(c) Die Menge $\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ ist eine gerade Zahl}\}$.

(d) Die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$.

(e) Die leere Menge $\varnothing = \{\,\}$, die keine Elemente enthält.

(f) Die Menge {Alle Olympiasieger seit 1972}.

(9.3) Teilmengen

(1) Eine Menge N heißt Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von N auch in M enthalten ist. Man schreibt dann $N \subseteq M$.

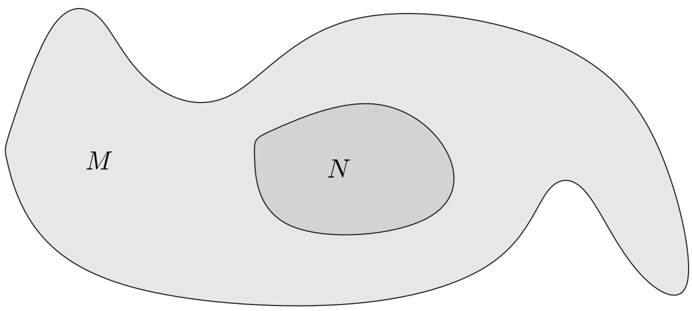


Abbildung 21: Teilmenge einer anderen Menge

(2) Wenn sowohl $N \subseteq M$ als auch $M \subseteq N$ gelten, sind die Mengen gleich, und man schreibt $N = M$.

(3) Ist $N \subseteq M$ aber N ungleich M, schreibt man auch $N \subsetneq M$.

(9.4) Beispiele

(a) $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z}$.

(b) Jede Menge M enthält sich selbst, $M \subseteq M$.

(c) Jede Menge M enthält die leere Menge, $\varnothing \subseteq M$.

(d) $\{w, i, e\} \subsetneqq \{w, i, e, n\}$.

(9.5) Verknüpfungen von Mengen Seien M und N Mengen.

(1) Die Menge $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ heißt Vereinigung von M und N.

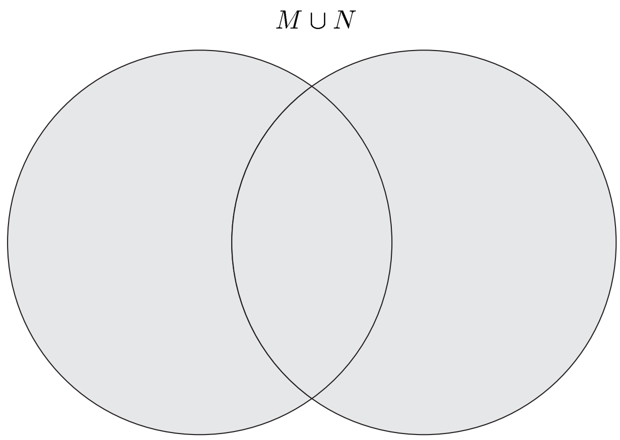


Abbildung 22: Vereinigung von Mengen

(2) Die Menge $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ heißt Schnitt von M und N.

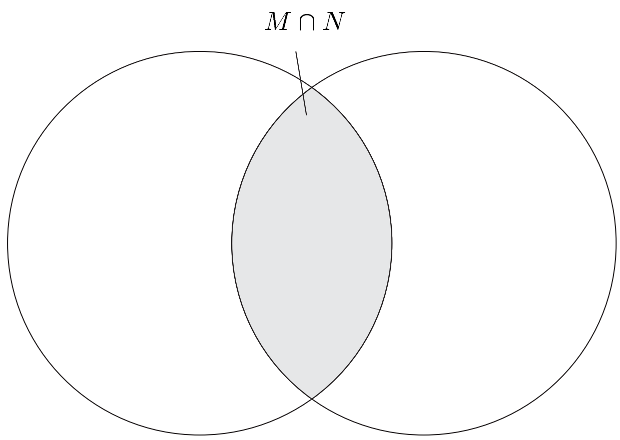


Abbildung 23: Schnitt von Mengen

(3) Die Menge $M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ heißt Differenz von M und N.

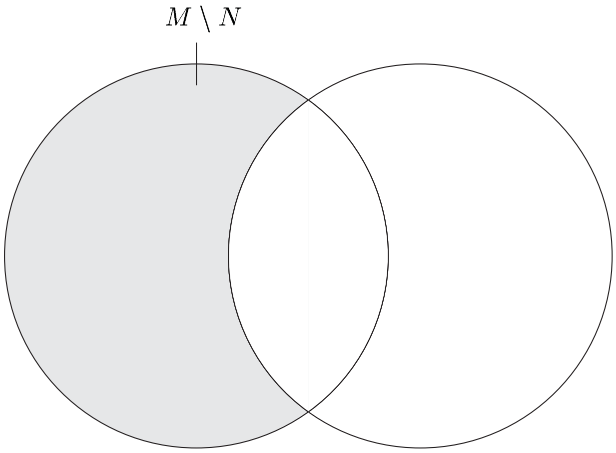


Abbildung 24: Differenz von Mengen

(9.6) Eigenschaften der Verknüpfungen Für beliebige Mengen M, N und P gelten:

$$\left.\begin{array}{l} M \cup N = N \cup M \\ M \cap N = N \cap M \end{array}\right\} \quad \text{Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} (M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P) \\ (M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P) \end{array}\right\} \quad \text{Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \cup (M \cap N) = (P \cup M) \cap (P \cup N) \\ P \cap (M \cup N) = (P \cap M) \cup (P \cap N) \end{array}\right\} \quad \text{Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \setminus (M \cup N) = (P \setminus M) \cap (P \setminus N) \\ P \setminus (M \cap N) = (P \setminus M) \cup (P \setminus N) \end{array}\right\} \quad \text{DeMorgansche Regeln}$$

(9.7) Kartesisches Produkt Seien M und N Mengen. Unter dem kartesischen Produkt

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$$

von M und N versteht man die Menge der geordneten Paare von Elementen aus M und N. Geordnet bedeutet hier, dass man die Elemente (a, b) und (b, a) unterscheidet. Ist $M = N$, so schreibt man auch $M^2 = M \times M$. Analog kann man auch das kartesische Produkt von mehreren Mengen definieren.

(9.8) Beispiele

(a) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{a, b, c\}$ ist $M \times N = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

(9.9) Potenzmenge Sei M eine Menge. Dann versteht unter der Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{T \mid T \subseteq M\}$$

die Menge aller Teilmengen von M.

(9.10) Beispiele

(1) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

(2) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

(3) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Übungsaufgaben

(1) Beweise einige der Regeln aus (8.6).

(2) Seien M, N und P Mengen. Zeige:
Ist $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$, so ist auch $M \subseteq P$.

(3) Seien die Mengen $A := \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \geq x > 1\}$, $C := \{1, 2, 5\}$ und $D := \{3, 4, 5\}$ gegeben. Bestimme

(a) $A \cup B$,
(b) $A \cap B$,
(c) $A \setminus C$,
(d) $B \setminus A$,
(e) $(A \cap B) \cap C$,
(f) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$.

(4) Bestimme

$$\{\text{Alben von U2}\} \cap \{\text{Californication, Achtung Baby, Joshua Tree, Nevermind, Pop}\}.$$

(5) Sei M eine Menge mit genau n Elementen. Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ dann genau 2^n Elemente besitzt.

10 Entwicklung des Zahlbegriffs

(10.1) Die natürlichen Zahlen Ausgangspunkt der Zahlentwicklung sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Auf $\mathbb{N}$ sind zwei Verknüpfungen definiert, die Addition und die Multiplikation. Sie erfüllen für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) && \text{Assoziativität der Addition} \\ a+b &= b+a && \text{Kommutativität der Addition} \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) && \text{Assoziativität der Multiplikation} \\ a\cdot b &= b\cdot a && \text{Kommutativität der Multiplikation} \end{aligned}$$

Außerdem sind Addition und Multiplikation in folgender Weise miteinander verträglich:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \qquad \text{Distributivgesetz}.$$

Wir stellen fest, dass die Eins bezüglich der Mutliplikation eine besondere Rolle spielt. Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $1\cdot a = a = a\cdot 1$. Durch diese Eigenschaft wird die Eins zum neutralen Element der Multiplikation.

(10.2) Die Null Es stellt sich die Frage, welches Element die Rolle der Eins bei der Addition einnimmt. Dies ist die Null 0, sie erfüllt $a+0 = a = 0+a$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Man definiert $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(10.3) Die ganzen Zahlen Es ist wünschenswert die vorhandenen Rechenoperationen umzukehren. Daher definiert man zu jedem Element $a \in \mathbb{N}$ ein negatives $-a$, das sich durch die Eigenschaft $a+(-a) = 0 = -a+a$ auszeichnet. Ein solches Element $-a$ nennt man auch Inverses von a bezüglich der Addition. Daraus erhält man die Menge $\mathbb{Z} := \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\}$ der ganzen Zahlen.

(10.4) Die rationalen Zahlen Durch diese Konstruktion hat man jedoch noch nicht dafür gesorgt, dass man auch die Multiplikation umkehren kann. Analog definiert man daher zu jedem Element $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein inverses Element a^{-1} der Multiplikation durch die Eigenschaft $a\cdot a^{-1} = 1 = a^{-1}\cdot a$. Die Null besitzt kein multiplikativ Inverses. Wir definieren $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$, wobei jedoch zwei Elemente $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als gleich angesehen werden, wenn $a\cdot d = c\cdot b$ gilt.

(10.5) Die reellen Zahlen Die Verknüpfungen haben nun die gewünschten Eigenschaften, aber es gibt noch „Lücken" auf der Zahlengeraden. So hat z.B. die Gleichung $X^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung, anders ausgedrückt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Man erhält die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, indem man die Zahlengerade „auffüllt". Eine richtige Konstruktion der reellen Zahlen wird man im ersten Semester kennenlernen.

(10.6) Die komplexen Zahlen Auch in $\mathbb{R}$ kann man nicht jede Gleichung lösen, so hat z.B. $X^2+1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$. Man definiert daher eine neue Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ und erhält die Menge $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ der komplexen Zahlen. Genaueres zu den komplexen Zahlen folgt im nächsten Abschnitt.

Übungsaufgaben

(1) Beweise, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

(2) Überlege, wie man $\mathbb{R}$ sinnvoll konstruieren kann.

(3) Bestimme die reellen Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $X^2 + X - 2 = 0\,,$

(b) $X^4 - 4 = 0\,,$

(c) $X^3 + X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{4} = 0\,,$

(d) $X^3 + 2X^2 - X - 2 = 0\,,$

(e) $X^5 - X^4 - 4X + 4 = 0\,,$

(f) $5X^3 + 20X^2 + 5X - 30 = 0\,.$

11 Rechnen mit komplexen Zahlen

(11.1) Komplexe Zahlen Wir definieren die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als die Menge der geordnete Paare (x, y) reeller Zahlen (also anschaulich als Punkte in der Ebene), die mit folgenden Verknüpfungen versehenen sind:

(1) Komponentenweise Addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Man kann sich die Addition veranschaulichen, indem man sich die komplexen Zahlen in der reellen Ebene vorstellt. Dann ist die komplexe Addition nichts anderes als die Addition von Vektoren:

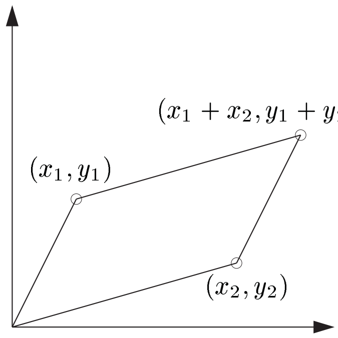


Abbildung 25: Addition von komplexen Zahlen

(2) Multiplikation $(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Für die grafische Veranschaulichung der Multiplikation ist eine Untersuchung der komplexen Zahlen hilfreich, daher kommen wir später dazu.

Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl. Dann heißt x Realteil und y Imaginärteil von z. Man schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 sind genau dann gleich, wenn sowohl $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ als auch $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$ gilt.

(11.2) Eigenschaften Für alle komplexen Zahlen z_1, z_2 und z_3 gelten

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 && \text{Kommutativität der Addition}\,,\\
(z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) && \text{Assoziativität der Addition}\,,\\
z_1z_2 &= z_2z_1 && \text{Kommutativität der Multiplikation}\,,\\
(z_1z_2)z_3 &= z_1(z_2z_3) && \text{Assoziativität der Multiplikation}\,,\\
(z_1 + z_2)z_3 &= z_1z_3 + z_2z_3 && \text{Distributivität}\,.
\end{aligned}$$

Sei $z = (x, y)$ und $-z = (-x, -y)$, weiterhin sei $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ falls $z \neq (0, 0)$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
z + (0, 0) &= z = (0, 0) + z && (0, 0) \text{ als neutrales Element der Addition}\,,\\
z + (-z) &= (0, 0) = (-z) + z && -z \text{ als Inverses Element der Addition}\,,\\
z \cdot (1, 0) &= z = (1, 0) \cdot z && (1, 0) \text{ als neutrales Element der Multiplikation}\,,\\
z \cdot z^{-1} &= (1, 0) = z^{-1} \cdot z && z^{-1} \text{ als Inverses Element der Multiplikation}\,.
\end{aligned}$$

Diese Eigenschaften besagen, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Was dies genau bedeutet, werden wir im nächsten Abschnitt lernen.

(11.3) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Man kann jede reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ identifizieren. Wegen

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

und

$$(x_1, 0)\cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0\cdot 0, x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0) = (x_1 x_2, 0)$$

sieht man nämlich, dass die komplexen Verknüpfungen für diese Menge von Zahlen den reellen Verknüpfungen entsprechen. Wir schreiben ab jetzt $x = (x, 0)$.

(11.4) Die i-Schreibweise Wir definieren $i := (0, 1)$ und nennen i die imaginäre Einheit. Diese komplexe Zahl verdient eine besondere Beachtung, denn sie hat die Eigenschaft $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ und ist somit eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Damit kann man jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ schreiben als

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Auch wenn es sich hierbei „nur“ um eine andere Schreibweise handelt, so ist sie im Vergleich zur formalen Definition der komplexen Zahlen besonders dann vorteilhaft, wenn es ans Rechnen geht. Der Vorteil ist, dass man mit $z = x + iy$ so rechnen kann, wie man es von den reellen Zahlen gewohnt ist.

(11.5) Beträge und komplexe Konjugation Zu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir:

(1) Den Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Anschaulich ist $|z|$ der Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung.

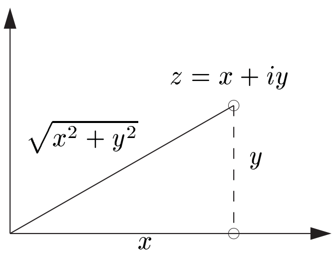


Abbildung 26: Betrag einer komplexen Zahl

(2) Das komplex Konjugierte $\overline{z} = x - iy$. Anschaulich handelt es sich bei der komplexen Konjugation um die Spiegelung des Punktes (x, y) an der x-Achse.

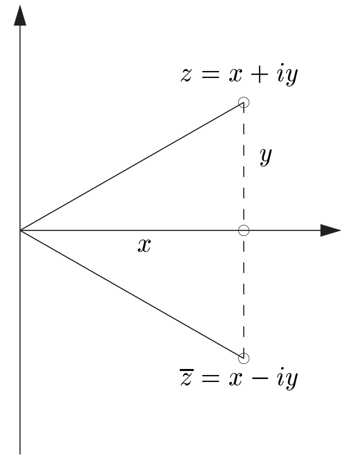


Abbildung 27: Komplexe Konjugation

(11.6) Beispiele

(a) Die Zahl $3 - 4i$ hat den Betrag $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, also in der Zahlenebene den Abstand 5 vom Ursprung.

(b) Das komplex Konjugierte zu $-\frac{1}{2} - 2i$ ist $-\frac{1}{2} + 2i$.

(11.7) Polarkoordinaten Sei $z = x + iy$. Wir betrachten folgende Situation:

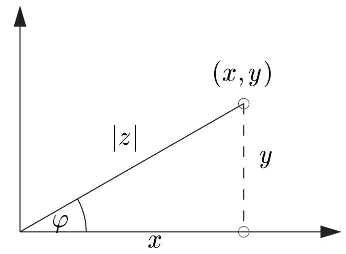


Abbildung 28: Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten

Dann gilt $x = |z| \cdot \cos(\varphi)$ und $y = |z| \cdot \sin(\varphi)$. Daran sieht man, dass z durch seinen Betrag und den Winkel φ eindeutig bestimmt ist. Man nennt $(|z|, \varphi)$ Darstellung von z in Polarkoordinaten. Eine besonders nützliche Schreibweise ist auch $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$. Warum dies so ist, werden wir noch sehen.

(11.8) Beispiele

(a) $z = 1 + i$ kann man auch schreiben als $z = (\sqrt{2} \cdot \cos(45°), \sqrt{2} \cdot \sin(45°))$ bzw. $z = \sqrt{2} \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°))$.

(b) Seien die komplexen Zahlen $z_1 = |z_1| \cdot (cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))$ und $z_2 = |z_2| \cdot (cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$ gegeben. Dann gilt

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

und man kann sich damit die komplexe Multiplikation als Drehstreckung veranschaulichen:

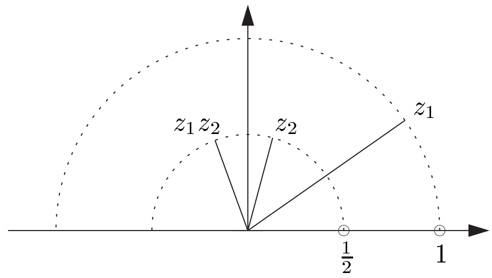


Abbildung 29: Multiplikation von komplexen Zahlen

(11.9) Komplexe Wurzeln Wiederholtes Anwenden der Formel aus Teil (b) des vorigen Beispiels liefert $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$. Damit, mit der obigen Formel und der Periodizität von Sinus und Kosinus kann man nachrechnen, dass

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt.

(11.10) Beispiel Die Gleichung $z^5 = 1$ hat die Lösungen

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad \text{mit } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

(11.11) Die Eulersche Formel Es ist bekannt, dass man die Exponentialfunktion im Reellen durch $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ definieren kann. Die analoge Definition verwendet man auch im Komplexen und betrachtet $e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k$ mit $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Reihendarstellung von Sinus und Kosinus erhält man daraus

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Diese Beziehung nennt man Eulersche Formel.

(11.12) Beispiel Mit Hilfe der Eulerschen Formel rechnet man nach, dass

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) + 1 = -1 + i \cdot 0 + 1 = 0$$

gilt. Diese Formel $e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$ wird von vielen Mathematikerinnen und Mathematikern als die schönste Formel der Mathematik angesehen, weil sie die wichtigsten Zahlen der Mathematik miteinander vereinigt.

Übungsaufgaben

(1) Schreibe folgende komplexe Zahlen in der Form $a + bi$.

(a) $(1 + 2i) + (-4 - 9i)$, (d) $(2 + \sqrt{3}\,i)(3 - \sqrt{2}\,i)$, (g) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i}$,

(b) $(2 + 2i) - (5 + 3i)$, (e) $(\frac{1}{2} - 2i)^{-1}$, (h) $\frac{i}{8-i}(i + 1)$,

(c) $(2 + 3i)(-5 - 2i)$, (f) $\frac{1-4i}{3-4i}$, (i) $(x + yi)(2x + yi)$.

(2) Berechne den Absolutbetrag der komplexen Zahlen aus Aufgabe (1).

(3) Veranschaulische Dir einige der Rechnungen aus Aufgabe (1) grafisch.

(4) Rechne nach, dass für alle komplexen Zahlen gilt

(a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, (d) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, (g) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, (e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

(c) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, (f) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$,

(5) Sei $z = x + yi$ und $\zeta := \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(|z| + x)} + \eta \sqrt{\frac{1}{2}(|z| - x)}\, i \right)$, wobei $\eta = 1$ für den Fall $y \geq 0$ und $\eta = -1$ sonst. Rechne nach, dass dann $\zeta^2 = z$ gilt.

(6) Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen in $\mathbb{C}$.

(a) $z^2 - 6z + 5 = 0$, (e) $z^2 - (2 - 2i)z + 5 + 10i = 0$,

(b) $z^2 - 6z + 9 = 0$,

(f) $z^3 = 1$,

(c) $z^2 - 6z + 34 = 0$,

(d) $z^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}z + 1 = 0$, (g) $z^4 = 1$.

(7) Zeichne die Lösungen (f) und (g) aus Aufgabe (6) in die Zahlenebene (eine eigene Zeichnung pro Teilaufgabe ist für die Übersicht recht hilfreich). Was fällt auf?

(8) Beweise die Eulersche Formel.

(9) Beweise $(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n = \cos(nz) + i \cdot \sin(nz)$ mit Hilfe der Eulerschen Formel.

(10) Beweise die (reellen) Additionstheoreme von Sinus und Kosinus mit Hilfe der Eulerschen Formel.

(11) Rechne die Formel aus dem Beispiel (b) in (11.8) nach, verwende dabei die Additionstheoreme.

12 Grundbegriffe der Algebra

(12.1) Äquivalenzrelationen Unter einer Äquivalenzrelation versteht man eine gegenseitige Beziehung zwischen den Elementen einer Menge M, die bestimmten Eigenschaften genügt. „$\sim$“ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn für alle $a, b, c \in M$ gelten

(Ä1) $a \sim a\,,$

(Ä2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a\,,$

(Ä3) $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c\,.$

Zu jedem $a \in M$ kann man die Klasse $k_a := \{c \in M \mid c \sim a\}$ definieren. Unter der Klasse von a versteht man die Menge aller Elemente aus M, die zu a äquivalent sind.

(12.2) Beispiele

(a) $=$ ist eine Äquivalenzrelation auf einer beliebigen Menge M. Die Klasse von $a \in M$ ist $k_a = \{a\}$.

(b) $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ sind keine Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{R}$.

(c) Sei $M = \mathbb{Z}$ und $a \sim b :\Leftrightarrow a - b$ ist durch 2 teilbar. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. k_0 ist die Klasse der geraden und k_1 die Klasse der ungeraden Zahlen.

(12.3) Gruppen Unter einer Gruppe versteht man eine Menge G, auf der eine Verknüpfung definiert ist, die bestimmten Eigenschaften genügt. Sei „$\circ$“ eine Verknüpfung auf G, dann heißt G Gruppe, wenn für alle $a, b, c \in G$ gelten

(G1) $a \circ b \in G$

(G2) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(G3) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a = a \circ e$ für alle $a \in G$ gilt.

(G4) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$, so dass $a^{-1} \circ a = e = a \circ a^{-1}$ gilt.

Gilt zusätzlich (G5) $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, so heißt G kommutativ.

(12.4) Beispiele

(a) $\mathbb{Z}$ ist eine kommutative Gruppe bzgl. Addition.

(b) $\mathbb{Z}$ ist keine Gruppe bzgl. Multiplikation.

(c) $\mathbb{Q}^*$ ist eine kommutative Gruppe bzgl. Multiplikation.

(d) $\mathbb{N}$ ist weder bzgl. Addition noch Multiplikation eine Gruppe.

(e) Sei $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dann ist G bezüglich der Verknüpfung $a \circ b := a + b + ab$ eine kommutative Gruppe.

(12.5) Endliche Gruppen Bislang haben wir nur Gruppen kennengelernt, die unendlich viele Elemente haben. Aus der Definition einer Gruppe geht keineswegs hervor, dass dies immer so sein muss. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass es auch Gruppen mit endlich vielen Elementen gibt, sogenannte endliche Gruppen.

(a) Seien die Menge $G = \{e, a, b, c = a \circ b\}$ und die Verknüpfung $\circ$ durch die Eigenschaften $a^2 = e$, $b^2 = e$ und $a \circ b = b \circ a$ gegeben. Dann ist G bzgl. $\circ$ eine kommutative Gruppe.

(b) Sei $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ und $a^6 = e$. Dann ist G mit der gegebenen Verknüpfung (die wir hier nicht explizit hinschreiben) eine kommutative Gruppe.

(12.6) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Wir wollen uns nun eine besonders wichtige Gruppe ansehen. Sei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Restklassen aus Aufagbe (2), d.h. der Restklassen der Äquivalenzrelation $a \sim b :\Leftrightarrow a-b$ ist durch n teilbar. Wir bezeichnen diese Restklassen mit $\overline{a} := a + n\mathbb{Z} = \{c \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : c = a + nk\} = \{c \in \mathbb{Z} \mid a - c$ ist durch n teilbar$\}$. Auf dieser Menge definieren wir durch

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$$

eine Verknüpfung. Damit wird $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zur kommutativen Gruppe.

Anschaulich gesprochen rechnet man in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit den Teilerresten ganzer Zahlen bei Division durch n. So lassen zum Beispiel 4 und 7 bei Division durch 3 beide den Rest 1. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist deshalb $4 = 7$ (oder auch $0 = 9$, $2 = 5$, $-1 = 2$, $\ldots$). Wenn man sich diese Zusammenhänge beim Rechnen immer wieder vor Augen führt, wird $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ seinen eventuell unverständlichen Charakter schnell verlieren.

(12.7) Körper Ein Körper K ist eine kommutative Gruppe, auf der eine weitere Verknüpfung definiert ist, die auf bestimmte Weise mit der ersten Verknüpfung zusammenpaßt. Sei K eine kommutative Gruppe mit Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element e, und sei $*$ eine weitere Verknüpfung auf K. Dann heißt K Körper, wenn $K \setminus \{e\}$ bzgl. $*$ eine kommutative Gruppe ist und

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$$

für alle $a, b, c \in K$ gilt.

(12.8) Beispiel $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation.

(12.9) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ In (12.6) haben wir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bereits kennengelernt. Nun betrachten wir den Spezialfall, dass $n = p$ eine Primzahl ist, also $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Mit den Verknüpfungen

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b} \quad \text{und} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

wird $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zum Körper. Man kann dies für einzelne Beispiele wie $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ problemlos nachrechnen, Aufgabe (7). Einen allgemeinen Beweis wollen wir an dieser Stelle aber nicht bringen.

Übungsaufgaben

(1) Begründe, warum es sich bei den Beispielen aus (12.2) um Äquivalenzrelationen bzw. nicht um Äquivalenzrelationen handelt.

(2) Zeige, dass durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ ist durch } n \text{ teilbar}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert ist und bestimme die zugehörigen Äquivalenzklassen.

(3) Begründe, warum es sich bei den Beispielen aus (12.4) um Gruppen bzw. keine Gruppen handelt.

(4) Begründe, warum es sich bei den Beispielen aus (12.5) tatsächlich um Gruppen handelt.

(5) Zeige, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine kommutative Gruppe ist.

(6) Zeige, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist. D.h. rechne die Eigenschaften aus (11.2) nach und verwende hierbei die Tatsache, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

(7) Zeige, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

(8) Berechne in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

(a) 2^{10}

(b) $(-2)^3$

(c) $-16 + 9$

(d) $5 \cdot 8$

(e) $1 + 6$

(f) $3^{12}(8 + 6)(23^2)$

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Summen, Produkte und Binomialkoeffizienten

(1) (a) $\sum_{k=n}^{2n} x_k$

(b) $\sum_{i=0}^{k} a_i x_i$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$

(e) $\sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{10} a_i b_k$

(2) (a) $4 + 5 + 6 + \cdots + (2n+1) + (2n+2)$

(b) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \cdots + \frac{2m+1}{3m+1}$

(c) $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m} + a_{21} + \cdots + a_{2m} + \cdots + a_{n1} + \cdots + a_{nm}$

(d) $x_{1j} y_{jk} + x_{2j} y_{jk} + \cdots + x_{nj} y_{jk}$

(3) (a) n

(b) 35

(c) 1

(d) 288

(4) (a) $a_n + a_{n-1} - a_1 - a_2$

(b) $\frac{20}{21}$

(5) (a) $(n+1) \cdot n \cdot (n-1)$

(b) $2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)$

(c) $x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$

Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

(1) (a) $\mathbb{R} \setminus [-3, -1]$
  (b) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
  (c) $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{7}, 3[$
  (d) $\mathbb{R} \setminus]-3, -1[$
  (e) $\mathbb{R}$
  (f) $[-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}[$
  (g) $\mathbb{R}^+ \setminus \{4\}$
  (h) $[-3, -1[\cup [1, \infty[$

(2) (a) $]-\infty, \frac{3}{5}[$
  (b) $]-3, 3[$
  (c) $]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[$
  (d) $]-\infty, -3[\cup]\frac{1}{9}, \frac{4}{15}[\cup]\frac{6}{5}, \infty[$

(3) (a) $[-1, \frac{2}{3}]$
  (b) $\{-\frac{1}{2}\}$
  (c) $\{-\frac{1}{2}\}$

(4) (a) $]-\infty, 1]$
  (b) $[2, 4]$
  (c) $]\frac{9}{8}, \infty[\setminus \{-2\}$
  (d) $]-\infty, 1] \setminus \{-4\}$

Abbildungen und Funktionen

(1) (a) nein

(b) ja

(c) ja

(d) nein (0 wird nicht eindeutig abgebildet)

(2) (a) bijektiv mit Umkehrabbildung $x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(b) weder noch

(c) surjektiv

(d) bijektiv mit Umkehrabbildung $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

(3) (a) $f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ und $g \circ f \colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(b) $f \circ g \colon \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ und $g \circ f \colon \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(c) $f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2$ und $g \circ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 2x + 2$

(d) $f \circ g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sqrt[4]{x^2}$ und $g \circ f \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt{x}$

Trigonometrie

(1) $\arctan\left(\frac{14}{100}\right) \approx 7{,}97°$

(2) Der Cosinus des fraglichen Winkels ist $\frac{1}{2}$, daher beträgt der Winkel 60°.

(3) (a) $c = 20$ cm, $b = 10\sqrt{3}$ cm $\approx 17{,}3$ cm
   (b) $b = 7$ und $c \approx 9{,}9$ cm
   (c) $c \approx 21{,}6$ cm und $a \approx 17{,}25$ cm
   (d) $b = 10{,}5$ cm und $a \approx 18{,}2$ cm

(4) Der Eiffelturm ist bekanntlich 321 m hoch.

(5) (a) $b = 135{,}3$ cm, $\gamma = 100°$ und 141, 8 cm
   (b) $\gamma = 120°$, $b = 11{,}8$ cm und $a = 22{,}3$ cm
   (c) $\beta = 22{,}7°$, $\gamma = 82{,}3°$ und $c = 51{,}3$ cm

(6) (a) $a = 107{,}3$ cm, $\beta = 33{,}4°$ und $\gamma = 66{,}6°$
   (b) $b = 29{,}1$ cm, $\alpha = 58{,}4°$ und $\gamma = 76{,}6°$
   (c) $c = 30{,}4$ cm, $\alpha = 34{,}7°$ und $\beta = 25{,}3°$

(7)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\,.\end{aligned}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

(1) (a) x
 (b) $x^{\frac{6}{5}}$
 (c) $a^{\frac{1}{x}}$
 (d) $a^{\frac{10}{21}}$

(2) (a) x
 (b) $2c$
 (c) $2(c+d)^{1/x}$
 (d) $-3\sqrt{x}$
 (e) $a+b$
 (f) $\frac{3}{64}$

(3) (a) 4
 (b) $\sqrt{3}$
 (c) 27
 (d) 5

(4) (a) $x \mapsto \log_5 x$
 (b) $x \mapsto \log_{\frac{3}{4}} x$
 (c) $\log_2(x)$
 (d) $x \mapsto \log_2 x$

(5) (a) $x(\log_{10} a + \log_{10} b - \log_{10} 2) + \frac{1}{2}\log_{10} x$
 (b) $\frac{1}{c}\left(\frac{18}{5}\log_{10} a - 7\log_{10} n + x\log_{10} m - 7\log_{10} z\right)$
 (c) $\frac{1}{a}(4\log_{10} a + 2\log_{10} b - 5\log_{10} x)$
 (d) $(x+y)\log_{10} a + (x-y)\log_{10} b$

Analytische Geometrie der Ebene

(1) (a) $r = 1$ und $\varphi = 30^\circ$

(b) $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = 45^\circ$

(2) (a) $Q_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $Q_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $\ell_{P_1P_2} = \sqrt{3}$, $\ell_{P_1P_3} = \sqrt{3}$ und $\ell_{P_2P_3} = 3$.
Der Anstieg der Strecke $\overline{P_1P_2}$ beträgt $\frac{\sqrt{3}}{3}$, der Anstieg der Strecke $\overline{P_1P_3}$ beträgt $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, und der Anstieg der Strecke $\overline{P_2P_3}$ ist unendlich groß.
Der Winkel $P_3P_1P_2$ ist $33{,}33^\circ$, die beiden anderen Winkel betragen jeweils $73{,}3^\circ$.

(4) $\overline{AB} = \sqrt{40}$, $\overline{AC} = \sqrt{10}$ und $\overline{BC} = \sqrt{90}$. Also ist $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, und daher liegt nach dem Zusatz im Abschnitt über die Dreiecksungleichung B auf der Strecke $\overline{AC}$.

(5) Im Punkt $(0, 8)$ wird die y-Achse geschnitten und im Punkt $(6, 0)$ die x-Achse.

(6) $-\frac{2}{5}\,x + \frac{8}{5}$

(7) Im Ursprung unter dem Winkel $\alpha = 70{,}5^\circ$.

(8) g hat die Normalform $y = 2x + 4$, die Normalform von h lautet $y = -\frac{1}{2}\,x + 1$.
Der Schnittpunkt ist $Q = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$. Damit ist der gesuchte Abstand $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

(9) $-\frac{2}{5}$

(10) Es ist $M = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ der Mittelpunkt und $r = 4$ der Radius.

(11) Es ist $M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ der Mittelpunkt und $r = \frac{\sqrt{85}}{2}$ der Radius.

(12) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

(13) $x = -2 + \frac{3}{2}\cos t$, $y = -3 + \frac{3}{2}\sin t$

(14) $\left(\frac{\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{b}\right)^2 = \frac{1}{r^2}$

Logik

(1) Die Lösungen sind:

(a) nein	(d) nein	(g) nein
(b) ja	(e) nein	(h) ja
(c) ja	(f) ja	(i) nein

(2) Die Lösungen sind:

(a) f	(d) w	(g) w	(j) w
(b) w	(e) f	(h) w	(k) w
(c) f	(f) w	(i) f	(l) f

(3) Am Beispiel von (l):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

(4) (a) Variablenbereich: Musiker. Konstanten: Bono, The Edge, Larry Mullen, Adam Clayton.

(b) Bei dieser Aussageform hängt die Schwierigkeit der Lösung sehr stark vom gewählten Variablenbereich ab. Nimmt man die ganzen Zahlen als Variablenbereich für x, y, und z, so erhält man eines der bekanntesten mathematischen Probleme, das erst vor wenigen Jahren gelöst wurde. Reelle Lösungen kann man jedoch leicht bestimmen.

(c) Variablenbereich: Politiker. Konstanten: Konrad Adenauer, Ludwig Erhard, Kurt-Georg Kiesinger, Willy Brandt, Helmut Schmidt, Helmut Kohl, Gerhard Schröder.

(d) Variablenbereich: ganze Zahlen. Konstanten: Alle ganzen Zahlen.

(e) Variablenbereich: reelle Zahlen. Konstanten: Alle positiven reellen Zahlen.

(f) Variablenbereich: reelle Zahlen. Konstanten: keine.

(g) Variablenbereich: reelle Zahlen. Konstanten: zum Beispiel x=2 und y=3.

(5) (a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$.

(b) $\exists! x \in \mathbb{R} : 7x + 1 = 0$.

(c) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, so dass gilt $x + y = 1$.

(e) Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$.

(f) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$.

(6) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$ gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(7) (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0$.

(b) Es existiert nicht genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $7x + 1 = 0$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 1$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y \neq 1$.

(e) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x + y \neq 1$.

(f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$.

(8) An einen beliebigen der beiden Brüder: „Wie würde Dein Bruder auf die Frage antworten, welches der richtige Weg ist?“

Der mathematische Beweis

(1) *Behauptung*: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Es ist $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{(2+1)\cdot(1+1)\cdot 1}{6}$.
IV: Sei $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.
IS: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(2n^2+n+6n+6)(n+1)}{6} = \frac{(2n^2+7n+6)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

□

(2) *Behauptung*: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Es ist $\sum_{i=0}^{1} 2^i = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$.
IV: Sei $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
IS: Es gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

□

(3) *Behauptung*: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen bei den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ handelt es sich um alle Primzahlen. Wir definieren $K := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ und betrachten nun $K+1$. Wenn $K+1$ selbst eine Primzahl ist, dann ist dies ein Widerspruch zur Annahme und die Behauptung ist bewiesen. Sei $K+1$ also nicht prim. Dann ist $K+1$ durch kein p_k mit $k \in \{1, \ldots, n\}$ teilbar, denn

$$\frac{K+1}{p_k} = \frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}{p_k} + \frac{1}{p_k} = p_1 \cdot p_{k-1} \cdot p_{k+1} \cdot \ldots \cdot p_n + \frac{1}{p_k}$$

ist offenbar keine natürliche Zahl. Da aber jede natürliche Zahl größer als Eins durch eine Primzahl teilbar ist, muss es eine Primzahl p geben, die nicht in $\{p_1, \ldots, p_n\}$ enthalten ist. Die Annahme war also falsch. □

(4) *Behauptung*: Seien a, b reelle Zahlen mit $a \neq 0$ und $a + \frac{1}{a} = b$, dann gilt $a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$.
Beweis: Aus $a + \frac{1}{a} = b$ folgt:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = b^3$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a^3 + 3a + 3\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} = b^3 \\
&\Rightarrow \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) \\
&\overset{V}{\Rightarrow} \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b
\end{aligned}
$$

□

(5) *Behauptung*: Für eine Primzahl $p \geq 5$ gilt $24 \mid p^2 - 1$.
Beweis: p ist ungerade, also $2 \mid (p-1)$ und $4 \mid (p+1)$ oder umgekehrt. Somit ist $(p+1)(p-1) = p^2 - 1$ durch Acht teilbar. p ist nicht durch Drei teilbar, also $3 \mid (p-1)$ oder $3 \mid (p+1)$. Daraus folgt $3 \mid p^2 - 1$ und insgesamt $24 \mid p^2 - 1$. □

(6) *Behauptung*: $2 \nmid n^2 + n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ teil 2 entweder n oder $n+1$. Also $2 \mid n(n+1) = n^2 + n$ und somit $2 \nmid n^2 + n + 1$. □

(7) *Behauptung*: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n > 4$, dann gilt $2^n > n^2$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Es ist $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
IV: Sei $2^n > n^2$.
IS: Es ist $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. □

(8) *Behauptung*: Sei $x > -1$, dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Es ist $(1+x)^1 \geq 1 + x$.
IV: Sei $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
IS: Es gilt

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{\text{IV}}{\geq} (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.
\end{aligned}
$$

□

(9) *Behauptung*: Sei $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Es ist $\sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x = \frac{x^2-1}{x-1}$.
IV: Sei $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
IS: Es gilt

$$
\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}.
$$

□

(10) *Behauptung*: Die Summe $s = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+1000)$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

Beweis: s ist offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$ ungleich zwei. Weiterhin ist s Summe von 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen und somit selbst gerade. Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann s keine Primzahl sein. $\square$

(11) *Behauptung*: Durch n in eine Ebene gezogene Geraden kann man die Ebene in höchstens 2^n Teile zerlegen.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Eine durch eine Ebene gezogene Gerade teilt die Ebene in $2 = 2^1$ Teile.
IV: n in eine Ebene gezogene Geraden teilen die Ebene in höchstens 2^n Teile.
IS: Wir betrachten eine Ebene mit n Geraden, die ohne Einschränkung in 2^n Teile zerlegt ist. Eine weitere Gerade kann jeden der vorhandenen 2^n Teile in höchstens zwei Teile zerlegen. Eine Ebene wird durch $n+1$ Geraden also höchstens in $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teile zerlegt. $\square$

(12) *Behauptung*: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$.
Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!}\\ &= \frac{n! \cdot (n-k+1)}{(n-k+1)! \cdot k!} + \frac{n! \cdot k}{(n-k+1)! \cdot k!}\\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1-k)! \cdot k!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

$\square$

(13) *Behauptung*: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: (durch Induktion)
IA: $\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = (x+y)^1$.
IV: Sei $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.
IS: Es gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \overset{\text{IV}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right] \cdot (x+y)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}\\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&\overset{(12)}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

□

(14) *Behauptung*: Die Summe der Winkel in einem konvexen n-Eck ist $(n-2)\cdot 180°$.
Beweis: Man wähle einen beliebigen Punkt im inneren des n-Ecks und verbinde ihn mit allen Eckpunkten. Das n-Eck ist dadurch in n Dreiecke zerlegt. Die Winkelsumme des n-Ecks erhält man nun, indem man die Winkelsummen der Dreiecke addiert und die 360° abzieht, die um den „Mittelpunkt“ herum zuviel addiert wurden. Die Winkelsumme des n-Ecks ist also $n\cdot 180° - 360° = (n-2)\cdot 180°$. □

(15) *Behauptung*: Es gibt keine reellen Zahlen x, y, so dass $x + y = 1 = xy$.
Beweis: Angenommen es gibt reelle Zahlen x, y mit $x + y = 1 = xy$, also insbesondere $x = 1 - y$. Es folgt

$$\begin{aligned}
& 1 = xy = (1-y)y = y - y^2 \\
\Rightarrow\ & y^2 - y + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\
\Rightarrow\ & \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},
\end{aligned}$$

was im Widerspruch dazu steht, dass y eine reelle Zahl ist. □

Mengenlehre

(1) *Behauptung*: Seien M, N und P Mengen. Dann gilt $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.
Beweis: Sei $x \in (M \cap N) \cap P$. Dann ist $x \in M \cap N$ und $x \in P$. Wegen $x \in M \cap N$ folgt $x \in M$ und $x \in N$. Folglich ist $x \in M$ und $x \in N \cap P$, also $x \in M \cap (N \cap P)$. Dies zeigt $(M \cap N) \cap P \subseteq M \cap (N \cap P)$.
Sei Umgekehrt $x \in M \cap (N \cap P)$. Dann ist $x \in M$ und $x \in N \cap P$. Wegen $x \in N \cap P$ folgt $x \in N$ und $x \in P$. Es ist also $x \in M \cap N$ und $x \in P$, also $x \in (M \cap N) \cap P$. Dies zeigt $(M \cap N) \cap P \supseteq M \cap (N \cap P)$. $\square$

(2) *Behauptung*: Seien M, N und P Mengen. Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$ folgt $M \subseteq P$.
Beweis: Wenn M die leere Menge ist, dann ist die Behauptung klar. Sei nun $x \in M$ beliebgig. Aus $M \subseteq N$ folgt, dass $x \in N$ ist. Aus $N \subseteq P$ folgt wiederum, dass $x \in P$ ist. Alle Elemente von M sind also auch Elemente von P. $\square$

(3) Die Lösungen sind

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$.
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$.
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$.
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$.
(e) $\{2\}$.
(f) $\varnothing$.

(4) {Achtung Baby, Joshua Tree, Pop}

(5) *Behauptung*: Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat genau 2^n Teilmengen.
Beweis: (durch Induktion)
IA: Die Menge $\{1\}$ hat genau $2 = 2^1$ Teilmengen, nämlich $\varnothing$ und $\{1\}$.
IV: Die Menge $M_k := \{1, \ldots, k\}$ hat genau 2^k Teilmengen.
IS: Die Teilmengen von M_k sind auch Teilmengen von M_{k+1}. Darüber hinaus hat M_{k+1} nur noch die Teilmengen, die entstehen, wenn man den Teilmengen von M_k noch das Element $k+1$ hinzufügt. M_{k+1} hat also genau $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ Teilmengen. $\square$

Entwicklung des Zahlbegriffs

(1) *Behauptung*: $\sqrt{2}$ ist irrational.
Beweis: Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q \neq 0$, so dass gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ bzw. $p^2 = 2q^2$. Folglich ist p^2 eine gerade Zahl, somit ist auch $p := 2x$ gerade. Einsetzen liefert somit durch

$$q^2 = \frac{1}{2}p^2 = 2x^2,$$

dass auch q gerade ist. Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass p und q teilerfremd sind. $\square$

(2) ...

(3) Die reellen Lösungen sind

(a) $1, -2$

(b) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

(c) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

(d) $1, -1, -2$.

(e) $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

(f) $1, -2, -3$.

Rechnen mit komplexen Zahlen

(1) Die Lösungen sind:

(a) $-3-7i$

(b) $-3-i$

(c) $-4-19i$

(d) $\sqrt{6}+6+(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})i$

(e) $\frac{2}{17}+\frac{8}{17}i$

(f) $\frac{19}{25}-\frac{8}{25}i$

(g) $\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{1}{5}i$

(h) $-\frac{9}{65}+\frac{7}{65}i$

(i) $2x^2-y^2+3xyi$

(2) Die Lösungen sind:

(a) $\sqrt{58}$

(b) $\sqrt{29}$

(c) $\sqrt{377}$

(d) $\sqrt{77}$

(e) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

(f) $\frac{\sqrt{17}}{5}$

(g) 1

(h) $\frac{\sqrt{130}}{65}$

(i) $\sqrt{4x^4+5x^2y^2+y^4}$

(3) Am Beispiel von (b):

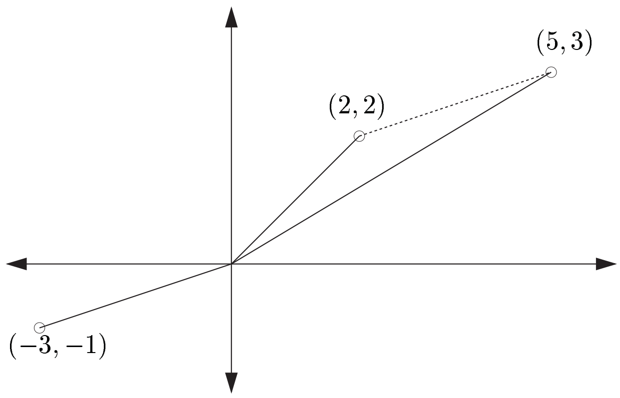


Abbildung 30: Veranschaulichung der komplexen Addition

(4) Man schreibt $z=x+yi$ und rechnet nach

(a)

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= \overline{x_1+y_1i+x_2+y_2i}=\overline{x_1+x_2+(y_1+y_2)i}\\ &= x_1+x_2-(y_1+y_2)i=x_1-y_1i+x_2-y_2i=\overline{z_1}+\overline{z_2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i}\\ &= x_1x_2-y_1y_2-(x_1y_2+x_2y_1)i=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)=|z_1|\cdot|z_2|\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\overline{z^{-1}} &= \overline{(x_1+y_1i)^{-1}}=\overline{\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i}\\ &= \frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}i=(x-yi)^{-1}=\overline{z}^{-1}\end{aligned}$$

(d)

$$z\cdot \overline{z} = (x+yi)\overline{(x+yi)} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = |z|^2$$

(e)

$$\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2+x_2y_1)i| \\
&= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} = \sqrt{(x_1+y_1)^2(x_2+y_2)^2} \\
&= \sqrt{(x_1+y_1)^2}\sqrt{(x_2+y_2)^2} = |z_1|\cdot|z_2|
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
|z^{-1}| &= |(x+yi)^{-1}| = |\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i| \\
&= \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = |z|^{-1}
\end{aligned}$$

(g)

$$|\frac{z_1}{z_2}| = |z_1\cdot z_2^{-1}| \overset{(e)}{=} |z_1|\cdot|z_2^{-1}| \overset{(f)}{=} |z_1|\cdot|z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(5) Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}(|z|+x)} + \eta\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-x)}\,i\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(|z|+x) + 2\eta\sqrt{\frac{1}{4}(|z|^2-x^2)}\,i - \frac{1}{2}(|z|-x) \\
&= x + \eta\sqrt{(x^2+y^2-x^2)}\,i = x + \eta|y|\,i \\
&= x + yi = z
\end{aligned}$$

(6) Die Lösungen sind:

(a) 5, 1

(b) 3

(c) $3 \pm 5i$

(d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \sqrt{2}\,i$

(e) $3-4i,\ -1+2i$

(f) $1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(g) $\pm 1,\ \pm i$

(7) Die dritten und vierten Einheitswurzeln:

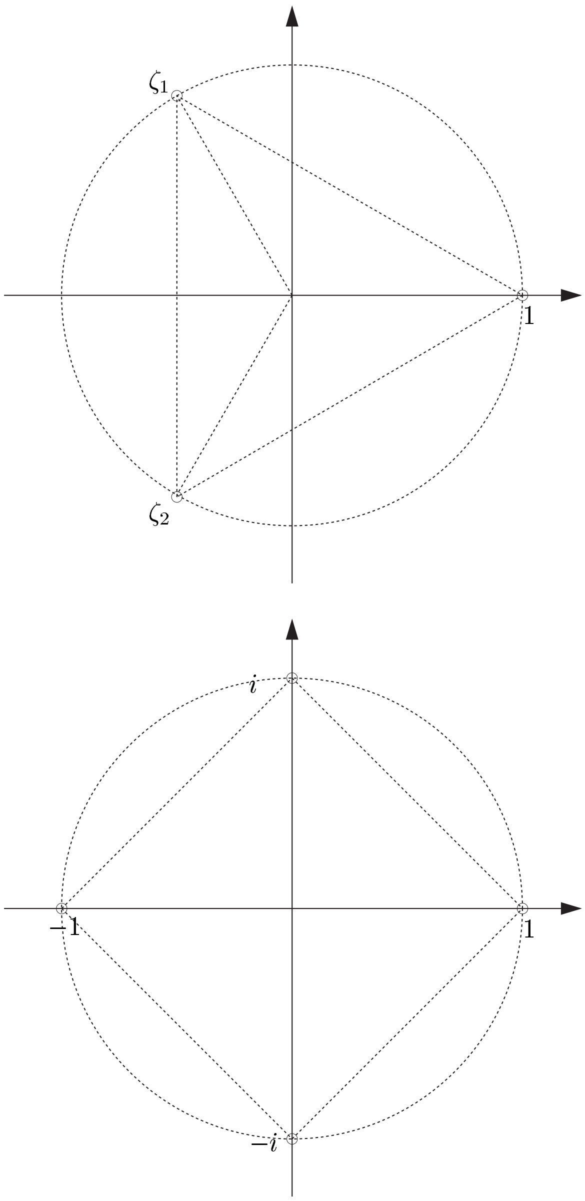


Abbildung 31: Die dritten und vierten Einheitswurzeln

(8) *Behauptung*: Es gilt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.
Beweis: Im folgenden Beweis verwenden wir $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ und $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{1}{1!} ix + \frac{1}{2!} i^2 x^2 + \frac{1}{3!} i^3 x^3 + \frac{1}{4!} i^4 x^4 + \frac{1}{5!} i^5 x^5 + \frac{1}{6!} i^6 x^6 + \frac{1}{7!} i^7 x^7 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} ix - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} ix^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} ix^5 - \frac{1}{6!} x^6 - \frac{1}{7!} ix^7 + \dots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots\right)+i\cdot\left(\frac{1}{1!}ix-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\
&= \cos(x)+i\sin(x)
\end{aligned}
$$

□

(9) *Behauptung*: Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\cos(z)+i\cdot\sin(z))^n = \cos(nz)+i\cdot\sin(nz)$.
Beweis: $(\cos(z)+i\cdot\sin(z))^n = (e^{i\cdot z})^n = e^{i\cdot nz} = \cos(nz)+i\cdot\sin(nz)$. □

(10) *Behauptung*: Seien x_1, x_2 reelle Zahlen, dann gelten $\cos(x_1+x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$ und $\sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_2)\cos(x_1)$.
Beweis: Seien $z_1 = e^{i\cdot(x_1+x_2)}$ und $z_2 = e^{ix_1}\cdot e^{ix_2}$. Offenbar ist dann $z_1 = z_2$, ausserdem gilt

$$
\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\cdot(x_1+x_2)} = \cos(x_1+x_2)+i\cdot\sin(x_1+x_2)\\
z_2 &= e^{ix_1}\cdot e^{ix_2} = (\cos(x_1)+i\cdot\sin(x_1))(\cos(x_2)+i\cdot\sin(x_2))\\
&= \cos(x_1)\cos(x_2)-\sin(x_1)\sin(x_2)+i\cdot(\sin(x_1)\cos(x_2)+\sin(x_2)\cos(x_1)).
\end{aligned}
$$

Wegen $z_1 = z_2$ folgt daraus die Behauptung, denn sowohl Imaginär- als auch Realteil von z_1 und z_2 müssen gleich sein. □

(11) *Behauptung*: Es ist $z_1\cdot z_2 = |z_1\cdot z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.
Beweis: An der Stelle (*) verwenden wir die Additionstheoreme und rechnen nach

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1|\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2))\\
&= |z_1\cdot z_2|\cdot(\cos(\varphi_1)+i\cdot\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_2))\\
&= |z_1\cdot z_2|\cdot(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))\\
&\quad +i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1))\\
&\overset{(*)}{=} |z_1\cdot z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}
$$

□

Grundbegriffe der Algebra

(1) (b) Es gilt $2 \leq 5$, aber es gilt nicht $5 \leq 2$. Die Eigenschaft (Ä2) einer Äquivalenzrelation ist also nicht erfüllt. Entsprechend zeigt man, dass auch $<$, $>$, und $\geq$ keine Äquivalenzrelationen sind.

(2) *Behauptung*: Durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \text{ ist durch } n \text{ teilbar}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation definiert.
Beweis: Wir überprüfen die einzelnen Axiome:

(Ä1) $a - a = 0$ ist für alle $a \in \mathbb{Z}$ durch n teilbar, also $a \sim a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

(Ä2) Sei $a \sim b$, sei also $a - b$ durch n teilbar. Dann ist auch $b - a = -(a - b)$ durch n teilbar, es ist also $b \sim a$.

(Ä3) Seien $a \sim b$ und $b \sim c$, seien also $a - b$ und $b - c$ jeweils durch n teilbar. Dann ist auch $a - c = (a - b) + (b - c)$ durch n teilbar, es ist also $a \sim c$.

$\square$

Eine ganze Zahl kann bei Division durch n nur den Rest 0, 1, ..., $n - 2$ oder $n - 1$ lassen. Dementsprechend gibt es nur die Restklassen k_0, k_1, ..., k_{n-2} und k_{n-1}.

(3) (d) $2 \in \mathbb{N}$ hat weder bzgl. Addition noch Multiplikation ein Inverses Element in $\mathbb{N}$, denn weder -2 noch $\frac{1}{2}$ sind Elemente von $\mathbb{N}$.

(e) *Behauptung*: $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist mit der Verknüpfung $a \circ b = a + b + ab$ eine kommutative Gruppe.
Beweis: Wir überprüfen die einzelnen Axiome:

(G1) Angenommen $a \circ b = a + b + ab = -1$ für gewisse $a, b \in G$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & a + b + ab = -1 \\ \Rightarrow \quad & b(1 + a) = -(1 + a) \\ \Rightarrow \quad & b = -1 \quad \text{wegen } a \neq -1 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $b \in G$ ist. Folglich ist $a \circ b \in G$ für alle $a, b \in G$.

(G2) Seien $a, b, c \in G$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= (a + b + ab) \circ c = (a + b + ab) + c + (ac + bc + abc) \\ &= a + (b + c + bc) + (ab + ac + abc) \\ &= a \circ (b + c + bc) = a \circ (b \circ c) \end{aligned}$$

(G3) $0 \in G$ ist das neutrale Element in G, denn für alle $a \in G$ gilt $a \circ 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$.

(G4) Es ist $a^{-1} := -\frac{a}{1+a} \in G$, denn aus $-1 = -\frac{a}{1+a}$ würde folgen

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{a}{1+a} \\ \Rightarrow \quad 1+a &= a \\ \Rightarrow \quad 1 &= 0. \end{aligned}$$

Zu jedem $a \in G$ ist $a^{-1} = -\frac{a}{1+a}$ das inverse Element, denn es gilt

$$a \circ a^{-1} = a - \frac{a}{1+a} - \frac{a^2}{1+a} = \frac{a+a^2)}{1+a} - \frac{a}{1+a} - \frac{a^2}{1+a} = 0.$$

(G5) Für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = a + b + ab = b + a + ba = b \circ a$.

$\square$

(4) (a) $G = \{e, a, b, c = a \circ b\}$ ist mit der durch $a^2 = e$, $b^2 = e$ und $a \circ b = b \circ a$ definierten Verknüpfung $\circ$ eine kommutative Gruppe. Dies kann man sich mit der folgenden Verknüpfungstabelle plausibel machen:

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

(b) $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ ist mit der durch $a^6 = e$ definierten Verknüpfung $\circ$ eine kommutative Gruppe. Dies kann man sich mit der folgenden Verknüpfungstabelle plausibel machen:

$\circ$	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a
a^3	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2
a^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3
a^5	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4

(5) *Behauptung*: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine kommutative Gruppe.
Beweis: Wir überprüfen die einzelnen Axiome:

(G1) Es ist $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ für alle $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(G2) Es gilt $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a+b} + \overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ für alle $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(G3) An der Tabelle

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

sieht man, dass $\overline{0}$ das neutrale Element in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

(G4) An der Tabelle aus (G3) sieht man ebenfalls, dass jedes Element ein Inverses in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hat.

(G5) Es gilt $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}=\overline{b+a}=\overline{b}+\overline{a}$ für alle $\overline{a},\overline{b}\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\square$

(6) *Behauptung*: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.
Beweis: Es seien $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$ und $z_3=(x_3,y_3)$. Man rechnet nach:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_2+x_1,y_2+y_1)=z_2+z_2$$

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3 &= ((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3)\\ &= (x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3))=z_1+(z_2+z_3)\end{aligned}$$

$$z_1z_2 = (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)=(x_2x_1-y_2y_1,x_2y_1+x_1y_2)=z_2z_1$$

$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3 &= (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)(x_3,y_3)\\ &= ((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+x_2y_1)y_3,(x_1x_2-y_1y_2)y_3+x_3(x_1y_2+x_2y_1))\\ &= ((x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-x_1y_2y_3-x_2y_1y_3,x_1x_2y_3-y_1y_2y_3+x_3x_1y_2+x_3x_2y_1)\\ &= (x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+x_3y_2),y_1(x_2x_3-y_2y_3)+x_1(x_2y_3+x_3y_2))\\ &= (x_1,y_1)(x_2x_3-y_2y_3,x_2y_3+x_3y_2)=z_1(z_2z_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)z_3 &= (x_1+x_2,y_1+y_2)(x_3,y_3)\\ &= ((x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3,(x_1+x_2)y_3+x_3(y_1+y_2))\\ &= (x_1x_3+x_2x_3-y_1y_3-y_2y_3,x_1y_3+x_2y_3+x_3y_1+x^3y_2))\\ &= (x_1x_3-y_1y_3,x_1y_3+x_3y_1)+(x_2x_3-y_2y_3,x_2y_3+x_3y_2)\\ &= z_1z_3+z_2z_3\end{aligned}$$

Sei $z=(x,y)$ und $-z=(-x,-y)$. Weiterhin sei $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ falls $z\neq(0,0)$ ist. Dann rechnet man nach:

$$z+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)=z$$

$$z+(-z)=(x+(-x),y+(-y))=(0,0)$$

$$z\cdot(1,0)=(x\cdot 1+y\cdot 0,x\cdot 0+y\cdot 1)=(x,y)=z$$

$$z\cdot z^{-1}=\left(x\frac{x}{x^2+y^2}-y\frac{-y}{x^2+y^2},x\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}y\right)=(1,0)$$

$\square$

(7) *Behauptung*: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist ein Körper.
Beweis: Aus Aufgabe (5) wissen wir bereits, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bzgl. Addition eine kommutative Gruppe ist. Außerdem gilt das Distributivgesetz

$$\begin{aligned}(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} &= \overline{a+b}\cdot\overline{c} = \overline{(a+b)c} = \overline{ac+bc} \\ &= \overline{ac}+\overline{bc} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}\end{aligned}$$

für alle $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$ bzgl. Multiplikation eine kommutative Gruppe ist. Wir überprüfen die einzelnen Axiome:

(G1) Es ist $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{ab} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$ für alle $\overline{a},\overline{b} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$.

(G2) Es gilt $(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{ab}\cdot\overline{c} = \overline{(ab)c} = \overline{a(bc)} = \overline{a}\cdot\overline{bc} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\cdot\overline{c})$ für alle $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$.

(G3) An der Tabelle

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

sieht man, dass $\overline{1}$ das neutrale Element in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$ ist.

(G4) An der Tabelle aus (G3) sieht man ebenfalls, dass jedes Element ein Inverses in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$ hat.

(G5) Es gilt $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ für alle $\overline{a},\overline{b} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \setminus \{\overline{0}\}$.

$\square$

(8) Die (Standard-)Lösungen sind:

(a) 2
(b) 6
(c) 0
(d) 5
(e) 0
(f) 0

Index