Thorsten Riedel

Shimuraklassenkörper zu Picardschen Modulformen

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Shimuraklassenkörper zu Picardschen Modulformen

Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von
Thorsten Riedel
aus Speyer

Referent: Prof. Dr. Hans Opolka

Korreferent: Prof. Dr. Jürgen Wolfart

Eingereicht am: 28. Januar 2011

Mündliche Prüfung am: 14. April 2011

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2011
Zugl.: (TU) Braunschweig, Univ., Diss., 2011

978-3-86955-754-0

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2011
Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86955-754-0

Inhalt

Einleitung **1**

1 Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation **7**
1.1 Abelsche Varietäten 8
1.2 Jacobi-Varietäten 12
1.3 CM-Varietäten 13

2 Schottky-Taniyama-Formen **19**
2.1 Picardsche Modulformen 20
2.2 Schottky-Taniyama-Formen 23
2.2.1 Hyperelliptische Kurven 23
2.2.2 Picardkurven 34

3 Reflexkörper **37**
3.1 Konstruktion von CM-Körpern 38
3.2 Singuläre Moduln 41
3.3 Bestimmung der Reflexkörper 44
3.3.1 Hyperelliptische Kurven 44
3.3.2 Picardkurven 53

4 Modulkörper **55**
4.1 Ein kurzer Abriß der Klassenkörpertheorie 55
4.1.1 Idealtheoretische Klassenkörpertheorie 55
4.1.2 Idelische Formulierung der Klassenkörpertheorie 57
4.2 Der erste Hauptsatz der komplexen Multiplikation 59
4.3 Shimuraklassenkörper 62
4.4 Shimuraklassenkörper zu CM-Körpern mit Klassenzahl ≤ 11 . . . 70

A Die Modulformen in Thetakonstanten **75**

B Quellcode zur Berechnung der komplexen Konjugation **81**

Literatur **83**

Einleitung

Die Untersuchung der abelschen Erweiterungen algebraischer Zahlkörper entspringt der klassischen Fragestellung nach der ganzzahligen Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen. So führt beispielsweise Fermats Zwei-Quadrate-Satz sofort zur Untersuchung des Verhaltens von Primzahlen beim Übergang zu den ganzen Zahlen im Gaußschen Zahlkörper. Die Gleichung $p = X^2 + Y^2$ ist nämlich genau dann in ganzen Zahlen lösbar - p ist durch die Form $F(X,Y) = (X - iY)(X + iY)$ darstellbar - wenn p Produkt zweier ganzalgebraischer Gaußzahlen ist. Eine naheliegende Verallgemeinerung des Problems ist die Suche nach Primzahlen, die sich durch ganzzahlige quadratische Formen $aX^2 + bXY + cY^2 = a(X + \rho Y)(X + \rho' Y)$ darstellen lassen. Sind ρ und ρ' nicht rational, so erzeugen sie den selben quadratischen Körper, und die Lösbarkeit der Gleichung $p = aX^2 + bXY + cY^2$ übersetzt sich in die Frage nach dem Zerlegungsverhalten von p im Hilbertklassenkörper von $\mathbb{Q}(\rho)$, der maximal unverzweigten abelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}(\rho)$, bzw. nach dem Zerlegungsverhalten in abelschen Erweiterungen insb. im Geschlechterkörper und im Ringklassenkörper, siehe [Coh85], 2. Der Fall binärer (Norm-)Formen ist klassisch ausgearbeitet und liefert zusammen mit dem Zerlegungsgesetz im Hilbertklassenkörper[1] eine vollständige Antwort auf die gestellte Frage. Für die Erzeugung von Primzahlen durch Normformen von imaginär abelschen Körpern kennen wir folgendes Kriterium: Ist K imaginär abelsch und p kein Teiler der Diskrimante von K, dann ist p genau dann durch die Normform darstellbar, wenn p im Hilbertklassenkörper H_K voll zerlegt ist, siehe [Gar81], Theorem 7.27. Dabei verstehen wir unter der *Normform* eines algebraischen Zahlkörpers K vom Grad n mit Ganzheitsbasis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die homogene Form

$$F_K(X_1, \ldots, X_n) := N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n) = \prod_\sigma \sum_i \sigma(\alpha_i) X_i,$$

wobei σ die verschiedenen $\mathbb{Q}$-Einbettungen von K in einen fixierten algebraischen Abschluß durchläuft. Im obigen Beispiel ist $F_K(X,Y) = X^2 + Y^2$ die Normform

[1] Der Hilbertklassenkörper zu K ist derjenige über K normale Erweiterungskörper, in dem genau die Primhauptideale vom Trägheitsgrad 1 voll zerlegt sind. Nach [Has65], S. 4, war diese Charakterisierung die Hilbertsche Definition des Klassenkörpers. Mittlerweile wird allgemeiner jeder abelsche Erweiterungskörper eines Zahlkörpers Klassenkörper genannt.

von $K := \mathbb{Q}(i)$ über $\mathbb{Q}$ zur Ganzheitsbasis $\{1, i\}$. K hat Klassenzahl 1, also ist $K = H_K$ und $p \neq 2$ genau dann durch $F_K(X, Y)$ darstellbar, wenn p in K voll zerlegt ist, d.h. wenn $p \equiv 1 \bmod 4$. Betrachten wir ein zweites Beispiel ([Gar81], p. 214). Die Form $F(X, Y) = X^2 + XY + 4Y^2$ ist die Normform von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})/\mathbb{Q}$ zur Basis $\{1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-15})\}$. Eine Primzahl $p \neq 3, 5$ ist somit genau dann durch $F_K(X, Y)$ darstellbar, wenn p im Hilbertklassenkörper $H_K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$ zu K voll zerlegt ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn $p \equiv 1 \bmod 15$ oder $\equiv 4 \bmod 15$.[2]

Wir werden uns in dieser Arbeit mit abelschen Erweiterungen total imaginär quadratischer Erweiterungen total reeller Zahlkörper, sogenannter *CM-Körper*, beschäftigen. In dieser Situtionen kommutiert jede Einbettung nach $\mathbb{C}$ mit der komplexen Konjugation, und wir können den Beweis des Kriteriums für imaginär abelsche Zahlkörper, [Gar81], Beweis von Theorem 7.27, unmittelbar auf CM-Körper übertragen.

Satz 0.0.1. *Sei K ein galoisscher CM-Körper vom Grad $[K : \mathbb{Q}] = n$, p eine rationale Primzahl, die in K nicht verzweigt, und sei $F_K(X_1, \ldots, X_n)$ die Normform zu K. Es gibt genau dann eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $F_K(X_1, \ldots, X_n) = p$, wenn p im Hilbertklassenkörper H_K voll zerlegt ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist K eine rein imaginär quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers, die Menge der Einbettungen $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist daher durch $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n/2}, \bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_{n/2}\}$, wobei $\bar{\sigma}_i :=^- \circ \sigma_i$, gegeben. Die Existenz eines Tupels ${}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $p = F_K(x_1, \ldots, x_n)$ ist zur Existenz eines ganzen $\alpha \in \mathcal{O}_K$ mit Norm $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = p$ äquivalent. Da

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n/2} \sigma_i(\alpha)\bar{\sigma}_i(\alpha) > 0,$$

ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn die Ideale $p\mathbb{Z} = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)\mathbb{Z}$ übereinstimmen, was wiederum zur Existenz eines Primhauptideals $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_K$ der Norm p gleichwertig ist. $\mathfrak{p}$ ist daher vom Trägheitsgrad 1 (p ist unverzweigt in K). Die Galoisgruppe operiert transitiv auf der Menge aller Primideale von $\mathcal{O}_K$, die p teilen. Folglich stimmen die Trägheitsindizes aller Primteiler von p überein. Daher ist $p = F_K(X_1, \ldots, X_n)$ dann und nur dann ganzzahlig lösbar, wenn jeder Primteiler von p Trägheitstgrad und Verzweigungszahl 1 hat und ein Primhauptideal ist. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist genau dann ein Hauptideal, wenn es im Hilbertklassenkörper H_K voll zerlegt ist. Insgesamt ist somit p genau dann durch die Normform darstellbar, wenn p in H_K voll zerlegt ist. $\square$

[2] $p = 3$ und 5 sind nicht durch $F_K(X, Y)$ darstellbar.

An die Frage nach der Existenz von Klassenkörpern schließt sich unmittelbar der Wunsch nach einer expliziten Beschreibung dieser Erweiterungen an. Im Grundbereich der rationalen Zahlen wird dieses Verlangen von der Exponentialfunktion gestillt, denn nach dem Theorem von Kronecker und Weber ist jede abelsche Erweiterung in einem Kreisteilungskörper enthalten, und Kreisteilungskörper sind durch Einheitswurzeln, also durch Werte der Funktion $f(z) := e^{2\pi iz}$ in rationalen Argumenten, erzeugt. Im nächst schwierigeren Fall der imaginär quadratischen Zahlkörper hatte Kronecker die Idee, daß die elliptische Modulfunktion j diese Rolle übernimmt, was er als seinen liebsten Jugendtraum bezeichnete. Ist ein singulärer Modul τ, d.h. ein Punkt der oberen Halbebene, der einen imaginär quadratischen Körper K erzeugt, gegeben, so ist die Erweiterung $K(j(\tau))/K$ abelsch, und $K(j(\tau))$ ist der Hilbertklassenkörper zu K, wenn $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ ein Ideal von K ist.[3] In beiden Fällen erhalten wir Klassenkörper eines Zahlkörpers durch Adjunktion von Werten analytischer Funktionen in speziellen Argumenten.[4] Die Ausweitung dieses Prinzips stellte Hilbert der mathematischen Gesellschaft in seinem berühmten Paris-Vortrag - 20 Jahre vor dem Takagischen Beweis von Kroneckers Jugendtraum - als Problem 12 als Aufgabe. Man finde analytische Funktionen, welche für beliebige Grundkörper zur Exponentialfunktion und zur elliptischen Modulfunktion analoge Eigenschaften aufweisen.[5] Es dauerte bis in die 1950er Jahre ehe André Weil [Wei55], Goro Shimura [Shm55] und Yutaka Taniyama [Tan55] die prinzipiellen Ideen einer geeigneten Verallgemeinerung der Theorie der komplexen Multiplikation elliptischer Kurven auf Dimension > 1 entwickeln konnten, die Shimura und Taniyama in [ST61] weiter ausgearbeitet haben. Sie konnten zeigen, daß Funktionen existieren, die auf dem Modulraum polarisierter abelscher Varietäten mit einer gewissen Endomorphismenstruktur leben, die in speziellen Punkten abelsche Erweiterungen von Zahlkörpern, die

[3] ansonsten ist $K(j(\tau))/K$ ein Ringklassenkörper.

[4] Die rationalen Zahlen besitzen bekanntermaßen keine unverzweigten abelschen Erweiterungen, insofern ist es möglicherweise richtiger von $K(j(\tau))$, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ein Ideal des imaginär quadratischen Zahlkörpers K, als dem geeigneten Substitut für $\mathbb{Q}$ zu sprechen. Die maximale abelsche Erweiterung von K erhalten wir durch zusätzliche Adjunktion von Werten der Weberfunktionen in Torsionspunkten der entsprechenden elliptischen Kurve an $K(j(\tau))$.

[5] In Hilberts Rede heißt es „... Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, *daß an Stelle des Bereichs der rationalen Zahlen oder des imaginär quadratischen Zahlenbereichs ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt wird; ich halte dies Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Funktionentheorie. ...*“ und später „... Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie in die innigste gegenseitige Berührung und ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variablen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, *diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper.*“, zitiert nach [Hil00].

wiederum in engem Zusammenhang mit der Endomorphismenstruktur der parametrisierten Varietät stehen, liefern. Bislang ist es allerdings nur in wenigen Fällen gelungen, die entsprechenden Modulfunktionen und die damit einhergehenden *Shimuraklassenkörper* explizit zu konstruieren.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Modulfunktionen zweier Kurvenfamilien vorzustellen, die obige Eigenschaften aufweisen, deren Werte in Parametern von CM-Kurven also Klassenkörper erzeugen, sowie die auftretenden Körper eingehender zu studieren. Dazu werden wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation bereitstellen, was insbesondere der Klärung der Begrifflichkeit dienen soll. Im darauffolgenden Kapitel stellen wir die Konstruktion Picardscher Modulfunktionen zu zwei Kurvenfamilien (Picardkurven, eine Familie hyperelliptischer Kurven) dar. Dabei werden wir unser Augenmerk in erster Linie auf die weniger bekannte Konstruktion der Modulfunktion zur hyperelliptischen Kurvenfamilie legen. Für die Picardsche Kurvenfamilie geben wir die notwendigen Daten an und verweisen auf die Literatur. In Kapitel 3 werden die auftretenden Grundkörper (*Reflexkörper*) eingehender untersucht, die, wenn wir der Einfachheit halber *galoissch* voraussetzen, als Multiplikationskörper bzw. Endomorphismenalgebren von Jacobischen der Kurvenfamilien vorkommen. Das Hauptresultat dieses Abschnitts besagt, daß jeder sextische CM-Körper, der die dritten oder vierten Einheitswurzeln enthält, als Multiplikationskörper auftritt, und daß jeder solche durch einen singulären Modul projektiv erzeugt wird. Ausgehend von einem singulären Modul ist es dann nicht schwer, die Jacobi-Varietät einer CM-Kurve mit vorgegebenem Multiplikationstyp zu konstruieren und mit Hilfe der Modulfunktion die Gleichung der Kurve anzugeben. Im letzten Abschnitt befassen wir uns genauer mit den durch die Werte der Picardschen Modulfunktionen erzeugten Klassenkörpern. Es ist znächst nicht klar, daß wir überhaupt echte Erweiterungen der zugrunde liegenden Körper erhalten, so fällt beispielsweise der Modulkörper einer CM-Kurve mit Gleichung $y^2 = 1 - x^l$, l eine ungerade Primzahl, mit $\mathbb{Q}$ zusammen, vgl. [ST61], Chapter IV, 15.4 Example 2), insofern rechtfertigt Beispiel 4.3.3 die vorangegangenen und weiteren Untersuchungen. Um explizite Resultate zu erhalten, setzen wir im vierten Kapitel voraus, daß der Endomorphismenring der CM-Varietät isomorph zur Hauptordnung des Multiplikationskörpers ist. In diesem Fall ist der Shimuraklassenkörper unverzweigt über dem Reflexkörper, und er ist Klassenkörper zu einer Idealgruppe, die wir für zyklische Klassengruppen und ungerade Klassenzahlen genauer bestimmen können. Es zeigt sich, daß das Haupthindernis zur Bestimmung der Modulkörper in der Unkenntnis der Wirkung der komplexen Konjugation auf der Klassengruppe besteht. Abschließend werden wir für kleine Klassenzahlen dieses Problem lösen und die fraglichen Shimuraklassenkörper bis zur Klassenzahl 11 bestimmen.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Mentor Herrn Professor Dr. Hans Opolka. Seine zahlreichen Anregungen und Hinweise und seine weit über die fachliche Betreuung hinausgehende Unterstützung waren mir eine nicht zu überschätzende Hilfe.

Kapitel 1

Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation

Elliptische Kurven über den komplexen Zahlen lassen sich auf verschiedene Weisen einführen. Beispielsweise können wir eine elliptische Kurve als eindimensionalen komplexen Torus definieren, alternativ können wir elliptische Kurven als ebene algebraische kubische Kurven (mit einem $\mathbb{C}$-rationalen Punkt) ansehen. Die Brücke zwischen diesen Auffassungen bildet die Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Wenn wir uns mit Endomorphismen solcher Kurven beschäftigen, werden wir über die Interpretation der Kurve als Torus $E = \mathbb{C}/\Lambda$ auf lineare Abbildungen $[\alpha] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \alpha z$, also Multiplikationen mit einer komplexen Zahl, geführt, die das Gitter in sich überführen. Üblicherweise erfüllt α die Eigenschaft $[\alpha]\Lambda \subset \Lambda$ nur dann, wenn α eine ganze Zahl ist. Besitzt eine elliptische Kurve E hingegen Multiplikation mit einem $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, dann läßt sich aus $[\alpha]\Lambda \subset \Lambda$ leicht ableiten, daß α eine über $\mathbb{R}$ irreduzible ganzzahlige quadratische Gleichung löst und die Endomorphismenalgebra der Kurve isomorph zum imaginär quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist. In diesem Fall hat *E komplexe Multiplikation*, und wir nennen E eine *CM-Kurve*. Wie schon in der Einleitung angeklungen ist, haben elliptische Kurven wichtige arithmetische Eigenschaften, von denen wir im Verlauf dieser Arbeit einige auf Kurven vom Geschlecht 3 verallgemeinern werden.

Auf algebraischen Kurven höheren Grades kann allerdings keine algebraische Gruppenstruktur definiert werden. Die natürliche Verallgemeinerung hiervon sind algebraische Varietäten mit algebraischer Gruppenstruktur, und sie führt auf den Begriff der abelschen Varietät. Aus komplex-analytischer Sicht sind abelsche Varietäten höherdimensionale komplexe Tori, die eine projektive Einbettung erlauben. Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation sind wieder Varietäten mit größtmöglicher kommutativer Endomorphismenalgebra. Einer algebraischen Kurve läßt sich auf kanonische Weise eine abelsche Varietät zuordnen, die sog. *Jacobi-Varietät*.

Alle Resultate in diesem Kapitel sind wohlbekannt und in der Standardliteratur über abelsche Varietäten zu finden. Wir orientieren uns bei dieser Zusammenstellung in erster Linie an [BL04]. Die Paragraphen über komplexe Multiplikation abelscher Varietäten folgen [ST61], siehe auch [Lan83]. Um pathologische Sonderfälle auszuschließen, setzen wir stets voraus, daß die Dimension der betrachteten abelschen Varietäten echt positiv ist.

1.1 Abelsche Varietäten

Eine *algebraische Gruppe* ist eine algebraische Varietät A zusammen mit einer Gruppenstruktur, die durch reguläre Abbildungen $A \times A \to A$, $(g,h) \mapsto g+h$ und $A \to A$, $g \mapsto -g$, gegebenen ist. Eine *abelsche Varietät* ist eine projektive algebraische Gruppe. Die Gruppenstruktur einer abelschen Varietät ist stets kommutativ und durch Auszeichnung eines neutralen Elements eindeutig bestimmt.

Wir betrachten in dieser Arbeit vorrangig abelsche Varietäten, die über den komplexen Zahlen definiert sind. In dieser Situation ist die Menge $A(\mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-rationalen Punkte von A eine kompakte, zusammenhängende, komplexe Lie-Gruppe der Dimension g und als solche isomorph zu einem Torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$, Λ ein (vollständiges) Gitter in $\mathbb{C}^g$, d.h. ein freier $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{C}^g$ vom Rang $2g$. Den Vektorraum $\mathbb{C}^g$ identifizieren wir mit dem Tangentialraum T_0A von A an Null, die Quotientenabbildung $\mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g/\Lambda$ entspricht der Exponentialabbildung $\exp : T_0A \to A(\mathbb{C})$.

Umgekehrt kann aber nicht jeder Torus als abelsche Varietät aufgefaßt werden. Sei V ein komplexer Vektorraum der Dimension g und Λ ein Gitter in V. Eine positiv definite hermitesche Form $H := S+iE : V \times V \to \mathbb{C}$ bzw. ihr Imaginärteilteil $E = \mathrm{Im}(H)$ heißt hermitesche bzw. alternierende *Riemannform*[1] auf $X := V/\Lambda$ bzw. auf (V,Λ), falls $E : V \times V \to \mathbb{R}$ eine alternierende $\mathbb{R}$-Bilinearform definiert, deren Einschränkung auf das Gitter ganzzahlige Werte annimmt.[2] Unter einer *rationalen Riemannform* verstehen wir ein Vielfaches $q \cdot E$ einer Riemannform E mit einem positiven rationalen Faktor. Riemannformen, die sich nur um ein $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ unterscheiden, sind äquivalent; eine *Polarisierung* von X ist schließlich eine Äquivalenzklasse $[H]$ von Riemannformen. In einer Äquivalenzklasse finden wir stets eine ausgezeichnete, *prinzipal*[3] genannte, Riemannform E, die ganzzahlige Werte auf dem Gitter annimmt, für die jedes Vielfache qE, $q \in (0,1)$, diese Eigenschaft aber verliert.

[1] H und E bestimmen sich gegenseitig: E ist genau dann eine alternierende Riemannform auf dem rellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, wenn $H(v,w) := E(iv,w)+iE(v,w)$ eine hermitesche Riemannform auf V als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

[2] Wir betrachten nur nicht ausgeartete Riemannformen und verzichten deshalb auf diesen Zusatz. Allgemeinener definiert man eine Riemannform als (Imaginärteil einer) positiv *semi*definite(n) Form H mit $\mathrm{Im}H(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$.

[3] *prinzipal* ist ein inflationär benutzter Begriff; wir möchten deshalb an dieser Stelle darauf hinweisen, daß eine prinzipale Riemannform keineswegs eine *prinzipale Polarisierung*, d.h. eine Hauptpolarisierung, definiert.

Nach einem Theorem von Lefschetz, s. [Mum74], I.3, ist die Existenz genügend vieler meromorpher (Theta-)Funktionen auf $X := V/\Lambda$, die eine projektive Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ definieren, gleichwertig mit der Existenz einer Riemannform auf (V, Λ). Das Bild unter dieser Einbettung ist eine analytische Untervarietät und nach einem Theorem von Chow, s. [Mum74], I.3, algebraisch mit kommutativer Gruppenstruktur, die durch reguläre Abbildungen gegeben ist. Der Torus X ist also genau dann eine abelsche Varietät, wenn eine Riemannform auf X existiert.

Im Verlauf dieser Arbeit verstehen wir unter einer (komplexen) *abelschen Varietät* einen polarisierbaren Torus. Eine *polarisierte abelsche Varietät* ist ein Paar $(X, [H])$ bestehend aus einem Torus $X = V/\Lambda$ und einer fixierten Polarisierung $[H]$ auf X. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, verstehen wir unter einer polarisierten abelschen Varietät ebenfalls ein Paar (A, E) bzw. (A, H) bestehend aus einer abelschen Varietät A zusammen mit einer Riemannform E bzw. H. Sei also $(X, [H])$ eine polarisierte abelsche Varietät und sei $H \in [H]$ eine Riemannform. H ist positiv definit und induziert daher einen Isomorphismus

$$\phi_H : V \to V^\vee, \ \phi_H(v) : w \mapsto H(v, w),$$

in den Raum $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ der komplex antilinearen Abbildungen $f : V \to \mathbb{C}$. Die Zuordnung $f \mapsto \mathrm{Im}(f)$ definiert einen $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus $V^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Das $\mathbb{Z}$-Dual

$$\Lambda^\vee := \{f \in V^\vee \mid \mathrm{Im}(f)(\Lambda) \subset \mathbb{Z}\}$$

ist ein Gitter in $V^\vee$ und

$$H^\vee : V^\vee \times V^\vee \to \mathbb{C}, \ H^\vee(f, g) := H(\phi_H^{-1}(f), \phi_H^{-1}(g)),$$

eine Riemannform auf dem Torus $X^\vee := V^\vee/\Lambda^\vee$. $X^\vee$ heißt die zu X *duale abelsche Varietät*.

Ein *Homomorphismus* abelscher Varietäten $f : X \to Y$ ist eine mit der Gruppenstruktur verträgliche holomorphe Abbildung $X \to Y$ komplexer Mannigfaltigkeiten. Ein *Homomorphismus polarisierter abelscher Varietäten* $f : (X, [H_X]) \to (Y, [H_Y])$ erfüllt zusätzlich $[H_X] = [f^* H_Y]$. *Endomorphismen* der (polarisierten) abelschen Varietät X bzw. $(X, [H])$ sind Homomorphismen von X nach X bzw. von $(X, [H])$ nach $(X, [H])$. Entsprechend sind *Isomorphismen* und *Automorphismen* biholomorphe Homomorphismen und Endomorphismen.

Homomorphismen komplexer Tori $X = V/\Lambda \to X' = V'/\Lambda'$ induzieren lineare Abbildungen auf den Tangentialräumen $V \cong T_0(X) \to T_0(X') \cong V'$, die die Gitter ineinander überführen. Da V als universelle Überlagerung von X aufgefaßt werden kann, bestimmt umgekehrt jede lineare Abbildung $F : V \to V'$ mit $F(\Lambda) \subset \Lambda'$ einen Homomorphismus $X \to X'$. Jeder Endomorphismus $f : X \to X$,

$X = V/\Lambda$, führt daher zu einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "R_f"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "A_f"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & V \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung A_f und einem $\mathbb{Z}$-Modul-Endomorphismus R_f. Auf diese Weise erhalten wir zwei Darstellungen der Endomorphismenalgebra

$$\mathrm{End}^0(X) := \mathrm{End}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} :$$

die *komplexe Darstellung*

$$\rho_{\mathbb{C}} : \mathrm{End}^0(X) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong M(g, \mathbb{C}),\ \ \rho_{\mathbb{C}}(f) := A_f,$$

und die *rationale Darstellung*

$$\rho_{\mathbb{Q}} : \mathrm{End}^0(X) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cong M(2g, \mathbb{Q}),\ \ \rho_{\mathbb{Q}}(f) := R_f.$$

Bemerkung 1.1.1. *Im Folgenden identifizieren wir ohne ausdrückliche Erwähnung die Endomorphismenalgebra einer komplexen abelschen Varietät der Dimension g mittels der komplexen Darstellung mit einer Unteralgebra von $M(g, \mathbb{C})$.*

Ist $[H]$ eine Polarisierung, so sind die oben definierten Abbildungen ϕ_H, $H \in [H]$, *Isogenien*, d.h. surjektive Homomorphismen mit endlichem Kern, auf die duale abelsche Varietät. Die Polarisierung heißt *Hauptpolarisierung*, wenn $\phi_H : X \to X^\vee$ für ein $H \in [H]$ einen Isomorphismus definiert.

Wir fixieren nun eine Basis von V und identifizieren V mit $\mathbb{C}^g$. Nach Wahl einer $\mathbb{Z}$-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ von Λ können wir das Gitter in der Form

$$\Lambda = \Pi\mathbb{Z}^{2g} \text{ mit } \Pi := (\alpha_1 | \ldots | \alpha_{2g}) \in M(g \times 2g, \mathbb{C})$$

schreiben. Die Matrix Π wird *Periodenmatrix* von $X = V/\Lambda = \mathbb{C}^g/\Pi\mathbb{Z}^{2g}$ genannt. Die Frage, welche komplexen Tori algebraisch und somit abelsche Varietäten sind, beantworten die *Riemannschen Periodenrelationen.* X ist genau dann eine abelsche Varietät, wenn eine alternierende Matrix $A \in M(2g, \mathbb{Z})$ existiert, so daß

$$\text{(RR 1)} \quad \Pi A^{-1}\, {}^t\Pi = 0, \quad \text{(RR 2)} \quad i\Pi A^{-1}\, {}^t\bar{\Pi} > 0$$

gilt. Die schiefsymmetrische Matrix A ist die Matrix einer alternierenden Form E auf Λ zur gewählten Gitterbasis, und die erste Bedingung besagt, daß $H(u, v) := E(iu, v) + iE(u, v)$ eine hermitesche Form auf $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ definiert. Die Gramsche Matrix von H ist $2i(\bar{\Pi} A^{-1}\, {}^t\Pi)^{-1}$, H ist also genau dann positiv definit, wenn (RR 2) erfüllt ist.

Nach einem Lemma von Frobenius können wir eine $\mathbb{Z}$-Modul-Basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \mu_1, \ldots, \mu_g$ von Λ, eine *symplektische Basis*, so wählen, daß das Gitter die Gestalt

$$\Lambda_\Omega = (D \mid \Omega)\mathbb{Z}^{2g}$$

hat. Hierbei ist $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_g)$ eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente d_i natürliche Zahlen sind, die $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_g$ erfüllen, und $\Omega \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ ist der sogenannte *Periodenpunkt* von X. Die Riemannschen Periodenrelationen lesen sich nun wie folgt: Der Torus $X_\Omega := \mathbb{C}^g/\Lambda_\Omega$ ist genau dann eine abelsche Varietät, wenn gilt

$${}^t\Omega = \Omega, \quad \mathrm{Im}(\Omega) > 0.$$

Mit anderen Worten parametrisiert das Siegelgebiet vom Grad g

$$\mathbb{H}_g := \{\Omega \in M(g; \mathbb{C}) \mid {}^t\Omega = \Omega,\ \mathrm{Im}(\Omega) > 0\}$$

die Menge der polarisierten abelschen Varietäten vom Polarisierungstyp D. Bezüglich der Basis $e_\nu := \frac{1}{d_\nu}\lambda_\nu$, $\nu = 1, \ldots, g$, von V ist durch $H = \mathrm{Im}(\Omega)^{-1}$ eine hermitesche Riemannform auf X_Ω gegeben, deren Imaginärteil bzgl. der gewählten Gitterbasis durch die Matrix

$$-J_D := \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Ist $D = E_g$ die Einheitsmatrix, so ist $[H]$ eine Hauptpolarisierung auf X und mit

$$J := \begin{pmatrix} 0 & E_g \\ -E_g & 0 \end{pmatrix}$$

ist $-J = J^{-1}$ die Matrix der alternierenden Riemannform E auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_\mathbb{R} = \Lambda \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$. Jede hauptpolarisierte abelsche Varietät ist also isomorph zu einem Paar $(X_\Omega, [H_\Omega]) = (\mathbb{C}^{2g}/\Lambda_\Omega, [(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}])$ mit einem $\Omega \in \mathbb{H}_g$. Wir setzen

$$\alpha_\Omega : \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{C}^g,\ v \mapsto (E_g \mid \Omega)v.$$

Das Gitter ist demnach $\Lambda_\Omega = \alpha_\Omega(\mathbb{Z}^{2g})$. Die Gruppe der symplektischen Transformationen

$$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}) := \{\gamma \in M(2g; \mathbb{R}) : {}^t\gamma J \gamma = J\}$$

operiert durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \alpha_\Omega \mapsto \alpha_\Omega \circ \begin{pmatrix} {}^tD & {}^tB \\ {}^tC & {}^tA \end{pmatrix} = \alpha_{\Omega'},\ \Omega' = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}, \tag{1.1}$$

auf der Menge solcher Paare $(X_\Omega, [H_\Omega])$ und damit (biholomorph, eigentlich und transitiv) auf der Siegelschen Halbebene. Ist $\mathcal{K}$ der Stabilisator von $iE_g \in \mathbb{H}_g$ unter dieser Operation, dann ist $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})/\mathcal{K} \cong \mathbb{H}_g$. Die *Siegelsche Modulgruppe*

$$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) := \{\gamma \in M(2g; \mathbb{Z}) \mid {}^t\gamma J \gamma = J\}$$

ist eine diskrete Untergruppe der symplektischen Gruppe, und sie wirkt eigentlich diskontiniuierlich auf $\mathbb{H}_g$. Zwei hauptpolarisierte abelsche Varietäten X_Ω und $X_{\Omega'}$ sind genau dann isomorph, wenn sie durch einen ganzzahligen symplektischen Basiswechsel, also ein Element von $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, ineinander überführt werden können. Daher parametrisiert der Quotientenraum

$$\mathcal{A}_g := \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$$

die Isomorphieklassen hauptpolarisierter abelscher Varietäten der Dimension g. $\mathcal{A}_g$ bzw. die Satake-Baily-Borel-Kompaktifizierung $\hat{\mathcal{A}}_g$ wird *Siegelsche Modulvarietät* genannt; sie trägt die Struktur einer algebraischen Varietät.

1.2 Jacobi-Varietäten

Sei C eine glatte komplexe projektive algebraische Kurve, m.a.W. eine kompakte Riemannsche Fläche. Das Geschlecht g der Kurve ist per Definition die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraums $H^0(\omega_C)$ der holomorphen 1-Formen auf C. Die Paarung

$$H_1(C, \mathbb{Z}) \times H^0(\omega_C) \to \mathbb{C}, \ (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega,$$

induziert einen injektiven Homomorphismus

$$\iota : H_1(C, \mathbb{Z}) \to H^0(\omega_C)^* := \mathrm{Hom}(H^0(\omega_C), \mathbb{C}).$$

Mit $H_1(C, \mathbb{Z})$ ist auch $\iota(H_1(C, \mathbb{Z}))$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $2g$, also ein Gitter in $H^0(\omega_C)^*$, das sogenannte *Periodengitter*. Die *Jacobi-Varietät* von C ist der komplexe Torus

$$\mathrm{Jac}(C) := H^0(\omega_C)^* / \iota(H_1(C, \mathbb{Z})).$$

Die Schnitt-Paarung auf der Homologiegruppe $H_1(C, \mathbb{Z})$ definiert eine alternierende, unimodulare Bilinearform auf dem Periodengitter $\iota(H_1(C, \mathbb{Z}))$. Wählt man eine *Normalbasis* $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ der ersten Homologiegruppe, d.h. eine Basis deren Schnittmatrix die Gestalt J hat, und eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_g$ von $H^0(\omega_C)$, also ein Koordinatensystem bezüglich der zu $\omega_1, \ldots, \omega_g$ dualen Basis $l_1, \ldots, l_g$ von $H^0(\omega_C)^*$, dann hat $\mathrm{Jac}(C)$ die Gestalt $\mathbb{C}^g / \Pi \mathbb{Z}^{2g}$ mit einer Periodenmatrix $\Pi = \left(\int_{\gamma_i} \omega_j \right)$. J definiert eine (kanonische) Riemannform und eine Hauptpolarisierung auf der Jacobi-Varietät. Jacobi-Varietäten von Kurven vom Geschlecht g sind somit abelsche Varietäten der Dimension g mit einer kanonischen Hauptpolarisierung. Im vorangegangenen Paragraphen hatten wir solche Varietäten durch den oberen Halbraum $\mathbb{H}_g$ parametrisiert und den Modulraum als Quotienten nach $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ erkannt. Nach dem Theorem von Torelli sind zwei Kurven isomorph, falls ihre Jacobischen als polarisierte abelsche Varietäten isomorph sind. Wir haben daher eine Einbettung des Modulraums $\mathcal{M}_g$ der Kurven vom Geschlecht g nach $\mathcal{A}_g$.

Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ wirkt durch Basiswechsel im Raum der holomorphen 1-Formen auf der Menge der Periodenmatrizen einer Kurve. Ist insbesondere $\Pi = (\Pi_1|\Pi_2)$, dann führt $\Pi_1^{-1} \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ mittels

$$(\Pi_1|\Pi_2) \mapsto (E_g|\Pi_1^{-1}\Pi_2) \mapsto \Pi_1^{-1}\Pi_2 \in \mathbb{H}_g$$

zu einem Periodenpunkt, der nur noch von der Wahl der Normalbasis abhängt. Die Wirkung der Siegelschen Modulgruppe auf dem Periodenpunkt entspricht nun einem Normalbasenwechsel des Gitters $H_1(C, \mathbb{Z})$.

Sei O ein fixierter Kurvenpunkt. Die mehrwertige Zuordnung $C \to H^0(\omega_C)^*$, $P \mapsto (\int_O^P : \omega \mapsto \int_O^P \omega)$, läßt sich $\mathbb{Z}$-linear auf die Gruppe $\mathrm{Div}^0(C)$ der Divisoren vom Grad 0 fortsetzen, und sie induziert nach dem Theorem von Abel-Jacobi, vgl. [BL04], 11.1, Theorem 11.1.3, einen einwertigen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Div}^0(C) \to \mathrm{Jac}(C)$, dessen Kern genau aus der Untergruppe $P(C)$ der Hauptdivisoren besteht. Vermöge der Isomorphie

$$\mathrm{Pic}^0(C) := \mathrm{Div}^0(C)/P(C) \cong \mathrm{Jac}(C) \cong \mathbb{C}^g/\Pi\mathbb{Z}^{2g}$$

erbt $\mathrm{Pic}^0(C)$ die Struktur einer hauptpolarisierten abelschen Varietät.

1.3 CM-Varietäten

Der Endomorphismenring $\mathrm{End}(A)$ einer abelschen Varietät $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang, die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}^0(A)$ ist eine endlichdimensionale, halbeinfache $\mathbb{Q}$-Algebra.

Eine *einfache abelsche Varietät* ist eine abelsche Varietät, die keine nichttrivialen Untervarietäten besitzt. Aus dem Zerlegungssatz von Poincaré folgt, daß jede abelsche Varietät isogen zu einem Produkt einfacher abelscher Varietäten ist. Sei also $\prod A_i^{n_i}$ die Zerlegung von A in Potenzen paarweise nicht isogener einfacher abelscher Varietäten A_i. Die Endomorphismenalgebren der einfachen A_i sind Schiefkörper D_i, die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}^0(A)$ hat also die Gestalt

$$\mathrm{End}^0(A) \cong \prod \mathrm{End}^0(A_i^{n_i}) \cong \prod M(n_i, D_i).$$

Sei $E = \mathrm{Im}(H)$ eine Riemannform auf $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$. Da E nicht ausgeartet ist, existiert zu jedem $f \in \mathrm{End}^0(A)$ ein eindeutig bestimmtes Element $f' \in \mathrm{End}^0(A)$ mit der Eigenschaft $E(\rho_{\mathbb{Q}}(f)(\lambda), \mu) = E(\lambda, \rho_{\mathbb{Q}}(f')(\mu))$. Die Zuordnung

$$' : \mathrm{End}^0(A) \to \mathrm{End}^0(A),\ f \mapsto f',$$

definiert eine Anti-Involution auf $\mathrm{End}^0(A)$, die *Rosati-Involution*[4] zu E. Bezeichnet $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}(f)$ die Spur der rationalen Darstellung von f, dann ist $(f,g) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}(f'g)$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathrm{End}^0(A)$; die Rosati-Involution ist positiv. Die Endomorphismenalgebra einer einfachen abelschen Varietät ist demnach ein Schiefkörper endlicher $\mathbb{Q}$-Dimension auf dem eine positive Involution existiert. Algebren mit diesen Eigenschaften wurden von Albert [Alb61] klassifiziert:

Sei D ein Schiefkörper, F das Zentrum von D und F^+ der Fixkörper der positiven Involution $'$ auf D. Es bestehen genau folgende Möglichkeiten (siehe [Shm63], Proposition 1):

(Typ I) $D = F^+$,

(Typ II) D ist eine total indefinite Quaternionenalgebra über F^+,

(Typ III) D ist eine total definite Quaternionenalgebra über F^+,

(Typ IV) D ist eine zentraleinfache Algebra über F und F/F^+ eine total imaginär quadratische Erweiterung.

Die Typen I, II und III entsprechen Divisionsalgebren mit *Involution erster Art*, d.h. mit einer Involutionen, die auf dem Zentrum F trivial wirkt. In diesen Fällen ist $F = F^+$ ein total reeller Zahlkörper. Ist $(D,\ ')$ vom Typ IV, so wirkt $'$ nicht trivial auf dem Zentrum, $(D,\ ')$ ist von *zweiter Art*. Das Zentrum F ist in diesem Fall ein *CM-Körper*, d.h. eine total imaginär quadratische Erweiterung eines total rellen Zahlkörpers, dem Fixkörper F^+ von $'$.

Bemerkung 1.3.1. *Wir werden unten Jacobi-Varietäten von Kurven vom Geschlecht $g = 3$ betrachten, deren Endomorphismenalgebren D einen imaginär quadratischen Zahlkörper K umfassen. Ist die Varietät einfach, dann ist wegen $K \subset D$, D nicht vom Typ I. Die Typen II und III können nicht auftreten, da nach [BL04], Prop. 5.5.7, $2[F : \mathbb{Q}]$ ein Teiler von $g = 3$ sein müßte. D ist daher eine zentraleinfache F-Algebra vom Typ IV. Wieder nach [BL04], Prop. 5.5.7, gilt notwendig $[F^+ : \mathbb{Q}][D : F]^2 \mid 3$. Folglich ist $D = F$, und es ist entweder $F^+ = \mathbb{Q}$, $F = K$, oder F^+ ist ein total reeller kubischer Zahlkörper, F ein sextischer CM-Körper und F/K vom Grad 3.*

Analog zum eindimensionalen Fall sind abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation Varietäten mit größtmöglicher kommutativer Endomorphismenalgebra. Sei k ein Zahlkörper. Eine abelsche Varietät A erlaubt *Multiplikation mit* k, wenn es eine $\mathbb{Q}$-Algebra-Einbettung $\iota : k \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A)$ von k in die Endomorphismenalgebra gibt. Ist A einfach mit k-Multiplikation und k vom Grad $[k : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \dim A$, dann hat A *komplexe Multiplikation* mit k, kurz, A ist eine *CM-Varietät*. In diesem Fall ist notwendig $k \cong \mathrm{End}^0(A)$ ein CM-Körper und (imaginär) quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers k^+, der zum

[4] Genauer ist $f' = \Phi_H^{-1} \circ f^\vee \circ \Phi_H$, wobei $f^\vee$ die duale Abbildung bezeichnet.

Fixkörper der Rosati-Involution einer Riemannform auf A isomorph ist. Eine abelsche Varietät ist vom *CM-Typ*[5], wenn die einfachen Isogeniefaktoren CM-Varietäten sind.[6] Eine Kurve, deren Jacobi-Varietät vom CM-Typ ist, ist eine *CM-Kurve*, Periodenpunkte Ω in $\mathbb{H}_g$, die Varietäten vom CM-Typ parametrisieren, heißen *CM-Punkte*.

Sei A vom CM-Typ, g die Dimension von A, und sei $\iota : F \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A)$ die Einbettung des Multiplikationskörpers vom Grad $2g$ über $\mathbb{Q}$. Die komplexe Darstellung $\rho_{\mathbb{C}} \circ \iota : F \to M(g, \mathbb{C})$ von F zerfällt in g eindimensionale Darstellungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, g$, und ist daher äquivalent zu

$$D_\Phi : F \to M(g, \mathbb{C}),\ D_\Phi(f) := \mathrm{diag}(\varphi_1(f), \ldots, \varphi_g(f)).$$

Nun ist die direkte Summe $\rho_{\mathbb{C}} \oplus \bar{\rho}_{\mathbb{C}}$ äquivalent zur erweiterten rationalen Darstellung

$$\rho_{\mathbb{Q}} \otimes 1 : \mathrm{End}^0(A) \otimes \mathbb{C} \to M(2g, \mathbb{C}),$$

weshalb die Menge $\Phi := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$ aus paarweise verschiedenen $\mathbb{Q}$-Homomorphismen von F nach $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft besteht, daß die vollständige Menge der $\mathbb{Q}$-Einbettungen von F nach $\mathbb{C}$ durch die φ_j und deren komplex-konjugierten Einbettungen $\bar{\varphi}_i := \bar{\ } \circ \varphi_j : z \mapsto \overline{\varphi_j(z)}$, $j = 1, \ldots, g$, gegeben ist. Mit der Schreibweise $\bar{\Phi} := \{\bar{\ } \circ \varphi : \varphi \in \Phi\}$ ist also

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C}) = \Phi \,\dot{\cup}\, \bar{\Phi}. \tag{1.2}$$

Wir sagen in diesem Fall, A oder (A, ι) ist vom *(Multiplikations-)Typ* (F, Φ).
Sei umgekehrt ein total komplexer Zahlkörper F vom Grad $[F : \mathbb{Q}] = 2g$ und eine g-elementige Menge $\Phi \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft (1.2) vorgegeben. Das Paar (F, Φ) wird *CM-Typ* genannt, wenn es eine g-dimensionale abelsche Varietät von diesem Multiplikationstyp gibt. Ein Typ (F, Φ), F ein CM-Körper und Φ wie in (1.2), heißt *primitiv*, wenn er nicht Lift eines echt kleineren Typs ist, wenn es also keinen Typ (F_0, Φ_0) mit einem echten CM-Unterkörper F_0 von F gibt, so daß $\Phi|_{F_0} = \Phi_0$ gilt. Ist (A, ι) eine Varietät vom primitiven Typ (F, Φ) und hat $F/\mathbb{Q}$ den Grad $2 \dim A$, dann ist A eine einfache abelsche Varietät und $\mathrm{End}^0(A) = \iota(F)$.

Bemerkung 1.3.2. *Einen CM-Typ $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$ haben wir als Menge komplexer Einbettungen definiert. Im Folgenden fassen wir Φ ebenfalls als geordnetes Tupel $(\varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ wie auch als Abbildung $\Phi = D_\Phi$ auf (vgl. das folgende Beispiel 1.3.3, (ii)). In welcher Interpretation Φ zu sehen ist, sollte aus dem Zusammenhang stets klar werden.*

[5] Bei Holzapfel *DCM* (zerlegte komplexe Multiplikation) genannt.

[6] Der reduzierte Grad $[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}]_{\mathrm{red}}$ einer beliebigen abelschen Varietät A ist durch $2g$, $g = \dim A$, beschränkt. A ist genau dann vom CM-Typ, wenn $[\mathrm{End}^0(A) : \mathbb{Q}]_{\mathrm{red}} = 2g$ gilt, siehe [Mil06], Remark 3.5.

Beispiel 1.3.3. (i) Für $g = 1$ sind CM-Körper F genau die imaginär quadratischen Zahlkörper. Der Endomorphismenring der elliptischen Kurve $E_{\mathfrak{a}} := \mathbb{C}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ ein Gitter in F, ist isomorph zur Ordnung $\mathcal{O}(\mathfrak{a}) := \{f \in F : f\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\}$ von $\mathfrak{a}$, $E_{\mathfrak{a}}$ ist daher eine CM-Kurve vom Typ (F, id_F). Insbesondere tritt jeder imaginär quadratische Zahlkörper als Endomorphismenalgebra einer elliptischen Kurve auf.

(ii) (vgl. [ST61], Chapter II, 6.2., Theorem 3 und Theorem 4). Sei F ein CM-Körper vom Absolutgrad $2g$ und (F, Φ) ein primitiver Typ. Weiter sei $\mathfrak{a}$ ein Gitter in F. Φ definiert eine $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphie

$$F_{\mathbb{R}} := F \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{C}^g, \ \Phi(f \otimes x) := D_{\Phi}(f) \cdot x = {}^t(\varphi_1(f) \cdot x, \ldots, \varphi_g(f) \cdot x),$$

und eine komplexe Struktur J_{Φ} auf $F_{\mathbb{R}}$. Da $\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong F_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}^g$ ist $\Phi(\mathfrak{a})$ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$ und $A_{\Phi(\mathfrak{a})} := \mathbb{C}^g/\Phi(\mathfrak{a})$ ein Torus. Sei $\alpha \in F$ so gewählt, daß $\mathrm{Im}(\varphi(\alpha)) > 0$ für jedes $\varphi \in \Phi$ und $\bar{\alpha} = -\alpha$. Der Torus $A_{\Phi(\mathfrak{a})}$ trägt die Struktur einer abelschen Varietät, denn

$$E(z, w) := \sum \varphi_j(\alpha)(\bar{z}_j w_j - z_j \bar{w}_j)$$

definiert eine rationale Riemannform auf $A_{\Phi(\mathfrak{a})}$. Dabei ist für $a, b \in \mathfrak{a}$

$$E(\Phi(a), \Phi(b)) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\alpha a \bar{b}).$$

Die Ordnung $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ läßt sich mittels $\iota_{\Phi} : f \mapsto \mathrm{diag}(\varphi_1(f), \ldots, \varphi_g(f))$ in $\mathrm{End}(A_{\Phi(\mathfrak{a})}) \subset M(g, \mathbb{C})$ einbetten, also ist $A_{\Phi(\mathfrak{a})}$ eine (einfache) abelsche CM-Varietät vom Typ (F, Φ). Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dann ist der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}(\mathfrak{a})$ isomorph zu $\mathrm{End}(A_{\Phi(\mathfrak{a})})$.

Die Kurven, die wir in den nächsten Kapiteln untersuchen werden, besitzen einen Automorphismus der Ordnung 3 bzw. 4, der zu einer Einbettung eines imaginär quadratischen Zahlkörpers in die Endomorphismenalgebra der Jacobischen und zu einer mit der komplexen Darstellung und der Rosati-Involution verträglichen Darstellung des Zahlkörpers in $M(3, \mathbb{C})$ in folgendem Sinn führt: Sei D ein Schiefkörper endlicher $\mathbb{Q}$-Dimension mit positiver Anti-Involution $^-$ und sei $\rho : D \to M(g, \mathbb{C})$ eine Darstellung. Eine polarisierte abelsche Varietät mit *Endomorphismenstruktur vom Typ* $(D, {}^-, \rho)$ ist ein Tripel (A, H, ι) bestehend aus einer abelschen Varietät der Dimension g, einer Riemannform H und einer $\mathbb{Q}$-Algebra-Einbettung $\iota : D \to \mathrm{End}^0(A)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) die Darstellungen ι und ρ sind äquivalent,

(b) die Rosati-Involution $'$ von $\mathrm{End}^0(A)$ zu H setzt die Involution $^-$ auf D mittels ι fort.

Unter einer abelschen Varietät mit *imaginär quadratischer Multiplikation vom Typ* $(2, 1)$ verstehen wir eine polarisierte abelsche Varietät der Endomorphismenstruktur $(K, {}^-, \rho)$ mit einem imaginär quadratischen Zahlkörper K, der komplexen

Konjugation, also dem nichttrivialen Element von $G(K/\mathbb{Q})$, $^- : K \to K$ und der Darstellung $\rho : f \mapsto \mathrm{diag}(f, f, \bar{f})$. In diesem Fall ist also mit obigen Bezeichnungen $\iota(\bar{f}) = \iota(f)'$ für alle $f \in K$.

Die Werte der elliptischen Modulfunktion in Parametern von CM-Kurven erzeugen Klassenkörper des imaginär quadratischen Multiplikationskörpers. Nach der Verallgemeinerung von Shimura und Taniyama auf abelsche Varietäten erzeugen die Werte geeigneter Modulfunktionen in CM-Punkten wieder Klassenkörper gewisser, von der Struktur der zugrundeliegenden abelschen Varietät bestimmten, Zahlkörper, der sogenannten Reflexkörper, zu deren Definition wir nun kommen. Sei (F, Φ) ein CM-Typ. *Typenspur* und *Typennorm* zu (F, Φ) sind definiert als

$$\mathrm{Tr}_\Phi : F \to \mathbb{C},\ \mathrm{Tr}_\Phi(f) := \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(f) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{N}_\Phi : F \to \mathbb{C},\ \mathrm{N}_\Phi(f) := \prod_{\varphi \in \Phi} \varphi(f).$$

Definition 1.3.4. *Der* Reflexkörper

$$F^* := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}_\Phi(F))$$

zu (F, Φ) *ist derjenige Körper, der durch Adjunktion aller Typenspuren von Elementen aus* F *an* $\mathbb{Q}$ *entsteht.*

Für ein Element σ der absoluten Galoisgruppe $G_\mathbb{Q}$ sei $\sigma\Phi := \{\sigma \circ \varphi : \varphi \in \Phi\}$. Gilt $\sigma\Phi = \Phi$, dann läßt σ die Typenspur eines jeden $f \in F$ invariant. Läßt andererseits σ den Reflexkörper F^* elementweise fest, so folgt aus der Unabhängigkeit der Körperhomomorphismen $\sigma\Phi = \Phi$. Der Reflexkörper ist also durch folgende Eigenschaft charakterisiert:

$$\sigma|_{F^*} = id_{F^*} \iff \sigma\Phi = \Phi. \tag{1.3}$$

Wie man unmittelbar nachrechnet, gilt $\sigma \circ^- (\mathrm{Tr}_\Phi(f)) = {}^- \circ\, \sigma(\mathrm{Tr}_\Phi(f))$ für alle $f \in F$ und $\sigma \in G_\mathbb{Q}$. Wegen $^-\Phi \neq \Phi$ ist F^* nicht reell. Der Reflexkörper ist also ein CM-Körper nach folgendem Kriterium:

Lemma 1.3.5 (siehe [Lan83], p. 6)**.** *Ein Zahlkörper* k*, der nicht reell ist, ist genau dann ein CM-Körper, wenn die komplexe Konjugation mit jeder Einbettung von* k *nach* $\mathbb{C}$ *kommutiert.*

Sei N der Galoisabschluß von $F/\mathbb{Q}$ und $\Phi_N := \{\psi \in G(N/\mathbb{Q}) : \psi|_F \in \Phi\}$ der Lift von Φ nach N. Der *Reflextyp*

$$\Phi^* := \{\psi^{-1}|_{F^*} : \psi \in \Phi_N\}$$

ist ein primitiver CM-Typ für F^*.

Abschließend definieren wir den Modulkörper einer abelschen Varietät für den Fall, daß die Varietät über einem Zahlkörper definiert ist. Die Operation

$$G_{\mathbb{Q}} \times \bar{\mathbb{Q}}[\underline{X}] \to \bar{\mathbb{Q}}[\underline{X}],\ (\sigma, \sum a_I X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}) \mapsto \sum \sigma(a_I) X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n},$$

führt durch die Wirkung auf den definierenden Gleichungen zu einer Operation

$$G_{\mathbb{Q}} \ni \sigma : A \mapsto A^\sigma$$

auf der Menge der über $\bar{\mathbb{Q}}$ definierten abelschen Varietäten A bzw. $(A, [H])$.[7] Diese Operation erhält die Dimension, die CM-Eigenschaft und den Polarisierungstyp. Da jede Isomorphieklasse von abelschen CM-Varietäten einen über einem Zahlkörper definierten Repräsentanten besitzt, siehe [ST61], 12.4, Prop. 26, wirkt $G_{\mathbb{Q}}$ auf den Isomorphieklassen polarisierter abelscher CM-Varietäten der Dimension g. Mit $(A, [H])^\sigma := (A^\sigma, [H]^\sigma)$ bezeichnen wir die σ-Tranformierte von $(A, [H])$.

Definition 1.3.6. *Sei* $(A, [H])$ *eine über einem Zahlkörper definierte polarisierte abelsche Varietät und*

$$\mathrm{Stab}(A, [H]) := \{\sigma \in G_{\mathbb{Q}} : (A, [H]) \cong (A, [H])^\sigma\}.$$

Den Modulkörper

$$M(A) := M(A, [H]) := \bar{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Stab}(A,[H])}$$

zu A*, genauer, zur Isomorphieklasse von* $(A, [H])$*, definieren wir als denjenigen Teilkörper von* $\bar{\mathbb{Q}}$*, der von* $\mathrm{Stab}(A, [H])$ *fixiert wird.*

[ST61], Ch. I, 4.2, Theorem 2 und Proposition 14, sichert die Existenz und die Eindeutigkeit des Modulkörpers.[8]

Bemerkung 1.3.7. *Korrekterweise müßten wir zusätzlich fordern, daß die betrachteten Homomorphismen mit der Einbettung des Multiplikationskörpers verträglich sind. Da wir uns ausschließlich mit primitiven CM-Typen beschäftigen, beseitigt [Lan83], Ch. 1, §4, Theorem 4.2, diese Ungenauigkeit: Ist* $\lambda : A \to B$ *ein Homomorphismus zweier abelscher Varietäten, und sind* (A, ι_A)*,* (B, ι_B) *vom selben primitiven Typ* (F, Φ)*, so ist* $\iota_B(f) \circ \lambda = \lambda \circ \iota_A(f)$ *für alle* $f \in F$*.*

---

[7] Eine Polarisierung ist durch einen Divisor D_H, d.h. durch eine algebraische Teilmenge der Kodimension 1, repräsentiert. Ist dieser Divisor über einem Zahlkörper definiert, dann ist D_H^σ durch die σ-transformierten Gleichungen gegeben und repräsentiert eine Polarisierung auf der σ-Transformierten von A. Ist A über einem Zahlkörper k definiert, dann gibt es in jeder Polarisierung einen Divisor, der ebenfalls über k definiert ist.

[8] Allgemeiner läßt sich der Modulkörper $M(A)$ für beliebige abelsche Varietäten A durch folgende Bedingung charakterisieren:

$$\sigma|_{M(A)} = id_{M(A)} \iff (A, [H]) \cong (A, [H])^\sigma$$

Kapitel 2

Schottky-Taniyama-Formen

In diesem Kapitel werden wir die Konstruktion von Funktionen vorstellen, die auf dem Parameterraum zweier Kurvenfamilien leben, und die zur elliptischen Modulfunktion analoge Eigenschaften aufweisen. Insbesondere sind diese Funktionen aus Modulformen - in [Rie07] *Schottky-Taniyama-Formen* genannt - aufgebaut, die zu gegebenem Periodenpunkt eine Gleichung der parametrisierten Kurve liefern (*Schottky-Eigenschaft*), und deren Werte in CM-Punkten abelsche Erweiterungen gewisser Zahlkörper vom Grad 6 erzeugen (kubische Erweiterungen der Eisenstein- bzw. der Gaußzahlen; *Taniyama-Eigenschaft*), und sie können explizit in Termen von Thetakonstanten angegeben werden.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind bekannt. Die Konstruktion der Picardschen Modulfunktion zur Familie der Picardkurven wurde von Holzapfel und Shiga durchgeführt, siehe [Hol86], Ch. I, [Hol95], Ch. IV, und [Shg88], die Modulfunktion zur hyperelliptischen Kurvenfamilie fußt auf Resultaten von Matsumoto [Mat89] und ist in [Rie07] zu finden. Mit den Ergebnissen aus [KS08] läßt sich die Matsumoto-Theta-Abbildung in etwas handlicherer Gestalt als noch in [Rie07] darstellen; sie ist im Appendix zu finden.

Vorbild für die Konstruktion der angesprochenen Modulformen sind im klassischen Fall der imaginär quadratischen Zahlkörper die Eisensteinreihen $g_2, g_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ zum Gitter $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, die definiert sind als

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda_\tau} \frac{1}{\lambda^4}, \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda_\tau} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Die elliptische Modulfunktion $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung als Quotient

$$j = 12^3 g_2^3/\Delta, \; \Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

dieser Modulformen, sie induziert eine birationale Abbildung des kompaktifizierten Modulraums $\widehat{\Gamma\backslash\mathbb{H}} = \Gamma\backslash(\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, der Familie der elliptischen Kurven in die projektive, über $\mathbb{Q}$ definierte Varietät $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, und sie erzeugt den Körper der meromorphen Funktionen der Riemannschen Fläche $\widehat{\Gamma\backslash\mathbb{H}}$. Ist ein Periodenpunkt τ in der oberen Halbebene vorgegeben, dann definieren die Eisensteinreihen eine Kurve C_τ in Weierstraßform

$$C_\tau : y^2 z = 4x^3 - g_2(\tau)xz^2 - g_3(\tau)z^3.$$

Die Eisensteinreihen sind demnach Schottky-Formen zur elliptischen Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, und eine Weierstraß-Kurve C_τ ist über dem Körper $\mathbb{Q}(j(\tau))$ definiert. Sei nun $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(k,\mathbb{C})$ eine komplexe Einbettung eines Definitionskörpers k von C_τ und bezeichne τ' den Parameter der σ-transformierten elliptischen Kurve. Da C_τ genau dann isomorph zu $C_{\tau'} = C_\tau^\sigma$ ist, wenn $j(\tau) = j(\tau')$ gilt, zeigt ein Blick auf die definierende Weierstraßgleichung, daß die j-Invariante der σ-Transformierten gleich $j(\tau)^\sigma$ ist. Die Kurven sind folglich genau dann isomorph, wenn σ die j-Invariante fest läßt. Per Definition erhalten wir also den Modulkörper der Kurve C_τ durch Adjunktion von $j(\tau)$ an $\mathbb{Q}$. Nach dem ersten Hauptsatz der komplexen Multiplikation ist der mit dem Multiplikationskörper $K = \mathbb{Q}(\tau)$ erweiterte Modulkörper $M(C_\tau)K$ einer CM-Kurve eine abelsche Erweiterung des Multiplikationskörpers. Ist also τ ein CM-Punkt, dann ist $K(j(\tau))/K$ ein Klassenkörper, d.h. die Eisensteinreihen besitzen ebenfalls die angesprochene Taniyama-Eigenschaft. Ist das Gitter $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ zusätzlich ein (gebrochenes) Ideal im imaginär quadratischen Körper $K = \mathbb{Q}(\tau)$, dann ist das Kompositum $M(C_\tau)K = K(j(\tau))$ der *Hilbertklassenkörper* zu K, d.h. $K(j(\tau))/K$ ist die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung von K.

2.1 Picardsche Modulformen

Die Rolle der elliptischen Modulgruppe übernimmt in höherer Dimension zunächst die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, vgl. Kapitel 1.1; die kanonische Verallgemeinerung der Modulformen und -funktionen zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ in Dimension $g > 1$ sind die Siegelschen Modulformen bzw. -funktionen.

Definition 2.1.1. *Sei $g > 1$. Eine* Siegelsche Modulform vom Gewicht k *bzgl. einer diskreten Untergruppe G von* $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})$ *ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H}_g \to \mathbb{C}$, derart daß*

$$f(\gamma\Omega) = \det(C\Omega + D)^k f(\Omega) \quad \forall\, \gamma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in G.$$

Eine Siegelsche Modulfunktion *zur Gruppe G ist eine meromorphe Funktion, die sich als Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts darstellen läßt.*

Bemerkung 2.1.2. *Für $g = 1$ fordert man zusätzlich die Holomorphie in ∞, die aber für höheres Geschlecht nach dem Koecher-Prinzip, siehe z.B. [vdG08], Theorem 2, automatisch erfüllt ist.*

Das Konzept zur Konstruktion von Funktionen mit Taniyama-Eigenschaft wurde von Shimura in [Shm68] dargestellt. Dort ist die Existenz einer holomorphen Abbildung $J : \mathbb{H}_g \to V$ in eine Zariski-offene Teilmenge einer über $\mathbb{Q}$ definierten projektiven Varietät V^* gesichert, die über den Quotienten $\mathcal{A}_g := \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$, den Modulraum der hauptpolarisierten abelschen Varietäten der Dimension g, faktorisiert und einen biregulären Morphismus $\mathcal{A}_g \to V$ induziert, der folgende Eigenschaften besitzt: Angenommen A ist eine über k definierte hauptpolarisierte abelsche Varietät, und $\sigma : k \to \mathbb{C}$ ist eine Einbettung. Seien Ω und Ω_σ Punkte der oberen Halbebene $\mathbb{H}_g$, die A bzw. die σ-transformierte Varietät A^σ parametrisieren. Dann liegen die Koordinaten von $J(\Omega)$ in k, und es gilt $J(\Omega_\sigma) = J(\Omega)^\sigma$.

Folglich ist A genau dann isomorph zur σ-Transformierten A^σ, wenn der Periodenpunkt Ω_σ in der Bahn von Ω unter der Wirkung der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ liegt, d.h. wenn $J(\Omega) = J(\Omega_\sigma) = J(\Omega)^\sigma$ gilt. Per Definition erhalten wir also den Modulkörper $M(A)$ von A durch Adjunktion der Koordinaten von $J(\Omega)$ an $\mathbb{Q}$, also durch Adjunktion von Werten unter der Wirkung der symplektischen Gruppe invarianter Funktionen, d.h. Siegelscher Modulfunktionen. Wie im eindimensionalen Fall führt der Modulkörper von CM-Varietäten zu abelschen Erweiterungen gewisser Zahlkörper, nämlich der im ersten Kapitel eingeführten Reflexkörper, die sich in unserem Fall als zu den Multiplikationskörpern konjugiert herausstellen werden.

Wir spezialisieren uns nun auf Dimension $g = 3$ und fordern zusätzlich, daß die abelschen Varietäten Multiplikation mit einem fixierten imaginär quadratischen Zahlkörper vom Typ $(2, 1)$ besitzen. Shimura zeigt in seinem Artikel [Shm63], daß (analytische) Familien polarisierter abelscher Varietäten mit einer derartigen Endomorphismenstruktur durch einen zweidimensionalen komplexen Ball $\mathbb{B}$, der als symmetrisches Gebiet zu einer unitären Gruppe $\mathrm{U}(2, 1)$ auftritt, und ihre Isomorphieklassen durch den Quotienten $\Gamma_K \backslash \mathbb{B}$, $\Gamma_K = \mathrm{PU}((2, 1), \mathcal{O}_K)$, parametrisiert werden. Für die Jacobischen unserer Kurvenfamilien, die eine solche Struktur tragen und die dicht im Modulraum der entsprechenden analytischen Familie liegen, werden wir dieses Ergebnis explizit erhalten.
Sei $V = (V, h)$ ein nicht ausgearteter hermitescher Raum der Dimension 3 über einem Körper k. Die Gruppe der Isomorphismen, d.h. der bijektiven Isometrien, dieses Raums ist die unitäre Gruppe

$$\mathrm{U}(V, h) := \{\gamma \in \mathrm{GL}(V) : h(\gamma(v), \gamma(w)) = h(v, w)\ \forall v, w \in V\}.$$

Die spezielle bzw. die projektive unitäre Gruppe zu (V, h) ist die Gruppe

$$\mathrm{SU}(V, h) := \{\gamma \in \mathrm{U}(V, h) : \det \gamma = 1\}$$

der Isometrieen der Determinante 1 bzw. die Faktorgruppe

$$\mathrm{PU}(V, h) := \mathrm{U}(V, h)/Z(\mathrm{U}(V, h))$$

nach dem Zentrum. Nach Wahl einer Basis können wir V mit k^3 und h mit einer hermiteschen Matrix H mit der Eigenschaft $h(v,w) = {}^t v H \bar{w}$ identifizieren. Ist $k = \mathbb{C}$, oder ist k ein imaginär quadratischer Zahlkörper, dann ist das Paar (V,h) durch die Signatur (p,q) und die (Klasse der) Determinante von h (in $\mathbb{Q}^*/N_{k/\mathbb{Q}}(k^*)$) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In den Fällen, in denen es allein auf die Signatur (p,q) ankommt, oder wenn klar ist, mit welcher Form wir arbeiten, schreiben wir auch $\mathrm{U}((p,q),k)$, $\mathrm{SU}((p,q),k)$ bzw. $\mathrm{PU}((p,q),k)$ für $\mathrm{U}(V,h)$, $\mathrm{SU}(V,h)$ bzw. $\mathrm{PU}(V,h)$.

Sei jetzt (V,h) ein hermitescher $\mathbb{C}$-Vektorraum der Signatur $(2,1)$, H sei die Gramsche Matrix von h. Die Operation der unitären Gruppe auf $V = \mathbb{C}^3$ induziert eine Operation

$$\mathrm{U}((2,1),\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$

die das zum komplex zweidimensionalen Ball biholomorphe Gebiet[1]

$$\mathbb{B}_H := \{\tau = \mathbb{P}v \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} : \ {}^t v H \bar{v} < 0\}$$

stabilisiert und transitiv auf $\mathbb{B}_H$ operiert. Der Stabilisator eines Ballpunkts τ mit affinem Repräsentanten $v \in \mathbb{C}^3$ unter dieser Wirkung ist die maximal kompakte Untergruppe

$$\mathrm{U}((2,1),\mathbb{C})_\tau = \mathrm{U}(\mathbb{C}v) \times \mathrm{U}(\mathbb{C}v^\perp) \cong \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2).$$

$\mathbb{B}_H$ läßt sich also als Quotient der algebraischen Gruppe $\mathrm{U}((2,1),\mathbb{C})$ nach der maximal kompakten Untergruppe $\mathrm{U}((2,1),\mathbb{C})_\tau$ auffassen.

Sei nun K ein imaginär quadratischer Zahlkörper, L sei ein $\mathcal{O}_K$-Gitter im K-Vektorraum $V \cong K^3$ und h wieder eine hermitesche Form der Signatur $(2,1)$ auf V. Setze

$$\Gamma_L := \{\gamma \in \mathrm{U}((2,1),K) : \gamma L \subset L\}.$$

Eine Untergruppe Γ' von $\mathrm{U}((2,1),K)$ ist *arithmetisch*, wenn sie kommensurabel zu einer Gruppe Γ_L ist, d.h. wenn der Durchschnitt $\Gamma' \cap \Gamma_L$ endlichen Index in Γ_L wie auch in Γ' hat. Insbesondere ist

$$\Gamma := \Gamma_{\mathcal{O}_K^3} = \mathrm{U}((2,1),\mathcal{O}_K) = \mathrm{U}((2,1),K) \cap M(3,\mathcal{O}_K)$$

eine arithmetische Untergruppe. Eine *Hauptkongruenzuntergruppe* von Γ ist eine Gruppe der Gestalt

$$\Gamma(\mathfrak{a}) := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \equiv E_3 \bmod \mathfrak{a}\}$$

mit einem Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$, eine *Kongruenzuntergruppe* ist eine Untergruppe von Γ, die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält. Kongruenzuntergruppen Γ' von Γ, wie auch $\mathrm{S}\Gamma' = \Gamma' \cap \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ und das kanonische Bild $\mathrm{P}\Gamma'$ von Γ' in $\mathrm{PU}((2,1),K)$ nennen wir (spezielle/projektive) *Picardsche Modulgruppen.* Γ selbst - wie auch

[1] Für $v = {}^t(v_0,\ldots,v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ setzen wir $\mathbb{P}v := (v_0 : \ldots : v_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

$\mathrm{SU}((2,1),\mathcal{O}_K)$ oder $\mathrm{PU}((2,1),\mathcal{O}_K)$ - wird als *volle Picardsche Modulgruppe*[2] bezeichnet. Picardsche Modulgruppen sind diskrete Untergruppen der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}_H) \cong \mathrm{PU}((2,1),\mathbb{C})$, die eigentlich diskontinuierlich mit endlichem Kovolumen auf $\mathbb{B}_H$ operieren, und sie führen zu lokal-kompakten Quotienten $\Gamma'\backslash\mathbb{B}_H$. Sei $\partial_K\mathbb{B}_H := \{v \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} : {}^t v H\bar{v} = 0\} \cap \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}(K)$. Jede Picardsche Modulgruppe Γ' wirkt auf dem Rand $\partial_K\mathbb{B}_H$ mit nur endlich vielen Bahnen ([BJ06], III.2-III.4). Eine Γ'-*Spitze* ist eine Γ'-Bahn auf $\partial_K\mathbb{B}_H$ bzw. ein Repräsentant einer Γ'-Bahn. Nach Baily-Borel [BB66] ist $\Gamma'\backslash(\mathbb{B}_H \cup \partial_K\mathbb{B}_H) =: \hat{X}_{\Gamma'}$ eine kompakte algebraische Fläche, die sog. *(Satake-)Baily-Borel-Kompaktifizierung* von $X_{\Gamma'} = \Gamma'\backslash\mathbb{B}_H$. Unter einer *Picardschen Modulfläche* verstehen wir einen Quotienten $X_{\Gamma'}$ bzw. die Kompaktifizierung $\hat{X}_{\Gamma'}$ des Balls $\mathbb{B}_H \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ nach einer Picardschen Modulgruppe. Eine *Picardsche Modulform* bezüglich Γ' vom Gewicht k zum Charakter χ von Γ' ist nun eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{B}_H \to \mathbb{C}$, die für alle $\tau \in \mathbb{B}_H$ und $\gamma \in \Gamma'$ folgende Relation erfüllt

$$f(\gamma(\tau)) = \chi(\gamma)\det\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}(\tau)\right)^{-k} f(\tau).$$

Hier bezeichnet $\det(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}(\tau))$ die Jacobideterminante von $\gamma : \tau \mapsto \gamma(\tau)$. Eine (meromorphe) *Picardsche Modulfunktion* zum Gitter Γ' ist Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts zum selben Charakter. Damit entsprechen die rationalen Funktionen auf einer Picardschen Modulfläche umkehrbar eindeutig den Picardschen Modulfunktionen, die Quotientenfläche $\hat{X}_{\Gamma'}$ können wir als das projektive Spektrum $\mathrm{Proj}(R[\Gamma'])$ des Rings $R[\Gamma']$ der Γ'-Modulformen auffassen.

2.2 Schottky-Taniyama-Formen

Wir kommen nun zu den versprochenen Modulfunktionen zweier Kurvenfamilien mit der angedeuteten Schottky-Taniyama-Eigenschaft. Die Konstruktionsprinzipien unterscheiden sich in erster Linie in technischen Aspekten; wir stellen sie daher für die Familie der hyperelliptischen Kurven etwas ausführlicher dar und geben für die Picardkurven die später benötigten Daten an. Genauere Ausführungen über Picardkurven findet man in [Hol86], [Hol95] und [Shg88].

2.2.1 Hyperelliptische Kurven

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse gehen wesentlich auf K. Matsumotos Darstellung der inversen Periodenabbildung der Kurvenfamilie in Termen von Thetakonstanten zurück, siehe [Mat89]. Matsumotos Theta-Abbildung definiert eine Projektion des Balls auf den Quotienten nach der Monodromiegruppe eines Systems hypergeometrischer Differentialgleichungen, der sich als doppelte

[2] Allgemeiner werden auch die Gruppen $\mathrm{PU}((n,1),\mathcal{O}_K)$ Picardsche Modulgruppen genannt.

Überlagerung der projektiven Ebene herausstellt. Der Modulraum der Kurvenfamilie ist nach einem Resultat von Piñeiro der Raum $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_3$. Um die gewünschten Schottky-Taniyama-Formen zu erhalten, müssen wir lediglich Matsumotos Theta-Abbildung mit der Abbildung $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_3$ verknüpfen. Letzteres wurde in [Rie07] durchgeführt.

Wir betrachten die Familie $\mathcal{F}$ glatter hyperelliptischer Kurven $\widetilde{C}(x,y)$ vom Geschlecht 3 mit Modell

$$C(x,y) : w^4 = z^2(z-1)^2(z-x)(z-y)$$

und Parametern

$$(x,y) \in \mathcal{M} := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \boxtimes := \mathbb{C}^2 \backslash \{(x,y) \mid xy(x-1)(y-1)(x-y) = 0\}.$$

Eine Basis der holomorphen 1-Formen einer Kurve $\widetilde{C}(x,y)$ aus $\mathcal{F}$ ist

$$\eta_1 := dz/w,\ \eta_2 = z(z-1)dz/w^3,\ \eta_3 = z^2(z-1)dz/w^3.$$

Bemerkung 2.2.1. *Die Abbildung*

$$f := \eta_1/(\eta_3 - y\eta_2) = w^2/z(z-1)(z-y) : \widetilde{C}(x,y) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

ist eine 2:1-Überlagerung der projektiven Geraden, die Kurven sind also hyperelliptisch. Die Berechnung der Verzweigungspunkte der 2:1-Überlagerung führt zu einem birationalen Modell der hyperelliptischen Kurve mit Gleichung $u^2 = p(v)$, $p(v)$ ein Polynom vom Grad $2g+1$ oder $2g+2$ in v. Der Verzweigungsort der Überlagerung f in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist $\{0, \pm 1, \pm\sqrt{\frac{x}{y}}, \pm\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}, \infty\}$. Die Kurve $\widetilde{C}(x,y)$ ist also birational äquivalent zu

$$\widetilde{C}'(x,y) : u^2 = v(v^2-1)\left(v^2 - \frac{x}{y}\right)\left(v^2 - \frac{1-x}{1-y}\right).$$

Die Periodenabbildung der Kurvenfamilie

Zu einem fixierten Parameter (x_0, y_0) läßt sich explizit eine Basis $\mathfrak{b}_0 := \{A_j, B_k : 1 \le j,k \le 3\}$ der Homologiegruppe $H_1(\widetilde{C}(x_0,y_0), \mathbb{Z})$ konstruieren, deren Schnittmatrix in kanonischer Gestalt J gegeben ist, und auf der der Automorphismus $\rho : (z,w) \mapsto (z, iw) \in \mathrm{Aut}(\widetilde{C}(x_0,y_0))$ der Ordnung 4 wie folgt operiert:[3]

$$\begin{aligned} \rho A_1 &= A_2, \quad \rho A_2 = -A_1, \quad \rho A_3 = B_3, \\ \rho B_1 &= B_2, \quad \rho B_2 = -B_1, \quad \rho B_3 = -A_3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

[3]Die von Matsumoto angegebenen Relationen (1.6) wie auch die (2.2) entsprechenden (1.9) sind mit einem Tippfehler ausgestattet.

Periodenintegrale und Periodenmatrix bezeichnen wir wie folgt

$$\Pi = \left(\int_{A_j} \eta_k \Big| \int_{B_j} \eta_k \right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_2 & a_4 & a_6 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 & b_6 \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_2 & c_4 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Die Relationen (2.1) implizieren folgende Beziehungen zwischen den Periodenintegralen

$$\begin{aligned} a_3 &= -ia_1, & a_4 &= -ia_2, & a_6 &= -ia_5, \\ b_3 &= ib_1, & b_4 &= ib_2, & b_6 &= ib_5, \\ c_3 &= ic_1, & c_4 &= ic_2, & c_6 &= ic_5, \end{aligned} \tag{2.2}$$

also ist

$$\Pi = (\Pi_1|\Pi_2) = \begin{pmatrix} a_1 & -ia_1 & a_5 & a_2 & -ia_2 & -ia_5 \\ b_1 & ib_1 & b_5 & b_2 & ib_2 & ib_5 \\ c_1 & ic_1 & c_5 & c_2 & ic_2 & ic_5 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Sei nun (x, y) ein beliebiger Parameter und s ein Weg von (x_0, y_0) nach (x, y) in $\mathcal{M}$. Fortsetzung von $\mathfrak{b}_0$ entlang s liefert eine Basis $\mathfrak{b}$ von $H_1(\widetilde{C}(x, y), \mathbb{Z})$, auf der ρ wie in (2.1) operiert. Integration der Differentialformen η_k über die resultierenden Zykeln führt zu Periodenintegralen, die wieder die Relationen (2.2) erfüllen. Unter Ausnutzung der Riemannrelationen erhält man als Periodenpunkt

$$\Omega(x, y) = \Pi_1^{-1}\Pi_2 = \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u - \frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}, \; u := \frac{a_2}{a_1}, v := \frac{a_5}{a_1}. \tag{2.4}$$

Die Periodenintegrale a_k, b_k, c_k und somit auch die Quotienten u, v hängen dabei vom Parameter $x, y \in \mathcal{M}$ und vom gewählten Weg s ab. Insgesamt erhalten wir eine mehrwertige Abbildung

$$\Psi : \mathcal{M} \to \mathbb{H}_3, \; (x, y) \mapsto \Omega(x, y). \tag{2.5}$$

Für Parameter (x, y) in $\mathcal{M}$ liegen u und v im Gebiet

$$\mathbb{B}_H^{\mathrm{aff}} := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2 > 0\}$$

oder, äquivalent hierzu, $(a_1 : a_2 : a_5) \in \mathbb{B}_H$, wobei

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \supset \mathbb{B}_H := \{(z_0 : z_1 : z_2) : \; {}^t z H \bar{z} < 0\}, \; H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einbettung $\mu : \mathbb{B}_H \hookrightarrow \mathbb{H}_3$, gegeben durch

$$\mu(\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2) := \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u - \frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}, \; u = \frac{\zeta_1}{\zeta_0}, \; v = \frac{\zeta_2}{\zeta_0}, \tag{2.6}$$

führt also wegen $\Psi(\mathcal{M}) \subset \mu(\mathbb{B}_H)$ zur mehrwertigen Periodenabbildung

$$\widetilde{\Psi} := \mu^{-1} \circ \Psi : \mathcal{M} \to \mathbb{B}_H, \; (x, y) \mapsto (\mu^{-1} \circ \Psi)(x, y).$$

Bemerkung 2.2.2. *Der Automorphismus* $\rho \in \mathrm{Aut}(\widetilde{C}(x,y))$ *definiert durch* $\rho : \int_Q^P \eta \mapsto \int_Q^P \eta \circ \rho$ *einen Endomorphismus der Ordnung 4 von* $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}(x,y))$ *und induziert eine Einbettung von* $K = \mathbb{Q}(i)$ *in die Endomorphismenalgebra. Da*

$$\eta_1 \circ \rho = -i\eta_1, \ \eta_2 \circ \rho = i\eta_2, \ \eta_3 \circ \rho = i\eta_3$$

ist diese Einbettung bezüglich der zu η_1, η_2, η_3 *dualen Basis durch*

$$\mathbb{Q}(i) \ni i \mapsto \rho \mapsto \mathrm{diag}(-i, i, i) \in \rho_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}^0(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}(x,y))))$$

gegeben. Die Jacobischen der Kurvenfamilie sind demnach dreidimensionale abelsche Varietäten mit $\mathbb{Q}(i)$*-Multiplikation vom Typ (2,1).*

Übergang zum Modulraum

Eine rationale Abbildung $\alpha : C \to C'$ zweier hyperelliptischer Kurven mit 2:1-Überlagerungen f und f' ist genau dann eine Isomorphie, wenn es einen Automorphismus σ von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ gibt, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & C' \arrow[d, "f'"] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}. \end{tikzcd}$$

Insbesondere gehen dabei Verzweigungspunkte in Verzweigungspunkte und singuläre Punkte des affinen Modells in singuläre Punkte über. Eine detaillierte Betrachtung der möglichen projektiven Automorphismen ergibt, daß zwei Kurven unserer Familie genau dann isomorph sind, wenn die Parameter durch ein Element der durch

$$k_1(x,y) = (y,x), \ k_2(x,y) = (1-x, 1-y), \ k_3(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

erzeugten Untergruppe $K \cong C_2 \times S_3$ der Automorphismengruppe von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ineinander überführt werden, siehe [HPV98], Appendix 1. Wir halten fest: Die Isomorphieklassen der Kurven $\widetilde{C}(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{M}$, werden durch $\mathcal{M}/K$ parametrisiert.

Arithmetische Gruppen und Monodromie

Ein geschlossener Weg $\delta : [0,1] \to \mathcal{M}$, $\delta(0) = \delta(1) = (x,y)$, definiert eine symplektische Transformation von $\mathbb{H}_3$ und einen Normalbasenwechsel von $\widetilde{C}(x,y)$, also einen biholomorphen Automorphismus des Balls $\mathbb{B}_H$. Auf diese Weise erhalten wir eine Darstellung der Fundamentalgruppe

$$\pi_1(\mathcal{M}, (x_0, y_0)) \to \mathrm{PU}(H, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{B}_H),$$

die die Mehrwertigkeit der Periodenabbildung $\widetilde{\Psi}$ beschreibt: Ist Γ_2' das Bild der Fundamentalgruppe, dann definiert die Periodenabbildung eine einwertige Abbildung von $\mathcal{M}$ in den Quotienten $\Gamma_2' \backslash \mathbb{B}_H$.

Grundlegende Eigenschaften der Periodenabbildung fußen auf Delignes und Mostows Untersuchungen von Systemen Fuchsscher Differentialgleichungen. Zu diesem Zweck erinnern wir an die Beziehungen zwischen Kurven spezieller Gleichungstypen mit Parameterraum $\mathcal{M}$ und Systemen hypergeometrischer Differentialgleichungen. Beweise und genauere Ausführungen findet man in [DM86] oder auch [Yos87].

Sei $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ ein Quintupel rationaler Zahlen in $(0, 1)$ mit Summe $\sum_{j=0}^4 \mu_j = 2$ und bezeichne d den Hauptnenner der μ_j. Wir betrachten glatte projektive Kurven $\widetilde{C}_\mu(x, y)$ mit affinem Modell

$$C_\mu(x, y) : w^d = z^{d\mu_0}(z-1)^{d\mu_1}(z-x)^{d\mu_2}(z-y)^{d\mu_3}$$

und Parametern $(x, y) \in \mathcal{M} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash ⊞$. Auf jeder dieser Kurven definiert

$$\eta = dz/w = z^{-\mu_0}(z-1)^{-\mu_1}(z-x)^{-\mu_2}(z-y)^{-\mu_3}$$

eine holomorphe Differentialform. Aufgefaßt als Funktion in x und y genügen die Periodenintegrale $\int_{Z(x,y)} \eta$ von $C_\mu(x, y)$ dem System $F_1(a, b, b', c)$ partieller Differentialgleichungen

$$x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c - (a+b+1)x)\frac{\partial u}{\partial x} - by\frac{\partial u}{\partial y} - abu = 0,$$
$$y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + (c - (a+b'+1)y)\frac{\partial u}{\partial y} - b'x\frac{\partial u}{\partial x} - ab'u = 0,$$

wobei $\mu_0 = c - b - b'$, $\mu_1 = 1 + a - c$, $\mu_2 = b$, $\mu_3 = b'$.

Ist eine Fundamentallösung für $(x, y) \in \mathcal{M}$ gegeben - das System ist nichtsingulär und der Lösungsraum hat Dimension 3 auf $\mathcal{M}$ - erreichen wir durch analytische Fortsetzung entlang Wegen $\delta \in \pi_1(\mathcal{M}, (x, y))$ eine Darstellung der Fundamentalgruppe in $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Das Bild von $\pi_1(\mathcal{M}, (x, y))$ unter dieser Darstellung ist die *Monodromiegruppe* des Systems, die *projektive Monodromiegruppe* ist das Bild der Monodromiegruppe unter der Projektion $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$.

In unserem Fall hat das assoziierte System Werte $\mu_0 = \mu_1 = \mu_4 = 1/2$ und $\mu_2 = \mu_3 = 1/4$, und demnach ist $F_1(a, b, b', c) = F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$. Die μ_j genügen zusätzlich der Bedingung

(INT) für $i \neq j$: $(1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Die Periodenpunkte $(\int_{A_1(x,y)} \eta_1 : \int_{B_1(x,y)} \eta_1 : \int_{A_3(x,y)} \eta_1)$ definieren projektive Lösungen des Systems; nach [DM86], Theorem 11.4 und List 14.4, siehe auch

[Yos87], PTMD-Theorem, ist die projektive Monodromiegruppe PMon $=: \Gamma_2'$ ein arithmetisches Gitter in $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}_H)$ und $\widetilde{\Psi}$ induziert eine injektive Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\Gamma_2'\backslash\mathbb{B}_H$. Bis auf Kompaktifizierung koinzidiert $\widetilde{\Psi}^{-1}$ (über die Verzweigung und in die Spitzen fortgesetzt) mit der Quotientenabbildung $\mathbb{B}_H \to \Gamma_2'\backslash\mathbb{B}_H$ und führt zu einer biholomorphen Abbildung

$$\Gamma_2'\backslash\mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\backslash\{(0,0),(1,1),(\infty,\infty)\}.$$

Wir identifizieren die letzteren Objekte. Der kompaktifizierte Verzweigungsort $\boxplus$ der Quotientenabbildung $\mathbb{B}_H \to \Gamma_2'\backslash\mathbb{B}_H$ besteht aus den sieben Geraden $x = 0, 1, \infty$, $y = 0, 1, \infty$, $x = y$ mit Verzweigungszahlen 2 über der Diagonalen und 4 über den verbleibenden Geraden außerhalb der Dreifachpunkte. Wir definieren eine Gewichtsabbildung

$$b : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

durch $b(P) = \infty$ für alle $P \in \{(0,0),(1,1),(\infty,\infty)\} =: \boxplus_\infty$ und $b(P)$ gleich der Verzweigungszahl von $\widetilde{\Psi}^{-1}$ in Q, $Q \in \mathbb{B}_H$ ein Urbild von P, $P \notin \boxplus_\infty$. Das Tripel $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \boxplus, b)$ ist ein Orbifold, das durch den Ball $\mathbb{B}_H$ uniformisiert wird, vgl. [Yos87].

Um explizite Erzeugende der Monodromiegruppe zu berechnen, fixiert Matsumoto einen Parameter λ_0 und wählt eine Basis der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{M}, \lambda_0)$. Deformation der Kurve $\widetilde{C}(\lambda_0)$ entlang geschlossener Wege führt zu einer symplektischen Transformation des Siegelgebiets und schließlich zu Ballautomorphismen $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$. Da die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{M}/K, \bar{\lambda}_0)$ des Modulraums isomorph zu $\pi_1(\mathcal{M}, \lambda_0)/K$ ist, führt die Wahl dreier Wege von λ_0 zu den K-äquivalenten Punkten $k_j(\lambda_0)$, $j = 1, 2, 3$, zu Automorphismen $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B}_H)$ und zu Erzeugenden der (erweiterten) Monodromie der Abbildung $\bar{\Psi} : \mathcal{M}/K \to \mathbb{B}_H$. Die resultierenden Transformationsgruppen bezeichnen wir mit $\mathrm{Mon}(\widetilde{\Psi})$ und $\mathrm{Mon}(\bar{\Psi})$. Die Berechnung ergibt (siehe [Mat89], (2.5) und (2.7))[4]

$$\mathrm{Mon}(\widetilde{\Psi}) =< \gamma_1, \ldots, \gamma_5 > \subset \mathrm{Mon}(\bar{\Psi}) =< \gamma_1, \ldots, \gamma_8 >, \text{ wobei}$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 1 & 1-i \\ -1-i & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i & -1-i \\ 1+i & -i & -1-i \\ 1-i & -1+i & i \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} i & 1-i & 1-i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & -1-i & -1 \end{pmatrix},$$

[4] Die unten angegebene Matrix γ_5 unterscheidet sich von Matsumotos $g(\delta_5)$. Betrachtet man die symplektische Matrix $N(\delta_5)$, siehe [Mat89], (2.4), läßt sich leicht nachrechnen, daß sich in das dort angegebene $g(\delta_5)$ ein Tippfehler eingeschlichen hat.

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 2+i & -1-i & 1-1 \\ 1+i & -i & 1-i \\ -1-i & 1+i & i \end{pmatrix}, \quad \gamma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$
$$\gamma_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren die projektive und die spezielle Picardsche Modulgruppe $\Gamma := \mathrm{PU}(H, \mathbb{Z}[i]) = \mathrm{SU}(H, \mathbb{Z}[i])$ der Gaußzahlen. $\Gamma_1 := \Gamma(1+i)$ sei die Kongruenzuntergruppe zum Ideal $(1+i)$. Die Beziehung zwischen den (erweiterten) projektiven Monodromiegruppen

$$\Gamma_2' := \mathrm{PMon}(\widetilde{\Psi}) \subset \Gamma_1' := \mathrm{P} < \gamma_1, \ldots, \gamma_6 > \subset \Gamma' := \mathrm{PMon}(\bar{\Psi})$$

und den arithmetischen Gruppen

$$\Gamma_1 := \Gamma(1+i) \subset \Gamma = \mathrm{PU}(H, \mathbb{Z}[i])$$

können wir unter Verwendung folgender Fakten herstellen.

Satz 2.2.3 (siehe [HV01], Chapter 8 und 9)**.** *Die Baily-Borel Kompaktifizierung $\hat{X}_{\Gamma_1}$, $\Gamma_1 = \Gamma(1+i)$, von $\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}_H$ ist $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Der kompaktifizierte Verzweigungsort der Quotientenabbildung $p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \to X_{\Gamma_1}$ besteht aus einer ebenen* Apollonius Konfiguration*, d.h. einer Quadrik $\hat{C}_0$ und drei Tangenten $\hat{C}_j$, $j = 1, 2, 3$. Γ_1 hat drei inäquivalente Spitzen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \partial_{\mathbb{Q}(i)} \mathbb{B}_H$, die den Schnittpunkten $\hat{C}_0 \cap \hat{C}_j$, $j = 1, 2, 3$ entsprechen.*

Außerhalb der Bilder der Spitzen ist das Gewicht der Verzweigungskurven $\hat{C}_j$ vier, mit der Notation von [HV01] befinden wir uns also in der Situation Apoll-3. Mit diesen Resultaten können wir die folgende Proposition verifizieren.

Satz 2.2.4 (vgl. [Mat89], Prop. 2.2, [Rie07], Prop. 2.3)**.** *Arithmetische Beschreibung der Monodromie.*

$$(i)\ \Gamma_1' = \Gamma_1, \quad (ii)\ \Gamma' = \Gamma, \quad (iii)\ (\Gamma_1 : \Gamma_2') = 2.$$

Beweisweg (vgl. [Rie07]). (i) Man zeigt zunächst durch Betrachtung der Stabilisatorgruppen der Γ_1-Spitzen, daß die Projektion $\hat{\pi}_1 : \hat{X}_{\Gamma_1'} \to \hat{X}_{\Gamma_1} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ lokal bei den Spitzen unverzweigt ist. Da das Verzweigungsgewicht in glatten Punkten einer irreduziblen Verzweigungskurve konstant ist und eine solche über der Apolloniuskonfiguration liegt, also eine Spitze trifft, bleibt nur der aus endlich vielen Punkten bestehende singuläre Ort $\mathrm{Sg}(\hat{\mathrm{X}}_{\Gamma_1})$ als möglicher Verzweigungsort. Entfernen wir endlich viele Punkte aus der projektiven Ebene, dann bleibt der resultierende Raum einfach zusammenhängend, die Einschränkung $\hat{X}_{\Gamma_1'} \backslash \hat{\pi}_1^{-1}(Sg(\hat{X}_{\Gamma_1})) \to \hat{X}_{\Gamma_1} \backslash \mathrm{Sg}(\hat{\mathrm{X}}_{\Gamma_1})$ ist demnach eine unverzweigte Überlagerung eines einfach zusammenhängenden Gebiets, daher vom Grad 1, was ebenfalls der Grad von $\hat{\pi}_1$ sein muß.

(ii) Die Faktorgruppe Γ/Γ_1 ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3. Die Untergruppe Γ'/Γ_1 wird von zwei Elementen $\gamma_7\Gamma_1 \neq \gamma_8\Gamma_1$ der Ordnung 2 erzeugt, folglich ist $\Gamma'/\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_1$.

(iii) $\gamma_6 \notin \Gamma_2'$, da $\hat{X}_{\Gamma_2'} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \hat{X}_{\Gamma_1}$ nicht den Grad 1 haben kann. Andererseits ist $\gamma_6^2 = \gamma_3 \in \Gamma_2'$, somit ist der Index von Γ_2' in Γ_1 gleich 2. $\square$

V bezeichne die Segre-Quadrik und $\hat{\mathbb{B}}_H := \mathbb{B}_H \cup \partial_K \mathbb{B}_H$. Die Sätze 2.2.3 und 2.2.4 führen zu folgendem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\hat{\mathbb{B}}_H & \dashrightarrow & \hat{X}_{\Gamma_2'} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & V \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \hat{X}_{\Gamma_1} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})/{<}k_1{>} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \hat{X}_{\Gamma} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})/K & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_3,
\end{array} \tag{2.7}$$

wobei $\dashrightarrow$ (resp. $\overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow}$) eine (bi-)rationale Abbildung bezeichnet.

Bemerkung 2.2.5. *Nach [Shm63] ist $\hat{X}_\Gamma$ ebenfalls der Modulraum aller hauptpolarisierter abelscher Varietäten der Dimension 3 mit $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation vom Typ $(2,1)$. Hieraus können wir ableiten, daß jede abelsche Varietät mit dieser Endomorphismenstruktur, die durch einen Ballpunkt parametrisiert wird, der nicht über der Konfiguration $\boxplus$ liegt, isomorph ist zu einer Jacobi-Varietät der Kurvenfamilie. Insbesondere besteht das Urbild der Geradenkonfiguration aus K-Scheiben (vgl. S. 49) im Ball und parametrisiert keine einfachen abelschen Varietäten.*

Die Picardsche Modulfunktion zur Kurvenfamilie

Bis auf eine Konstante läßt sich eine meromorphe Funktion auf einer Riemannschen Fläche als rationaler Ausdruck in der *Primform* ausdrücken (vgl. [Mum83], Ch. II, §3, Beweis des Theorems von Abel, oder auch Appendix A). Benutzt man diese Darstellung der Projektion $f : \widetilde{C}(x,y) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $(z,w) \mapsto z$, und vergleicht die Werte von f mit den Werten dieser Darstellung in den (Urbildern der) Verzweigungspunkten (unter der Singularitätenauflösung $\widetilde{C}(x,y) \to C(x,y)$), ergeben sich Ausdrücke der Parameter x und y in Termen von Thetakonstanten, die auf dem Periodenball $\mathbb{B}_H$ definiert sind. Nach [Mat89], Theorem 3.4, hat die Inverse der Periodenabbildung der Kurvenfamilie, *Matsumotos Theta-Abbildung*, die Gestalt

$$\widetilde{\Psi}^{-1} = \left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \frac{\phi_3}{\phi_2}\right) : \mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \left(\frac{\phi_1}{\phi_0}, \frac{\phi_3}{\phi_2}\right)(u,v) = (x,y)$$

mit Produkten ϕ_j von Thetakonstanten. Genauer:

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &:= \left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)^2, \\
\phi_1 &:= \left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^2, \\
\phi_2 &:= \left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)^2, \\
\phi_3 &:= \left(\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^2,
\end{aligned}
$$

wobei $\Theta\begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} := \Theta\begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix}(\mu(u,v))$ und $\mu : \mathbb{B}_H \hookrightarrow \mathbb{H}_3$ die Einbettung aus (2.6) bezeichnet.

Auf dem affinen Ball $\mathbb{B}_H^{\mathrm{aff}} = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Im}(u) - |v|^2 > 0\}$ operiert $\mathrm{U}(H,\mathbb{C})$ durch

$$
g = (g_{ij}) : (u,v) \mapsto \left(\frac{g_{21} + g_{22}u + g_{23}v}{g_{11} + g_{12}u + g_{13}v}, \frac{g_{31} + g_{32}u + g_{33}v}{g_{11} + g_{12}u + g_{13}v} \right).
$$

Wir setzen $j(g,\tau) := g_{11} + g_{12}u + g_{13}v$, $\tau = (u,v) \in \mathbb{B}_H$.[5] Eine *Picardsche Modulform* vom *Gewicht* k zu einer diskreten Untergruppe G von $\mathrm{U}(H,\mathbb{C})$ ist eine holomorphe Funktion $\phi : \mathbb{B}_H \to \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft[6]

$$
\phi(g(\tau)) = j(g,\tau)^k \phi(\tau) \ \forall\ g \in G.
$$

Mittels der Transformationsformel für Thetakonstanten zeigt Matsumoto den

Satz 2.2.6 (siehe [Mat89], Theorem 4.1)**.** *Die Funktionen ϕ_j sind Modulformen zur Monodromiegruppe vom Gewicht* 8.

Schottky-Taniyama-Formen erhalten wir aus diesen Modulformen, indem wir die Ballquotientenabbildungen in Diagramm (2.7) verfolgen. Nach Satz 2.2.6 ist die Quotientenabbildung $\hat{\mathbb{B}}_H \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ durch Modulformen zur Monodromiegruppe gegeben. Die Segre-Einbettung

$$
v : \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{y_1}{y_0} \right) \mapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1)
$$

definiert einen Isomorphismus des Produkts $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mit der Segre-Quadrik $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \supset V : Z_0 Z_3 = Z_1 Z_2$, also schickt $v \circ \widetilde{\Psi}^{-1} : \mathbb{B}_H \to V$ einen Ballpunkt τ nach $(\chi_0(\tau) : \chi_1(\tau) : \chi_2(\tau) : \chi_3(\tau))$ mit

$$
\chi_0 = \phi_0 \phi_2,\ \chi_1 = \phi_0 \phi_3,\ \chi_2 = \phi_1 \phi_2,\ \chi_3 = \phi_1 \phi_3.
$$

[5] j ist ein Automorphiefaktor für $\mathrm{U}(2,1)$, d.h. $j(gh,\tau) = j(g,h(\tau)) j(h,\tau)$.

[6] Diese Definition der Picardschen Modulform unterscheidet sich von der obigen bzgl. des Gewichts und des Charakters. Wie man direkt nachrechnet ist nämlich $\det(\partial g/\partial \tau) = \det(g) j(g,\tau)^{-3}$.

Da die Aktion des Automorphismus k_1 nach Anwendung von v in eine Permutation der zweiten und dritten Koordinate übergeht, definiert die Projektion $pr : (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (z_0 : z_1 + z_2 : z_3)$ der Segre-Quadrik auf $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} / < k_1 >$ und der projektiven Ebene. Nach der Segre-Einbettung ist die Wirkung von K die kanonische Operation der Gruppe $2\Sigma_3 < \mathrm{PGL}(4, \mathbb{C})$ mit Erzeugern, die durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert sind. Faktorisieren nach der zyklischen Gruppe $< k_1 >$ führt zum Quotienten $V/ < S >$, der zu $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ - dem projektiven Spektrum der $< S >$-invarianten Formen in $\mathbb{C}[\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3] =: \mathbb{C}[\chi]$ - isomorph ist. Auf $\mathbb{C}[\chi]$ wirkt S durch Permutation von χ_1 und χ_2. Es ist $\ker(S - id) = (\chi_1 - \chi_2)$ und $\ker(S + id) = (\chi_0, \chi_1 + \chi_2, \chi_3)$. Setzen wir

$$t_0 := \chi_0, \; t_1 := \chi_1 + \chi_2, \; t_2 := \chi_3,$$

so erhalten wir

$$\mathbb{C}[\chi]^{<S>} = \mathbb{C}[t_0, t_1, t_2] \text{ und } \mathbb{C}[\chi] = \mathbb{C}[t_0, t_1, t_2] + \mathbb{C}[t_0, t_1, t_2](\chi_1 - \chi_2).$$

Folglich

$$pr \circ v \circ \widetilde{\Psi}^{-1} = (t_0 : t_1 : t_2) : \mathbb{B}_H \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[t_0, t_1, t_2]). \tag{2.8}$$

Der Verzweigungsort, d.h. das $pr \circ v$-Bild der sieben Geraden $x = 0, 1, \infty$, $y = 0, 1, \infty$, $x = y$, ist eine ebene Apollonius Konfiguration, die aber noch nicht in S_3-*Normalform* gegeben ist, was bedeutet, daß die Aktion der Modulgruppe nicht der kanonischen S_3-Permutation der projektiven Koordinaten entspricht. Um dies zu erreichen, transformieren wir die Koordinaten indem wir $(t_0 : t_1 : t_2)$ auf $(t_0 : t_0 - t_1 + t_2 : t_2)$ abbilden. Wir setzen

$$p_{\Gamma_1} = (g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \; g_0 = t_0, \; g_1 = t_0 - t_1 + t_2, \; g_2 = t_2.$$

Insgesamt folgt aus der Konstruktion und den Eigenschaften der Matsumoto-Theta-Abbildung die

Proposition 2.2.7 (siehe [Rie07], Prop. 3.2). *Sei $\tau \in \mathbb{B}_H$ außerhalb des Verzweigungsorts von p_{Γ_1}.*

(i) g_0, g_1, g_2 sind $\Gamma(1+i) = \Gamma_1$-Modulformen vom Gewicht 16;

(ii) die Kurve $\widetilde{C}_\tau$ mit singulärem Modell

$$C_\tau : w^4 = z^2(z-1)^2\left(z^2 - \frac{g_0(\tau) - g_1(\tau) + g_2(\tau)}{g_0(\tau)} z + \frac{g_2(\tau)}{g_0(\tau)}\right)$$

wird durch τ parametrisiert, d.h. g_0, g_1, g_2 sind Γ_1-Schottky-Formen;

(ii) $\widetilde{C}_\tau \cong \widetilde{C}_{\tau'} \iff (g_0(\tau') : g_1(\tau') : g_2(\tau')) \sim_{S_3} (g_0(\tau) : g_1(\tau) : g_2(\tau))$, wobei S_3 durch Permutation der homogenen Koordinaten operiert.

Um nachzuweisen, daß die Modulformen die angesprochene Taniyama-Eigenschaft besitzen, konstruieren wir eine Modulfunktion als Quotient symmetrischer Funktionen in diesen Formen, so daß der Modulkörper einer CM-Kurve durch Adjunktion des Werts des zugehörigen CM-Punkts an $\mathbb{Q}$ entsteht.

Dazu definieren wir die homogenen Polynome

$$\begin{aligned} H_1 &:= g_0g_1(g_0+g_1) + g_0g_2(g_0+g_2) + g_1g_2(g_1+g_2), \\ H_2 &:= g_0(g_0+g_1)(g_0+g_2) + g_1(g_0+g_1)(g_1+g_2) + g_2(g_0+g_2)(g_1+g_2), \\ s_3 &:= g_0g_1g_2 \end{aligned}$$

und die korrespondierenden Funktionen

$$\jmath := (H_1 : H_2 : s_3) : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad j := (j_1 : j_2 : j_3) := \jmath \circ p_{\Gamma_1} : \mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

j ist (wohl-)definiert außerhalb des Urbilds der Apolloniuskonfiguration, also insbesondere in Parametern von CM-Varietäten,[7] faktorisiert über $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_3$ und induziert eine birationale Korrespondenz $\hat{X}_\Gamma \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_3$.

Angenommen $\tau \notin p_{\Gamma_1}^{-1}(\triangle)$ liegt nicht über der Apolloniuskonfiguration, die Projektion $p_{\Gamma_1}(\tau) = (z_0 : z_1 : z_2)$ außerhalb von $L : Z_0 + Z_1 + Z_2 = 0$ und $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau)$ ist über $\bar{\mathbb{Q}}$ definiert. Betrachte ein beliebiges $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$. Nach dem Theorem von Torelli (hyperelliptischer Fall, siehe [Mil86]) sind $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau)$ und $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau^\sigma) = \mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau)^\sigma$ genau dann isomorph als hauptpolarisierte Varietäten, wenn die Kurven $\widetilde{C}_\tau$ und $\widetilde{C}_\tau^\sigma$ isomorph sind. Mit $H_3 := H_1 + 2s_3$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_\tau \cong \widetilde{C}_\tau^\sigma &\iff \sigma \text{ permutiert } z_0, z_1, z_2 \\ &\iff \sigma \text{ fixiert } W^3 - \tfrac{H_1}{s_3}(z)W^2 + \tfrac{H_2}{s_3}(z)W - \tfrac{H_3}{s_3}(z) \in \bar{\mathbb{Q}}[W] \\ &\iff \sigma|_{\mathbb{Q}(j(\tau))} = id_{\mathbb{Q}(j(\tau))}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\mathbb{Q}(j(\tau))$ der Modulkörper der (Jacobischen) der Kurve. Ist $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$ eine CM-Varietät mit Endomorphismenalgebra F, dann ist somit das Kompositum $\mathbb{Q}(j(\tau))F^*$ ein Klassenkörper von F^*, d.h. die Modulformen g_0, g_1, g_2 sind Taniyama-Formen.

[7]Über der Apolloniuskonfiguration liegen keine einfachen abelschen Varietäten, also auch keine Parameter von CM-Varietäten (siehe [HV01], Chapter 11; genaueres dazu auch im folgenden Kapitel).

Nach einem Theorem von H. Shiga und J. Wolfart, siehe [SW95], Main Theorem, ist eine abelsche Varietät A_τ genau dann vom CM-Typ, wenn die Koordinaten von τ und $p_{\Gamma_1}(\tau)$ algebraisch sind. In unserer Situation ist A_τ genau dann eine CM-Varietät, wenn $\mathrm{End}^0(A_\tau) = F$ eine kubische Erweiterung von $\mathbb{Q}(i)$ ist, vgl. Bemerkung 1.3.1.

Um Parameter von CM-Varietäten und von Varietäten vom CM-Typ zu unterscheiden, führen wir folgende Bezeichnung ein. Wir nennen einen *CM-Punkt vom Grad 3*, wenn $\mathrm{End}^0(A)$ ein sextischer CM-Körper ist. CM-Punkte vom Grad 3 sind also genau die Ballpunkte, die CM-Varietäten parametrisieren.

Satz 2.2.8 (vgl. [Rie07], Theorem 3.4)**.** *Sei τ ein CM-Punkt vom Grad 3, $F = \mathrm{End}^0(\widetilde{C}_\tau)$ und $\tau \notin p_{\Gamma_1}^{-1}(L)$, $L : Z_0 + Z_1 + Z_2 = 0$. Das Kompositum $\mathbb{Q}(j(\tau))F^*$ ist ein Klassenkörper zu F^*. Ist zusätzlich $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$ isomorph zum Ring $\mathcal{O}_F$ der ganzen Zahlen, dann ist die Erweiterung unverzweigt.*

2.2.2 Picardkurven

Die Konstruktion von Schottky-Taniyama-Formen zur Familie der Picardkurven geht auf Picard [Pic83], Holzapfel [Hol86], [Hol95] und Shiga [Shg88] zurück. Wir orientieren uns an [Shg88] und [Hol95].

Die Familie $\mathcal{P}$ der Picardkurven besteht aus glatten Kurven vom Geschlecht 3 mit Gleichung

$$C(\xi) : w^3 = z(z - \xi_0)(z - \xi_1)(z - \xi_2)$$

und Parameterraum

$$\mathcal{M} := \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \backslash \triangle := \{\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) : \xi_0\xi_1\xi_2(\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0) \neq 0\}.$$

Die Jacobi-Varietäten der Picardkurven sind abelsche Varietäten der Dimension 3 mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-Multiplikation, die vom Automorphismus $\mathrm{Aut}(C(\xi)) \ni \gamma : (z, w) \mapsto (z, \zeta w)$, ζ eine primitive dritte Einheitswurzel, induziert wird. Eine Basis der holomorphen 1-Formen einer Picardkurve ist

$$\eta_1 = dz/w,\ \eta_2 = dz/w^2,\ \eta_3 = zdz/w^2.$$

Wegen $\gamma^*\eta_1 = dz/\zeta w = \zeta^2\eta_1 = \bar{\zeta}\eta_1$, $\gamma^*\eta_2 = \zeta\eta_2$ und $\gamma^*\eta_3 = \zeta\eta_3$ ist die K-Multiplikation vom Typ (2,1).

Periodenabbildung

Die explizite Konstruktion des Periodenpunkts (siehe [Shg88], Remark 1-1) führt zur $\pi_1(\mathcal{M})$-mehrwertigen Periodenabbildung $\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{H}_3$, $\xi \mapsto \Omega(\xi)$, wobei

$$\Omega(\xi) = \begin{pmatrix} (u^2 + 2\omega^2 v)/(1-\omega) & \omega^2 u & (\omega u^2 - \omega^2 v)/(1-\omega) \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ (\omega u^2 - \omega^2 v)/(1-\omega) & u & (u^2 - 2v)/(\omega - \omega^2) \end{pmatrix}, \omega = e^{-2\pi i/3}$$

und (u, v) wieder von ξ abhängt. Sei

$$\mathbb{B}_H := \{(z_0 : z_1 : z_2) : {}^t z H \bar{z} < 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\ H := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

und

$$\mathbb{B}_H^{\text{aff}} := \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : 2\mathrm{Re}(v) + |u|^2 < 0\} \cong \mathbb{B}_H.$$

Mit $\mu : \mathbb{B}_H^{\text{aff}} \hookrightarrow \mathbb{H}_3, (u, v) \mapsto \Omega(u, v)$, ist $\Phi(\mathcal{M}) \subset \mu(\mathbb{B}_H^{\text{aff}})$, also

$$\tilde{\Phi} := \mu^{-1} \circ \Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{B}_H$$

eine Periodenabbildung in den Ball.

Für eine Untergruppe $G < \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ sei $\mathrm{P}G$ die Gruppe der von G induzierten projektiven Transformationen von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Wir betrachten die folgenden Picardschen Modulgruppen

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \mathrm{PU}(H, \mathbb{C}) \cap \mathrm{PGL}(3, \mathbb{Z}[\omega]), \\ \Gamma_1 &:= \Gamma(\sqrt{-3}) = \{g \in \Gamma : g \equiv E_3 \bmod(\sqrt{-3})\}. \end{aligned}$$

Zur Kurvenfamilie korrespondiert das System $F_1(1/3, 1/3, 1/3, 1)$ hypergeometrischer Differentialgleichung mit (projektiver) Monodromiegruppe Γ_1. Die lokal definierte Umkehrabbildung führt zu einer biholomorphen Abbildung

$$\tilde{\Phi}^{-1} : \Gamma_1 \backslash \mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \backslash \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$$

mit

$$P_0 = (1 : 0 : 0),\ P_1 = (0 : 1 : 0),\ P_2 = (0 : 0 : 1),\ P_3 = (1 : 1 : 1)$$

und nach Kompaktifizierung zu einer Ballquotientenabbildung $\mathbb{B}_H \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, die über einem vollständigen Vierseit, d.h. über den 6 Geraden durch die Punkte P_i und P_j, verzweigt.

Modulraum

Die Permutationen der Punkte P_j definieren Transformationen der projektiven Ebene und eine Wirkung der symmetrischen Gruppe S_4 auf $\mathcal{M}$, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \backslash \{P_0, \ldots, P_3\}$ bzw. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Zwei Picardkurven sind genau dann isomorph, wenn die Parameter in einer S_4-Bahn liegen (s. [Hol95], Proposition 2.3). Die Isomorphie $\Gamma/\Gamma_1 \cong S_4$ ergibt zusammen mit der Periodenabbildung das Diagramm (vgl. [Hol86], Theorem 3.23 bzw. Diagramm (3.24))

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathbb{B}}_H & \dashrightarrow & \hat{X}_{\Gamma_1} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \hat{X}_{\Gamma} & \overset{\text{bir.}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/S_4. \end{array} \tag{2.9}$$

Die Picardsche Modulformen zu $\mathcal{P}$

Die klassische Picardsche Modulfunktion ist die inverse Periodenabbildung $\tilde{\Phi}^{-1}$, deren Thetadarstellung von Shiga, [Shg88], Prop. I-3, gefunden wurde, und deren Koordinatenfunktionen zusammen mit einer Spitzenform den Ring der Modulformen zu Γ_1 erzeugen. Die Berechnung der S_4-Invarianten [Hol86], I.4-6, [Shg88], Prop. II-5, führt zu Modulformen G_2, G_3, G_4, wobei

$$\begin{aligned}
G_2 &= (\varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2)^2 + (-\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2)^2 + (-\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2)^2, \\
G_3 &= (\varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2)(-\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2)(-\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2), \\
G_4 &= (\varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2)^2(-\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2)^2 \\
&\quad + (-\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2)^2(-\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2)^2 \\
&\quad + (-\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2)^2(\varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2)^2
\end{aligned}$$

und

$$\varphi_k = \Theta^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{k}{3} & \frac{1}{6} & \frac{k}{3} \end{bmatrix}.$$

Die Modulformen sind Schottky-Formen, denn für τ außerhalb des Urbilds des vollständigen Vierseits hat die Picardkurve

$$C_\tau : w^4 = z^3 + G_2(\tau)z^2 + G_3(\tau)z + G_4(\tau)$$

Periodenpunkt τ ([Hol86], (6.1.2)). Der Modulkörper von $\mathrm{Jac}(C_\tau)$ ist

$$M(\mathrm{Jac}(C_\tau)) = \mathbb{Q}(G_2(\tau), G_3(\tau), G_4(\tau)),$$

die Formen besitzen also auch die Taniyama-Eigenschaft.

Satz 2.2.9 (vgl. [Hol95], Main-Theorem 4.41)**.** *Sei τ ein CM-Punkt, F der Multiplikationskörper zu* $\mathrm{Jac}(C_\tau)$*. $M(\mathrm{Jac}(C_\tau))F^*$ ist eine abelsche Erweiterung des Reflexkörpers F^*. Im Fall* $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(C_\tau)) \cong \mathcal{O}_F$ *ist die Erweiterung unverzweigt.*

Kapitel 3

Reflexkörper

Um arithmetische Eigenschaften der fraglichen Körper zu studieren, ist es naturgemäß wichtig, die Objekte, also Reflex- und Modulkörper, möglichst explizit zu bestimmen. Im Fall des Reflexkörpers haben wir verschiedene Möglichkeiten der Beschreibung. Einmal lassen sich die Reflexkörper aus dem reellen kubischen Teilkörper aufbauen, zum zweiten lassen sie sich durch *singuläre Moduln*, d.h. Fixpunkte auf dem Ball unter der unitären Gruppe $\mathrm{U}((2,1),K)$, erzeugen.

Das folgende Lemma besagt, daß wir uns bei der Untersuchung der Reflexkörper von CM-Varietäten auf die Multiplikationskörper zurückziehen dürfen. Sei (F,Φ) ein beliebiger $(2,1)$-CM-Typ, also F ein CM-Körper, kubische Erweiterung eines imaginär quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ und $\Phi|_K = \{id, id,^-\}$.

Lemma 3.0.10. *Der Reflexkörper F^* ist ein zu F konjugierter Körper. Insbesondere ist F^* ein CM-Körper vom Absolutgrad 6, der K als Teilkörper enthält. Der Reflextyp ist ebenfalls ein $(2,1)$-Typ.*

Beweis. Der Typ (F,Φ) ist primitiv, d.h. nicht Lift eines (1-elementigen) Typs $\{\sigma\}$ auf K. Sei N der Galoisabschluß von $F/\mathbb{Q}$ und Φ_N ein Lift von Φ zu einem CM-Typ auf N. Die Menge $\Phi_N^{-1} := \{\varphi_N^{-1} \mid \varphi_N \in \Phi_N\}$ definiert einen $(2,1)$- bzw. $(4,2)$-Typ auf N, der Lift des primitiven CM-Typs (F^*,Φ^*), $\Phi^* = \Phi_N^{-1}|_{F^*}$, ist. Da $\Phi_N^{-1}|_K = G(K/\mathbb{Q})$ kein CM-Typ ist und $\Phi^*|_K = \{id|_K, id|_K,^- : \sqrt{-d} \mapsto -\sqrt{-d}\}$ ist die Behauptung gezeigt. □

Das gleiche Resultat erhalten wir, wenn wir explizit geeignete Typenspuren berechnen und ggf. den Reflexkörper als Fixkörper einer Menge von Galoisautomorphismen betrachten.

Zweiter Beweis von Lemma 3.0.10. Sei (F,Φ) wie oben, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ der total reelle kubische Teilkörper, und seien α_2 und α_3 die zu $\alpha =: \alpha_1$ konjugierten Elemente.

(i) Sei $F/\mathbb{Q}$ galoissch. Dann ist auch F^+ galoissch mit Galoisgruppe $G(F^+/\mathbb{Q}) \cong A_3 = \{(1), (12)(13), (13)(12)\}$. Der Typ (F, Φ) habe die Gestalt[1]

$$\Phi = \{(1), (12)(13),\ {}^- \circ (13)(12)\}.$$

Setze $f := \sqrt{-d}(\alpha_2 + \alpha_3)$. Für die Typenspur von f erhalten wir $\mathrm{Tr}_\Phi(f) = 2\sqrt{-d}\alpha_2$. Da $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ und $\mathrm{Tr}_\Phi(\sqrt{-d}) = \sqrt{-d} \in F^*$, ist F^* eine echte Erweiterung von K. Wegen $3 = [F : K] = [F : F^*][F^* : K]$ ist $[F^* : K] = 3$, also $F = F^*$.

(ii) Sei $F/\mathbb{Q}$ nicht galoissch. Die normale Hülle $N/\mathbb{Q}$ von $F/\mathbb{Q}$ ist ebenfalls ein CM-Körper mit absolut galoisschem total reellem Teilkörper N^+. Die Galoisgruppe $G(N^+/\mathbb{Q})$ ist die symmetrische Gruppe S_3, und o.E. ist $F^+ = N^{+(23)}$ der Fixkörper der Transposition, die α_2 und α_3 vertauscht. Die reellen Einbettungen von F^+ sind durch $(1), (12), (13) : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Der CM-Typ[2] $\Phi = \{(1), (12),\ {}^- \circ (13)\}$ liftet zum CM-Typ

$$\Phi_N = \{(1), (12),\ {}^- \circ (13), (23), (123),\ {}^- \circ (132)\}$$

für N. Die Reflexkörper der Typen (N, Φ_N) und (F, Φ) stimmen überein, da $\mathrm{Tr}_{\Phi_N} = \mathrm{Tr}_\Phi \circ \mathrm{Tr}_{N/F}$. Die Typenspur des Elements $\sqrt{-d}\alpha_3$ ist $\mathrm{Tr}_{\Phi_N}(\sqrt{-d}\alpha_3) = 2\sqrt{-d}\alpha_3 \notin K$, und es ist $\mathrm{Tr}_{\Phi_N}(\sqrt{-d}) = 2\sqrt{-d}$. Folglich ist K echt in $N^* = F^*$ enthalten.
Es bleibt zu zeigen, daß $F^* \subsetneq N$ gilt. Nach (1.3) ist $N^* = N^{H^*}$, wobei

$$H^* = \{\sigma \in G(N/\mathbb{Q}) |\ \sigma \circ \Phi_N = \Phi_N\}.$$

In unserem Fall ist $H^* = \{(1), (12)\}$, also ist $F^* = N^* = N^{(12)}$ ein zu $F = N^{(23)}$ konjugierter Körper. □

Bemerkung 3.0.11. *Für* $[N : F] = 2$ *ist*

$$F^* = \begin{cases} F, & \textit{falls } \Phi = \{^-,\ (12), (13)\} \\ K(\alpha_2), & \textit{falls } \Phi = \{(1), {}^- \circ (12), (13)\} \\ K(\alpha_3), & \textit{falls } \Phi = \{(1), (12), {}^- \circ (13)\}. \end{cases}$$

3.1 Konstruktion von CM-Körpern

Sei $f(X)$ ein normiertes rationales Polynom vom Grad 3, welches o.E. die Gestalt $f(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ hat. $f(X)$ ist genau dann irreduzibel und besitzt drei reelle Nullstellen, wenn die Diskriminante $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$ größer als 0 ist (*Casus irreducibilis*, siehe z.B. [vdW37], VII, §58). Mittels der Cardanoschen Formel

$$\alpha := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta(f)}{4 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta(f)}{4 \cdot 27}}}$$

[1] Der zweite Fall $\Phi = \{^-, (12)(13), (13)(12)\}$ verläuft analog.

[2] wie in (i) führt $\Phi = \{^-, (12), (13)\}$ zu keinen neuen Schwierigkeiten.

mit einer geeigneten Wahl der dritten Wurzeln, lassen sich die Nullstellen von f berechnen. Sei $F^+ := \mathbb{Q}(\alpha)$ der durch Adjunktion einer Nullstelle α von f an $\mathbb{Q}$ resultierende Zahlkörper vom Absolutgrad 3 und sei $F := F^+(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. F ist somit eine total imaginär quadratische Erweiterung des total reellen kubischen Körpers F^+. Da andererseits jeder von uns betrachtete CM-Körper eine kubische Erweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ und - per Definition - eine (imaginär) quadratische Erweiterung eines total reellen kubischen Körpers ist, erhalten wir auf diese Weise alle solchen CM-Körper. Sei also F wie angegeben konstruiert. Aufgrund der linearen Disjunktheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ und F^+ lassen sich wichtige Eigenschaften des CM-Körpers an F^+ ablesen. So ist beispielsweise $F/\mathbb{Q}$ genau dann galoissch (mit $G(F/\mathbb{Q}) \cong A_3 \times C_2$), wenn $F^+/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung (deren Galoisgruppe isomorph zu A_3) ist. Ist im nicht-normalen Fall N^+ die normale Hülle von F^+ - folglich $[N^+ : F^+] = 2,\ G(F/\mathbb{Q}) \cong S_3$ - so ist $N := N^+(\sqrt{-d})/\mathbb{Q}$ der Galois-Abschluß von $F/\mathbb{Q}$ - mit $[N : F] = 2,\ G(N/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times S_3$. Die Eigenschaft *galoissch* läßt sich wiederum im kubischen Fall unmittelbar an der Diskriminante ablesen: $F^+/\mathbb{Q}$ ist dann und nur dann galoissch, wenn die Diskriminante ein Quadrat ist. Sei $\{1, \delta\}$ eine Ganzheitsbasis von K, also $\delta = \sqrt{-d}$ oder $\delta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-d})$ abhängig davon, ob $d \equiv 1, 2$ oder $d \equiv 3$ modulo 4. Wenn wir eine Ganzheitsbasis $\{w_1, w_2, w_3\}$ von F^+ konstruiert haben, ist $\{w_1, w_2, w_3, \delta w_1, \delta w_2, \delta w_3\}$ eine Ganzheitsbasis von F. Ganzheitsbasen des kubischen Körpers können wir mit dem Verfahren von Voronoĭ ermitteln, vgl. [DF64], Chapter II, §15 - §17. Sei dazu wie eben $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein kubischer Körper und α ganz über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom $f(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{Z}[X]$. Es existiert eine Ganzheitsbasis $1, w_1, w_2$ der Gestalt

$$w_1 = \frac{1}{r}(\alpha - t),\ w_2 = s\alpha^2 + u\alpha + v$$

mit $r, t \in \mathbb{Z}$, $s, u, v \in \mathbb{Q}$ und $w_1 \cdot w_2 \in \mathbb{Z}$. Die Darstellungen von w_1^2, w_2^2 und $w_1 w_2$ als ganzzahlige Linearkombination von $1, w_1, w_2$ liefern eine normierte Gleichung

$$w_1^3 + bw_1^2 + acw_1 + a^2 d = 0$$

mit ganzen Koeffizienten a, b, c, d. Vergleich dieser Gleichung mit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r}f(\alpha) = \frac{1}{r}f(t + rw_1) \\ &= \frac{1}{r}\left(f(t) + f'(t)rw_1 + \frac{1}{2}f''(t)(rw_1)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(t)(rw_1)^3\right) \\ &= w_1^3 + \frac{3t}{r}w_1^2 + \frac{3t^2+p}{r}w_1 + \frac{t^3+pt+q}{r^3} \end{aligned}$$

führt zu den Kongruenzen

$$3t \equiv 0 \bmod r,\ 3t^2 + p \equiv 0 \bmod r^2 a,\ t^3 + pt + q \equiv 0 \bmod r^3 a^2. \tag{3.1}$$

Für den Basisvektor w_2 erhalten wir aus $w_1 w_2 = -ad$ und der obigen Darstellung von w_1

$$w_2 = \frac{1}{r^2 a}(\alpha^2 + t\alpha + t^2 + p).$$

Da $(\mathbb{Z}[w_1] : \mathbb{Z}[\alpha]) = r^3$ und $(\mathcal{O}_{F^+} : \mathbb{Z}[w_1]) = a$ stehen die Diskrimanten in folgender Beziehung

$$\Delta(\alpha) = (\mathcal{O}_{F^+} : \mathbb{Z}[\alpha])^2 \Delta_{F^+} = r^6 a^2 \Delta_{F^+}.$$

Sind umgekehrt ganze Zahlen a, r, t gegeben, so daß $-a/2 < t \leq a/2$, $\Delta(\alpha) = r^6 a^2 \Delta_{F^+}$ und die Kongruenz (3.1) erfüllt ist, dann sind

$$1,\ \omega_1 := \frac{1}{r}(\alpha - t),\ w_2 := \frac{1}{r^2 a}(\alpha^2 + t\alpha + t^2 + p)$$

ganzalgebraisch. Der Index von $\mathbb{Z}[\alpha]$ in $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ ist $r^3 a$, also ist $1, w_1, w_2$ eine Ganzheitsbasis.

Wir setzen nun o.E. voraus, daß es keine ganze Zahl gibt, die quadratisch in p und kubisch in q aufgeht. Aus der Kongruenz (3.1) folgt sofort, daß t und r teilerfremd sein müssen und somit ist entweder $r = 3$ und $(\alpha \pm 1)/3$ ganz, oder es ist $r = 1$ und $(\alpha \pm 1)/3$ nicht ganz. Die Zahl $(\alpha \pm 1)/3$ ist genau dann ganz, wenn

$$p \equiv 6 \bmod 9,\ q \pm (p+1) \equiv 0 \bmod 27. \tag{3.2}$$

Diese Beobachtungen führen zum folgenden Verfahren.

Satz 3.1.1 (Voronoĭ, siehe [DF64], Ch. II, §17, Theorem II)**.** *Sei $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein kubischer Körper, α eine Wurzel von $f(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{Z}[X]$ und es gebe keine natürliche Zahl $m > 1$, so daß $m^2 \mid p$ und $m^3 \mid q$.*

Fall 1: (3.2) ist nicht erfüllt.
Sei a^2 der größte quadratische Faktor von $\Delta(\alpha)$, so daß

$$f'(t) \equiv 0 \ mod\ a,\ f(t) \equiv 0 \ mod\ a^2$$

eine Lösung t mit $-a/2 < t \leq a/2$ besitzt. Dann ist

$$1, w_1 = \alpha, w_2 = \frac{\alpha^2 - t\alpha + t^2 + p}{a}$$

eine Ganzheitsbasis von $F^+/\mathbb{Q}$.

Fall 2: (3.2) ist erfüllt.
Sei a^2 der größte quadratische Faktor von $\Delta(\alpha)/3^6$ für den eine Lösung t von

$$f'(t) \equiv 0 \ mod\ 9a,\ f(t) \equiv 0 \ mod\ 27a^2$$

mit $-3a/2 < t \leq 3a/2$ existiert. In diesem Fall ist

$$1, w_1 = \frac{\alpha - t}{3a}, w_2 = \frac{\alpha^2 + t\alpha + t^2 + p}{9a}$$

eine Ganzheitsbasis.

Beispiel 3.1.2. *(i)* $f(X) = X^3 - 3X + 1$. Dann ist $\Delta(f) = 3^4$ und $F^+ = \mathbb{Q}(\zeta_9 + \bar{\zeta}_9)$, $\zeta_9 = \exp(2\pi i/9)$, der reelle Teilkörper des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta_9)$. $F = F^+(i)$ ist galoissch mit Klassenzahl $h_F = 1$.

(ii) $f(X) = X^3 - 4X + 1$. Die Diskriminante $\Delta(f) = 229$ ist prim, also sind F^+ wie auch F nicht galoissch. Mit den Cardano-Formeln erhalten wir

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-229}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-229}{27}}}$$

als Erzeuger von F^+. Da $\Delta(f)$ quadratfrei ist, ist $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von F^+ und daher $\{1, \alpha, \alpha^2, i, i\alpha, i\alpha^2\}$ eine Ganzheitsbasis von F. Die Klassenzahl von F ist $h_F = 2$.

(iii) $f(X) = X^3 - 13X + 13$ und $\Delta(f) = 5^2 \cdot 13^2$. Es ist $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{13}{2} + \frac{65}{18}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{-\frac{13}{2} - \frac{65}{18}\sqrt{-3}}\ .$$

F^+ wie auch $F = \mathbb{Q}(i, \alpha)$ sind galoissch und es ist $h_F = 3$ (siehe Proposition 4.3.4). Die Diskriminante der Maximalordnung ist $\Delta(\mathcal{O}_{F^+}) = 13^2$, also ist der Index $(\mathcal{O}_{F^+} : \mathbb{Z}[\alpha]) = 5$, und es ist insbesondere $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ keine Ganzheitsbasis. Mit dem Voronoĭ-Algorithmus erhält man eine Basis $\{1, \alpha, \omega\}$ von $\mathcal{O}_{F^+}$, wobei $\omega := \frac{1}{5}(\alpha^2 + \alpha - 12)$, und daher eine Ganzheitsbasis $\{1, \alpha, \omega, i, i\alpha, i\omega\}$ für F.

3.2 Singuläre Moduln

Die Charakterisierung von CM-Punkten als singuläre Moduln findet sich in einem Artikel von J. Feustel, siehe [Feu90]. Da die Originalarbeit an einigen Stellen lückenhaft erscheint, geben wir hier einen vollständigen Beweis, der auf Feustels Ideen beruht.

Sei h eine hermitesche Form der Signatur (2,1). O.E. gelte $a_0 \neq 0$ für jeden Punkt $a = (a_0, a_1, a_2)$ negativer Norm $h(a, a)$. Sei K wieder ein imaginär quadratischer Zahlkörper und $\mathrm{U}((2,1), K) = \mathrm{U}(h, K)$ die zugehörige - bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte - unitäre Gruppe, die wie üblich auf dem Ball $\mathbb{B}_h = \{\tau : h(a, a) < 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, wobei $\tau = \mathbb{P}a := (1 : a_1 : a_2)$ und $a = {}^t(1, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$, operiert. Ein Ballpunkt τ ist ein *K-singulärer Modul*, wenn es ein $\gamma \in \mathrm{U}((2,1), K)$ mit isoliertem Fixpunkt τ gibt. Da die unitäre Gruppe gebrochen linear auf dem affinen Ball wirkt, entsprechen isolierte Fixpunkte der Transformation γ genau den Eigenvektoren von γ zu einem einfachen Eigenwert.

Lemma 3.2.1. *Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei, F/K sei eine Körpererweiterung vom Grad ≤ 3 mit einem CM-Körper F. Dann gibt es ein $m \in F$, so daß $m\bar{m} = 1$ und $F = K(m)$.*

Beweis. Sei $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ der total reelle Teilkörper von F, also $F = K(\alpha)$, und sei

$$m := \frac{\alpha + \sqrt{-d}}{\alpha - \sqrt{-d}}\ .$$

Da $m\bar{m} = 1$, genügt es $F = K(m)$ zu zeigen.
Im Fall $[F : K] = 1$ ist offenbar $F = K = K(1)$ und die Behauptung gültig.
Sei nun $[F : K] \in \{2, 3\}$. Angenommen es sei $K = K(m)$. Dann ist

$$\alpha = \sqrt{-d} \cdot \frac{m+1}{m-1} \in K \qquad (m \neq 1)$$

im Widerspruch zu $F = K(\alpha) \neq K$. Daher ist $K \subsetneq K(m) \subseteq F$ und nach dem Gradsatz $K(m) = F$. □

Lemma 3.2.2. *Sei $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \gamma \in \mathrm{U}((2,1), K)$ und $\tau = \mathbb{P}a$ ein isolierter Fixpunkt von γ, also a Eigenvektor zum einfachen Eigenwert λ und o.E. von der Gestalt ${}^t(1, a_1, a_2)$. Dann ist $K(\lambda) = K(a) := K(a_1, a_2)$.*

Beweis. Es ist $\gamma a = \lambda a \iff$

$$\begin{array}{lrcl} (1) & g_{11} + g_{12}a_1 + g_{13}a_2 & = & \lambda \\ (2) & g_{21} + g_{22}a_1 + g_{23}a_2 & = & \lambda a_1 \\ (3) & g_{31} + g_{32}a_1 + g_{33}a_2 & = & \lambda a_2\ . \end{array} \qquad (*)$$

(i) Die Enthaltung $K(\lambda) \subseteq K(a)$ folgt unmittelbar aus der ersten Zeile des Systems $(*)$

$$g_{11} + g_{12}a_1 + g_{13}a_2 = \lambda, \quad g_{ij} \in K.$$

(ii) Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\sigma|_{K(\lambda)} = id$, beliebig fixiert. Es ist $\gamma(a^\sigma) = (\gamma a)^\sigma = \lambda a^\sigma$. Demnach sind a und a^σ Eigenvektoren zum einfachen Eigenwert λ und daher linear abhängig. Aufgrund der Gestalt von $a = {}^t(1, a_1, a_2)$ bzw. $a^\sigma = {}^t(1, a_1^\sigma, a_2^\sigma)$ fixiert σ die Koordinaten von a, folglich liegen a_1, a_2 in $K(\lambda)$. □

Satz 3.2.3. *Sei $\tau = \mathbb{P}a = (a_0 : a_1 : a_2)$ ein Vektor negativer Norm und $F = K(\tau) := K(a_1/a_0, a_2/a_0)$ der durch τ projektiv erzeugte Körper. Die normale Hülle von F über K bezeichenen wir mit N. τ ist genau dann ein K-singulärer Modul, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $[F : K] \leq 3$,

(ii) *F ist ein CM-Körper,*

(iii) *für alle $\sigma \in G(N/K)$ mit $\sigma\,|_F \neq id_F$ gilt $h(a, a^\sigma) = 0$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei τ isolierter Fixpunkt eines $\gamma \in \mathrm{U}((2,1),K)$, also $\gamma a = \lambda a$ mit einem einfachen Eigenwert λ von γ.

(i) Das charakteristische Polynom $p_\gamma(X) \in K[X]$ ist vom Grad 3 und hat Nullstelle λ, also ist der Grad von $K(\lambda)$ und ebenfalls der Grad von F nach Lemma 3.2.2 über K maximal 3.

(ii) Da F nicht reell ist, haben wir nach dem Kriterium in Kapitel 1 (Lemma 1.3.5) zu zeigen, daß jedes $\sigma \in G(N/K)$, $\sigma|_F \neq id_F$, mit der komplexen Konjugation kommutiert.

Sei ein solches σ fixiert. a^σ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ^σ und daher ist $\lambda^\sigma\overline{\lambda^\sigma} = 1$. Folglich $\overline{\lambda^\sigma} = (\lambda^\sigma)^{-1} = (\lambda^{-1})^\sigma = \bar{\lambda}^\sigma$ und (ii) ist gezeigt.

(iii) Wir müssen lediglich einsehen, daß a senkrecht auf a^σ steht. Aus

$$h(a,a^\sigma) = h(\gamma a, \gamma a^\sigma) = h(\lambda a, \lambda^\sigma a^\sigma) = \lambda\bar{\lambda}^\sigma h(a,a^\sigma)$$

folgt $h(a,a^\sigma) = 0$, da $\lambda\bar{\lambda}^\sigma = \frac{\lambda}{\lambda^\sigma} \neq 1$.

($\Leftarrow$) Sei nun $F = K(\tau)$ ein CM-Körper und (iii) von Satz 3.2.3 erfüllt. Wir unterscheiden drei Fälle.

(a) $F = K$. Sei γ mit $\gamma a = a$ so gewählt, daß $\gamma|_{a^\perp} = -id$. Insbesondere ist $\gamma \in M(3,K)$. Wir betrachten eine orthogonale Basis v_1, v_2 von $a^\perp$. Wegen

$$0 = h(a, v_i) = h(a, -v_i) = h(\gamma a, \gamma v_i), \quad 0 = h(-v_1, -v_2) = h(\gamma v_1, \gamma v_2)$$

ist $\gamma \in \mathrm{U}((2,1),K)$.

(b) $[F : K] = 2$. In diesem Fall ist die Erweiterung F/K normal und die Galoisgruppe $G(F/K)$ durch ein Element σ der Ordnung 2 erzeugt. Nach (iii) gilt $h(a,a^\sigma) = 0$. Wir wählen $v \in K^3$ orthogonal zu a, a^σ und ein - nach Lemma 3.2.1 existentes - λ vom Betrag 1, so daß $F = K(\lambda)$. Sei $\gamma \in M(3,\mathbb{C})$ durch

$$\gamma a = \lambda a, \quad \gamma a^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma, \quad \gamma v = v$$

definiert. γ ist, wegen $0 = \lambda\bar{\lambda}^\sigma h(a,a^\sigma) = h(\gamma a, \gamma a^\sigma)$, unitär, und es bleibt zu zeigen, daß $\gamma \in M(3,K)$ bzw. $\gamma^\sigma = \gamma$, was sich sofort explizit auf der Basis nachprüfen läßt:

$$\gamma^\sigma a = (\gamma a^\sigma)^\sigma = (\lambda^\sigma a^\sigma)^\sigma = \lambda a = \gamma a, \quad \gamma^\sigma a^\sigma = (\gamma a)^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma = \gamma a^\sigma \quad \text{und}$$
$$\gamma^\sigma v = \gamma^\sigma v^\sigma = (\gamma v)^\sigma = v^\sigma = v,$$

da $\sigma^2 = id$ und $v \in K^3$.
Insgesamt ist τ ein isolierter Fixpunkt von γ und $\gamma \in \mathrm{U}((2,1),K)$.

(c) $[F : K] = 3$. Der Grad $[N : K]$ des normalen Abschlusses N von F über K ist entweder 3 oder 6, somit ist $F = N$, also F/K galoissch, oder $[N : F] = 2$.

In beiden Fällen existiert ein $\sigma \in G(N/K)$ der Ordnung 3, das F nicht punktweise fixiert. Sei wieder λ auf dem Einheitskreis gegeben, so daß $K(\lambda) = F$. Wir definieren $\gamma \in M(3, \mathbb{C})$ durch

$$\gamma a = \lambda a, \quad \gamma a^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma, \quad \gamma a^{\sigma^2} = \lambda^{\sigma^2} a^{\sigma^2}.$$

Wieder folgt aufgrund der Orthogonalität von a, a^σ und a^{σ^2}, daß die hermitesche Struktur unter γ erhalten bleibt, und per Konstruktion (analog zu (b)), daß $\gamma^\sigma = \gamma$ gilt, daß also γ in $\mathrm{U}((2,1), K)$ liegt. $\square$

3.3 Bestimmung der Reflexkörper

In dem Artikel [Hol94] hat Holzapfel abelsche Varietäten mit imaginär quadratischer Multiplikation untersucht. Die Resultate lassen sich speziell auf Jacobi-Varietäten zu den von uns betrachteten Kurvenfamilien übertragen. Das Prinzip der Picardmatrizen zur Familie der Picardkurven wurde in [Hol95], Chapter II, dort *typische Periodenmatrizen* genannt, im Zusammenhang mit dem effektiven Schottky-Problem für die Familie der Picardkurven erarbeitet. Im folgenden Abschnitt übertragen wir das Konzept auf die hyperelliptische Kurvenfamilie $\mathcal{F}$, der Familie der Kurven mit Modell

$$C(x, y) : w^4 = z^2(z-1)^2(z-x)(z-y)$$

und Parametern

$$(x, y) \in \mathcal{M} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \boxplus$$

und werden den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.3.1. *Jeder CM-Körper vom Grad 3 über $\mathbb{Q}(i)$ ist isomorph zur Endomorphismenalgebra* $\mathrm{End}^0(\mathrm{Jac}(\tilde{C}))$ *einer Kurve $\tilde{C} \in \mathcal{F}$.*

Wir werden dabei auf einen direkten Zusammenhang zwischen den singulären Moduln und den auftretenden Multiplikationskörpern stoßen und schließlich zeigen, daß jeder sextische CM-Körper, der einen imaginär quadratischen Zahlkörper umfaßt, durch einen singulären Modul erzeugt wird. Die entsprechenden Resultate für Picardkurven bzw. CM-Erweiterungen der Eisensteinzahlen, die in [Hol95] gezeigt wurden, fassen wir im Anschluß zusammen.

3.3.1 Hyperelliptische Kurven

Um Holzapfels Ergebnisse zu übertragen, schreiben wir die Periodenmatrix, die wir im zweiten Kapitel (2.3) angegeben hatten, geringfügig um. Jede Isomorphieklasse von Jacobischen der obigen Kurvenfamilie besitzt einen Repräsentanten

$A_\Pi := \mathbb{C}^3/\Pi\mathbb{Z}^6$ mit einer Periodenmatrix Π der Gestalt

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_1 & -ia_1 & a_5 & a_2 & -ia_2 & -ia_5 \\ \bar{b}_1 & i\bar{b}_1 & \bar{b}_5 & \bar{b}_2 & i\bar{b}_2 & i\bar{b}_5 \\ \bar{c}_1 & i\bar{c}_1 & \bar{c}_5 & \bar{c}_2 & i\bar{c}_2 & i\bar{c}_5 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Der auf den Kurven definierte Automorphismus $(z,w) \mapsto (z, iw)$ liefert die bislang betrachtete K-Multiplikation vom Typ $(2,1)$. Analog induziert $(z,w) \mapsto (z,-iw) \in \mathrm{Aut}(\widetilde{C}(x,y))$ eine Einbettung[3]

$$\iota : \mathbb{Q}(i) \hookrightarrow \mathrm{End}^0(\mathrm{Jac}(\widetilde{C})),\ \iota(f) = \left(\begin{smallmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & \bar{f} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f} \end{smallmatrix}\right).$$

Wir definieren eine Abbildung $* : \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^6$ durch

$$^t(z_1, z_2, z_3) \mapsto {}^t(z_1, -iz_1, z_3, z_2, -iz_2, -iz_3).$$

Die durch $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ definierte Form auf $\mathbb{C}^3$ können wir nun in der folgenden Weise schreiben

$$h(z,w) := {}^t(*z)\left(-\frac{i}{2}J\right)(\overline{*w}) = {}^tzH\bar{w}.$$

Hierbei ist wieder $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_3 \\ -E_3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Den Ball

$$\mathbb{B}_H := \{\tau = \mathbb{P}a : h(a,a) < 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

identifizieren wir wie in Kapitel 2 mittels

$$(a_1 : a_2 : a_5) \mapsto (u,v) := (a_2/a_1, a_5/a_1)$$

mit dem unbeschränkten Gebiet $\mathbb{B}_H^{\mathrm{aff}} = \{(u,v) : \mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2 > 0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Definition 3.3.2. *Eine Matrix* $\Pi := {}^t\left(\, *a \quad \overline{*b} \quad \overline{*c}\,\right)$ *heißt* Picardmatrix, *wenn* $h(a,a) < 0$ *gilt, also* $\tau = \mathbb{P}a \in \mathbb{B}_H$, *wenn* $h(a,b) = h(a,c) = 0$ *erfüllt ist, und wenn zusätzlich* b *und* c *linear unabhängig sind.*

Proposition 3.3.3. *Ist* $\mathrm{Jac}(\tilde{C}) \cong \mathbb{C}^3/\Pi\mathbb{Z}^6$, Π *wie in (3.3), dann ist* Π *eine Picardmatrix.*

Beweis. Zunächst gibt es nach (3.3) zu jeder Kurve $\tilde{C} \in \mathcal{F}$ eine Periodenmatrix der Gestalt $\Pi = {}^t\left(\, *a \quad \overline{*b} \quad \overline{*c}\,\right)$. Jacobische sind kanonisch hauptpolarisiert, daher genügt Π den Riemannschen Periodenrelationen in der folgenden Form

$$\Pi J^t\Pi = 0, \quad i\Pi J^t\bar{\Pi} > 0.$$

[3]bzgl. der Basis $\eta_1 = dz/w$, $\eta_2 = z(z-1)/w^3$, $\eta_3 = z^2(z-1)dz/w^3$ der holomorphen Differentialformen und der Zuordnung $i \mapsto ((z,w) \mapsto (z,-iw)) \in \mathrm{Aut}(\widetilde{C})$ ist $\iota(i) = \mathrm{diag}(i,-i,-i)$.

e_i bezeichne den kanonischen i-ten Basisvektor in $\mathbb{C}^3$.

(i) Aus $i\Pi J^t\bar{\Pi} > 0$ folgt ${}^te_1 i\Pi J^t\bar{\Pi}e_1 > 0$, also

$$0 > -\frac{1}{2}\,{}^te_1 i\Pi J^t\bar{\Pi}e_1 = {}^t(*a)\frac{-i}{2}J^t(\overline{*a}) = h(a,a).$$

(ii) Aus der ersten Riemannrelation folgt die Orthogonalität von a zu b, c

$$0 = -\frac{i}{2}{}^te_1\Pi J^t\Pi e_2 = h(a,b), \quad 0 = -\frac{i}{2}{}^te_1\Pi J^t\Pi e_3 = h(a,c).$$

(iii) Π hat Rang 3, daher sind $\overline{*b}, \overline{*c}$ und somit auch b, c linear unabhängig. □

Für Jacobische zur Kurvenfamilie hatten wir in (2.4) mit Hilfe der Riemannschen Relationen einen Periodenpunkt bestimmt. Ohne Rückgriff auf die Kurvenfamilie - also ohne die Kenntnis, daß die abelschen Varietäten zu einer Picardmatrix hauptpolarisierbar sind - können wir allein aus den Orthogonalitätsrelationen den zugehörigen Periodenpunkt angeben.

Lemma 3.3.4. *Sei* $\tau = \mathbb{P}a \in \mathbb{B}_H$ *und* $\Pi = {}^t\begin{pmatrix} *a & \overline{*b} & \overline{*c}\end{pmatrix} = (\Pi_1|\Pi_2)$ *eine Picardmatrix. Setze*

$$\Omega = \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u - \frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}, \ u := \frac{a_2}{a_1}, \ v := \frac{a_5}{a_1}.$$

Dann ist Ω *ein Punkt in der oberen Halbebene* $\mathbb{H}_3$ *und*

$$A_\Pi := \mathbb{C}^3/\Pi\mathbb{Z}^6 \cong \mathbb{C}^3/(E_3|\Omega)\mathbb{Z}^6 =: A_\tau.$$

Insbesondere hängt Ω *und daher die Isomorphieklasse von* A_Π *nur vom gewählten Ballpunkt ab.*

Beweis. Offenbar ist Ω symmetrisch. Sei $u = r + it$, $v = x + iy$. Dann ist

$$\mathrm{Im}(\Omega) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) & -xy & -x \\ -xy & t - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) & y \\ -x & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Falls $\tau \in \mathbb{B}_H$, also $\mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2 > 0$, sind die Hauptabschnittsdeterminanten

$t + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = (\mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2) + \mathrm{Re}(v)^2$,

$(t + \frac{1}{2}(x^2 - y^2))(t - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)) - (xy)^2 = (\mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2)(\mathrm{Im}(u) + \frac{1}{2}|v|^2)$,

$\det \mathrm{Im}(\Omega) = (\mathrm{Im}(u) - \frac{1}{2}|v|^2)^2$,

alle größer als 0, d.h. $\mathrm{Im}(\Omega)$ ist positiv definit und somit $\Omega \in \mathbb{H}_3$.

Unter Ausnutzung von $h(a,b) = 0 = h(a,c)$ rechnet man direkt nach, daß $\Pi_1\Omega = \Pi_2$ gilt, also $\Omega = \Pi_1^{-1}\Pi_2$. □

Wir werden im Folgenden nicht zwischen den durch $\tau \in \mathbb{B}_H$ bestimmten isomorphen Varietäten A_τ und A_Π unterscheiden. Da jeder Ballpunkt, der nicht im Urbild $p_{\Gamma_1}^{-1}(\triangle)$ der Apolloniuskonfiguration liegt, eine Jacobische einer Kurve $\widetilde{C} \in \mathcal{F}$ parametrisiert, deren Periodenmatrix eine Picardmatrix ist, sind alle Varietäten A_τ, $\tau \in \mathbb{B}_H \backslash p_{\Gamma_1}^{-1}(\triangle)$, Jacobi-Varietäten von Kurven der Familie $\mathcal{F}$ und haben daher Multiplikation mit den Gaußzahlen. Die letztgenannte Eigenschaft kann man sich auch ohne Rückgriff auf die Kurvenfamilie überlegen, was Holzapfel in [Hol94], Ch. 6 und Ch. 7, für beliebige imaginär quadratische Zahlkörper getan hat. In unserem Fall sieht man das wie folgt ein. Sei stets $K := \mathbb{Q}(i)$, Π eine Picardmatrix, $\Lambda = \Pi\mathbb{Z}^6$ das zugehörige Picard-Gitter und $\Lambda_\mathbb{Q} := \mathbb{Q} \otimes \Lambda$. Mit einem Blick auf die Einbettung ι definieren wir eine Skalarmultiplikation $\circ : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ und eine (Anti-)Involution $\hat{}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$\lambda \circ z := \mathrm{diag}(\lambda, \bar{\lambda}, \ldots, \bar{\lambda})z, \;\; z^\wedge := {}^t(z_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n).$$

Für eine Matrix $G \in M(n, \mathbb{C})$ mit Zeilen $g_1, \ldots, g_n$ sei $G^\wedge$ die Matrix mit Zeilen $g_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$. Ist $m \in \mathbb{Z}^6$, dann ist

$$\Pi \cdot m = (m_1 + im_2) \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{c}_1 \end{pmatrix} + (m_4 + im_5) \circ \begin{pmatrix} a_2 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix} + (m_3 + im_6) \circ \begin{pmatrix} a_5 \\ \bar{b}_5 \\ \bar{c}_5 \end{pmatrix}.$$

Das Gitter Λ können wir demnach in folgender Weise schreiben

$$\Lambda = \{({}^t(a, b, c)\mu)^\wedge : \mu \in \mathbb{Z}[i]^3\}.$$

Die oben definierte Abbildung $\iota : K \to M(3, \mathbb{C})$, $\iota(f) = \mathrm{diag}(f, \bar{f}, \bar{f})$, führt wieder zu einer Einbettung in die Endomorphismenalgebra von A_τ, da

$$\iota(f)(\Lambda_\mathbb{Q}) = \{f \circ ({}^t(a, b, c)\mu)^\wedge : \mu \in K^3\} = \{({}^t(a, b, c)f\mu)^\wedge : \mu \in K^3\} \subset \Lambda_\mathbb{Q}. \quad (3.4)$$

A_τ ist somit eine abelsche Varietät mit $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation. Andererseits definiert die komplexe Darstellung $C = \rho_\mathbb{C}(\varphi)$ eines Endomorphismus einen K-Vektorraumendomorphismus (bzgl. der Skalar-Multiplikation $\circ$) und daher einen K-Vektorraumendomorphismus $N \in M(3, K)$, so daß $C^t(a, \bar{b}, \bar{c}) = {}^t(a, \bar{b}, \bar{c})N$ und schließlich ein $M \in M(3, K)$ mit der Eigenschaft

$$C^t(a, b, c)^\wedge = ({}^t(a, b, c)^t M)^\wedge = {}^t(M(a, b, c))^\wedge. \quad (3.5)$$

Wir setzen

$$\rho_K : \mathrm{End}^0(A_\tau) \to M(3, K), \;\; \varphi \mapsto \rho_K(\varphi) := M.$$

Satz 3.3.5 (siehe [Hol94], 7.7 Proposition). *Die Einschränkung von ρ_K auf den Zentralisator $Z_{\mathrm{End}^0(A_\tau)}\iota(K)$ von K in der Endomorphismenalgebra induziert einen $\mathbb{Q}$-Algebra-Isomorphismus*

$$\rho_K : Z_{\mathrm{End}^0(A_\tau)}\iota(K) \to \mathrm{End}_K(a, a^\perp) = \{M \in M(3, K) : Ma \in \mathbb{C}a, Ma^\perp \subset a^\perp\}$$

in die Algebra $\mathrm{End}_K(a, a^\perp)$. Dabei geht $\iota(K)$ in $K \cdot id$ über.

Der Vollständigkeit halber skizzieren wir den Beweis des Satzes.

Beweis (s. [Hol94], p. 24). Die komplexe Darstellung $C = \rho_{\mathbb{C}}(\varphi)$ eines Elements des Zentralisators kommutiert mit allen $\iota(f) = \mathrm{diag}(f, \bar{f}, \bar{f})$, $f \in K$, und ist daher notwendig von der Form

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} =: (\lambda, D) \in \mathbb{C} \times M(2, \mathbb{C}).$$

Nach (3.5) folgt mit $M = \rho_K(\varphi)$

$${}^t(M(a,b,c))^\wedge = (\lambda, D)^t(a,b,c)^\wedge = ((\lambda, \bar{D})^t(a,b,c))^\wedge = {}^t((a,b,c)(\lambda, {}^t\bar{D}))^\wedge$$

also

$$M(a,b,c) = (a,b,c)(\lambda, {}^t\bar{D}) = (a\lambda, (b,c)^t\bar{D}) \in \mathrm{End}_K(a, a^\perp)$$

Injektivität und Additivität der Abbildung sind klar, die K-Linearität haben wir oben schon festgestellt, die Multiplikativität prüft man unmittelbar nach. Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $M \in \mathrm{End}_K(a, a^\perp)$ vorgegeben. Nach Voraussetzung ist $M(a,b,c) = (\lambda a, (b,c)D)$ in $K \times M(2, K)$. Die Matrix $C := (\lambda, {}^t\bar{D}) \in Z_{\mathrm{End}^0(A_\tau)}\iota(K)$ ist ein Urbild von M. $\square$

Satz 3.3.6. *Sei $\tau = \mathbb{P}a = (1 : u : v) \in \mathbb{B}_H$, $K(\tau) := K(u,v)$, N die normale Hülle von $K(\tau)/K$ und gelte $h(a, a^\sigma) = 0$ für alle $\sigma \in G(N/K)$, $\sigma|_F \neq id_F$.*

(i) Ist A_τ eine CM-Varietät, dann ist $\mathrm{End}^0(A_\tau) \cong K(\tau)$.

(ii) Sei umgekehrt $K(\tau)$ ein sextischer CM-Körper. Dann ist A_τ eine CM-Varietät (mit $\mathrm{End}^0(A_\tau) \cong K(\tau)$).

Beweis. (*i*) Die Endomorphismenalgebra einer CM-Varietät A_τ ist ein Körper (vom Grad 6 über $\mathbb{Q}$) und damit nach Satz 3.3.5

$$\mathrm{End}^0(A_\tau) = Z_{\mathrm{End}^0(A_\tau)}\iota(K) \cong \mathrm{End}_K(a, a^\perp).$$

Sei $K(\alpha) \cong \mathrm{End}^0(A_\tau)$ und γ_α das Bild von $\iota(\alpha)$. Folglich ist $\mathrm{End}_K(a, a^\perp) \cong K(\gamma_\alpha)$ vom Grad 3 über K. Insbesondere ist das charakteristische Polynom $p_{\gamma_\alpha}(t) \in K[t]$ irreduzibel über K und daher (a ist Eigenvektor von γ für jedes $\gamma \in \mathrm{End}_K(a, a^\perp)$) ist a Eigenvektor zu einem einfachen Eigenwert λ von γ_α. $p_{\gamma_\alpha}(t)$ ist das Minimalpolynom von γ_α wie auch von λ, daher sind $K(\alpha)$, $K(\gamma_\alpha)$ und $K(\lambda)$ isomorph. Insgesamt ist mit Lemma 3.2.2

$$K(\tau) \cong K(\lambda) \cong K(\gamma_\alpha) \cong \mathrm{End}^0(A_\tau).$$

(*ii*) Nach den Voraussetzungen an $F = K(\tau)$ ist τ ein singulärer Modul (vom Grad 3), d.h. τ ist isolierter Fixpunkt eines $\gamma \in \mathrm{U}((2,1), K)$ nach Satz 3.2.3. Sei λ der zugehörige einfache Eigenwert. Mit Lemma 3.2.2 und Satz 3.3.5 folgt

$$K(\tau) = K(\lambda) \cong K(\gamma) \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A_\tau),$$

die Varietät ist daher vom CM-Typ. Der $(2,1)$-Multiplikationstyp $(K(\tau), \Phi)$ ist primitiv, somit ist A_τ einfach und eine CM-Varietät.[4] $\square$

Wir erhalten folgende schwächere Version von Satz 3.3.1 als

Korollar 3.3.7. *Jeder sextische CM-Körper $F = K(\tau)$, der den Bedingungen aus Satz 3.3.6 genügt, der also durch einen singulären K-Modul erzeugbar ist, tritt als Endomorphismenalgebra einer Jacobischen der Kurvenfamilie $\mathcal{F}$ auf. In diesem Fall ist F isomorph zu* $\mathrm{End}^0(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$.

Beweis. Nach obigem Satz hat die von τ parametrisierte CM-Varietät A_τ F als Endomorphismenalgebra und ist genau dann Jacobische einer Kurve der Familie, wenn der Ballpunkt nicht im Urbild $p_{\Gamma_1}^{-1}(\triangle)$ der Apolloniuskonfiguration liegt. $p_{\Gamma_1}^{-1}(\triangle) = \mathbb{D}_0 \cup \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3$ ist Vereinigung von $\Gamma(1+i)$-Spiegelungsscheiben und damit von K-Scheiben $\mathbb{D}_j$ (s. [HV01], Ch. 11) und abelsche Varietäten, die von Punkten auf K-Scheiben parametrisiert sind, sind nicht einfach ([Hol94], 6.23 Corollary, siehe auch Satz 3.3.8 unten). Folglich liegt τ nicht über der Apolloniuskonfiguration, d.h. A_τ ist isomorph zu einer Jacobischen der Kurvenfamilie. $\square$

Wieder aus Gründen der Vollständigkeit zitieren wir den eben genannten Satz von Holzapfel und geben die wesentlichen Stichpunkte des Beweises an.

Eine *Scheibe* im Ball ist der Durchschnitt des Balls $\mathbb{B}_H$ mit einer projektiven Geraden in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Sei $c \in \mathbb{C}^3$, $h(c,c) > 0$ und $\mathbb{D}_c := \mathbb{B}_H \cap \mathbb{P}c^\perp$. Eine Scheibe $\mathbb{D}$ heißt K-Scheibe, wenn $\mathbb{D} = \mathbb{D}_c$ für ein c in K^3.

Satz 3.3.8 (siehe [Hol94], 6.23 Corollary)**.** *Liegt τ auf einer K-Scheibe $\mathbb{D}$, dann ist A_τ nicht einfach.*

Beweisweg (vgl. [Hol94], Ch. 6). Sei $a \in \mathbb{D}_c$, $c \in K^3$ und

$$p : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\ {}^t(z_1, z_2, z_3) \mapsto {}^t(z_1, z_2),$$

die Projektion. Das Gitter

$$p(\Lambda_\tau) := \Lambda(a, \bar{b}) = ({}^t(a, \bar{b})\mathbb{Z}[i]^3)^\wedge$$

hat Rang 2,[5] also ist $\mathbb{C}^2/\Lambda(a,\bar{b})$ ein zweidimensionaler Torus. Der Kern der induzierten Abbildung $\bar{p} : A_\tau \to \mathbb{C}^2/\Lambda(a,\bar{b})$ ist ein eindimensionaler Torus, also eine echte abelsche Untervarietät von A_τ. $\square$

[4]Ist A_τ vom CM-Typ, so ist A_τ isogen zu B^s mit einer einfachen CM-Varietät B ([Lan83], I, Theorem 3.1) vom Typ (L, Φ_L). Der Multiplikationstyp (F, Φ) von A_τ ist ein Lift von (L, Φ_L) ([Lan83], I, Theorem 3.4). Im Fall $s \neq 1$, also $s = 3$, ist B eine elliptische Kurve mit $L = K$-Multiplikation. Aber (F, Φ) ist kein Lift eines Typs von K, da $\Phi|_K = \{id, \overline{id}\}$.

[5]Da a und b linear unabhängig sind, ist die $\mathbb{Q}$-Dimension von $\mathbb{Q} \otimes \Lambda(a, \bar{b})$ entweder 4 oder 6. Die Dimension ist genau dann $= 4$, wenn die Spalten von ${}^t(a, \bar{b})$ über K linear abhängig sind, was äquivalent ist zur Existenz eines $c \in K^3 \setminus \{0\}$, auf dem a und b senkrecht stehen.

Bemerkung 3.3.9. *Holzapfel arbeitet mit dem Standardball $\mathbb{B}_2$, der durch die über K zu H äquivalente Form* $\mathrm{diag}(1,1,-1)$ *gegeben ist. Z.B. ist*

$$ {}^tS^{-1}\mathrm{diag}(1,1,-1)\bar{S}^{-1} = H \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -i/2 & 1 & 0 \\ i/2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Es ist nicht schwer, einen gegebenen sextischen CM-Körper F, der die vierten Einheitswurzeln enthält, in der Form $K(\tau)$, $\tau \in \mathbb{B}_H$, zu schreiben. Es bleibt die Frage, ob die zusätzliche Bedingung an τ stets erfüllbar ist. Wir ignorieren das Problem für den Moment und zeigen den eingangs erwähnten

Satz 3.3.10 (Satz 3.3.1)**.** *Jeder CM-Körper vom Grad* 6*, der* $\mathbb{Q}(i)$ *enthält, tritt als Endomorphismenalgebra einer Jacobischen der Kurvenfamilie* $\mathcal{F}$ *auf.*

Beweis. Zu gegebenem F und $(2,1)$-CM-Typ Φ existiert eine hauptpolarisierbare abelsche Varietät der Dimension 3 von diesem Multiplikationstyp.[6] Dreidimensionale hauptpolarisierte abelsche Varietäten mit $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation werden vom Standardball $\mathbb{B}_2$ ($= \mathcal{H}_{2,1}$ in der Notation von [BL04], $\mathbb{H}(M)$, mit $M \in \mathrm{Sp}(6,\mathbb{Z})$, $M^2 = -E_3$, in der Notation von [Run97]) parametrisiert, den wir mit $\mathbb{B}_H$ vermöge S identifizieren. Zwei solche Varietäten $A_{\tau,\mathrm{Shim}}$, $A_{\tau',\mathrm{Shim}}$ sind genau dann isomorph, wenn die Parameter in einer Bahn unter der Aktion der Picardschen Modulgruppe $\mathrm{U}((2,1),\mathbb{Z}[i])$ liegen (siehe z.B. [Run97], Prop.2.3). M.a.W. stimmen die Modulräume überein und die Identität auf $\mathbb{B}_2$ induziert eine Bijektion der Isomorphieklassen. D.h. wir haben eine Bijektion des Modulraums, die dem Parameter der Isomorphieklasse einer abelschen Varietät mit Picardmatrix den Parameter einer Isomorphieklasse $(A_{\tau',\mathrm{Shim}})$ zuordnet. Ist (A_τ) das Urbild von $(A_{\tau',\mathrm{Shim}})$ unter dieser Bijektion, dann ist A_τ eine CM-Varietät mit $\mathrm{End}^0(A_\tau) \cong F$. Der Ballpunkt τ liegt nicht über der Apolloniuskonfiguration, da A_τ einfach ist, also ist die Varietät Jacobische einer Kurve. □

Bemerkung 3.3.11. *Ein ähnliches Resultat findet man in [Wen01], Theorem 4.5 und Theorem 5.2. Dort wird mit anderen Methoden gezeigt, daß jede Kurve vom Geschlecht 3, deren Jacobi-Varietät einfach ist und $\mathbb{Q}(i)$-Multiplikation besitzt, hyperelliptisch ist und durch eine Gleichung der Form*

$$ C_{abc} : v^2 = w(w^2-a)(w^2-b)(w^2-c),\ a,b,c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, $$

gegeben ist. Hieraus ergibt sich, daß jeder sextische CM-Körper, der die Gaußzahlen umfaßt, von einer hyperelliptischen Kurven der obigen Gestalt stammt, sobald er als Endomorphismenalgebra einer hauptpolarisierten abelschen Varietät auftritt. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die Wengsche und die von uns betrachtete Kurvenfamilie übereinstimmen.

[6] z.B. ist $A_\Phi := \mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal, eine polarisierte Varietät von diesem Typ. A_Φ ist nicht notwendig hauptpolarisiert, aber isogen zu einer solchen, die also den selben Multiplikationstyp besitzt. Für eine andere Argumentation vgl. [BL04], Ch. 9.6

Im zweiten Kapitel, Bemerkung 2.2.1, hatten wir für jede Kurve $\widetilde{C}(x,y) \in \mathcal{F}$ ein Modell mit Gleichung

$$v^2 = w(w^2-1)\left(w^2 - \frac{x}{y}\right)\left(w^2 - \frac{1-x}{1-y}\right)$$

gefunden, daher treten unsere Kurven als Elemente der Wengfamilie auf. Andererseits sind zwei hyperelliptische Kurven, deren Weierstraßpunkte durch einen Automorphismus ρ von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ineinander überführt werden, isomorph. Seien a, b, c paarweise verschieden und ungleich 0*. Dann ist mit $x := \frac{b}{a} \cdot \frac{a-c}{b-c}, y := \frac{a-c}{b-c}$*

$$C_{abc} \cong \widetilde{C}(x,y) \in \mathcal{F}$$

vermöge $\rho(t) := \frac{t}{\sqrt{a}}$.

Der nächste Satz beantwortet die oben gestellte Frage, ob jeder über K kubische CM-Körper durch einen singulären Modul erzeugt wird.

Satz 3.3.12. *A_τ ist genau dann eine CM-Varietät, wenn τ ein K-singulärer Modul vom Grad 3 über K ist.*

Beweis. Sei A_τ durch $\tau = \mathbb{P}a \in \mathbb{B}_H$ parametrisiert. Nach Satz 3.3.5 ist A_τ genau dann eine CM-Varietät, wenn $F := \mathrm{End}^0(A_\tau) \cong \mathrm{End}_K(a, a^\perp)$ eine kubische Erweiterung von K ist.

Sei zunächst A_τ eine CM-Varietät und $\gamma \in \mathrm{End}_K(a, a^\perp)$ ein primitives Element der kubischen Erweiterung $\mathrm{End}_K(a, a^\perp)/K$. Das charakteristische Polynom $p_\gamma(X)$ von γ ist irreduzibel über K, also ist

$$\mathrm{End}_K(a, a^\perp) \cong K(\gamma) \cong K[X]/(p_\gamma(X)) \cong K(\lambda),$$

wobei λ den (einfachen) Eigenwert von γ zum Eigenvektor a bezeichnet. Seien $id, \sigma, \psi : F \to \mathbb{C}$ die drei verschiedenen K-Einbettungen von F. Es ist

$$\gamma a^\sigma = (\gamma a)^\sigma = (\lambda a)^\sigma = \lambda^\sigma a^\sigma \text{ sowie } \gamma a^\psi = (\gamma a)^\psi = (\lambda a)^\psi = \lambda^\psi a^\psi,$$

d.h. a, a^σ und a^ψ sind Eigenvektoren von γ zu λ, λ^σ und λ^ψ. Wegen $\gamma(a^\perp) \subset a^\perp$ liegen a^σ, a^ψ im Komplement $a^\perp$:

Sei $a^\sigma = \alpha a + v', v' \in a^\perp$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda^\sigma \alpha h(a,a) &= h(\lambda^\sigma \alpha a, a) + h(\lambda^\sigma v', a) = h(\lambda^\sigma a^\sigma, a) = h(\gamma a^\sigma, a) \\ &= h(\gamma \alpha a + \gamma v', a) = \alpha h(\lambda a, a) = \alpha \lambda h(a,a), \end{aligned}$$

folglich $\alpha(\lambda - \lambda^\sigma) = 0$, also $\alpha = 0$. Ebenso folgt $a^\psi \perp a, a^\sigma$.

Völlig analog wie im Beweis von Lemma 3.2.2 folgt $F = K(\tau)$, also ist τ ein K-singulärer Modul nach Satz 3.2.3.

Sei umgekehrt $\tau = \mathbb{P}a$ ein K-singulärer Modul und isolierter Fixpunkt des unitären $\gamma \in \mathrm{U}((2,1),K)$ zum Eigenwert λ. Weiter sei $K(\tau)/K$ eine kubische Erweiterung und $\mathrm{Hom}_K(F,\mathbb{C}) = \{id,\sigma,\psi\}$. Nach Satz 3.2.3 wird $a^\perp$ von a^σ und a^ψ erzeugt, woraus sich unmittelbar $\gamma(a^\perp) = a^\perp$, also $\gamma \in \mathrm{End}_K(a,a^\perp)$, ergibt. Da $K(\tau) \cong K(\lambda) \cong K[\gamma]$ Grad 3 über K hat, ist wegen

$$3 \geq [\mathrm{End}^0(A_\tau) : K] = [\mathrm{End}_K(a,a^\perp) : K] \geq 3$$

A_τ eine CM-Varietät. □

Bemerkung 3.3.13. (i) *Die explizite Konstruktion des Modulraums g-dimensionaler polarisierter abelscher Varietäten einer fixierten Endomorphismenstruktur wurde von Shimura in [Shm63] durchgeführt. Wir adaptieren das Verfahren für abelsche Varietäten mit K-Multiplikation vom Typ* $(2,1)$ *und folgen [BL04], Chapter 9.6 und 9.8, vgl. auch [Hol94], Chapter 2. Sei dazu das Gitter* $\mathbb{Z}[i]^3$ *in K^3 sowie die schief-hermitesche Matrix $T := \mathrm{diag}(i,i,-i)$ in $M(3,K)$ der Signatur* $(2,1)$ *fixiert. Die Spur* $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}({}^ta T\bar{b})$ *nimmt für alle Gittervektoren a und b ganzzahlige Werte an. Betrachte*

$$\tilde{} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^6,\ z \mapsto {}^t(z,\bar{z}),$$

und die von $\tau = (u,v) \in \mathbb{B}_2$ abhängende Abbildung

$$J_\tau : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^3,\ J_\tau(z) = \begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v \end{pmatrix} z.$$

Die abelsche Varietät $A_\tau := \mathbb{C}^3/J_\tau(\tilde{}\,(\mathbb{Z}[i]^3))$ hat K-Multiplikation vom Typ $(2,1)$ *und besitzt eine Polarisierung, die durch*

$$H_\tau = (1-|u|^2-|v|^2)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-|v|^2 & -u\bar{v} \\ 0 & -\bar{u}v & 1-|u|^2 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Für Gitterpunkte $J_\tau({}^t(a,\bar{a}))$, $J_\tau({}^t(b,\bar{b}))$ erhalten wir

$$\mathrm{Im} H_\tau(J_\tau({}^t(a,\bar{a})), J_\tau({}^t(b,\bar{b}))) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}({}^ta T\bar{b}).$$

Jede abelsche Varietät von diesem Endomorphismentyp ist bzgl. einer geeigneten Polarisierung isomorph zu einer in dieser Weise konstruierten Varietät, siehe [BL04], Prop. 9.5.4. Zwei durch Ballpunkte τ, τ' parametrisierte Varietäten sind genau dann isomorph, wenn sie in einer Bahn unter der Operation der unitären Gruppe $\mathrm{U}((2,1),\mathbb{Z}[i])$ *liegen.*[7]

[7] Die Gruppe G in [BL04] ist in unserem Fall genau die unitäre Gruppe $\mathrm{U}((2,1),\mathbb{C})$, die dort erwähnte Matrix W ist für obiges T die Einheitsmatrix. Mit $\mathcal{M} = \mathbb{Z}[i]^3$ ist also $G(\mathcal{M},T) = \{\gamma \in \mathrm{U}(2,1) : {}^t\gamma\mathbb{Z}[i]^3 \subset \mathbb{Z}[i]^3\} = \mathrm{U}((2,1),\mathbb{Z}[i])$

Mit obigen Notationen können wir das Gitter $J_\tau(\tilde{\ }(\mathbb{Z}[i]^3))$ umschreiben zu

$$\begin{aligned}
J_\tau(\tilde{\ }(\mathbb{Z}[i]^3)) &= \left\{ \begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z}[i]^3 \right\} \\
&= \left\{ z_1 \circ \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \circ \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_3 \circ \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[i] \right\}.
\end{aligned}$$

Sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$. Wegen $g \circ \mu = \mu \circ g$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}
gJ_\tau(\tilde{\ }(\mathbb{Z}[i]^3)) &= \left\{ z_1 \circ g \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \circ g \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_3 \circ g \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[i] \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & -ia_1 & a_5 & a_2 & -ia_2 & -ia_5 \\ \bar{b}_1 & i\bar{b}_1 & \bar{b}_5 & \bar{b}_2 & i\bar{b}_2 & i\bar{b}_5 \\ \bar{c}_1 & i\bar{c}_1 & \bar{c}_5 & \bar{c}_2 & i\bar{c}_2 & i\bar{c}_5 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^6,
\end{aligned}$$

wobei $a_1 = u$, $a_2 = v$, $a_5 = 1$, $b_1 = \bar{a}$, $b_2 = \bar{b}$, $b_5 = \overline{au + bv}$, $c_1 = \bar{c}$, $c_2 = \bar{d}$, $c_5 = \overline{cu + dv}$.

(ii) Sei F/K galoissch, $G(F/K) =< \sigma >$, $F = K(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\alpha^{1-\sigma} > 0$ gilt und sei

$$a_1 := \alpha^\sigma,\ a_2 := i\alpha,\ a_3 := \alpha^{\sigma^2}/m.$$

Für genügend große $m \in \mathbb{N}$ liegt $\tau := \mathbb{P}a = (a_1 : a_2 : a_3)$ in $\mathbb{B}_H$. Betrachte das Gitter

$$L := \left(\alpha^\sigma, -i\alpha^\sigma, \frac{\alpha^{\sigma^2}}{m}, i\alpha, \alpha, -i\frac{\alpha^{\sigma^2}}{m} \right)_{\mathbb{Z}} \subset F$$

und den (1,2)-Typ $\Phi = (id, \bar{\sigma}, \bar{\sigma}^2)$. Damit ist $A_{\Phi(L)} = A_\Pi$ mit $\Pi = {}^t(\, * a\ \overline{*b}\ \overline{*c})$, $b = a^\sigma, c = a^{\sigma^2}$. Die Varietät ist hauptpolarisiert, wenn Π eine Picardmatrix ist, wenn also b und c das zu a orthogonale Komplement erzeugen. Letzteres ist wiederum nach Satz 3.2.3 äquivalent dazu, daß τ ein singulärer K-Modul ist. Starten wir also mit einem singulären Modul $\tau = (a_1 : a_2 : a_3)$, dann besitzt A_Π Multiplikation mit F und ist die Jacobi-Varietät der CM-Kurve $\widetilde{C}_\tau$ aus Satz 2.2.7.

3.3.2 Picardkurven

Sei nun $\mathcal{P}$ die Picardsche Kurvenfamilie

$$C(\xi) : w^3 = z(z - \xi_0)(z - \xi_1)(z - \xi_2),\ \xi \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \triangle.$$

Wir definieren eine Einbettung $* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^6$,

$$* : {}^t(z_1, z_2, z_3) \mapsto {}^t(z_1, z_2, -\zeta z_1, z_3, \zeta z_2, \bar{\zeta} z_3),\ \zeta = e^{2\pi i/3},$$

und eine hermitesche Form

$$h(z,w) := {}^t(\,*\,z)\frac{1}{\sqrt{-3}}J(\overline{*w}) = {}^t z \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{\zeta} & 0 & 0 \end{pmatrix} w$$

der Signatur $(2,1)$ auf $\mathbb{C}^3$. Analog zur Definition 3.3.2 sind *Picardmatrizen* $\Pi = {}^t\begin{pmatrix} *a & \overline{*b} & \overline{*c} \end{pmatrix}$ zu $*$ und h durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(a) $h(a,a) < 0$,

(b) b und c sind linear unabhängig,

(c) $a \perp b, c$.

Jede Isomorphieklasse von Jacobischen von Picardkurven besitzt einen Repräsentanten $\mathbb{C}^3/\Pi\mathbb{Z}^6$ mit einer Picardmatrix Π und umgekehrt sind Tori $\mathbb{C}^3/\Pi\mathbb{Z}^6$ nach Picardgittern $\Pi\mathbb{Z}^6$ abelsche Varietäten mit K-Multiplikation, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, vom Typ $(2,1)$, die eine Hauptpolarisierung gestatten und deren Isomorphieklasse nur vom Ballpunkt abhängt, siehe [Hol95], Chapter 2. Eine auf diese Weise durch $\tau \in \mathbb{B}_h$ parametrisierte abelsche Varietät ist genau dann Jacobi-Varietät einer Picardkurve, wenn τ nicht im Urbild $p^{-1}(\triangle)$, der Quotientenabbildung $p : \mathbb{B}_h \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ liegt, [Hol95], Theorem 3.34. Da einfache abelsche Varietäten mit diesen Eigenschaften Jacobische von Picarkurven sind, siehe [Hol95], vgl. auch [KW04], Lemma 1, folgt wörtlich wie im Fall der Familie $\mathcal{F}$, daß jeder Zahlköper vom Grad 6, der die Eisensteinzahlen enthält, als Endomorphismenalgebra einer Picardkurve auftritt. Für den obigen Beweis, daß CM-Körper der Gestalt $F^+(i)$ durch singuläre Moduln erzeugt werden, hatten wir neben Holzapfels Satz 3.3.5, der für beliebige dreidimensionale abelsche Varietäten mit imaginär quadratischer Multiplikation richtig ist, keine Eigenschaften genutzt, die vom imaginär quadratischen Körper abhängen. Wir erhalten also in der gleichen Weise

Satz 3.3.14. *Jeder CM-Körper vom Grad* 6*, der die dritten Einheitswurzeln enthält, tritt als Endomorphismenalgebra einer Jacobi-Varietät einer Picardkurve auf und ist von der Bauart* $F = \mathbb{Q}(\zeta, \tau)$ *mit einem singulären Modul* τ*.*

Kapitel 4

Modulkörper

Der Modulkörper einer CM-Varietät A_τ definiert einen abelschen Erweiterungskörper $F^*(j(\tau))$ des Reflexkörpers F^*, einen *Shimuraklassenkörper*, den wir explizit aus den Thetakonstanten gewinnen können. Bislang wissen wir aber noch nicht einmal, ob die Shimuraklassenkörper überhaupt echte Erweiterungen der Grundkörper sind. Um den Grad der Erweiterung zu bestimmen, könnte man versuchen, den Grad (der Koordinaten) von $j(\tau)$ über dem Reflexkörper zu bestimmen, was uns als aussichtslos erscheint.

Wir schlagen einen anderen Weg ein. Eine abelsche Erweiterung ist stets Erweiterung zu einer Untergruppe der Idelklassengruppe, die zum Kern der Artin-Abbildung korrespondiert. Die entsprechenden Gruppen zu den von uns betrachteten abelschen Erweiterungen M^*/F^* haben Shimura und Taniyama bestimmt. Wir werden in diesem Kapitel diese Gruppen im unverzweigten Fall, d.h. wenn die Jacobi-Varietät Multiplikation mit $\mathcal{O}_F$ hat, bestimmen. Der Modulkörper ist dann ein Unterkörper des Hilbertschen Klassenkörpers und für Reflexkörper mit geeigneter Klassenzahl erlaubt die Idealgruppe Rückschlüsse darauf, wie der Modulkörper im Hilbertklassenkörper eingelagert ist. Vorweg stellen wir einige Grundbegriffe aus der Klassenkörpertheorie bereit.

4.1 Ein kurzer Abriß der Klassenkörpertheorie

Wir folgen in diesem Paragraphen hauptsächlich den Zusammenstellungen in [CS08] und [Sil94], Chapter II, §3. Beweise der genannten Theoreme der globalen Klassenkörpertheorie findet man z.B. in Tates Artikel in [CF67].

4.1.1 Idealtheoretische Klassenkörpertheorie

Sei M/E eine endliche Erweiterung von Zahkörpern, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_E$ sei ein in M/E unverzweigtes Primideal und $\mathfrak{P}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal von M. Die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p})$ ist eine endliche, zyklische Erweiterung, deren Galoisgruppe $G(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$ durch $\sigma_\mathfrak{p} : x \mapsto x^q$, $q = |\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}|$ die Absolutnorm von $\mathfrak{p}$, erzeugt ist. Jedes σ aus der Zerlegungsgruppe $Z(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p})$ induziert ein Element $\bar{\sigma} \in G(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$. Da wir $\mathfrak{p}$ als unverzweigt vorausgesetzt haben, ist die Trägheitsgruppe $T(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p})$ trivial, daher induziert die exakte Sequenz

$$1 \to T(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}) \to Z(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}) \to G(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p})) \to 1$$

einen Isomorphismus $Z(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}) \to G(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p})) =< \sigma_\mathfrak{p} >$. Der globale *Frobenius-Automorphismus* $(\mathfrak{P}, M/E)$ ist als Urbild von $\sigma_\mathfrak{p}$ in $Z(\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p})$ definiert und ist das durch die Relation

$$(\mathfrak{P}, M/E)(x) = x^q \bmod \mathfrak{P} \text{ für alle } x \in \mathcal{O}_M$$

eindeutig bestimmte Element von $G(M/E)$. Sei $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{p}$ ein weiteres über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal. $G(M/E)$ wirkt transitiv auf der Menge $\{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}\}$ der über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale, also existiert ein σ in $G(M/E)$, so daß $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}^\sigma$. Für das Frobeniuselement gilt $(\mathfrak{Q}, M/E) = \sigma(\mathfrak{P}, M/E)\sigma^{-1}$, d.h. die Frobeniuselemente zu $\mathfrak{p}$ bilden eine Konjugationsklasse in $G(M/E)$.

Sei nun M/E eine abelsche Erweiterung. In diesem Fall hängt $(\mathfrak{p}, M/E) := (\mathfrak{P}, M/E)$ nur von der Erweiterung M/E und dem zugrundeliegenden Primideal ab. Bezeichne $I_E(\mathfrak{a})$ die Gruppe der zu $\mathfrak{a}$ teilerfremden Ideale, $\Delta_{M/E}$ sei die Relativ-Diskriminante von M/E. Durch multiplikative Fortsetzung

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \mapsto \prod (\mathfrak{p}, M/E)^{v_\mathfrak{p}} =: (\mathfrak{a}, M/E)$$

definieren wir einen Homomorphismus, die *Artin-Abbildung*, von $I_E(\Delta_{M/E})$ in die Galoisgruppe $G(M/E)$. Die in M/E voll zerlegten Primideale sind genau die Primideale im Kern der Artin-Abbildung.

Ein *Modulus* $\mathfrak{m}$ von E ist ein formales Produkt $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$ eines ganzen Ideals $\mathfrak{m}_0 \in I_E$ mit einer Teilmenge $\mathfrak{m}_\infty$ der reellen Primstellen von E. Wir setzen

$$x \equiv 1 \bmod {}^*\mathfrak{m} :\iff v_\mathfrak{p}(x-1) > v_\mathfrak{p}(\mathfrak{m}) \ \forall\ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0,\ \sigma(x) > 0 \ \forall\ \sigma \in \mathfrak{m}_\infty$$

und definieren die *Strahlgruppe mod* $\mathfrak{m}$

$$R_\mathfrak{m} := \{(x) : x \equiv 1 \bmod {}^*\mathfrak{m}\} \subset I_E.$$

Nach dem Artinschen Reziprozitätsgesetz existiert zu jeder abelschen Erweiterung ein Modulus $\mathfrak{m}$, so daß die Strahlgruppe $R_\mathfrak{m}$ im Kern der Artin-Abbildung enthalten ist, $\mathfrak{m}$ wird *zulässiger Modulus* genannt. Die zulässigen Moduli sind Vielfache eines minimalen Modulus $\mathfrak{f}_{M/E}$, dem sogenannten *Führer* von M/E. In M verzweigen genau diejenigen Primideale von E, die den Führer teilen. Die Faktorgruppe

$$\mathrm{Cl}_\mathfrak{m} := I(\mathfrak{m}_0)/R_\mathfrak{m}$$

der zum endlichen Part $\mathfrak{m}_0$ teilerfremden Ideale nach der Strahlgruppe mod $\mathfrak{m}$ wird *Strahlklassengruppe modulo* $\mathfrak{m}$ genannt. Für jeden zulässigen Modulus induziert die Artin-Abbildung einen surjektiven Homomorphismus

$$(\quad, M/E) : \mathrm{Cl}_{\mathfrak{m}} \to G(M/E),\ (\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{a}, M/E) \tag{4.1}$$

mit Kern $\ker(\quad, M/E) = A_{\mathfrak{m}}/R_{\mathfrak{m}}$, wobei

$$A_{\mathfrak{m}} = N_{M/E}(I_M(\mathfrak{m}_0))R_{\mathfrak{m}}.$$

Umgekehrt gibt es zu jedem Modulus $\mathfrak{m}$ von E einen - in einem fixierten algebraischen Abschluß eindeutig bestimmten - Erweiterungskörper $H_{\mathfrak{m}}$, so daß die Artin-Abbildung (4.1) ein Isomorphismus ist. Der *Strahlklassenkörper* $H_{\mathfrak{m}}$ *modulo* $\mathfrak{m}$ ist die maximale abelsche Erweiterung von E, in der alle Primideale der Strahlgruppe $R_{\mathfrak{m}}$ voll zerlegt sind. Ist M/E abelsch und $\mathfrak{m}$ ein zulässiger Modulus von M/E, dann ist M ein Unterkörper von $H_{\mathfrak{m}}$. Der *Hilbertklassenkörper* ist der Strahlklassenkörper $H_E := H_{(1)}$ zum Modulus $\mathfrak{m} = (1)$ und die größte abelsche Körpererweiterung von E, die über allen Primstellen unverzweigt ist. Die Galoisgruppe $G(H_E/E)$ ist isomorph zur Klassengruppe Cl_E und die Primideale von E, die in H_E voll zerlegt sind, sind genau die Primhauptideale in E. Da die Strahlgruppe $R_{\mathfrak{m}}$ in $P_{\mathfrak{m}} := P_E \cap I_E(\mathfrak{m})$ enthalten ist, ist die Strahlklassengruppe $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{m}}$ eine Erweiterung von Cl_E mit $P_{\mathfrak{m}}/R_{\mathfrak{m}}$.

4.1.2 Idelische Formulierung der Klassenkörpertheorie

Sei weiterhin E ein Zahlkörper und v eine Primstelle von E. E_v sei die Vervollständigung von E bei v. Für eine endliche Stelle sei $\mathcal{O}_v$ der Ring der ganzen Zahlen von v, für reelle bzw. komplexe archimedische Stellen sei $\mathcal{O}_v = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Die *Idelgruppe* J_E von E ist definiert als

$$J_E := \{s = (x_v) \in \prod_v E_v^* : x_v \in \mathcal{O}_v^* \text{ für fast alle } v\}$$

und eine topologische Gruppe bezüglich der durch die Umgebungsbasis der $1 \in J_E$ definierten Topologie, die durch folgende Mengen gegeben ist

$$\prod_{v \in S} W_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v.$$

Dabei durchläuft S die endlichen Primstellenmengen von E, die alle unendlichen Stellen umfassen, und W_v ist eine Umgebungsbasis der 1 in E_v^*. Wir betten E^* diagonal (und diskret) in die Idelgruppe ein, d.h.

$$E^* \to J_E,\ z \mapsto s = (x_v),\ \text{wobei } x_v = z\ \forall\ v,$$

und die Komplettierungen E_v vermöge

$$z_v \mapsto s = (x_w) \text{ mit } x_w = \begin{cases} z_v, & v = w \\ 1, & v \neq w. \end{cases}$$

Das Ideal eines Idels $s = (x_v)$ ist

$$(s) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ endlich}} \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}} x_p}.$$

Für eine endliche Erweiterung L/E ist die Norm eines Idels durch

$$N_{L/E} : J_L \to J_E, \; s = (x_w)_w \mapsto (\prod_{w|v} N_{L_w/E_v}(x_w))_v.$$

gegeben. E^{ab} sei die maximale abelsche Erweiterung von E. Es gibt einen eindeutig bestimmten stetigen (*Reziprozitäts-*)Homomorphismus

$$(\quad, E) : J_E \to G(E^{ab}/E), \; s \mapsto (s, E),$$

mit folgender Eigenschaft: Ist M/E endlich und abelsch, s ein Idel, dessen Ideal von keiner verzweigten Primstelle geteilt wird, dann ist

$$(s, E)|_M = ((s), M/E)$$

die Artin-Abbildung des Ideals zu s. Der Reziprozitätsmorphismus ist surjektiv, faktorisiert über die *Idelklassengruppe* $\mathrm{C}_E := J_E/E^*$, und es gilt

$$(s, M)|_{E^{ab}} = (N_{M/E}(s), E) \; \forall \; s \in J_M.$$

Ist $\mathfrak{p}$ ein in M/E unverzweigtes Primideal von E mit lokalem Parameter $\pi_{\mathfrak{p}} \in E_{\mathfrak{p}}^* \subset J_E$, dann ist $(\pi_{\mathfrak{p}}, E_{\mathfrak{p}}) = (\mathfrak{p}, M/E)$, der Frobeniusautomorphismus von $\mathfrak{p}$. Sei nun $H_{\mathfrak{m}}$ der Strahlklassenkörper zum Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_E$. Wir setzen

$$U_{\mathfrak{m}} := \{s \in J_E : x_v \in \mathcal{O}_v^*, \; x_v \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}\mathcal{O}_v \; \forall \; v\}.$$

$E^*U_{\mathfrak{m}}$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in J_E. Die Reziprozitätsabbildung $(\quad, E)$ induziert einen Isomorphismus

$$J_E/E^*U_{\mathfrak{m}} \cong G(H_{\mathfrak{m}}, E),$$

m.a.W. (s, E) operiert genau dann trivial auf $H_{\mathfrak{m}}$, wenn s in $E^*U_{\mathfrak{m}}$ liegt. Unten werden wir die Äquivarianz der Artin-Abbildung ausnutzen (Theorem 11.5 in Tates Artikel in [CF67]). Für uns ist folgende Version ausreichend: Ist $E/\mathbb{Q}$ galoissch, H_E der Hilbertklassenkörper zu E und $\tilde{\sigma} \in G(H_E/\mathbb{Q})$ eine Fortsetzung von $\sigma \in G(E/\mathbb{Q})$. Dann ist für jede Idelklasse $[s] \in \mathrm{C}_E$

$$([s]^\sigma, H_E/E) = \tilde{\sigma}([s], H_E/E)\tilde{\sigma}^{-1}.$$

4.2 Der erste Hauptsatz der komplexen Multiplikation

Der Modulkörper einer CM-Varietät ist zunächst als Fixkörper unter der Gruppe der Automorphismen $\sigma \in G_{\bar{\mathbb{Q}}}$, die die Isomorphieklasse $((A_\tau, E))$ fest lassen, definiert. Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, korrespondiert er andererseits als abelsche Erweiterung zu einer Idealgruppe, dem Kern der Artin-Abbildung. Im unverzweigten Fall werden wir in den letzten Paragraphen diese Gruppe genauer studieren. Ziel dieses Abschnitts ist es, den Weg zur klassenkörpertheoretischen Beschreibung des Modulkörpers in groben Zügen zu skizzieren. Die genauen Ausführungen sind wieder bei Shimura und Taniyama zu finden, [ST61], II.7, III.13, IV.14 -15, insb. Beweis des ersten Hauptsatzes der komplexen Multiplikation (Main Theorem I).
Wir formulieren Teil- wie Endergebnisse nur für den uns vorliegenden Fall abelscher Varietäten der Dimension 3 mit imaginär quadratischer Multiplikation. Sei also stets (F, Φ) ein $(2,1)$-CM-Typ, F ein CM-Körper vom Grad 3 über $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d = 1$ oder $d = 3$, und $\Phi^* := \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ sei der Reflextyp zu $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ für F^*. Eine CM-Varietät (A, E) vom Typ (F, Φ) ist *prinzipal* (erlaubt $\mathcal{O}_F$-Multiplikation), wenn der Endomorphismenring isomorph zu $\mathcal{O}_F$ ist. In den verbleibenden Abschnitten dieser Arbeit betrachten wir ausschließlich prinzipale CM-Varietäten. Mit $M^* := M(A)^* := M(A)F^*$ bezeichnen wir den (F^*-erweiterten) Modulkörper. Wir erinnern uns an Beispiel 1.3.3, (ii), aus dem ersten Kapitel. Zu jedem Gitter Λ in $F = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ definiert Φ mittels

$$\Phi : f \otimes z \mapsto {}^t(f^{\varphi_1} z, f^{\varphi_2} z, f^{\varphi_3} z)$$

einen ($\mathbb{R}$-Vektorraum-)Isomorphismus $F_{\mathbb{R}} = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^3$ und eine komplexe Struktur J_Φ auf $F_{\mathbb{R}}$. Da $\Lambda_{\mathbb{R}}$ isomorph zu $F_{\mathbb{R}}$ und daher zu $\mathbb{C}^3$ ist, ist $\Phi(\Lambda)$ ein Gitter in $\mathbb{C}^3$. Um eine Riemann-Form auf dem Torus zu erhalten, wählen wir ein rein imaginäres $\zeta \in F$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Im}(\zeta^\varphi) > 0$ für alle $\varphi \in \Phi$, so daß $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(a\zeta\bar{b})$ für Gitterpunkte $a, b \in \Lambda$ ganzzahlig ist. Für $z, w \in \mathbb{C}^3 = F_{\mathbb{R}}$ setzen wir $E_\zeta(z, w) := \sum_{j=1}^3 \zeta^{\varphi_j}(z_j \bar{w}_j - \bar{z}_j w_j)$. $E_\zeta(\ ,\ )$ definiert eine nicht-ausgeartete Riemann-Form auf $\mathbb{C}^3/\Phi(\Lambda)$ für die gilt

$$E_\zeta(z, \Phi(\xi)w) = E_\zeta(\Phi(\bar{\xi})z, w)\ \forall\ \xi \in F. \tag{4.2}$$

$A(\Lambda) := \mathbb{C}^3/\Phi(\Lambda)$ ist somit eine abelsche Varietät vom Typ (F, Φ). Die von der Riemann-Form E_ζ induzierte Rosati-Involution stabilisiert F und fixiert F^+, entspricht daher dem nichttrivialen Automorphismus $\rho \in G(F/F^+)$. Nach unserer Definition hat also $A(\Lambda)$ imaginär quadratische Multiplikation vom Typ $(2,1)$.[1]
Umgekehrt ist jede nicht ausgeartete Riemann-Form auf $A(\Lambda)$, die (4.2) erfüllt,

[1] $A(\Lambda)$ ist von der Endomorphismenstruktur $(K, ^-, \rho)$, $\rho(f) = \mathrm{diag}(\bar{f}, f, f)$, K der imaginär quadratische Teilkörper von F.

von der Bauart $E_\zeta(\ ,\ )$ für ein geeignetes $\zeta \in F$ mit $\bar{\zeta} = -\zeta$ und $\mathrm{Im}(\zeta^\varphi) > 0\ \forall \varphi \in \Phi$. Insbesondere ist also jede abelsche Varietät vom CM-Typ (F, Φ) isogen zu einem Torus $\mathbb{C}^3/\Phi(\Lambda)$ mit einem Gitter Λ in F. Oben hatten wir gefordert, daß $(A(\Lambda), E_\zeta)$ prinzipal ist, was, wegen $\mathrm{End}(A(\Lambda)) \cong \mathcal{O}(\Lambda)$, bedeutet, daß $\Lambda = \mathfrak{a}$ ein Ideal von F ist.

Sei k ein über F^* normaler Definitionskörper von $A = A(\mathfrak{a})$ endlichen Grades und sei Y ein Basisdivisor der Polarisierung E_ζ, derart daß

(*i*) für alle $\sigma \in G(k/F^*)$ jedes $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, A^\sigma)$ über k definiert ist,

(*ii*) Y rational über k ist.

Nach Definition des Modulkörpers, der in k enthalten ist, ist $\sigma|_M$, $\sigma \in G(k/F^*)$, genau dann die Identität, wenn die polarisierten Varietäten $(A(\mathfrak{a}), E_\zeta)^\sigma$ und $(A(\mathfrak{a}), E_\zeta)$ isomorph sind. Der Typ der σ-transformierten Varietät ist $(F, \sigma\Phi)$. Da nach Voraussetzung σ auf F^* die Identität ist, ist $\sigma\Phi = \Phi$ nach dem Kriterium (1.3), also sind die Varietäten vom selben Typ.

Definition 4.2.1. *Sei (A, E) eine prinzipale CM-Varietät mit F-Multiplikation und $\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal von F. Ein surjektiver Homomorphismus $\lambda : A \to B$ heißt* $\mathfrak{b}$-Multiplikation*, wenn*

(i) zu jedem $b \in \mathfrak{b}$ ein $\mu_b \in F$ existiert, so daß $\mu_b \circ \lambda = b$ gilt, und wenn

(ii) zu jedem weiteren Homomorphismus $\lambda' : A \to C$, der (i) genügt, ein Homomorphismus $\alpha' : C \to B$ existiert, so daß $\alpha \circ \lambda' = \lambda$.

Eine $\mathfrak{b}$-Transformierte *ist das Bild einer $\mathfrak{b}$-Multiplikation.*[2]

Zwei prinzipale abelsche Varietäten von einem Typ lassen sich stets durch Idealmultiplikationen ineinander transformieren. Ist B eine $\mathfrak{b}$-Transformierte von $A(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a})$, dann ist B isomorph zu $\mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$. Als unpolarisierte Varietäten sind $A(\mathfrak{a})$ und $A(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$ genau dann isomorph, wenn $\mathfrak{b}$ ein Hauptideal ist, [Lan83], Corollary 2.7.

Angenommen wir hätten schon geklärt, daß M^*/F^* tatsächlich eine unverzweigte abelsche Erweiterung ist. Sei H_0 der Kern der Artin-Abbildung und sei $\sigma|_{M^*} = (\mathfrak{p}, M^*/F^*)$ der Frobeniusautomorphismus zum unverzweigten Primideal $\mathfrak{p}$ von F^*. Weiter habe $A(\mathfrak{a})$ gute Reduktion bei $\mathfrak{P}$ für jedes über $\mathfrak{p}$ liegende Primideal $\mathfrak{P}$ von k. s sei das Idel, das σ induziert. M^* ist der Klassenkörper über F^* zu H_0, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in H_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{p} \text{ ist voll zerlegt in } M^*/F^* \\ &\Longleftrightarrow \quad \sigma|_{M^*} = id|_{M^*} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A(\mathfrak{a}), [E]) \cong (A(\mathfrak{a}), [E])^\sigma. \end{aligned}$$

[2]Den Beweis der Äquivalenz dieser Definition der Idealmultiplikation bzw. Idealtransformierten zur ursprünglich von Shimura und Taniyama, [ST61], II.7, gegebenen findet man in [Mil06], II.7, Remark 7.21.

Die σ-Transformation entspricht einer $N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})$-Multiplikation, die Riemannform E_ζ geht dabei in $E_{\zeta'}$, $\zeta' = N(s)\zeta$ über, $N(s)$ die Absolutnorm des Idels s, also

$$A(\mathfrak{a})^\sigma \cong A(\mathfrak{a}N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})^{-1}) \text{ und } E^{(\mathfrak{p},M^*/F^*)} = N(s)^{-1}E. \tag{4.3}$$

Da zwei Polarisierungen äquivalent sind, wenn sie sich um eine positive rationale Zahl unterscheiden, und da $N(s) = N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})\overline{N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})}$, führt (4.3) zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in H_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A(\mathfrak{a}) \cong A(\mathfrak{a}N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})^{-1}),\ N(s) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})^{-1} = (\mu) \in P_F,\ N(\mathfrak{p})^{-1} = \mu\bar{\mu}. \end{aligned}$$

Ebenso rudimentär argumentieren wir für die Klassenkörpereigenschaft wie die Unverzweigtheit der Erweiterung M^*/F^*. Die zu $A = \mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a})$ duale Varietät ist von der Gestalt $A^\vee = \mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a}^\vee)$ mit

$$\mathfrak{a}^\vee = \{\beta \in F : \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\beta\bar{a}a) \subset \mathbb{Z}\} = (\partial_{F/\mathbb{Q}}\bar{\mathfrak{a}})^{-1},$$

$\partial_{F/\mathbb{Q}}$ die Differente von $F/\mathbb{Q}$. Korrespondiert ζ zur Riemannfom E_ζ, dann repräsentiert $D_\Phi(\zeta)$ die E_ζ entsprechende Isogenie $\phi_\zeta : A \to A^\vee$ und ist eine $\zeta\partial_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}$-Multiplikation. Das Ideal $\zeta\partial_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}$ läßt sich in der Gestalt $\mathfrak{f}_0\mathcal{O}_F$ mit einem Ideal $\mathfrak{f}_0$ von F schreiben, und wir bezeichnen in diesem Fall $(F, \Phi; \mathfrak{f}_0)$ als (erweiterten) Typ der polarisierten Varietät. Definiert ζ' eine weitere Polarisierung auf A vom selben Typ, so ist $\zeta^{-1}\zeta'$ zwingend ein total positives Element von F^+. Sei nun $\lambda : A \to B$ eine $\mathfrak{c}$-Multiplikation und seien ϕ_A bzw. ϕ_B die durch die Riemannformen definierten Isogenien. Dann ist $\phi_A^{-1}\lambda^\vee\phi_B\lambda$ ein Element von $\mathrm{End}^0(A)$ und somit von der Gestalt $D_\Phi(f(\lambda))$ mit einem $f(\lambda) \in F$. Sind die polarisierten Varietäten vom selben Typ $(F, \Phi; \mathfrak{f}_0)$, dann ist $\lambda^\vee : B^\vee \to A^\vee$ eine $\bar{\mathfrak{c}}$-Multiplikation und $D_\Phi(f(\lambda))$ repräsentiert die $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}}$-Multiplikation $\phi_A^{-1}\lambda^\vee\phi_B\lambda \in \mathrm{End}^0(A)$. Folglich ist $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}} = (f(\lambda))$ ein von einem total positiven Element $f(\lambda)$ von F^+ erzeugtes Hauptideal. Jedes Tripel $((A, \zeta_A), (B, \zeta_B), \lambda)$ bestehend aus zwei polarisierten abelschen Varietäten eines fixierten Typs $(F, \Phi; \mathfrak{f}_0)$ und einer Idealmultiplikation $\lambda : A \to B$ bestimmt also ein Paar $(\mathfrak{c}, \alpha)$ mit $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}} = (\alpha)$ und $\alpha \in F^+$ total positiv. Auf der Menge solcher Paare definieren wir folgende Äquivalenzrelation:

$$(\mathfrak{a}, \alpha) \sim (\mathfrak{b}, \beta) \iff \exists\ \mu \in F : \mathfrak{a}\mu = \mathfrak{b},\ \alpha\mu\bar{\mu} = \beta.$$

Komponentenweise definierte Multiplikation auf den Repräsentanten macht die Menge

$$\mathcal{C}(F) = \{(\mathfrak{a}, \alpha) : \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = (\alpha), \alpha \in F^+ \text{ total positiv}\}/\sim$$

der Äquivalenzklassen $[(\mathfrak{a}, \alpha)]$ zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element $[(\mathcal{O}_F, 1)]$. Die Klasse, die vom Tripel $((A, \zeta_A), (B, \zeta_B), \lambda)$ bestimmt wird, hängt nun nicht mehr von der Wahl von λ ab. Ist $\sigma \in G(k/F^*)$, so ist mit (A, E) auch $(A, E)^\sigma$ vom Typ $(F, \Phi; \mathfrak{f}_0)$ und bestimmt daher ein (eindeutiges) Element $[\sigma] \in \mathcal{C}(F)$. Die Zuordnung $\sigma \mapsto [\sigma]$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern

$U = \{\sigma : (A, E) \cong (A, E)^\sigma\}$. Der Modulkörper M^* ist also der Fixkörper k^U und wegen der Injektivität von

$$G(M^*/F^*) \cong G(k/F^*)/U \hookrightarrow \mathcal{C}(F)$$

ein über F^* abelscher Körper.
Sei nun S diejenige (endliche) Menge von Primidealen von F^*, die ein Primideal $\mathfrak{p}$ genau dann enthält, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

(i) über $\mathfrak{p}$ liegt eine Stelle $\mathfrak{P}$ von k, bei der A schlechte Reduktion hat,

(ii) $\mathfrak{p}$ verzweigt in M^*/F^*.

Definiere den Modulus $\mathfrak{m} := \prod_{\mathfrak{q} \in S} \mathfrak{q}$. Sei jetzt $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{m}$ teilerfremdes Primideal. Shimura und Taniyama zeigen durch Betrachtung des $N(\mathfrak{p})$-Frobeniushomomorphismus $\pi : A \bmod \mathfrak{P} \to A^{(\mathfrak{p}, M^*/F^*)} \bmod \mathfrak{P} = (A \bmod \mathfrak{P})^{N(\mathfrak{p})}$ der modulo $\mathfrak{P}$ reduzierten Varietäten, daß $A^{(\mathfrak{p}, M^*/F^*)}$ eine $N_{\Phi^*}(\mathfrak{p})$-Multiplikation λ mit $f(\lambda) = N(\mathfrak{p})$ ist. M.a.W. bestimmen (A, E) und $(\mathfrak{p}, M^*/F^*)$ ein Paar $(N_{\Phi^*}(\mathfrak{p}), N(\mathfrak{p}))$, dessen Klasse in $\mathcal{C}(F)$ liegt. Durch multiplikative Fortsetzung erhalten wir einen Homomorphismus

$$I(\mathfrak{m}) \to G(M^*/F^*) \to \mathcal{C}(F).$$

Setze

$$H_0 := \{\mathfrak{a} \in I_{F^*} : \ N_{\Phi^*} = (\mu),\ N(\mathfrak{a}) = \mu\bar{\mu} \text{ für ein } \mu \in F\}.$$

H_0 umfaßt die Hauptideale von F^* und der Kern der Abbildung $I(\mathfrak{m}) \to \mathcal{C}(F)$ - der aufgrund der Injektivität von $G(M^*/F^*) \to \mathcal{C}(F)$ mit dem Kern der Artin-Abbildung übereinstimmt - ist genau $H_0 \cap I(\mathfrak{m})$. Daher ist die M^*/F^* der unverzweigte Klassenkörper zu H_0.

Satz 4.2.2 ([ST61], IV, 15.3, Main Theorem 1)**.** *Das Kompositum $M^* = MF^*$ des Modulkörpers und des Reflexkörpers einer polarisierten CM-Varietät (A, E) vom primitiven CM-Typ (F, Φ) mit $\mathcal{O}_F$-Multiplikation ist der unverzweigte Klassenkörper über F^* zu*

$$H_0 := \{\mathfrak{a} \in I_{F^*} \mid \textit{es ex. } \mu \in F : \prod_{\psi \in \Phi^*} \mathfrak{a}^\psi = (\mu),\ N(\mathfrak{a}) = \mu\bar{\mu}\}.$$

Dabei ist (F^*, Φ^*) der Reflextyp zu (F, Φ).

4.3 Shimuraklassenkörper

Wir setzen in diesem Abschnitt stets $F/\mathbb{Q}$ als normal voraus und wählen einen Ballpunkt τ so, daß $F = \mathrm{End}^0(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$.[3] Um zu gewährleisten, daß die Erweiterung M/F, $M := M^* := F(j(\tau))$ der Shimuraklassenkörper zu F, nicht verzweigt, fordern wir zusätzlich, daß die Jacobi-Varietät $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau)$ *prinzipal* ist, d.h.

[3] $\widetilde{C}_\tau \in \mathcal{P}$ oder $\widetilde{C}_\tau \in \mathcal{F}$, je nachdem, ob F die Eisentsein- oder die Gaußzahlen enthält.

daß der Endomorphismenring isomorph zum Ring $\mathcal{O}_F$ der ganzen Zahlen ist. Da $\mathrm{End}(\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau))$ eine Ordnung in F definiert, ist die Varietät genau dann *prinzipal*, wenn ein Ideal $\mathfrak{a}$ von F existiert, so daß $\mathrm{Jac}(\widetilde{C}_\tau)$ zu $\mathbb{C}^3/\Phi(\mathfrak{a})$ isomorph ist. Nach obigem Satz und den angenommenen Prämissen ist M derjenige Unterkörper des Hilbertklassenkörpers H_F, der zur Idealgruppe H_0 korrespondiert.

Die Galoisgruppe von F über $\mathbb{Q}$ operiert auf der Idealklassengruppe von F und auf der Galoisgruppe der Erweiterung H_F/F.[4] Es ist evident, daß wir aus der Kenntnis der Operation der Galoisgruppe Eigenschaften der Reflextypennorm, die wir als Endomorphismus der Klassengruppe auffassen, gewinnen und damit Aussagen über H_0 und schlußendlich den Modulkörper treffen können. Insbesondere werden wir feststellen, daß die Wirkung der komplexen Konjugation eine zentrale Rolle einnimmt. Die folgende Proposition 4.3.1 bringt für Erweiterungen mit absolut abelschem Hilbertklassenkörper den Shimuraklassenkörper mit dem Geschlechterkörper zusammen.

Als direktes Produkt der Gruppen $G(K/\mathbb{Q})$ und $G(F^+/\mathbb{Q})$ ist

$$G(F/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_3 =< \rho > \times < \tau >$$

mit Galoisautomorphismen ρ, τ der Ordnung $\mathrm{ord}(\rho) = 2$ bzw. $\mathrm{ord}(\tau) = 3$. Die Operation von $G(F/\mathbb{Q})$ auf Cl_F und somit auf $G(H_F/F) \cong \mathrm{Cl}_F$ induziert einen Homomorphismus $G(F/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F)$. Mit $A = G(H_F/F)$, $E = G(H_F/\mathbb{Q})$ und $G = G(F/\mathbb{Q})$ ist

$$1 \to A \to E \to G \to 1$$

eine Gruppenerweiterung der zyklischen Faktorgruppe G, somit ist E genau dann kommutativ, wenn G trivial auf A operiert. Aus dieser gruppentheoretischen Tatsache ergibt sich die folgende Äquivalenz.

Proposition 4.3.1. *$G(H_F/\mathbb{Q})$ ist genau dann abelsch, wenn $G(F/\mathbb{Q})$ trivial auf $G(H_F/F)$ operiert.*

Der *Geschlechterkörper (im engeren Sinn)* G_F zu F ist der maximale über allen (endlichen) Stellen von F unverzweigte und über $\mathbb{Q}$ abelsche Erweiterungskörper von F. Da F total komplex ist, ist der Geschlechterkörper im engeren Sinn auch über den unendlichen Stellen unverzweigt, also gleich dem Geschlechterkörper und ein Unterkörper des Hilbertklassenkörpers. Wir erhalten folgendes Korollar zur Proposition 4.3.1.

Korollar 4.3.2. *Geschlechterkörper und Hilbertklassenkörper eines sextischen zyklischen CM-Körpers stimmen genau dann überein, wenn die Galoisgruppe trivial auf der Klassengruppe operiert.*

[4] Die Artinabbildung ist $G(F/\mathbb{Q})$-äquivariant.

Beispiel 4.3.3. Wir kommen auf das in 3.1.2, (*iii*), behandelte Beispiel zurück. Wir zeigen, daß in diesem Fall die oben in (*ii*) erwähnte Gruppe H_0 die Gruppe der Hauptideale von F ist. Der Modulkörper ist folglich gleich dem Hilbertklassenkörper. Bevor wir uns diesem Beispiel genauer zuwenden, schicken wir einige Überlegungen zur Berechnung von Klassenzahlen zyklischer sextischer CM-Körper voraus.

Sei also $F = F^+K$, $K = \mathbb{Q}(i)$, ein zyklischer sextischer CM-Körper mit Führer f, der somit im Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_f)$, ζ_f eine primitive f-te Einheitswurzel, enthalten ist. Wir identifizieren die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$ mit $G(\mathbb{Q}(\zeta_f)/\mathbb{Q})$ mittels $k + f\mathbb{Z} \mapsto (\sigma_k : \zeta_f \mapsto \zeta_f^k)$. Zu F korrespondiert eine Gruppe X von Dirichletcharakteren, d.h. F ist Fixkörper des Durchschnitts der Kerne der $\chi \in X$:

$$F = \mathbb{Q}(\zeta_f)^{\cap_{\chi\in X} \ker(\chi)}.$$

Nach unseren Voraussetzungen ist $X =< \chi >$ zyklisch der Ordnung 6 und der Erzeuger χ von der Form $\chi = \chi_2\chi_3$ mit dem ungeraden Charakter χ_2 vom Führer $f_2 = 4$ und einem geraden Charakter χ_3 der Ordnung 3. Für die relative Klassenzahl $h_F^- := h_F/h_{F^+}$ eines CM-Körpers gilt nach [Was97], Theorem 4.17,

$$h_F^- = Qw_F \prod_{\psi\in X \text{ ungerade}} (-\frac{1}{2}B_{1,\psi}),$$

wobei w_F die Anzahl der Einheitswurzeln in F, $Q = (\mathcal{O}_F^* : w_F\mathcal{O}_{F^+}^*)$ und

$$B_{1,\psi} := \frac{1}{f_\psi} \sum_{x=1}^{f_\psi-1} x\psi(x)$$

die verallgemeinerte Bernoullizahl (vom Grad 1 zum Charakter ψ) bezeichnet. Die ungeraden Charaktere in X sind

$$\chi_2,\ \chi = \chi_2\chi_3,\ \bar{\chi} = \chi_2\chi_3^2.$$

Nach [Has85], Satz 24, ist in unserem Fall $Q = 1$. Mit $\tau(\chi) := \frac{1}{2}B_{1,\chi}$ ist $\overline{\tau(\chi)} = \frac{1}{2}B_{1,\bar{\chi}}$ und wegen $w_F = 4$ folgt (vgl. [Lou98], Gleichung (1))

$$\begin{aligned} h_F^- &= w_F \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{f_2}\sum_{x=1}^{f_2-1} x\chi(x)\right)\left(-\frac{1}{2}B_{1,\chi}\right)\left(-\frac{1}{2}B_{1,\bar{\chi}}\right) \\ &= 4\left(-\frac{1}{2\cdot 4}(1\cdot 1 + 3\cdot(-1))\right)\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)} \\ &= |\tau(\chi)|^2. \end{aligned}$$

Sei nun $F^+ = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit einer Nullstelle α von $f(X) = X^3 - 13X + 13$, $F = F^+(i)$. $F/\mathbb{Q}$ ist galoissch, also $F = F^*$. Die Diskriminanten sind $\Delta(\mathcal{O}_{F^+}) = 13^2$, $\Delta(\mathcal{O}_F) = -2^6 \cdot 13^4$, und der Führer von F ist $f = 4 \cdot 13 = 52$.

Proposition 4.3.4. *F hat Klassenzahl $h_F = 3$.*

Beweis. F^+ hat Klassenzahl 1 ([Has48]), daher ist die relative Klassenzahl $h_F^- = \frac{h_F}{h_{F^+}} = h_F$ gleich der Klassenzahl von F. Nach der obigen Formel genügt es, die Gaußsche Summe $\tau_\chi = \frac{1}{2\cdot f}\sum_{x=1}^{f-1} x\chi(x)$ zum sextischen Charakter χ zu berechnen. χ ist Produkt eines Charakters modulo 4 und eines kubischen Charakters modulo 13:

$$\chi = \chi_2 \times \chi_3 : (\mathbb{Z}/52\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

wobei $\chi_2 : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, $\chi(-1) = -1$, und $\chi_3 : (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, $\chi_3(-1) = 1$. 2 ist eine Primitivwurzel modulo 13, und somit ist $\chi_3(2) = \exp(\pm 2\pi i/3)$. Unter Verwendung der Indextafel

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^k	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

ergibt sich $\chi_3(k) = 1$, $k = 1, 5, 8, 12$, $\chi_3(k) = \chi_3(2)$, $k = 2, 3, 10, 11$ und $\chi_3(k) = \chi_3(2)^2$ für $k = 4, 6, 7, 9$. Mit $\chi_2(4n+1) = 1, \chi_2(4n+3) = -1$, berechnet sich die Gaußsche Summe zu

$$\tau_\chi = \frac{1}{104}\sum_{x=1}^{51} x\chi_2(x)\chi_3(x) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Folglich ist $h_F = |\tau_\chi|^2 = 3$. □

Da die Klassenzahl von F gleich 3 ist, ist $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, also $\mathrm{ord}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F)}(\tau) = 1$. τ wirkt daher trivial auf Cl_F. Sei nun $\Phi^* = \{\psi_1, \psi_2, \rho\circ\psi_3\}$ mit $\psi_k|_{\mathbb{Q}(i)} = id_{\mathbb{Q}(i)}$. Für die Reflextypennorm gilt $N_{\Phi^*}((\mathfrak{a})) = (\mathfrak{a})^2(\bar{\mathfrak{a}})$. Wir zeigen:

- $G(H_F/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Der Geschlechterkörper G_F ist ein Unterkörper des Hilbertklassenkörpers. Andererseits ist G_F ein Unterkörper des zyklotomischen Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\chi})$, $f_\chi = 52$. Angenommen der Hilbertklassenkörper wäre abelsch über $\mathbb{Q}$. Dann wäre $H_F = G_F$ ein Unterkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{52})$ und folglich müsste $[H_F : \mathbb{Q}] = h_F \cdot 6 = 18$ den Grad $[\mathbb{Q}(\zeta_{52}) : \mathbb{Q}] = 24$ teilen. Widerspruch! □

Nach Proposition 4.3.1 wirkt also ρ nichttrivial, d.h. es gilt $(\mathfrak{a})^\rho = (\mathfrak{a})^2$ für alle $(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Cl}_F$. Somit ist $N_{\Phi^*}((\mathfrak{a})) = (\mathfrak{a})$, d.h. die Reflextypennorm ist nur dann ein Hauptideal, wenn das Ideal schon eines ist. Daher ist $H_0 = P_F$, also Hilbert- gleich Shimuraklassenkörper.

Zurück zum allgemeinen Fall. Die Aktion $\sigma : (\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{a})^\sigma$ der Galoisgruppe $G := G(F/\mathbb{Q})$ von F macht Cl_F durch

$$\mathbb{Z}[G] \times \mathrm{Cl}_F \to \mathrm{Cl}_F, \ \left(\sum m_\sigma \sigma, (\mathfrak{a})\right) \mapsto \prod_\sigma (\mathfrak{a})^{\sigma^{m_\sigma}},$$

zu einem G-Modul, d.h. zu einem Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$. Wir setzen

$$H_0' := \{\mathfrak{a} \mid \exists \mu \in F: \ N_{\Phi^*}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{\psi_1+\psi_2+\psi_3} = (\mu)\}.$$

Um die Gruppe H_0' zu bestimmen, genügt es, das Bild

$$N_{\Phi^*}: \mathrm{Cl}_F \to \mathrm{Cl}_F, \ (\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{a})^{\psi_1+\psi_2+\psi_3},$$

der Reflextypennorm unter dem Homomorphismus $\mathbb{Z}[G] \to \mathrm{End}(\mathrm{Cl}_F)$ zu kennen. So ist beispielsweise $H_0' = P_F$, wenn das Bild der Reflextypennorm in der Automorphismengruppe liegt, und es ist $H_0' = I_F$, wenn $N_{\Phi^*}((\mathfrak{a})) = (\mathcal{O}_F)$ für alle Idealklassen $(\mathfrak{a})$. Hieraus folgt wegen $P_F < H_0 < H_0'$ unmittelbar

Lemma 4.3.5. *Der Shimuraklassenkörper ist gleich dem Hilbertklassenkörper, wenn N_{Φ^*} einen Automorphismus von Cl_F definiert.*

Wir bestimmen die Gruppe H_0' und damit - im Vorgriff auf Satz 4.3.12, dessen Beweis wir unten nachreichen werden - ebenfalls H_0 für einige Fälle genauer.

Lemma 4.3.6. *Stimmen Geschlechter- und Hilbertklassenkörper überein, dann auch Grundkörper und Shimuraklassenkörper.*

Beweis. Die Operation der Galoisgruppe von $F/\mathbb{Q}$ ist im Fall $G_F = H_F$ nach Korollar 4.3.2 trivial, damit ist also $N_{\Phi^*}((\mathfrak{a})) = (\mathfrak{a})^3$. Die Klassenzahl von F ist eine reine Potenz von 3, denn [Lou98], Proposition 4, besagt in unserer Situation,[5]

$$g_F = h_F = 3^{s-1},$$

daher ist N_{Φ^*} kein Automorphismus sowie $H_0 = H_0'$ nach Satz 4.3.12. Nach [Lou98], Table 1, gibt es nur endlich viele zyklische CM-Körper vom Grad 6, deren Geschlechterkörper mit dem Hilbertklassenkörper zusammenfällt, und diese haben Klassenzahl ≤ 6. Ist F eine kubische Erweiterung von $K = \mathbb{Q}(i)$ oder $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, dann tritt der Fall $G_F = H_F$ nur für Körper mit Klassenzahl 1 (insgesamt 6 Körper) bzw. Klassenzahl 3 (3 Erweiterungen von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$) auf. In diesen Fällen ist $N_{\Phi^*}((\mathfrak{a})) = (\mathfrak{a})^3 = (\mathcal{O}_F)$, und somit ist $H_0/P_F = H_0'/P_F = \mathrm{Cl}_F$. □

Bleibt die Situation $H_F \neq G_F$ zu untersuchen. Die drei $(2,1)$-(Reflex-)CM-Typen auf F, sind $\Phi_k^* = \{\tau^i, \tau^j, \rho \circ \tau^k\}$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Ihre Typennormen identifizieren wir mit $N_{\Phi_k^*} = \tau^i + \tau^j + \rho \circ \tau^k := \Phi^* \in \mathbb{Z}[G]$. Das Bild von $\sigma \in \mathbb{Z}[G]$ in $\mathrm{End}(\mathrm{Cl}_F)$ bezeichnen wir mit n_σ.

[5] Ist $G_F = H_F$, $F = F^+\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein sextischer zyklischer CM-Körper und wie oben $F = \mathbb{Q}(\zeta_f)^{\ker \chi}$ mit einem Dirichletcharakter χ vom Führer f, dann ist $\chi = \chi_2\chi_3$ mit Charakteren χ_2 vom Führer f_2 und χ_3 vom Führer f_3, und es gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) = \mathbb{Q}(\zeta_f)^{\ker \chi_2}$, $F^+ = \mathbb{Q}(\zeta_f)^{\ker \chi_3}$. Für $d = 1, 3$ besagt [Lou98], Proposition 4, daß der Geschlechterkörper Absolutgrad $g_F = 2^0 3^{s-1} = 3^{s-1}$ hat.

Lemma 4.3.7. *Sei $H_F \neq G_F$. Falls ρ trivial operiert, ist H_0'/P_F echt in der Klassengruppe enthalten. Ist Cl_F zusätzlich zyklisch, dann ist ihre Ordnung h_F durch 9 teilbar, oder h_F besitzt einen Primteiler $p \equiv 1 \bmod 3$.*

Beweis. Sei $n_\rho = 1$. Nach Korollar 4.3.2 ist $n_\tau \neq 1$ und hat demnach Ordnung 3 in $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F)$. Wegen

$$n_{\Phi^*}(n_\tau - 1) = (1 + n_\tau + n_\tau^2)(n_\tau - 1) = 0$$

ist n_{Φ^*} entweder $= 0$ oder ein Nullteiler, in jedem Fall kein Automorphismus und die erste Aussage bewiesen. Sei nun zusätzlich $\mathrm{Cl}_F \cong C_h$ zyklisch, also $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F) \cong C_h^*$. Genau dann ist 3 ein Teiler von $\varphi(h) = |C_h^*|$, wenn h durch 9 teilbar ist, oder wenn h einen Primteiler p mit $3 \mid p-1$ besitzt. □

Wirkt ρ durch Inversenbildung und τ als Identität, dann ist $n_{\Phi^*} = 1+1-1 = 1$ eine Einheit, daher gilt der folgende Hilfssatz.

Lemma 4.3.8. *Ist $n_\rho = -1$ und $n_\tau = 1$, dann ist $M_F = H_F$.*

Ist $n_\rho = -1$, $n_\tau \neq 1$ und $n_\tau + n_\tau^2 + 1$ kein Nullteiler, folgt

$$n_{\Phi_k^*} = n_{\tau^i} + n_{\tau^j} + n_\rho n_{\tau^k} = n_\tau^k(n_\tau^{i-k} + n_\tau^{j-k} - 1) = -2n_\tau^k.$$

In diesem Fall ist genau dann $n_{\Phi^*} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F)$, wenn die Klassenzahl ungerade ist (somit ist $H_F = M_F$). Offen bleibt der Fall, daß n_ρ Ordnung 2 hat, aber nicht durch Inversenbildung operiert, der aber für zyklische Gruppen von Primzahlpotenzordnung p^k, $p \neq 2$, nicht eintreten kann.[6] Zusammenfassend erhalten wir für zyklische Klassengruppen von Primzahlpotenzordnung die

Proposition 4.3.9. *Ist die Klassengruppe von F zyklisch der Ordnung $h = p^k$, $p \neq 2, 3$, $p \not\equiv 1 \bmod 3$, dann ist der Shimuraklassenkörper gleich dem Hilbertklassenkörper. Die Aussage gilt ebenfalls für Klassenzahl 3 und $\mathbb{Q}(i) \subset F$.*

Beweis. Das einzige Element der Ordnung 2 in $C_{p^k}^*$, $p \neq 2$, ist -1, also ist $n_\rho = \pm 1$. Der Fall $n_\rho = n_\tau = 1$ tritt nicht ein (Lemma 4.3.6), da $3 \nmid p^k$. $n_\tau \neq 1$ kann nicht gelten, da wir zusätzlich $p \not\equiv 1 \bmod 3$ gefordert haben. Die Behauptung folgt mit Lemma 4.3.8. Ist $h = 3$ und $\mathbb{Q}(i) \subset F$, dann ist $H_F \neq G_F$ ([Lou98], Table 1) und es folgt wieder $n_\rho = -1$, $n_\tau = 1$, d.h. N_{Φ^*} ist ein Automorphismus. □

Bei obigen Untersuchungen fällt auf, daß die Operation der Konjugation auf der Klassengruppe eine tragende Rolle einnimmt. In unserer Situation induziert ein Resultat der klassischen Klassenkörpertheorie (Satz 4.3.10 unten), das wir

[6] Hat a Ordnung 2 in $C_{p^k}^*$, dann ist $a^2 = 1 + mp^k$, folglich ist $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ durch p^k teilbar. p teilt nicht zugleich $a-1$ und $a+1$, daher teilt p^k entweder $a-1$ oder $a+1$ und somit ist $a \equiv \pm 1 \mod p^k$.

bei Chevalley, [Che33], p. 402-406, finden, daß die Faktorgruppe der Ideale konjugationsinvarianter Klassen nach Klassen unter Konjugation invarianter Ideale eine Gruppe vom Exponenten ≤ 2 ist. Für ungerade Klassenzahlen können wir hieraus folgern, daß die H_0 von H_0' unterscheidende Normbedingung $N(\mathfrak{a}) = \mu\bar{\mu}$ schon aus $N_{\Phi^*}(\mathfrak{a}) = (\mu)$ folgt (Satz 4.3.12).

Sei F/k eine zyklische Erweiterung von Zahlkörpern vom Grad n und ρ ein erzeugendes Element der Galoisgruppe $G(F/k)$. Mit

$$I(F/k) := \{\mathfrak{a} \in I_F : \mathfrak{a}^{1-\rho} \in P_F\}$$

bezeichnen wir die Menge der ambigen Ideale,

$$I_0(F/k) := \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^{1-\rho} = (1)\}$$

sei der Kern des Homomorphismus $1-\rho : I_F \to I_F$, $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{1-\rho}$. Für eine Untergruppe U von I_F bzw. F^* sei $U^{1-\rho} = \{x^{1-\rho} : x \in U\}$ das Bild.[7] Der Kern der Abbildung $I(F/F^+) \to I(F/k)^{1-\rho}/P_F^{1-\rho}$ ist $I_0(F/k)P_F$, also ist

$$I(F/k)/I_0(F/k)P_F \cong I(F/k)^{1-\rho}/P_F^{1-\rho}.$$

$I(F/k)^{1-\rho}$ ist eine Untergruppe der Hauptideale von F. Wir setzen

$$\Theta := \{\alpha \in F : \exists\ \mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{a}^{1-\rho} = (\alpha)\}.$$

Damit folgt

$$I(F/k)^{1-\rho}/P_F^{1-\rho} \cong \Theta/{F^*}^{1-\rho}U_F$$

Nach Satz 90 von Hilbert sind die Elemente von ${F^*}^{1-\rho}$ genau diejenigen mit Relativnorm $N_{F/k}(\alpha) = 1$. Die Norm induziert somit die Isomorphie

$$\Theta/{F^*}^{1-\rho}U_F \cong N_{F/k}(\Theta)/N_{F/k}(U_F).$$

Die Relativnorm von jedem $\alpha \in \Theta$ ist wegen $N_{F/k}((\alpha)) = N_{F/k}(\mathfrak{a}^{1-\rho}) = (1)$ eine Einheit von k. Insgesamt ist daher $I(F/k)/I_0(F/k)P_F$ isomorph zu Untergruppe $N_{F/k}(\Theta)/N_{F/k}(U_F)$ von $U_k \cap N_{F/k}(F)/N_{F/k}(U_F)$. Ist andererseits $\varepsilon \in U_k$ Norm eines $\alpha \in F$, so hat das von α erzeugte Hauptideal Norm (1). Wir setzen

$$\mathfrak{c}_0 := (1),\ \mathfrak{c}_k := (\alpha)^{1+\ldots+\rho^{k-1}} \text{ für } k = 1, \ldots, n-1 \text{ und } \mathfrak{b} := \sum_{j=0}^{n-1} \mathfrak{c}_j.$$

Dann ist (vgl. z.B. Beweis von Satz 1 in [Deu68], VII, §7) $(\alpha)\mathfrak{b}^\rho = \mathfrak{b}$, also $U_k \cap N_{F/k}(F) \subset N(\Theta)$ und schließlich

Satz 4.3.10 (siehe [Che33], p. 404, vgl. auch [Shm77], Proposition A.1)**.**

$$I(F/k)/I_0(F/k)P_F \cong U_k \cap N_{F/k}(F)/N_{F/k}(U_F).$$

[7] Hier bezeichnet F^* natürlich nicht den Reflexkörper, sondern steht für $F\backslash\{0\}$.

Bemerkung 4.3.11. *Für zyklische Erweiterungen und jedes Ideal der Relativnorm* (1) *definiert* $c_{\mathfrak{a}} : G := G(F/k) \to I_F$, $c_{\mathfrak{a}}(\sigma^l) := \mathfrak{a}^{1+\sigma+\ldots+\sigma^{l-1}}$, *einen 1-Kozykel und die Zuordnung* $\mathfrak{a} \mapsto c_{\mathfrak{a}}$ *einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen* $H^{-1}(G, I_F)$ *und* $H^1(G, I_F)$, *vgl. z.B. [Neu69], Teil I, (6.1) Satz. Die letztere Gruppe ist nach der Noetherschen Variante des Hilbertschen Satz 90 trivial, siehe z.B. [Deu68], VII, §7, Satz 1, S.127. Die Konstruktion des 1-Korands zu einem vorgegebenen 1-Kozykel entspricht genau der oben angegebenen Konstruktion des ambigen Ideals* $\mathfrak{b}$ *zum Hauptideal* (α).

In unserem Fall ist $k = F^+$ und F/F^+ eine (zyklische) Erweiterung vom Grad 2, erzeugt durch die Konjugation ρ.

Satz 4.3.12. *Ist die Klassenzahl von* F *ungerade, dann ist* $H_0' = H_0$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \in H_0'$ ein ganzes Ideal mit Reflextypennorm $N_{\Phi^*}(\mathfrak{a}) = (\mu)$. Aus

$$\begin{aligned} N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})\mathcal{O}_F &= (N_{F/\mathbb{Q}}(\alpha) : \alpha \in \mathfrak{a})_{\mathcal{O}_F} = (N_{\Phi^*}(\alpha)\overline{N_{\Phi^*}(\alpha)} : \alpha \in \mathfrak{a})_{\mathcal{O}_F} \\ &= N_{\Phi^*}(\mathfrak{a}) \cdot \overline{N_{\Phi^*}(\mathfrak{a})} = (\mu\bar{\mu})\mathcal{O}_F \end{aligned}$$

folgt

$$N(\mathfrak{a})\mathbb{Z} = N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = (\mu\bar{\mu})\mathbb{Z} \text{ und } N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})\mathcal{O}_F = (\mu\bar{\mu})\mathcal{O}_F,$$

d.h. es gibt $\varepsilon \in U_{F^+}$, so daß $\varepsilon = N(\mathfrak{a})/\mu\bar{\mu}$. Die Einheit ε ist total positiv, denn ist $\tilde{\sigma}$ eine Fortsetzung von $\sigma \in G(F^+/\mathbb{Q})$ auf F, dann

$$\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sigma(N(\mathfrak{a}))(\tilde{\sigma}(\mu)\tilde{\sigma}(\bar{\mu}))^{-1} \underset{\text{F CM}}{=} \sigma(N(\mathfrak{a}))(\tilde{\sigma}(\mu)\overline{\tilde{\sigma}(\mu)})^{-1} > 0.$$

Es bleibt zu zeigen, daß ε Norm einer Einheit ist. Falls nämlich $\varepsilon = \eta\bar{\eta}, \eta \in U_F$, gilt, haben wir

$$N_{\Phi^*}(\mathfrak{a}) = (\eta\mu) \text{ und } N(\mathfrak{a}) = \eta\mu \cdot \overline{\eta\mu}.$$

Schritt 1. ε liegt im Bild der Norm $N_{F/F^+} : F \to F^+$.
Nach Voraussetzung ist $N(\mathfrak{a}) = \varepsilon\mu\bar{\mu}$ und $N_{F^+/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$. Daraus folgt

$$N(\mathfrak{a})^3 = N_{F^+/\mathbb{Q}}(N(\mathfrak{a})) = N_{F^+/\mathbb{Q}}(\varepsilon\mu\bar{\mu}) = N_{F^+/\mathbb{Q}}(\mu\bar{\mu}) = \mu\mu^{\tilde{\sigma}}\mu^{\tilde{\sigma}^2}\bar{\mu}\bar{\mu}^{\tilde{\sigma}}\bar{\mu}^{\tilde{\sigma}^2},$$

weshalb

$$\varepsilon = \frac{N(\mathfrak{a})}{\mu\bar{\mu}} = \frac{\mu^{\tilde{\sigma}}\mu^{\tilde{\sigma}^2}}{N(\mathfrak{a})} \cdot \frac{\bar{\mu}^{\tilde{\sigma}}\bar{\mu}^{\tilde{\sigma}^2}}{N(\mathfrak{a})} = \frac{\mu^{\tilde{\sigma}}\mu^{\tilde{\sigma}^2}}{N(\mathfrak{a})} \cdot \overline{\frac{\mu^{\tilde{\sigma}}\mu^{\tilde{\sigma}^2}}{N(\mathfrak{a})}} = N_{F/F^+}(\eta)$$

mit $\eta := \frac{\mu^{\tilde{\sigma}}\mu^{\tilde{\sigma}^2}}{N(\mathfrak{a})}$.[8]

Schritt 2. ε ist Norm einer Einheit.
Für $\varepsilon \in U_{F^+} \cap N_{F/F^+}(F)$ gilt offenbar $\varepsilon^2 = N_{F/F^+}(\varepsilon) \in N_{F/F^+}(U_F)$. Die Gruppe

[8] η hängt von der Wahl der Fortsetzung ab.

$U_{F^+} \cap N_{F/F^+}(F)/N_{F/F^+}(U_F)$ ist daher vom Exponenten 1 oder 2. Andererseits ist nach Satz 4.3.10 $U_{F^+} \cap N_{F/F^+}(F)/N_{F/F^+}(U_F)$ isomorph zu einer Untergruppe der Klassengruppe Cl_F, der Exponent teilt also die Klassenzahl. Für ungerade Klassenzahl h_F folgt

$$U_{F^+} \cap N_{F/F^+}(F) = N_{F/F^+}(U_F),$$

d.h. ε ist Norm einer Einheit $\eta \in U_F$. □

4.4 Shimuraklassenkörper zu CM-Körpern mit Klassenzahl ≤ 11

Abschließend bestimmen wir die Shimuraklassenkörper zu CM-Körpern mit kleiner Klassenzahl. Wir greifen dabei auf die Liste der imaginär abelschen sextischen Körper der Klassenzahl ≤ 11 zurück, die in [PK97] zu finden ist. Aus dieser Liste und den Überlegungen des vorangegangenen Paragraphen erhalten wir sofort folgende

Proposition 4.4.1. *Sei F ein sextischer normaler CM-Körper mit Klassenzahl $h \leq 11$, der die 4-ten oder die 6-ten Einheitswurzeln enthält. Weiter sei $G(F/F^+) =< \rho >$ und $G(F/\mathbb{Q}) =< \rho > \times < \tau >$ mit einem Galoisautomorphismus τ der Ordnung 3. Dann stimmen Shimura- und Hilbertklassenkörper überein mit folgenden möglichen Ausnahmen:*

(i) *ist $F \supset \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $h = 3$ und $G_F = H_F$, so ist $F = M_F$,*

(ii) *$h = 4$, $\mathrm{Cl}_F \cong C_2 \times C_2$ und τ wirkt nichttrivial,*

(iii) *ist $h = 7$ und wirkt ρ trivial auf Cl_F, dann ist $M_F = F$,*

(iv) *ist $h = 9$, Cl_F zyklisch und wirkt ρ trivial, dann ist $F \neq M_F \neq H_F$,*

(v) *$h = 9$, $\mathrm{Cl}_F \cong C_3 \times C_3$ und ρ wirkt nicht durch Inversenbildung auf Cl_F. In diesem Fall ist $M_F = F$, wenn ρ trivial operiert, und M_F ist ein echter Zwischenkörper (vom Grad 3 über F) der Erweiterung H_F/F in den verbleibenden Fällen.*

Beweis. Als Erweiterungen der Gauß- bzw. Eisensteinzahlen treten die Klassenzahlen 1, 3, 4, 7 und 9 auf, siehe [PK97]. Nach Louboutin [Lou98] ist der Hilbertklassenkörper nur für 3 Erweiterungen der Eisensteinzahlen, die unter (i) fallen, absolut abelsch. Für diese Körper ist $M_F = F$ nach Lemma 4.3.6. Sei nun $H_F/\mathbb{Q}$ nicht abelsch. Proposition 4.3.9 impliziert die Aussage für Klassenzahl 3. Die zyklische Gruppe C_4 besitzt nur die Involution $-1 : C_4 \to C_4$. Da τ als Identität operiert, ist wieder $n_{\Phi^*} = 1$ und die Reflextypennorm ein Automorphismus.

Ist Cl_F also zyklisch der Ordnung 4, dann stimmen Shimuraklassenkörper und Hilbertklassenkörper überein. Sei nun Cl_F isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $C_2 \times C_2$. Die Automorphismengruppe von $C_2 \times C_2$ ist $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$. Operiert $n_\tau = E_2$ als Identität, dann ist $n_{\Phi^*} = n_\rho \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ und daher $M_F = H_F$.[9] Ist die Klassenzahl 7, ist der Fall $n_\rho = 1$ denkbar, da τ nicht notwendig trivial operiert. Hieraus folgt $n_{\Phi^*} = 0$, also $H_0 = H_0' = I_F$[10] und somit $M_F = F$. Bleibt der Fall $h = 9$. Im zyklischen Fall besitzt die Automorphismengruppe C_9^* ein Element der Ordnung 2 und zwei Elemente der Ordnung 3 (4 bzw. 7). Für $n_\rho = 1$ ist $n_{\Phi^*} = 1 + 4 + 7 = 3$, also ist $P_F < H_0 = H_0' < I_F$ eine echte Zwischengruppe. Im Fall $n_\rho = -1$ ist die Reflextypennorm n_{Φ^*} Element von $\{1, 5\}$, also eine Einheit, d.h. $M_F = H_F$. Sei nun $\mathrm{Cl}_F \cong C_3 \times C_3$ und damit $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}_F) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$. Für jedes $\gamma \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ mit $\gamma^3 = E_2$ gilt $\gamma + \gamma^2 = -E_2$, daher ist $n_{\Phi^*} = n_{\tau^i} + n_{\tau^j} + n_{\rho\tau^k} = n_\tau^k(n_\rho - E_2)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Für jedes Element $\gamma \neq -E_2$ der Ordnung 2 in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ hat $\gamma - E_2$ den Rang 1, somit folgt

$$[H_F : M_F] = \begin{cases} 9, & n_\rho = E_2 \\ 1, & n_\rho = -E_2 \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Um die Untersuchung der sextischen CM-Körper mit Klassenzahl kleiner 12 abzuschließen, greifen wir nochmals auf die Park-Kwon-Liste zurück. Aus dem Führer f_+ des total reellen Teilkörpers können wir das Polynom des kubischen Körpers F^+ bestimmen, siehe [Has48], und hieraus das sextische Polynom $g(X)$ mit $F \cong \mathbb{Q}[X]/(g(X))$ berechnen. Die expliziten Rechnungen haben wir mit dem Computerprogramm Kant [Kan05] durchgeführt, mit dessen Hilfe wir in den Fällen $h = 4$ und $h = 9$ ebenfalls den Isomorphietyp der Klassengruppe bestimmt haben. In der nachfolgenden Tabelle bezeichnen f_+ bzw. h_+ den Führer bzw. die Klassenzahl des total reellen kubischen Teilkörpers F^+ von F. Der imaginär quadratische Teilkörper von F sei $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

[9] Hat n_τ Ordnung 3 in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$, so ist $n_{\Phi^*} = n_\tau^k(n_\rho + E_2)$, also $= 0$, wenn n_ρ identisch operiert oder vom Rang 1, wenn ρ durch $(\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{a})^{-1}$ wirkt. Die Gruppe H_0' ist also entweder $= I_F$, oder es ist $P_F \lneq H_0' \lneq I_F$.

[10] Die Elemente der Ordnung 3 in C_7^* sind 2 und 7, daher ist $n_{\Phi^*} = 1 + 2 + 4 = 0$.

$h = 3$

Nr.	f_+	d	h_+	definierendes Polynom
1	13	1	1	$X^6 - 23X^4 + 26X^3 + 172X^2 - 415X + 365$
2	19	3	1	$X^6 + 5X^5 - 33X^3 - 19X^2 + 112X + 151$
3	37	1	1	$X^6 + 2X^5 - 20X^4 + 2X^3 + 171X^2 - 352X + 269$
4	37	3	1	$X^6 + 5X^5 - 12X^4 - 33X^3 + 143X^2 - 170X + 103$
5	61	1	1	$X^6 + 2X^5 - 36X^4 - 54X^3 + 387X^2 + 376X + 541$
6	63	3	3	$X^6 + 3X^5 - 36X^4 - 7X^3 + 489X^2 - 1152X + 883$
7	63	3	3	$X^6 + 3X^5 - 36X^4 - 133X^3 + 300X^2 + 1683X + 1891$
8	73	1	1	$X^6 + 2X^5 - 44X^4 - 98X^3 + 527X^2 + 1412X + 1409$
9	109	3	1	$X^6 + 5X^5 - 60X^4 - 207X^3 + 1076X^2 + 1453X + 1471$
10	117	3	3	$X^6 + 3X^5 - 72X^4 - 97X^3 + 1488X^2 - 621X + 1171$
11	127	3	1	$X^6 + 5X^5 - 72X^4 - 75X^3 + 1928X^2 - 5195X + 4567$

$h = 4$

Nr.	f_+	d	h_+	definierendes Polynom
12	31	1	1	$X^6 + 2X^5 - 16X^4 - 32X^3 + 89X^2 + 190X + 202$
13	43	1	1	$X^6 + 2X^5 - 24X^4 - 8X^3 + 217X^2 - 298X + 274$
14	61	3	1	$X^6 + 5X^5 - 28X^4 - 121X^3 + 251X^2 + 689X + 691$
15	67	3	1	$X^6 + 5X^5 - 32X^4 - 105X^3 + 393X^2 + 180X + 387$

In allen vier Fällen ist $G(F/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$.

$h = 7$

Nr.	f_+	d	h_+	definierendes Polynom
16	67	1	1	$X^6 + 2X^5 - 40X^4 - 30X^3 + 499X^2 - 292X + 545$
17	79	3	1	$X^6 + 5X^5 - 40X^4 - 57X^3 + 741X^2 - 1592X + 1171$
18	151	1	1	$X^6 + 2X^5 - 96X^4 - 342X^3 + 2259X^2 + 12940X + 17977$
19	157	3	1	$X^6 + 5X^5 - 92X^4 - 167X^3 + 2728X^2 - 4215X + 3283$
20	229	3	1	$X^6 + 5X^5 - 140X^4 - 863X^3 + 4276X^2 + 37917X + 67471$
21	457	3	1	$X^6 + 5X^5 - 292X^4 - 1335X^3 + 21108X^2 + 89605X + 105607$

$h = 9$

Nr.	f_+	d	h_+	definierendes Polynom
22	91	1	3	$X^6 - 2X^5 - 56X^4 + 2X^3 + 959X^2 + 1840X + 1637$
23	91	3	3	$X^6 + X^5 - 58X^4 + 69X^3 + 966X^2 - 3199X + 3073$
24	97	1	1	$X^6 + 2X^5 - 60X^4 - 218X^3 + 871X^2 + 5468X + 7489$
25	133	3	3	$X^6 + X^5 - 86X^4 + 41X^3 + 2002X^2 - 3927X + 3241$
26	171	3	3	$X^6 + 3X^5 - 108X^4 - 259X^3 + 3027X^2 + 5418X + 4789$
27	171	3	3	$X^6 + 3X^5 - 108X^4 + 83X^3 + 3540X^2 - 14589X + 17443$
28	193	1	1	$X^6 + 2X^5 - 124X^4 + 162X^3 + 4387X^2 - 19288X + 24389$
29	199	3	1	$X^6 + 5X^5 - 120X^4 - 261X^3 + 4271X^2 - 3746X + 3769$
30	333	3	3	$X^6 + 3X^5 - 216X^4 - 1177X^3 + 10884X^2 + 95463X + 191143$

In allen neun Fällen ist $G(F/\mathbb{Q}) \cong C_3 \times C_3$.

Um in den fraglichen Fällen die Wirkung des Automorphismus ρ auf der Klassengruppe zu bestimmen, haben wir mit dem Computeralgebraprogramm Magma [Mag02] zunächst Repräsentanten $\mathfrak{c} = (\alpha, \gamma)$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathcal{O}_F$, der Erzeugenden der Idealklassengruppe berechnet. Anschließend haben wir $\rho(\gamma)$ berechnet und das konjugierte Ideal $\bar{\mathfrak{c}} = (\alpha, \rho(\gamma))$ gebildet. Um die Wirkung von ρ auf der Idealklassengruppe offen zu legen, haben wir schließlich im Fall

- $\mathrm{Cl}_F \cong C_2 \times C_2$ nachgerechnet, daß für beide Erzeugende $\mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{c}}$ gilt, folglich die komplexe Konjugation als Identität auf der Klassengruppe operiert;
- $\mathrm{Cl}_F \cong C_7$ nachgerechnet, daß für die erzeugende Klasse $(\mathfrak{c})$ das Produkt $\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}$ ein Hauptideal ist, die komplexe Konjugation somit durch $(\mathfrak{a}) \mapsto \overline{(\mathfrak{a})} = (\mathfrak{a})^{-1}$ operiert;
- $\mathrm{Cl}_F \cong C_3 \times C_3$ überprüft, ob für beide Repräsentanten der erzeugenden Idealklassen die Produkte $\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}$ Hauptideale sind (genau dann operiert ρ durch Inversenbildung, dieser Fall tritt für die Körper mit Nummer 24, 28 und 29 ein), und ob jeweils $\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}^2$ Hauptideale sind (genau dann op. ρ trivial, dieser Fall tritt nicht ein). In allen anderen Fällen operiert ρ als Involution $\neq \pm 1$.

Um die errechneten Ergebnisse auch ohne die Lektüre der Magma-Dokumentation nachprüfbar zu gestalten, haben wir die relevanten Befehle in Appendix B angeführt.

Korollar 4.4.2. *Für die oben aufgeführten zyklischen sextischen CM-Körper und Klassenzahl 3, 7 und 9 stimmen Shimura- und Hilbertklassenkörper bis auf folgende Ausnahmen überein:*

$h = 3$*: Für die Körper mit Ordnungszahl 6, 7 und 10 ist* $M_F = F$*;*

$h = 9$*: Für die Körper mit Nummer 22, 23, 25, 26, 27 und 30 ist* M_F *ein echter Zwischenkörper der Erweiterung* H_F/F*.*

Anhang A

Die Modulformen in Thetakonstanten

Der Weg von einer meromorphen Funktion auf einer Riemannschen Fläche zu einem Ausdruck der Funktion in Termen von Thetakonstanten (Thetanullwerten) ist wohlbekannt, vgl. z.B. [Mum83], Chapter II.

Die *Riemannsche Thetafunktion*

$$\Theta : \mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g \to \mathbb{C},\ (z, \Omega) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i {}^t n \Omega n + 2\pi i {}^t n z),$$

ist eine holomorphe Funktion, die als Funktion in z bezüglich des Gitters $L_\Omega := \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$ quasi-periodisch ist, d.h. die für Verschiebungen des Arguments um Gitterpunkte $\Theta(z + w, \Omega) = e_\Omega(z, w)\Theta(z, w)$, $w \in L_\Omega$, mit einem einfachen multiplikativen Faktor $e_\Omega(z, w)$ erfüllt. Genauer ist dieser Faktor

$$e_\Omega(z, w) = \exp(-\pi i {}^t m \Omega m - 2\pi i {}^t m z),\ w = n + \Omega m.$$

Eine Verallgemeinerung der Riemannschen Thetafunktion ist die *Thetafunktion mit Charakteristik* $\begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix}$, $p, q \in \mathbb{Q}^g$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (z, \Omega) &:= \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\ {}^t(n + p)\Omega(n + p) + 2\pi i\ {}^t(n + p)(z + q)) \\ &= \exp(\pi i {}^t p \Omega p + 2\pi i {}^t p(z + q))\Theta(z + \Omega p + q, \Omega). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Addition ganzzahliger Vektoren a, b zu den Charakteristiken hat den folgenden Effekt

$$\Theta \begin{bmatrix} {}^t(p+a) \\ {}^t(q+b) \end{bmatrix} (z, \Omega) = \exp(2\pi i {}^t p b)\Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (z, \Omega). \tag{A.2}$$

Thetacharakteristiken sind L_Ω-quasi-periodisch mit Faktor

$$\tilde{e}_\Omega(z, w) = \exp(2\pi i {}^t p n) \exp(-2\pi i {}^t q m) e_\Omega(z, w),\ w = n + \Omega m.$$

Unter einer *Thetakonstanten* verstehen wir schließlich eine Thetacharakteristik an der Stelle $z = 0$, also eine Funktion

$$\Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} : \mathbb{H}_g \to \mathbb{C},\ \Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (\Omega) := \Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (0, \Omega).$$

(A.1) an der Stelle $z = 0$ bringt die Thetafunktion mit Thetakonstanten in folgende Beziehung

$$\Theta(\Omega p + q, \Omega) = \exp(-\pi {}^t p \Omega p - 2\pi i {}^t pq) \Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (\Omega). \tag{A.3}$$

In Geschlecht $g = 3$ lassen sich Thetakonstanten auf dem Ball mittels der oben definierten Einbettungen $\mu : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_3$ auf folgende Weise erklären

$$\Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (\tau) := \Theta \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} (\mu(\tau)).$$

Sei X eine Riemannschen Fläche vom Geschlecht g, $\{A_i, B_j\}$ eine symplektische Basis der Homologie, $\omega = {}^t(\omega_1, \dots, \omega_g)$ mit einer Basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ der holomorphen Differentialformen, so daß die Periodenmatrix die Gestalt $(\int_{A_i} \omega_j | \int_{B_i} \omega_j) = (E_g|\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{H}_g$, hat. Weiter sei $\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g / L_\Omega$, $L_\Omega = \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$, die Jacobische, und $P_0 \in X$ sei ein fixierter Basispunkt. Die Beziehung der meromorphen Funktionen auf X zu den Thetakonstanten erhalten wir durch folgenden Satz.

Satz A.0.3 (siehe [Mum83], Chapter II, §3, Beweis des Theorems von Abel)**.** *Sei f eine meromorphe Funktion auf X mit Divisor $(f) = \sum_{i=1}^d P_i - \sum_{i=1}^d Q_i$. Wähle ein $e \in \mathbb{C}^g$ mit folgenden Eigenschaften*

(i) $\Theta(e, \Omega) = 0$,

(ii) die Abbildung

$$E_e(R,\ .\ ) : P \mapsto \Theta(e + \int_R^P \omega, \Omega)$$

ist nicht die Nullabbildung für alle $R \in \{P_i, Q_i\}$.[1]

Weiter seien σ_i bzw. τ_i Wege von P_0 nach P_i bzw. Q_i, so daß

$$\sum_{i=1}^d \int_{\sigma_i} \omega = \sum_{i=1}^d \int_{\tau_i} \omega.$$

Der Divisor der Funktion

$$g(P) := \frac{\prod_{i=1}^d E_e(P_i, P)}{\prod_{i=1}^d E_e(Q_i, P)} \tag{A.4}$$

[1]Die lokal einwertige und global mehrwertige Abbildung $E_e(P, Q) := \Theta(e + \int_P^Q \omega, \Omega)$ wird *Primform* genannt.

ist

$$(g) = \sum_{i=1}^{d} P_i - \sum_{i=1}^{d} Q_i = (f),$$

wobei wir in allen Termen ein und denselben Integrationsweg von P nach P_0 gewählt haben. Insbesondere ist $c_e f = g$ mit einer nur von e abhängigen Konstanten c_e.

Sei nun $X = \widetilde{C}(x, y)$ eine Kurve der Familie $\mathcal{F}$ und $f : \widetilde{C}(x, y) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $(z, w) \mapsto z$, die Projektion auf die erste Koordinate. Als Basispunkt wählt Matsumoto $P_y = (y, 0)$. Nach einer geeigneten Wahl der Basen und Integrationswege und Einsetzen der über $1, x$ und y liegenden Punkte lassen sich $c_e x = c_e f((x, 0))$, $c_e y = c_e f(P_y)$ und die Konstante c_e als Produkt von Funktionen $E_e(P_y, P)$ ausdrücken, wobei P die Verzweigungspunkte von f durchläuft. Die Argumente der entsprechenden Thetafunktionen hängen allein von Halbperioden und der Wahl von e ab. Die Halbperioden lassen sich nun jeweils in der Form $q + \Omega p$ mit halbganzen $p, q \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3$ schreiben. Nach geeigneter Wahl von e erhalten wir wegen (A.3) Ausdrücke von c_e wie der Parameter x und y in Thetakonstanten. Die Beziehung (A.2) besagt in dieser Situation, daß wir die Charakteristiken p und q in $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^3$ wählen dürfen. Auf diese Weise erhält Matsumoto eine explizite Darstellung der inversen Periodenabbildung in Termen von Thetakonstanten, siehe [Mat89], Theorem 3.4. Koike und Shiga haben in [KS08] die Matsumoto Theta-Abbildung $\widetilde{\Psi}^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ vereinfacht und wie folgt dargestellt:

$$\widetilde{\Psi}^{-1}(u, v) = \left(\frac{\phi_1(u, v)}{\phi_0(u, v)}, \frac{\phi_3(u, v)}{\phi_2(u, v)} \right)$$

mit

$$\phi_0(u, v) := \Theta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mu(u, v)), \quad \phi_1(u, v) := \Theta^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mu(u, v)),$$
$$\phi_2(u, v) := \Theta^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mu(u, v)), \quad \phi_3(u, v) := \Theta^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mu(u, v)).$$

Dabei ist $\mu : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_3$ wieder die Einbettung

$$\mu\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \mu(u, v) := \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2}v^2 & -\frac{1}{2}v^2 & -iv \\ -\frac{1}{2}v^2 & u - \frac{i}{2}v^2 & v \\ -iv & v & i \end{pmatrix}.$$

Die Theta-Abbildung liefert sofort den uniformisierenden Morphismus

$$p_{\Gamma_1} = (g_0 : g_1 : g_2) : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong \widehat{\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}}$$

mit $\Gamma_1 := \Gamma(1 + i)$-Modulformen

$$g_0 = \phi_0\phi_2,\ g_1 = \phi_0\phi_2 - (\phi_1\phi_2 + \phi_0\phi_3) + \phi_1\phi_3,\ g_2 = \phi_1\phi_3.$$

Zwei Kurven der Familie sind genau dann isomorph, wenn die Koordinaten der Bildpunkte der Periodenpunkte S_3-äquivalent sind.[2] Definiere H_1, H_2, s_3 als symmetrische Funktionen wie in Kapitel 2 und

$$j_1 := H_1/s_3, \quad j_2 := H_2/s_3, \quad j := (j_1, j_2) : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}.$$

Unter Ausnutzung von Koike und Shigas Darstellung der Matsumoto-Theta-Abbildung erhalten wir in Termen von Thetakonstanten (mit der Schreibweise $\begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix} := \Theta^4 \begin{bmatrix} {}^t p \\ {}^t q \end{bmatrix}$) die im Vergleich zu [Rie07] handlichere Version der Modulfunktion:

$$\begin{aligned}
H_1 \;=\;& 7\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \right) \\
&+ 2\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&+ \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \\
&+ \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \\
&- 3\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \right) \\
&- 3\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&- 4\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 \;=\;& 17\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \right) \\
&+ 4\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&+ 4\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \right) \\
&+ 4\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&- \left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&- 6\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \right) \\
&- 6\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^3 \right) \\
&- 14\left(\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \end{bmatrix}^2 \right)
\end{aligned}$$

[2]für Periodenpunkte außerhalb des Verzweigungsorts von p_{Γ_1}.

$$\begin{aligned} s_3 \quad = \quad & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2. \end{aligned}$$

Anhang B

Quellcode zur Berechnung der komplexen Konjugation

Wir berechnen zunächst die Struktur der Klassengruppe des durch $x^6 + \sum_{i=1}^{5} a_i x^i$ definierten CM-Körpers durch die Eingabe

```
>R<x> := PolynomialRing(Integers());
>K<y> := NumberField(x^6-a_5*x^5-a_4*x^4+a_3*x^3+a_2*x^2+a_1*x+a_0);
>O := MaximalOrder(K);
>F<a, b, c, d, e> := FieldOfFractions(O);
>C,m := ClassGroup(O);
>C;
```

In einigen Fällen mußte die Klassengruppe schrittweise wie im folgenden Ablauf berechnet werden

```
>R<x> := PolynomialRing(Integers());
>f := x^6-a_5*x^5-a_4*x^4+a_3*x^3+a_2*x^2+a_1*x+a_0;
>K<y> := NumberField(f);
>o_f := EquationOrder(f);
>O := MaximalOrder(o_f);
>O;
>C,m := ClassGroup(O);
>C;
```

Im nächsten Schritt lassen wir k Erzeugende der Klassengruppe errechnen (hier für $k = 2$)

```
>m(C.1);
>m(C.2);
```

Als Ausgabe erhalten wir je zwei ganzzahlige 6-Tupel $[f_1, \ldots, f_6]$, $[g_1, \ldots, g_6]$ und $[r_1, \ldots, r_6]$, $[s_1, \ldots, s_6]$ für die beiden Erzeuger (Koeffizienten der Basis eines

Ideals der Klasse bzgl. einer $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von F). Wir bilden die Ideale im Eingabefeld und konjugieren die Basiselemente der Ideale (für jedes ausgegebene Ideal liegt der erstgenannte Erzeuger in $\mathbb{Z}$). Anschließend lassen wir die zu $m(C.k)$ konjugierten Ideale I und J berechnen.

```
>f := F![f_1,...,f_6];
>g := F![g_1,..., g_6];
>r := F![r_1,..., r_6];
>s := F![s_1,...,s_6];
>h := ComplexConjugate(g);
>t := ComplexConjugate(s);
>I := ideal< O | f, h >;
>J := ideal< O | s, t >;
```

In welcher Weise die komplexe Konjugation $^-$ operiert, beantworten die folgenden Anfragen:

Für $h = 4$ ist Cl_F isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. Wir überprüfen $I = m(C.1)$ und $J = m(C.2)$

```
>I eq m(C.1);
>J eq m(C.2);
```

In allen Fällen erhalten wir die Antwort *true*, d.h. $^-$ wirkt als Identität.

Für $h = 7$ fragen wir, ob $\overline{m(C.1)} \cdot m(C.1)$ ein Hauptideal ist,

```
>IsPrincipal(I*m(C.1));
```

was in allen Fällen bejaht wird; $^-$ wirkt durch $(\mathfrak{a}) \mapsto (\mathfrak{a})^{-1}$.

Für h=9 ist $\mathrm{Cl}_F \cong C_3 \times C_3$

```
>IsPrincipal(I*m(C.1));
>IsPrincipal(J*m(C.2));
>IsPrincipal(I*m(C.1)*m(C.1));
>IsPrincipal(J*m(C.2)*m(C.2));
```

Lautet die Antwort auf die ersten zwei Anfragen *true*, wirkt $^-$ durch Inversenbildung, werden die dritte und vierte Frage bejaht, wirkt $^-$ trivial, in allen anderen Fällen operiert $^-$ als Involution $\neq \pm 1$.

Literaturverzeichnis

[Alb61] A.A. Albert, *Structure of Algebras*, AMS, Providence, R.I., 1961

[BB66] W.L. Baily, A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. **84** (1966), 442-528

[BL04] C. Birkenhake, H. Lange, *Complex abelian varieties*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2004

[BJ06] A. Borel, L. Ji, *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*, Birkhäuser, Boston, 2006

[CF67] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich (eds.), *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London-New York, 1967

[Che33] C. Chevalley, *Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps loceaux*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1933), 365-476

[Coh85] H. Cohn, *Introduction to the construction of class fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

[CS08] H. Cohen, P. Stevenhagen, *Computational class field theory*, Algorithmic Number Theory **44** (2008), 497-534

[DF64] B.N. Delone, D.K. Faddeev, *The Theory of Irrationalities of the Third Degree,* AMS, Providence, R.I., 1964

[DM86] P. Deligne, G.D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, Publ. Math. IHES **63** (1986), 5-88

[Deu68] M. Deuring, *Algebren*, Zweite, korrigierte Auflage, Springer, Berlin, 1968

[Feu90] J. Feustel, *Eine Klassenzahlformel für singuläre Moduln der Picardschen Modulgruppen,* Comp. Math **76** (1990), no. 1-2, 87-100

[Gar81] D. Garbanati, *Class Field Theory Summarized*, Rocky Mountain Journal **11** (1981), no. 2, 195-225

[Has48] H. Hasse, *Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern*, Abh. dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Math.-Naturw. Klasse, Jg. 1948, Nr. 2, Akademie-Verlag, Berlin, 1950

[Has65] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Physica-Verlag, Würzburg-Wien, 1965

[Has85] H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Nachdruck der ersten Auflage, Springer, Berlin, 1985

[Hil00] D. Hilbert, *Die Hilbertschen Probleme*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 252, vierte Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1998

[Hol86] R.-P. Holzapfel, *Geometry and arithmetic around Euler partial differential equations*, VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986

[Hol94] R.-P. Holzapfel, *Hierarchies of endomorphism algebras of abelian varieties corresponding to Picard modular surfaces*, Schriftenreihe Komplexe Mannigfaltigkeiten **90**, Erlangen, 1994

[Hol95] R.-P. Holzapfel, *The ball and some Hilbert problems*, Birkhäuser, Basel, 1995

[HPV98] R.-P. Holzapfel, A. Piñeiro, N. Vladov, *Picard-Einstein Metrics and Class Fields Connected with Apollonius Cycle*, HU Berlin, Preprint Nr. 98-15, 1998

[HV01] R.-P. Holzapfel, N. Vladov, *Quadric-line configurations degenerating plane Picard Einstein metrics I - II*, Sitzungsber. der Berliner Math. Ges., Jg. 1997 - 2000, Berlin (2001), 79-141

[Kan05] KANT V4 (Computational Algebra System), Technische Universität Berlin, 2005, URL: http://www.math.tu-berlin.de/~kant, zuletzt abgerufen am 24.1.2011

[KS08] K. Koike, H. Shiga, *An extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms*, J. Number Theory **128** (2008), 2097-2126

[KW04] K. Koike, A. Weng, *Construction of CM Picard Curves*, Math. of Comp. **74** (2004), no. 249, 499-518

[Lan83] S. Lang, *Complex Multiplication*, Springer, New York, 1983

[Leo53] H.W. Leopoldt, *Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern*, Math. Nachr. **9** (1953), 351-362

[Lou98] S. Louboutin, *The imaginary cyclic sextix fields with class number equal to their genus class number*, Colloq. Math. **75** (1998), no. 2, 205-212

[Mag02] MAGMA (Computational Algebra System), University of Sidney, 2002, URL: http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/, zuletzt abgerufen am 24.1.2011

[Mat89] K. Matsumoto, *On Modular Functions in 2 Variables Attached to a Family of Hyperelliptic Curves of Genus 3*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **16** (1989), no. 4, 557-578

[Mil86] J.S. Milne, *Jacobian Varieties*, in: G. Cornell, J.H. Silverman (eds.), *Arithmetic Geometry*, Springer, 1986, 167-212

[Mil06] J.S. Milne, *Complex Multiplication*, Course Notes, 2006, URL: http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cm.html, zuletzt abgerufen am 24.1.2011

[Mum74] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford University Press, London, 1974

[Mum83] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Birkhäuser, Boston, 1983

[Neu69] J. Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, BI Hochschulskripten, Mannheim, 1969

[PK97] Y.-H. Park, S.-H. Kwon, *Determination of all imaginary abelian sextic number fields with class number* ≤ 11, Acta Arith. **82** (1997), no. 1, 27-43

[Pic83] E. Picard, *Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires*, Acta Math. **2** (1883), 114-135

[Rie07] T. Riedel, *On the construction of class fields by Picard modular forms*, in: R.-P. Holzapfel, A.M. Uludağ, M. Yoshida (eds.), *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, Birkhäuser, Basel, 2007, 273-285

[Run97] B. Runge, *On Picard Modular Forms*, Math. Nachr. **184** (1997), 259-273

[Sha94] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1-2,* 2nd ed., Springer, Berlin, 1994

[Shg88] H. Shiga, *On the representation of the Picard modular function by* θ *constants I-II*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **24** (1988), no. 3, 311-360

[SW95] H. Shiga, J. Wolfart, *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 1-25

[Shm55] G. Shimura, *On complex multiplication*, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 23-30

[Shm63] G. Shimura, *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Ann. Math. **78** (1963), no. 1, 149-192

[Shm68] G. Shimura, *Automorphic Functions and Number Theory*, Springer LN 54, 1968

[Shm77] G. Shimura, *On Abelian Varieties with Complex Multiplication*, Proc. London Math. Soc. (3) **34** (1977), 65-86

[ST61] G. Shimura, Y. Taniyama, *Complex Multiplication of Abelian Varieties and its Applications to Number Theory*, Publ. Math. Soc. Japan, No. 6, Tokyo, 1961

[Sil94] J.H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, New York, 1994

[Tan55] Y. Taniyama, *Jacobian varieties and number fields*, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 31-45

[vdG08] G. van der Geer, *Siegel Modular Forms and Their Applications*, in: J.H. Brunier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of Modular Forms*, Springer, Berlin, 2008, 181-245

[vdW37] B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra. Erster Teil*, Springer, Berlin, 1937

[Was97] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Springer, New York, 1997

[Wei55] A. Weil, *On the theory of complex multiplication*, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 9-22

[Wen01] A. Weng, *A class of hyperelliptic CM-curves of genus three*, J. of the Ramanujan Math. Soc. **16** (2001), 339-372

[Yos87] M. Yoshida, *Fuchsian differential equations*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987