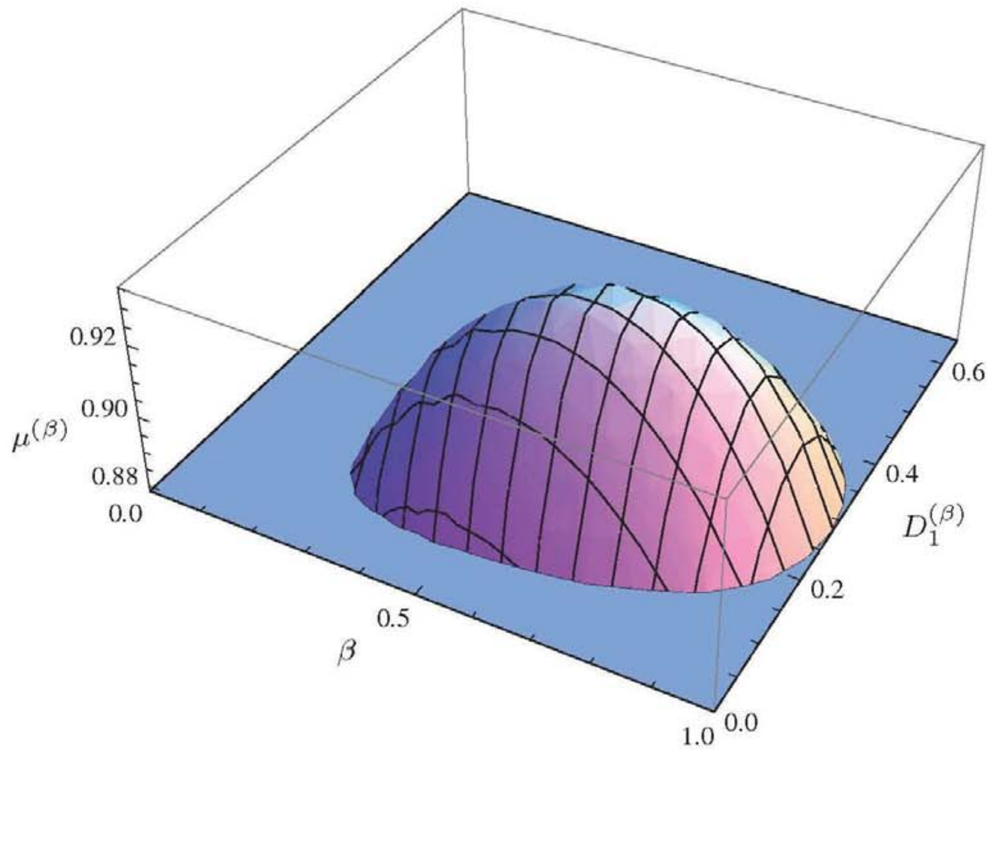
Daniel Enke

Grenzen der Arbitrage



Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Grenzen der Arbitrage

Daniel Enke

Grenzen der Arbitrage

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2013
Zugl.: Dortmund, Technische Univ., Diss., 2013

978-3-95404-369-9

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

1. Auflage, 2013
Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

978-3-95404-369-9

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Die Abbildungen wurden mit der Software Wolfram *Mathematica*® 7 erzeugt.

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Grundlage der Dissertation bildet die Veröffentlichung der Autoren Andrei Shleifer und Robert W. Vishny mit dem Titel „The Limits of Arbitrage“ aus dem Jahr 1997.[1]

1.1 Motivation des Themas

„Arbitrage bedeutet gewinnbringendes Ausnutzen von Preisdifferenzen durch simultanen Kauf und Verkauf von Gütern.“[2] Beispielsweise kauft eine Person (der Arbitrageur) ein Gut von einer zweiten Person und verkauft es gleichzeitig zu einem höheren Preis an eine dritte Person weiter. Der Arbitragegewinn entspricht dabei der Differenz zwischen Verkaufs- und Einkaufspreis.[3] Diese einfache Definition von Arbitrage findet sich in dieser oder in ähnlicher Form in diversen weiteren Lehrbüchern und Büchern zur Finanzwirtschaft wieder.[4]

Arbitragemöglichkeiten, wie sie in Lehrbüchern dargestellt werden, erfordern keinen Kapitaleinsatz und sind nicht mit Risiko behaftet.[5] Zudem wird weiter argumentiert, dass Arbitragemöglichkeiten, wenn überhaupt, nur sehr kurzfristig existieren können, da auf einem vollkommenen Kapitalmarkt jeder Marktteilnehmer über den gleichen Informationsstand verfügt.[6] Die entscheidende Voraussetzung für das Vorliegen von

[1] Vgl. Shleifer/Vishny (1997).
[2] Vgl. Franke/Hax (2004), S. 368.
[3] Vgl. Franke/Hax (2004), S. 368.
[4] Vgl. beispielsweise Sharpe et al. (1999), Glossary S. 907: „The simultaneous purchase and sale of the same, or essentially similar, security in two different markets for advantageously different prices.“
[5] Vgl. Brealey et al. (2006), Glossary S. 993: „Purchase of one security and simultaneous sale of another to give a risk-free profit“.
[6] Zur Definition des vollkommenen Kapitalmarktes vgl. Franke/Hax (2004), S. 153.

(längerfristigen) Arbitragemöglichkeiten sind letztendlich Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes. Ohne Unvollkommenheiten würde jede Arbitragemöglichkeit sofort ausgenutzt werden und bei einem funktionierenden Kapitalmarkt sukzessive verschwinden.[7]

Das hier vorgestellte Modell von Shleifer/Vishny (1997) basiert letztendlich auf Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes. So besitzen die Arbitrageure in ihrem Modell einen Informationsvorsprung gegenüber allen anderen Marktteilnehmern. Die sich daraus ergebende Arbitragemöglichkeit kann jedoch nicht sofort, sondern erst zu einem späteren Zeitpunkt realisiert werden. Dafür benötigen die Arbitrageure liquide Mittel, die sie nicht selbst besitzen, sondern von Investoren zur Verfügung gestellt bekommen. Es besteht jedoch das Risiko, dass die Investoren die zur Verfügung gestellten Mittel abziehen, bevor die Arbitragemöglichkeit ausgenutzt werden kann. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die ebenfalls in diesem Modell vorkommenden Noise trader zwischenzeitlich dafür sorgen, dass sich die Arbitragemöglichkeit noch weiter ausweitet. In diesem Szenario, wenn die Arbitragemöglichkeit noch größer und daher umso attraktiver wird, ziehen die Investoren jedoch ihre Mittel ab und verhindern so ein Ausnutzen der Arbitragemöglichkeit durch die Arbitrageure.

Die Betrachtung von unterschiedlichen Gruppen von Marktteilnehmern mit jeweils unterschiedlichen Informationsständen in einem Modell ist typisch für die sogenannten „Behavioral Finance“ Modelle.[8] Auch das Vorhandensein von Noise tradern ist ein Kennzeichen dieser Modelle. Das Modell von Shleifer/Vishny (1997) wird häufig in der einschlägigen Literatur immer dann zitiert, wenn es darum geht, (längerfristige) Arbitragemöglichkeiten insbesondere im Rahmen von Behavioral Finance zu erklären.[9]

Maßgeblich für das Vorliegen dieser Arbitragemöglichkeit ist die Unterscheidung zwischen den verschiedenen Marktteilnehmern, insbesondere die Trennung von Geldgebern und professionellen Anlegern. Das zunächst relativ einfach erscheinende, formale Modell der beiden Autoren entpuppt sich bei genauerer Betrachtung jedoch komplexer als erwartet. Und auch das Ausnutzen der Arbitragemöglichkeit gestaltet sich mitunter um einiges komplizierter, als es wohl nach Shleifer/Vishny (1997) ursprünglich der Fall sein sollte. Modellbedingt ist beispielsweise ein komplettes Ausnutzen der Arbitragemöglichkeit nicht immer notwendigerweise optimal.

[7] Vgl. Franke/Hax (2004), S. 368.

[8] Für einen Überblick zu Behavioral Finance vgl. Thaler (1993), Shleifer (2000), Barberis/Thaler (2003), Brunel (2003), Chan et al. (2004) und Thaler (2005).

[9] Vgl. beispielsweise Barberis/Thaler (2003), S. 1056ff und Levy/Post (2005), S. 341f.

Basierend auf der Vorlage von Shleifer/Vishny (1997) wird in dieser Dissertation ein vollständiges Entscheidungsmodell aufgebaut. Insbesondere ökonomische Zusammenhänge stehen dabei im Vordergrund. Das bedeutet, bestimmte Parameterkonstellationen werden insbesondere dann ausgeschlossen, wenn sie zu ökonomisch nicht mehr interpretierbaren Ergebnissen führen. Die Einschränkungen halten sich jedoch dabei in Grenzen. Letztendlich kann gezeigt werden, dass immer mindestens eine optimale Lösung existiert, und dass in Ausnahmefällen höchstens zwei optimale Lösungen vorliegen können.

Nicht hinterfragt wird in dieser Arbeit die Informationseffizienz des Kapitalmarktes.[10] Insbesondere die Befürworter der Behavioral Finance Modelle zweifeln die Informationseffizienz des Kapitalmarktes an.[11] Ebenfalls nicht Gegenstand dieser Arbeit ist die Diskussion, inwieweit es sich bei dem Informationsvorsprung der Arbitrageure um Insiderhandel handelt.[12]

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in fünf Kapitel gegliedert. In Kapitel 2 wird im Anschluss an diese Einleitung die Struktur des diskreten Drei-Zeitpunkt-Modells aus Shleifer/Vishny (1997) vorgestellt. Da das Modell von der Einteilung in unterschiedliche Gruppen von Marktteilnehmern lebt, werden zunächst diese einzelnen Gruppen näher erläutert. Eine Differenzierung erfolgt dabei insbesondere anhand des Informationsstandes und des Marktzugangs der jeweiligen Gruppe. In den restlichen drei Abschnitten des 2. Kapitels werden die Verhaltensweisen der verschiedenen Marktteilnehmer zeitpunktbezogen formalisiert. Für jeden Zeitpunkt wird sowohl die Nachfragefunktion der Noise trader als auch die Nachfragefunktion der Arbitrageure ausführlich erläutert und zudem die Preisgleichung für den jeweiligen Zeitpunkt abgeleitet. Bei dem zweiten Zeitpunkt liegt dabei noch ein zusätzlicher Schwerpunkt auf der Bestimmung des von den Investoren im zweiten Zeitpunkt zur Verfügung gestellten Betrages. In Verbindung mit dem dritten Zeitpunkt erfolgt die Herleitung der Zielfunktion der Arbitrageure. In Bezug auf Kapitel 2 sind folgende vier Punkte besonders hervorzuheben:

[10] Zur Informationseffizienz vgl. insbesondere Fama (1970) und Fama (1991).

[11] Der „Streit“ der beiden Lager erreichte seinen vorläufigen Höhepunkt mit der Veröffentlichung von Fama (1998). Vgl. auch Haugen (1999) und Haugen (2002).

[12] Ein bekanntes Modell, welches sich mit Insiderhandel auseinandersetzt, ist beispielsweise das Modell von Kyle (1985).

1. Die Eingabeparameter und die Festlegungen des Modells werden detailliert und aus ökonomischer Sicht dargestellt. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Erläuterung der Nachfragefunktionen und der Preisgleichungen.

2. Sämtliche Einschränkungen der Eingabeparameter werden zunächst kritisch hinterfragt. Erforderliche Einschränkungen werden dabei ausführlich hergeleitet.

3. Es erfolgt eine ausführliche Darstellung des von den Investoren im zweiten Zeitpunkt zur Verfügung gestellten Betrages und eine detaillierte Herleitung der Zielfunktion der Arbitrageure.

4. Das Modell von Shleifer/Vishny (1997) wird um eine zweite Entscheidungsvariable erweitert, welche letztendlich bei einigen Parameterkonstellationen zu einer Verbesserung der Lösung führt.

Kapitel 3 befasst sich mit der sogenannten „Update-Funktion“, welche die Investoren im zweiten Zeitpunkt zur Anpassung ihres Investitionsbetrages heranziehen. Es beginnt mit einer Betrachtung von nicht stückweise definierten Update-Funktionen. Ausgehend von linearen Update-Funktionen, wie sie auch in Shleifer/Vishny (1997) verwendet werden, erfolgt dann eine Verallgemeinerung auf nicht-lineare Update-Funktionen. Um die Unterschiede im Verhalten linearer und nicht-linearer Update-Funktionen zu verdeutlichen, wird der durch die jeweilige Update-Funktion verursachte Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss als Vergleichsgrundlage herangezogen. In einem weiteren Abschnitt erfolgt dann die beispielhafte Betrachtung einer stückweise definierten Update-Funktion, welche ebenfalls nach Shleifer/Vishny (1997) als Update-Funktion herangezogen werden kann. Die Abgrenzung einer Update-Funktion von einer anderen Update-Funktion ist insbesondere dann gut möglich, wenn eine Dominanz vorliegt.[13] Vor dem abschließenden Fazit des 3. Kapitels werden daher noch zwei unterschiedliche Formen von Dominanz in Verbindung mit Update-Funktionen betrachtet. Hinsichtlich Kapitel 3 sind insbesondere die folgenden vier Punkte zu erwähnen:

1. Die von Shleifer/Vishny (1997) an eine Update-Funktion gestellten drei Anforderungen werden ausführlich erläutert.

2. Es wird eine eingehende Analyse linearer Update-Funktionen vorgenommen.

[13] Anhand des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses wurden zuvor lineare und nicht-lineare Update-Funktionen voneinander abgegrenzt. Mit Hilfe von Dominanzen ist nun beispielsweise auch die Abgrenzung zweier linearer Update-Funktionen voneinander möglich.

3. Es erfolgt eine Verallgemeinerung auf nicht-lineare Update-Funktionen und die beispielhafte Betrachtung einer stückweise definierten Update-Funktion.

4. Zur Abgrenzung von Update-Funktionen werden zwei unterschiedliche Formen von Dominanz herangezogen.

In Kapitel 4 wird zunächst die in Kapitel 2 hergeleitete Zielfunktion der Arbitrageure mit Hilfe einer linearen Update-Funktion zu einem konkreten Entscheidungsmodell weiterentwickelt. Dabei wird zunächst untersucht, welche Anforderungen eine lineare Update-Funktion erfüllen muss, damit ein vollständiger Mittelabzug seitens der Investoren im zweiten Zeitpunkt ausgeschlossen ist. Im Anschluss daran erfolgt der Einbezug der Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs. Anhand der Eingabeparameter lassen sich fünf Fälle unterscheiden. Für diese fünf Fälle werden mathematisch notwendige Einschränkungen bezüglich der linearen Update-Funktion herausgearbeitet, damit im Rahmen des Modells ökonomisch begründbare Ergebnisse erzielbar sind. Die optimale Lösung wird dann durch eine zustandsbezogene Betrachtungsweise näher erörtert, bevor abschließend ausführlich konkrete Zahlenbeispiele zum Modell mit einer Entscheidungsvariable in Verbindung mit einer linearen Update-Funktion behandelt werden.[14] Im Anschluss daran wird anhand eines Beispiels untersucht, welchen Einfluss nicht-lineare Update-Funktionen auf die optimale Entscheidung besitzen. Dabei wird insbesondere auf die Untersuchungen aus dem 3. Kapitel zurückgegriffen. Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem Modell mit zwei Entscheidungsvariablen unter Verwendung einer linearen Update-Funktion.[15] Es kann gezeigt werden, dass die Berücksichtigung einer zweiten Entscheidungsvariable bei einigen Konstellationen von Eingabeparametern zu einer Verbesserung der Lösung führt. In Bezug auf Kapitel 4 sind die nachfolgenden sechs Punkte besonders hervorzuheben:

1. In Shleifer/Vishny (1997) wird unterstellt, dass der sogenannte „Noise trader shock“, wenn er im zweiten Zeitpunkt auftritt, stärker ist als im ersten Zeitpunkt. Im Rahmen der Entscheidungsmodelle wird hier auch ein gleich hoher bzw. ein schwächerer Noise trader shock in Betracht gezogen.

[14] Die Unsicherheit wird im Modell durch zwei mögliche Zustände im zweiten Zeitpunkt modelliert. Daher bietet sich hier eine zustandsbezogene Betrachtungsweise an.

[15] Das Modell mit zwei Entscheidungsvariablen unter Verwendung einer nicht-linearen Update-Funktion wird im Rahmen dieser Dissertation nicht mehr untersucht, da in der Regel nur numerische Lösungen erzeugt werden können und eine detaillierte Betrachtung dieses Falls den Umfang der vorliegenden Arbeit nicht unerheblich erhöhen würde.

2. Die von Shleifer/Vishny (1997) angegebene Stabilitätsbedingung zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs ist fehlerhaft. Diese wird entsprechend korrigiert. Ergänzend wird in dieser Dissertation aber auch die Funktionsweise des Modells für Fälle sichergestellt, in denen der vollständige Mittelabzug auftritt.

3. Es wird gezeigt, dass immer mindestens eine optimale Lösung existiert, und dass höchstens zwei optimale Lösungen vorliegen können.

4. Mit Hilfe der zustandsbezogenen Betrachtungsweise kann gezeigt werden, dass unabhängig von den konkreten Eintrittswahrscheinlichkeiten der beiden Zustände im zweiten Zeitpunkt bei vielen zulässigen Parameterkonstellationen ein Vollinvestment im ersten Zeitpunkt seitens der Arbitrageure nicht optimal sein kann. Dies widerspricht der Aussage von Shleifer/Vishny (1997).

5. Die in Shleifer/Vishny (1997) angegebene Optimalitätsbedingung führt in der Regel nicht zu einer optimalen Lösung im Sinne der Zielfunktion. Insbesondere ist auch die im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) angegebene Lösung nicht optimal.

6. Die Annahme des Vollinvestments seitens der Arbitrageure im zweiten Zeitpunkt bei Vorlage eines weiteren (stärkeren) Noise trader shocks führt bei einigen zulässigen Parameterkonstellationen zu einer suboptimalen Lösung. Dies kann durch die Einführung einer zusätzlichen Entscheidungsvariable im zweiten Zeitpunkt behoben werden.

Das abschließende 5. Kapitel fasst die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen kurzen Ausblick auf weitere Untersuchungsmöglichkeiten im Rahmen des hier vorgestellten Modells von Shleifer/Vishny (1997).

Kapitel 2

Modellstruktur

In diesem Kapitel wird die Grundstruktur des Modells aus Shleifer/Vishny (1997) vorgestellt.[1] Bei dem Modell handelt es sich um ein diskretes Drei-Zeitpunkt-Modell mit den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, 3$. Es wird ein spezielles Marktsegment betrachtet, in dem ein bestimmter Vermögensgegenstand gehandelt wird.[2] Es existieren drei Gruppen von Marktteilnehmern: Investoren, Noise trader und Arbitrageure. Der risikolose Zinssatz beträgt 0% pro Periode.

Der Vermögensgegenstand besitzt den Grundwert $V > 0$.[3] In Shleifer/Vishny (1997) wird zwar nicht direkt erwähnt, dass es sich bei dem Grundwert um einen positiven Wert handelt. In den Beispielen zu Beginn des Artikels werden jedoch durchweg positive Grundwerte aufgeführt.[4] Und auch in ihrem konkreten Zahlenbeispiel zum Modell wählen sie einen positiven Grundwert $V = 1$.[5] Zudem bildet Shleifer/Vishny (1990) die Grundlage für das Modell aus Shleifer/Vishny (1997):[6] In Shleifer/Vishny (1990) werden die von zwei Projekttypen in Zukunft erwarteten Einzahlungsüberschüsse jeweils mit V bezeichnet. Da es sich dabei um Investitionsprojekte handelt, muss V entsprechend positiv sein.[7] Im weiteren Verlauf wird daher $V > 0$ vorausgesetzt.

Der Grundwert kann als fairer Wert des Vermögensgegenstandes aufgefasst werden bzw. als der Wert, welcher sich ergibt, wenn alle Marktteilnehmer über den gleichen

[1] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38ff.
[2] Für einen Handel mit mehreren, identischen Vermögensgegenständen vgl. Abschnitt 2.2.
[3] Shleifer/Vishny (1997) benutzen in ihrem Artikel die englische Bezeichnung „fundamental value“ für den Grundwert V des Vermögensgegenstandes (vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38).
[4] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 35f.
[5] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44 sowie Abschnitt 4.1.4.1.
[6] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38.
[7] Vgl. Shleifer/Vishny (1990), S. 150.

Informationsstand und Marktzugang verfügen.[8] Der Marktwert des Vermögensgegenstandes stimmt in allen drei Zeitpunkten mit dem Grundwert V überein. Dies liegt zum einen an der angenommenen risikolosen Verzinsung von 0% pro Periode und zum anderen an der Annahme, dass der Grundwert V des Vermögensgegenstandes nicht risikobehaftet ist.[9]

In Abschnitt 2.1 werden zunächst die einzelnen Gruppen von Marktteilnehmern näher erläutert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Informationsstand und dem Marktzugang der einzelnen Gruppen. In den sich anschließenden drei Abschnitten werden die drei Zeitpunkte des Modells ausführlich dargestellt und somit die Modellstruktur weiter konkretisiert.

2.1 Marktteilnehmer

Das Modell lebt von der Einteilung in unterschiedliche Gruppen von Marktteilnehmern. Nur dadurch liegt letztendlich eine Arbitragemöglichkeit im Rahmen des Modells vor. Welchen Informationsstand und welchen Marktzugang die jeweilige Gruppe besitzt, wird in den nachfolgenden drei Abschnitten genauer erörtert. Dadurch werden insbesondere auch die Beziehungen zwischen den Gruppen untereinander verdeutlicht. Der letzte Abschnitt 2.1.4 fasst die gewonnenen Erkenntnisse noch einmal kurz zusammen.

2.1.1 Investoren

Die Investoren besitzen keinen eigenen Marktzugang und sind somit bei ihren Investitionen auf andere Marktteilnehmer mit Marktzugang angewiesen. Im Rahmen des Modells erhalten sie den Marktzugang nur über die Arbitrageure. Die Investoren haben aber auch die Möglichkeit, ihre liquiden Mittel Arbitrageuren in anderen Marktsegmenten zur Verfügung zu stellen.

Bezüglich des Vermögensgegenstandes sind sie Laien. Der Grundwert V ist ihnen zu keinem Zeitpunkt im Modell bekannt. Somit besitzen sie insbesondere auch keine Vorstellung über den fairen Wert bzw. Preis des Vermögensgegenstandes. Dies gilt entsprechend auch für die Vermögensgegenstände in den anderen Marktsegmenten.

[8] Zum Informationsstand und Marktzugang der Marktteilnehmer vgl. Abschnitt 2.1.

[9] „[...] there is no long run fundamental risk in this trade (this is not risk arbitrage).“ (vgl. dazu Shleifer/Vishny (1997), S. 38).

Im ersten Zeitpunkt stellen sie den Arbitrageuren im Rahmen des Modells einen bestimmten Investitionsbetrag zur Verfügung.[10] Im zweiten Zeitpunkt können dann die Investoren ihren Investitionsbetrag anpassen, indem sie den Arbitrageuren beispielsweise noch zusätzliche Mittel zur Verfügung stellen. Da die Investoren jedoch keine Vorstellung vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes besitzen, treffen sie ihre Entscheidung über die Anpassung des Investitionsbetrages ausschließlich anhand der Wertentwicklung des Investitionsbetrages vom ersten zum zweiten Zeitpunkt. Wie hoch die Anpassung des Investitionsbetrages dabei konkret ausfällt, wird formal mit Hilfe einer sogenannten „Update-Funktion“ dargestellt:[11]

Bei einer positiven Wertentwicklung stellen die Investoren in der Regel noch zusätzliche Mittel zur Verfügung und bei einer negativen Wertentwicklung erfolgt in der Regel ein Abzug von Mitteln.[12] Hat sich der Wert ihres Investitionsbetrages vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ nicht verändert, erfolgt keine Anpassung. Die Möglichkeit eines Zuflusses von Mitteln bei einer negativen Wertentwicklung und eines Abzuges von Mitteln bei einer positiven Wertentwicklung wird im Rahmen des Modells nicht in Betracht gezogen.[13]

Auch wenn die Investoren Laien bezüglich des Vermögensgegenstandes sind, so handeln sie in ihrer Gesamtfunktion dennoch rational.[14] Insbesondere die Entscheidung über die Anpassung des Investitionsbetrages anhand der Wertentwicklung des Investitionsbetrages vom ersten zum zweiten Zeitpunkt kann hier nicht als eine irrationale Verhaltensweise ausgelegt werden. Vielmehr entspricht dies genau dem Verhalten vieler Investoren bei ihren Investitionsentscheidungen.[15] Die Investoren können hier durchaus als risikoneutral bezeichnet werden, da sie ihre Entscheidung im Zeitpunkt $t = 2$ ausschließlich auf Basis der Wertentwicklung treffen und nur diese Wertentwicklung in ihre Update-Funktion einfließt.[16]

[10] Eine formale Darstellung der Zusammenhänge erfolgt ab Abschnitt 2.2 mit der detaillierten Betrachtung der einzelnen Zeitpunkte.

[11] Vgl. dazu Abschnitt 2.3.3 sowie Kapitel 3.

[12] Die Formulierung „in der Regel“ berücksichtigt die Möglichkeit, dass sich die Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ komplett passiv verhalten und keine Anpassung vornehmen (vgl. Satz 23 und die sich daran anschließenden Ausführungen).

[13] Vgl. insbesondere Shleifer/Vishny (1997), S. 41. Für ein Modell, welches sich mit einem derartigen Verhalten von Investoren beschäftigt, vgl. beispielsweise Shefrin/Statman (1985) in Verbindung mit Kahneman/Tversky (1979), S. 287.

[14] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38.

[15] Viele Anbieter von Investmentfonds führen daher in ihren Verkaufsprospekten die positive Performance ihrer Investmentfonds in der Vergangenheit an, um neue Investoren zu gewinnen.

[16] In Shleifer/Vishny (1997) findet sich jedoch kein Hinweis im Bezug auf die Risikoeinstellung der Investoren.

2.1.2 Noise trader

Die Noise trader besitzen einen direkten, eigenen Zugang zu dem speziellen Marktsegment. Zusätzlich sind sie in einem gewissen Umfang mit Kapital ausgestattet, so dass sie entsprechend Eigenhandel betreiben können.

Der Grundwert V des Vermögensgegenstandes ist den Noise tradern im Zeitpunkt $t = 1$ nicht bekannt. Die Noise trader verhalten sich zudem pessimistisch gegenüber dem speziellen Vermögensgegenstand.[17] Die daraus resultierenden, sogenannten „Noise trader shocks" bewirken dadurch zumindest im Zeitpunkt $t = 1$ letztendlich einen Preis kleiner als V.[18] Optimistische Noise trader und somit Preise größer als V im Zeitpunkt $t = 1$ werden im Rahmen des Modells nicht betrachtet.

Im Zeitpunkt $t = 2$ sind die Noise trader entweder weiterhin pessimistisch gegenüber dem speziellen Vermögensgegenstand eingestellt und verursachen einen weiteren Noise trader shock oder sie erlangen bereits in diesem Zeitpunkt Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes. Spätestens im Zeitpunkt $t = 3$ ist den Noise tradern der Grundwert V des Vermögensgegenstandes jedoch bekannt.

Sobald die Noise trader Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes erlangen, stellt sich dann auch ein Preis in Höhe von V für den Vermögensgegenstand ein und die Arbitragemöglichkeit verschwindet.[19]

Modelle mit Noise tradern zählen zur Klasse der sogenannten „Behavioral Finance" Modelle.[20] Diese Modelle unterstellen im Gegensatz zu klassischen Modellen beispielsweise nicht nur einen „repräsentativen" Investor, sondern berücksichtigen mehrere, unterschiedliche Gruppen von Investoren. Die Noise trader werden in diesen Modellen meistens als Gegenpol zu den rational handelnden Investoren aufgefasst und teilweise als „Irrational trader" angesehen. Noise trader mit Irrational tradern gleichzusetzen, scheint jedoch etwas zu streng zu sein. Black (1986) befasst sich in seiner Ausarbeitung etwas genauer mit der Bedeutung des Wortes noise und dem Noise trader: „Noise trading is trading on noise as if it were information".[21] Dies ist meiner Meinung nach eine

[17] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38.

[18] Vgl. dazu Abschnitt 2.2. Die Unterbewertung ist hier der Investitionsanreiz für die Arbitrageure.

[19] Erlangen die Noise trader bereits im Zeitpunkt $t = 2$ Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes, dann entspricht dies einem „vorgezogenen" Zeitpunkt $t = 3$ und die Preisgleichung nach Abschnitt 2.4.2 besitzt bereits Gültigkeit im Zeitpunkt $t = 2$.

[20] Weitere bekannte Modelle, in denen Noise trader eine entscheidende Rolle spielen, finden sich beispielsweise in De Long et al. (1990) und Daniel et al. (1998).

[21] Vgl. Black (1986), S. 531. Rationale Investoren werden daher auch oft als „Information trader" bezeichnet. Eine ähnliche Erklärung zum Noise trader findet sich in Shleifer (2000), S. 33.

etwas treffendere Charakterisierung der Noise trader. Nach Black (1986) denken Noise trader somit, dass sie auf Basis von Informationen handeln, erkennen jedoch nicht, dass es sich in Wahrheit nicht um Informationen handelt, sondern nur um „noise“. Somit könnte es sich bei Noise tradern auch um Investoren handeln, die eingehende Informationen falsch auslegen oder falsch deuten.[22]

Alternativ kann im vorliegenden Modell auch beispielsweise davon ausgegangen werden, dass ein Liquiditätsproblem anstelle der pessimistischen Einstellung der Noise trader vorliegt: Aufgrund eines Liquiditätsbedarfs sind die Noise trader dazu gezwungen, ihre Positionen zu reduzieren. Durch die geringere Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand ergibt sich im Zeitpunkt $t = 1$ ein geringerer Preis. Dieser Liquiditätsbedarf verschwindet dann spätestens im Zeitpunkt $t = 3$ gleichzeitig mit der Kenntnis vom Grundwert V, liegt aber unter Umständen auch noch im Zeitpunkt $t = 2$ vor.[23] Da der Begriff „Liquidity trader“ bereits in einem anderen Zusammenhang in Modellen zum Insiderhandel Verwendung findet, wird weiterhin die Bezeichnung Noise trader benutzt, auch wenn die Noise trader hier wegen eines Liquiditätsbedarfs handeln sollten.[24]

Die Noise trader stellen im Rahmen des Modells jedoch nur eine passive Gruppe dar: Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ ist in der späteren Modellierung exogen vorgegeben und bei dem Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ handelt es sich um eine Zufallsvariable. Insofern ist auch die Risikoeinstellung der Noise trader hier nicht von Bedeutung.[25]

2.1.3 Arbitrageure

Die Arbitrageure besitzen analog zu den Noise tradern einen direkten, eigenen Zugang zu dem speziellen Marktsegment. Allerdings besitzen sie keine eigenen liquiden Mittel, so dass für den Handel in dem speziellen Marktsegment auf die liquiden Mittel der Investoren angewiesen sind.[26]

[22] In Daniel et al. (1998) ist dies der Fall: Der Noise trader unterschätzt das Risiko eines Preissignals, wohingegen der rationale Investor dieses Risiko richtig einschätzt.

[23] Diese Auslegung wird in den nachfolgenden Abschnitten an den entsprechenden Stellen noch einmal genauer aufgegriffen.

[24] In Biais/Hillion (1994) wird beispielsweise zwischen einem Insider und Liquidity tradern unterschieden. Der Insider besitzt einen Informationsvorsprung gegenüber den Liquidity tradern und die Liquidity trader handeln aus Hedgingmotiven.

[25] In Shleifer/Vishny (1990), der Grundlage für das hier betrachtete Modell aus Shleifer/Vishny (1997), werden die Noise trader als risikoneutral eingestuft (vgl. Shleifer/Vishny (1990), S. 150).

[26] Zusätzlich verfügen die Arbitrageure noch über eine sogenannte „borrowing capacity“. Diese wird im weiteren Verlauf des Artikels aber nicht mehr explizit erwähnt. Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38.

Die Arbitrageure sind Experten bezüglich des speziellen Vermögensgegenstandes und agieren nur in diesem speziellen Marktsegment. Ihre Spezialisierung bzw. ihr Wissensvorsprung zeichnet sich dadurch aus, dass ihnen der Grundwert V des Vermögensgegenstandes in allen drei Zeitpunkten des Modells bekannt ist.[27] Dadurch sind die Arbitrageure in der Lage, eine Fehlbewertung des Vermögensgegenstandes zu identifizieren und entsprechend auszunutzen.

Die Entlohnung der Arbitrageure durch die Investoren erfolgt prozentual vom erzielten Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$. Das Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ spiegelt dabei die Wertentwicklung des Investitionsbetrages vom Zeitpunkt $t = 1$ unter Berücksichtigung entsprechender Mittelanpassungen durch die Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ wider. Die Arbitrageure sind demnach bestrebt, möglichst eine positive Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ zu erzielen, damit ihnen im Zeitpunkt $t = 2$ noch mehr Mittel seitens der Investoren zur Verfügung gestellt werden. Bestenfalls können sie diesen aufgestockten Betrag dann noch einmal gewinnbringend bis zum Zeitpunkt $t = 3$ investieren.

Die Arbitrageure müssen somit entscheiden, wie viel sie von dem Investitionsbetrag, der ihnen durch die Investoren zur Verfügung gestellt wird, im jeweiligen Zeitpunkt investieren. Die Arbitrageure sind somit im Modell von Shleifer/Vishny (1997) die aktive Gruppe bzw. die Entscheider, und die Zielfunktion im Rahmen des Modells ist letztendlich die Zielfunktion der Arbitrageure.[28] Um eine optimale Entscheidung treffen zu können, benötigen die Arbitrageure jedoch noch weitere Informationen:

Von den Investoren ist den Arbitrageuren die Update-Funktion bekannt. Dadurch kennen sie die Reaktion der Investoren auf jede mögliche relative Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$.[29] Da das Verhalten der Investoren durch die Update-Funktion vorgegeben wird, nehmen die Investoren wie die Noise trader modelltechnisch eher eine passive Rolle ein.

Von den Noise tradern kennen die Arbitrageure die Gestalt der Nachfragefunktionen.[30] Da in dem speziellen Marktsegment nur die Noise trader und die Arbitrageure agieren,

[27] Die Darstellung von „risk arbitrage“ in Form von $\tilde{V}$ wird in Shleifer/Vishny (1997) und auch in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

[28] Vgl. Abschnitt 2.4.3.

[29] Die Update-Funktion kann hier als eine Art vertragliche Fixierung der Anpassungsmöglichkeiten aufgefasst werden: Im Vorfeld bzw. im Zeitpunkt $t = 1$ wird schon vertraglich festgehalten, wie hoch der Zufluss bzw. der Abfluss an liquiden Mitteln seitens der Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ bei einer bestimmten Wertentwicklung ausfällt.

[30] Dies kann beispielsweise durch die Spezialisierung der Arbitrageure erklärt werden.

sind die Arbitrageure durch die Kenntnis der Gestalt der Nachfragefunktionen auch mit der Preisbildung in diesem Marktsegment vertraut. Zusätzlich ist den Arbitrageuren noch der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ bekannt.[31] Die einzige Unsicherheit im Rahmen des Modells stellt letztendlich der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ dar.[32]

Die Arbitrageure handeln rational auf Basis der ihnen vorliegenden Informationen und verhalten sich risikoneutral.[33] Durch die Risikoneutralität maximieren die Arbitrageure letztendlich den Erwartungswert des Endvermögens im Zeitpunkt $t = 3$.[34]

2.1.4 Zur Unterscheidung von Marktteilnehmern

Das Modell kommt letztendlich nur durch die Einteilung in unterschiedliche Gruppen von Marktteilnehmern zustande. Dabei spielt insbesondere die Trennung von Wissen (Arbitrageure) und Ressourcen (Investoren) eine entscheidende Rolle:

Die Arbitrageure kennen den Grundwert des speziellen Vermögensgegenstandes, besitzen aber keine eigenen liquiden Mittel, um dieses Wissen auszunutzen. Sie sind somit auf die finanzielle Mithilfe der Investoren angewiesen. Die Investoren hingegen besitzen kein Fachwissen hinsichtlich des Vermögensgegenstandes. Sie müssen sich dementsprechend bei ihrem Investment auf die Arbitrageure und deren Fähigkeiten verlassen.[35]

Die Arbitrageure sind daher dazu gezwungen, die Investoren davon zu überzeugen, finanzielle Mittel zur Verfügung zu stellen. Abgesehen von einer gewissen Anfangsausstattung im Zeitpunkt $t = 1$ spielt dabei insbesondere der Zeitpunkt $t = 2$ eine besondere Rolle, da die Entlohnung der Arbitrageure in Abhängigkeit vom erzielten Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ erfolgt.[36] Denn im Zeitpunkt $t = 2$ besitzen die Investoren die Möglichkeit, ihr Investment anzupassen:

[31] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38.

[32] Der zweite Noise trader shock ist in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben (vgl. Tabelle 2.1, S. 51). Unter Berücksichtigung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung können die Arbitrageure dann eine optimale Entscheidung treffen.

[33] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38. Die Möglichkeit einer anderen Risikoeinstellung der Arbitrageure wird in Shleifer/Vishny (1997) und auch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

[34] Vgl. Abschnitt 2.4.3.

[35] Dies gilt auch für die anderen Marktsegmente, in denen Arbitrageure aktiv sind und Investoren liquide Mittel zur Verfügung stellen.

[36] Der im Zeitpunkt $t = 1$ von den Investoren zur Verfügung gestellte Betrag ist im Modell exogen vorgegeben (vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39).

In Abhängigkeit von der Wertentwicklung ihres im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrages stellen die Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ noch weitere Mittel zur Verfügung oder sie ziehen entsprechend Mittel ab. Werden im letzteren Fall alle Mittel abgezogen, besitzen die Arbitrageure keine Möglichkeit mehr, die Arbitragemöglichkeit auszunutzen. Und da ein Mittelabzug nur bei einer negativen Preisentwicklung erfolgt, ist gerade im Fall eines vollständigen Mittelabzugs die Arbitragemöglichkeit umso attraktiver.[37]

Die Gefahr des vollständigen Mittelabzugs im Zeitpunkt $t = 2$ könnte die Arbitrageure dazu veranlassen, im Zeitpunkt $t = 1$ nicht zu investieren und die Arbitragemöglichkeit nur vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ auszunutzen. Dadurch verändert sich der Investitionsbetrag vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ nicht, wodurch dann im Zeitpunkt $t = 2$ aber auch keine weiteren Mittel seitens der Investoren zur Verfügung gestellt werden. Zudem besteht die Möglichkeit, dass die Noise trader bereits im Zeitpunkt $t = 2$ Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes erlangen und die Arbitragemöglichkeit verschwindet, bevor sie überhaupt ausgenutzt werden kann.

Die langfristige Arbitragemöglichkeit vom Zeitpunkt $t = 1$ bis zum Zeitpunkt $t = 3$ birgt das Risiko eines (vollständigen) Mittelabzugs im Zeitpunkt $t = 2$ und spricht daher eher für ein geringes Investment im Zeitpunkt $t = 1$. Tritt dann jedoch nur eine kurzfristige Arbitragemöglichkeit vom Zeitpunkt $t = 1$ bis zum Zeitpunkt $t = 2$ auf, wäre ein hohes Investment im Zeitpunkt $t = 1$ von Vorteil gewesen. Die Arbitrageure müssen daher diese beiden Risiken bei ihrer optimalen Investitionsentscheidung berücksichtigen und gegeneinander abwägen.[38]

Die Verhaltensweisen der verschiedenen Marktteilnehmer werden nun zeitpunktbezogen in den nachfolgenden Abschnitten formalisiert.

2.2 Der Zeitpunkt $t = 1$

Der erste Unterabschnitt 2.2.1 befasst sich mit der Nachfragefunktion der Noise trader und der Nachfragefunktion der Arbitrageure. Aus den Nachfragefunktionen wird die Preisgleichung bezogen auf den Zeitpunkt $t = 1$ abgeleitet, welche ausführlich in Unterabschnitt 2.2.2 besprochen wird.

[37] Vgl. dazu insbesondere die nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels.

[38] Mit den beiden Risiken sind hier der (vollständige) Mittelabzug und das vorzeitige Verschwinden der Arbitragemöglichkeit im Zeitpunkt $t = 2$ gemeint.

2.2.1 Die Nachfragefunktionen

Es bezeichne p_1 den Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 1$.[39] Die Nachfrage der Noise trader im Zeitpunkt $t = 1$ ist dann wie folgt gegeben:

$$N_1 = \frac{V - S_1}{p_1}. \tag{2.1}$$

Die pessimistische Einstellung der Arbitrageure gegenüber dem Vermögensgegenstand wird im Modell durch den Noise trader shock $S_1 > 0$ dargestellt.[40] Je höher S_1 ausfällt, umso größer ist der Pessimismus der Noise trader gegenüber dem Vermögensgegenstand bzw. umso größer ist der Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader, falls S_1 hier alternativ als Indikator für einen Liquiditätsbedarf aufgefasst wird. S_1 ist den Arbitrageuren bekannt und im Modell exogen vorgegeben.

Die Investoren stellen den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 1$ den Betrag F_1 zur Verfügung, welcher ebenfalls exogen vorgegeben ist. Es gilt

$$F_1 > 0, \tag{2.2}$$

denn Shleifer/Vishny (1997) gehen davon aus, dass die Arbitrageure bereits in der Vergangenheit ausreichend Gewinne erzielt haben, um nun die Investoren überzeugen zu können, einen Betrag $F_1 > 0$ zur Verfügung zu stellen.[41]

Die Arbitrageure müssen nun entscheiden, wie viel sie von F_1 in den Vermögensgegenstand investieren.[42] Dieser von den Arbitrageuren letztendlich investierte Betrag wird mit D_1 bezeichnet. Es gilt somit $0 \leq D_1 \leq F_1$. Die Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ ist wie folgt gegeben:

$$A_1 = \frac{D_1}{p_1}. \tag{2.3}$$

Die durchaus zulässige Entscheidung, im Zeitpunkt $t = 1$ keine Mittel zu investieren und $D_1 = 0$ zu wählen, führt im Modell letztendlich dazu, dass den Arbitrageuren

[39] Zur genaueren Beschreibung von p_1 vgl. Abschnitt 2.2.2. Insbesondere gilt $p_1 > 0$ nach Satz 12.

[40] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 38 und insbesondere zu $S_1 > 0$ vgl. Shleifer/Vishny (1990), S. 150.

[41] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40.

[42] Die genaue Darstellung des Optimierungsproblems des Arbitrageurs erfolgt im Anschluss an die Besprechung des Zeitpunktes $t = 3$ in Abschnitt 2.4.3.

im Zeitpunkt $t = 2$ wiederum der Betrag F_1 zur Verfügung gestellt wird.[43] Daher würde aus $F_1 = 0$ nicht nur zwangsweise direkt $D_1 = 0$ folgen, sondern auch, dass den Arbitrageuren im nachfolgenden Zeitpunkt $t = 2$ ebenfalls keine Mittel zur Verfügung gestellt werden. Die Arbitrageure hätten somit keine Möglichkeit, überhaupt in dem speziellen Marktsegment zu agieren. Daher ist Bedingung (2.2) die Grundvoraussetzung dafür, dass überhaupt eine Nachfrage seitens der Arbitrageure im Rahmen des Modells möglich ist.

Die Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand muss mit dem Angebot übereinstimmen. Shleifer/Vishny (1997) treffen die Annahme, dass nur ein Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V gehandelt wird.[44] Somit ergibt sich für die gesamte Nachfrage die Bedingung:

$$N_1 + A_1 = \frac{V - S_1}{p_1} + \frac{D_1}{p_1} = \frac{V - S_1 + D_1}{p_1} = 1. \tag{2.4}$$

Werden mehrere, identische Vermögensgegenstände in dem speziellen Marktsegment gehandelt, die jeweils einen Grundwert in Höhe von V aufweisen, müssen die Nachfragefunktionen entsprechend angepasst werden. Werden beispielsweise n Vermögensgegenstände gehandelt, dann verändert sich (2.1) zu $N_1 = n \cdot \frac{V - \frac{1}{n} S_1}{p_1}$ und (2.3) bekommt die Gestalt $A_1 = n \cdot \frac{\frac{1}{n} D_1}{p_1}$. Mit $N_1 + A_1 = n$ folgt daraus dann für die gesamte Nachfrage die Bedingung $n \cdot \frac{V - \frac{1}{n} S_1}{p_1} + n \cdot \frac{\frac{1}{n} D_1}{p_1} = n \Leftrightarrow \frac{V - \frac{1}{n} S_1 + \frac{1}{n} D_1}{p_1} = 1$. Mit Hilfe dieser Zusammenhänge kann nun im nächsten Abschnitt der Preis p_1 näher bestimmt werden.

2.2.2 Die Preisgleichung in $t = 1$

Aus der Bedingung (2.4) für die Gesamtnachfrage folgt unmittelbar die Preisgleichung für den Zeitpunkt $t = 1$:

$$p_1 = V - S_1 + D_1. \tag{2.5}$$

[43] Vgl. Satz 15 in Verbindung mit (3.1) und Gleichung (2.24).

[44] Vgl. Shleifer/Vishny (1990), S. 150: „each stock [..] is in unit supply“. In dem Grundlagenartikel werden zwei Unternehmen betrachtet, welche jeweils nur ein Projekt durchführen. Die Rechte an dem positiven Einzahlungsüberschuss aus dem jeweiligen Projekt in einem späteren Zeitpunkt sind durch Wertpapiere verbrieft. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass für jedes Unternehmen nur ein Wertpapier existiert. Vgl. auch Arnold (2009), S. 525: „The supply of the asset is inelastic and normalized to unity.“.

Als Preisabweichung im Zeitpunkt $t = 1$ wird dabei die Differenz zwischen dem Grundwert V des Vermögensgegenstandes und dem Preis p_1 bezeichnet. Für diese Preisabweichung gilt:

$$V - p_1 = V - (V - S_1 + D_1) = S_1 - D_1. \tag{2.6}$$

Mit n identischen Vermögensgegenständen gilt entsprechend $p_1 = V - \frac{1}{n}S_1 + \frac{1}{n}D_1$. Zur näheren Erläuterung der Beziehungen zwischen den einzelnen Gleichungen zunächst ein kleines Zahlenbeispiel:

Es sei $V = 7$[GE/Stück], $S_1 = 200$[GE] und $F_1 = 150$[GE].[45] Es werden $n = 50$[Stück] identische Vermögensgegenstände in dem speziellen Marktsegment gehandelt und die Arbitrageure entschließen sich dazu, $D_1 = 100$[GE] zu investieren. Daraus folgt ein Preis $p_1 = 7 - \frac{1}{50} \cdot 200 + \frac{1}{50} \cdot 100 = 5$[GE/Stück]. Die Nachfrage der Noise trader beträgt demnach $N_1 = 50 \cdot \frac{7 - \frac{1}{50} \cdot 200}{5} = 30$[Stück] und die Nachfrage der Arbitrageure ergibt sich als $A_1 = 50 \cdot \frac{\frac{1}{50} \cdot 100}{5} = 20$[Stück]. Die Noise trader investieren somit insgesamt $N_1 \cdot p_1 = 30 \cdot 5 = 150$[GE] und die Arbitrageure $D_1 = A_1 \cdot p_1 = 20 \cdot 5 = 100$[GE]. Der Investitionsbetrag der Noise trader lässt sich dabei wie folgt erklären:

Vor dem Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ fragen die Noise trader den Vermögensgegenstand komplett alleine nach, da die Arbitrageure erst im Zeitpunkt $t = 1$ liquide Mittel von den Investoren zur Verfügung gestellt bekommen. Der Preis des Vermögensgegenstandes beträgt folglich $V = 7$[GE/Stück] und die Noise trader sind mit $50 \cdot 7 = 350$[GE] investiert. Durch den Noise trader shock in Höhe von $S_1 = 200$[GE] sind die Noise trader dann jedoch im Zeitpunkt $t = 1$ nur noch bereit, einen Betrag in Höhe von $350 - 200 = 150$[GE] zu investieren.

Da die Aussagekraft des Modells nicht davon abhängt, wie viele identische Vermögensgegenstände in dem speziellen Marktsegment gehandelt werden, wird im Folgenden analog zu Shleifer/Vishny (1997) die Anzahl $n = 1$ gewählt. Um in den Einheiten konsistent zu bleiben, müssten die rechten Seiten der Gleichungen (2.1) und (2.3) eigentlich noch mit dem Faktor $n = 1$[Stück] multipliziert und S_1 bzw. D_1 innerhalb der jeweiligen Gleichung noch durch $n = 1$[Stück] dividiert werden. Um jedoch die Notation möglichst einfach zu halten, gelte stattdessen im Folgenden die Einheit GE anstelle von GE/Stück für den Grundwert V bzw. für den Preis p_1 und die Preise in den nachfolgenden Zeitpunkten. Da sich die Einheiten dann in (2.1) und (2.3) komplett

[45] GE steht hier für Geldeinheit(en) bzw. stellvertretend für eine bestimmte Währung.

herauskürzen, stellen diese nun Anteile dar, welche die jeweilige Gruppe an dem einen Vermögensgegenstand hält.[46] Im weiteren Verlauf wird zudem aus Gründen der Übersichtlichkeit generell auf die Angabe der Einheit GE bei Zahlenbeispielen verzichtet.

Bezogen auf den Zeitpunkt $t = 1$ werden nun in diesem Abschnitt noch der Preis p_1 und die größentechnischen Beziehungen der einzelnen Parameter untereinander etwas ausführlicher analysiert.

SATZ 1 *Der Preis p_1 ist linear in der Entscheidungsvariable D_1. Die Ableitung von p_1 nach D_1 ist eins.*

BEWEIS: Der Grundwert V und der Noise trader shock S_1 sind exogen vorgegeben. Beide Werte sind im gesamten Modell konstant und daher unabhängig von D_1. Da D_1 in der Preisgleichung (2.5) den Vorfaktor 1 besitzt und den Exponenten 1 besitzt, ist p_1 linear in der Entscheidungsvariable D_1 mit $\frac{d\,p_1}{d\,D_1} = 1$. □

Eine Veränderung von D_1 um ΔD_1 ist demnach gleichbedeutend mit einer Veränderung des Preises p_1 um ΔD_1. Das bedeutet, dass durch ein höheres Investment D_1 seitens der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ gleichzeitig auch der Preis p_1 steigt. Dadurch wird gleichzeitig auch der Anreiz schwächer, die Arbitragemöglichkeit auszunutzen, da die Preisabweichung $V - p_1$ nach (2.6) durch ein höheres p_1 bzw. durch ein höheres Investment D_1 geringer wird.[47] In Shleifer/Vishny (1997) findet sich zur Preisbildung in Verbindung mit den Arbitrageuren die folgende Anmerkung:[48] „[...] within each segment there are many arbitrageurs, so that no arbitrageur can affect asset prices in a segment.“ Der einzelne Arbitrageur hat somit keinen Einfluss auf die Preisbildung. Trotzdem kann ein Einfluss über das Investment D_1 auf die Preisbildung im Zeitpunkt $t = 1$ nach Satz 1 nicht abgestritten werden. Shleifer/Vishny (1997) erklären dies wie folgt:[49] „[...] all arbitrageurs in a given segment are taking the same positions [...].“ In jedem speziellen Segment gibt es nur eine spezielle Arbitrage-Strategie. Das heißt, alle Arbitrageure in diesem Segment verhalten sich hinsichtlich der Strategie gleich. Wird

[46]Bei diesen Anteilen könnte es sich beispielsweise um Fondsanteile handeln. In diesem Fall ist dann auch die Teilbarkeit des einen Vermögensgegenstandes entsprechend realistischer.
[47]Unter Berücksichtigung dieses Zusammenhanges muss in der weiteren Analyse des Modells die Möglichkeit eines Vollinvestments im Hinblick auf dessen Optimalität noch genauer hinterfragt werden. Vgl. dazu insbesondere Kapitel 4.
[48]Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.
[49]Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40.

später die Zielfunktion betrachtet, so stellt sich heraus, dass es ein optimales D_1 gibt, welches das gesamte Investment der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ widerspiegelt. Und dieses gesamte Investment D_1 aller Arbitrageure besitzt dann einen Einfluss auf die Preisbildung. Folglich kann der einzelne Arbitrageur als Preisnehmer angesehen werden, die Arbitrageure als Gruppe sind aber Preisbestimmer bzw. Preisgeber, denn die Höhe ihres gemeinsamen Investments D_1 trägt im Zeitpunkt $t = 1$ maßgeblich zur Gesamthöhe des Preises p_1 bei.[50]

Satz 2 *Gilt $p_1 > 0$ und $S_1 < V$, dann führt die Wahl eines höheren Investments D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ zu einer Zunahme der Nachfrage der Arbitrageure und zu einer Abnahme der Nachfrage der Noise trader.*

Beweis: Nach (2.1) beträgt die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V-S_1}{p_1}$ im Zeitpunkt $t = 1$. Durch die Wahl eines höheren Investments D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ steigt nach Satz 1 der Preis p_1. Folglich nimmt der positive Nenner zu, während der durch $S_1 < V$ ebenfalls positive Zähler konstant bleibt. Demnach nimmt die Nachfrage der Noise trader N_1 ab. Nach (2.4) gilt für die Nachfrage der Noise trader N_1 und für die Nachfrage der Arbitrageure A_1 der Zusammenhang $N_1 + A_1 = 1$ bzw. $A_1 = 1 - N_1$. Da die Nachfrage der Noise trader N_1 mit steigendem D_1 abnimmt, folgt aus $A_1 = 1 - N_1$, dass die Nachfrage der Arbitrageure A_1 zunimmt.[51] □

Im Folgenden wird nun die Preisgleichung (2.5) hinsichtlich der Größenverhältnisse der exogenen Größen V, S_1 und F_1 zueinander näher betrachtet. Die exogene Größe F_1 ist zwar nicht direkt in der Preisgleichung (2.5) ersichtlich. Da jedoch D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegt, spielt der von den Investoren im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 als betragliche Obergrenze der Entscheidungsvariable D_1 hier eine entscheidende Rolle. Zudem wird auf das Vorzeichen und auf die sich im Rahmen des Modells ergebende obere bzw. untere Grenze des Preises p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ näher eingegangen. Shleifer/Vishny (1997) fordern im Zusammenhang mit der Preisgleichung

[50] Inwieweit eine Optimierung möglich ist, wenn mehrere Arbitrageure in einem Marktsegment agieren, wir zu Beginn von Kapitel 4 aufgegriffen.

[51] Alternativ kann eine Zunahme der Nachfrage der Arbitrageure A_1 auch wie folgt erklärt werden: Nach (2.3) folgt für die Nachfrage der Arbitrageure A_1, dass der nicht negative Zähler ($D_1 \geq 0$) immer kleiner als der durch $S_1 < V$ positive Nenner ($p_1 = V - S_1 + D_1$) ist. Die Wahl eines höheren Investments D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ hat zur Folge, dass in (2.3) sowohl der Zähler als auch der Nenner um den gleichen Betrag ΔD_1 zunehmen. Da der Zähler kleiner als der Nenner ist, erhöht sich der Zähler prozentual stärker als der Nenner. Daher steigt die Nachfrage der Arbitrageure A_1 an.

im Zeitpunkt $t = 1$ die Gültigkeit der nachstehenden Nebenbedingung für die beiden exogenen Größen F_1 und S_1:[52]

$$F_1 < S_1. \tag{2.7}$$

Mit der Einhaltung von (2.7) ergibt sich unmittelbar eine obere Grenze für den Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$:

SATZ 3 *Durch die Einschränkung $F_1 < S_1$ liegt im Zeitpunkt $t = 1$ eine Unterbewertung des Vermögensgegenstandes vor und es gilt $p_1 < V$.*[53]

BEWEIS: Die exogenen Größen V und S_1 sind positiv und unabhängig von D_1. Mit $D_1 = 0$ folgt $p_1 = V - S_1 + 0 = V - S_1 < V$ nach (2.5) und mit $D_1 = F_1$ unter zusätzlicher Berücksichtigung von (2.7) gilt $p_1 = V - S_1 + F_1 < V - S_1 + S_1 = V$. Nach Satz 1 ist der Preis p_1 linear in der Entscheidungsvariable D_1. Für $D_1 \in [0, F_1]$ ist der Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ somit immer kleiner als V. □

Da die Arbitrageure den Grundwert V des Vermögensgegenstandes kennen, besteht für sie der Anreiz, die Unterbewertung auszunutzen. Durch die Nebenbedingung $F_1 < S_1$ ist letztendlich gewährleistet, dass eine Arbitragemöglichkeit im Rahmen des Modells vorliegt, denn mit $D_1 \leq F_1 < S_1$ ist die Preisabweichung nach (2.6) immer positiv.

$F_1 \geq S_1$ wird entsprechend ausgeschlossen, da sonst nicht für alle zulässigen Werte von D_1 eine Arbitragemöglichkeit im Zeitpunkt $t = 1$ vorliegen würde. Mit $F_1 < S_1$ nach (2.7) und $F_1 > 0$ nach (2.2) ist daher insbesondere auch $S_1 \leq 0$ nicht möglich.[54]

Zur weiteren Charakterisierung der Preisgleichung im Zeitpunkt $t = 1$ ist eine Analyse des Verhältnisses der exogenen Größen S_1 und V zueinander notwendig. Als Erstes wird der Fall $S_1 > V$ in Zusammenhang mit der Entscheidungsvariable D_1 betrachtet:

SATZ 4 *Gilt $S_1 > V$ und $D_1 = 0$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 1$ ein negativer Preis für den Vermögensgegenstand. Nur die Noise trader fragen den Vermögensgegenstand im Zeitpunkt $t = 1$ nach und seitens der Arbitrageure besteht keine Nachfrage.*

[52] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.
[53] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.
[54] Optimistische Noise trader werden nicht betrachtet. Vgl. dazu auch Abschnitt 2.1.2.

BEWEIS: Mit $S_1 > V$ und $D_1 = 0$ folgt aus (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + 0 = V - S_1 < 0$. Mit $D_1 = 0$ folgt aus (2.1) in Verbindung mit (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V-S_1}{p_1} = \frac{V-S_1}{V-S_1+D_1} = \frac{V-S_1}{V-S_1} = 1$. Aus (2.3) folgt für die Nachfrage der Arbitrageure $A_1 = \frac{D_1}{p_1} = \frac{0}{p_1} = 0$. $\square$

Die Arbitrageure besitzen im Modell im Zeitpunkt $t = 1$ die Möglichkeit, keine Mittel zu investieren und dementsprechend $D_1 = 0$ zu wählen. Folglich fragen in so einem Fall die Arbitrageure den Vermögensgegenstand nicht nach und die komplette Nachfrage besteht nach Satz 4 nur seitens der Noise trader. Dass die Noise trader trotz ihrer pessimistischen Einstellung den Vermögensgegenstand komplett nachfragen, lässt sich über die Preisgleichung (2.5) erklären:

Ausgehend von einem exogen vorgegebenen Grundwert V und einem gegebenen Noise trader shock S_1 nimmt der Preis nach (2.5) für $D_1 = 0$ ein Minimum an. Das bedeutet, für $D_1 = 0$ ist die Preisabweichung $V - p_1 = S_1 - D_1$ nach (2.6) maximal. Eine noch höhere Preisabweichung wäre nur durch ein höheres S_1 möglich bzw. je größer der Noise trader shock S_1 ausfällt, umso geringer ist im Fall $D_1 = 0$ der Preis p_1.

Die Noise trader sind somit zum Preis $p_1 = V - S_1$ bereit, die komplette Nachfrage nach dem Gegenstand alleine zu stellen. Ein $D_1 > 0$ führt dann zu einem höheren Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ und nach Satz 2 für $p_1 > 0$ auch zu einer Abnahme der Nachfrage der Noise trader.

Diese Eigenschaften der Nachfragefunktionen nach Satz 2 sind elementar für die Aussagekraft des Modells. Daher gilt es zunächst zu prüfen, inwiefern negative Preise p_1 diesen Ansprüchen überhaupt gerecht werden können, bevor die Sinnhaftigkeit negativer Preise an sich im Rahmen dieses Modells diskutiert wird. Im Spezialfall nach Satz 4 sind die Eigenschaften von Satz 2 hinsichtlich der Nachfragefunktionen bei Vorliegen eines negativen Preises p_1 nicht zu überprüfen, da nur der Fall $D_1 = 0$ betrachtet wird und somit eine Variation von D_1 hier nicht möglich ist. Im Folgenden werden nun Fälle betrachtet, in denen $D_1 > 0$ gilt:

SATZ 5 *Gilt $S_1 > V$ und $0 < D_1 < S_1 - V$ unter der zusätzlichen Restriktion $D_1 \leq F_1$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 1$ ein negativer Preis für den Vermögensgegenstand. Seitens der Noise trader besteht im Zeitpunkt $t = 1$ eine Nachfrage größer als eins nach dem Vermögensgegenstand und die Nachfrage der Arbitrageure ist negativ.*

BEWEIS: Mit $D_1 < S_1 - V$ trifft nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 < V - S_1 + S_1 - V = 0$ zu. Mit $D_1 > 0$ folgt im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 > V - S_1$. Somit ist $V - S_1 < p_1 < 0$ und nach (2.1) gilt für die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V-S_1}{p_1} > 1$. Mit $p_1 < 0$ und $D_1 > 0$ folgt aus (2.3) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Arbitrageure $A_1 = \frac{D_1}{p_1} < 0$. □

Unter der Annahme, dass genau ein Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V gehandelt wird, muss eine Nachfrage größer als eins generell hinterfragt werden. Für $0 < D_1 < S_1 - V$ im Fall $S_1 > V$ ergibt sich jedoch auch ein Widerspruch zu den elementaren Eigenschaften der Nachfragefunktionen nach Satz 2:

Mit steigendem Investment D_1 seitens der Arbitrageure nimmt die Nachfrage der Noise trader N_1 zu. Dies liegt daran, dass der negative Zähler $V - S_1$ der Nachfragefunktion der Noise trader konstant bleibt, wohingegen sich der negative Preis p_1 im Nenner mit steigendem Investment D_1 einem Preis von null annähert. Dadurch wird die Nachfrage insgesamt größer bzw. strebt für Werte von D_1 nahe und kleiner $S_1 - V$ gegen unendlich. Dementsprechend wird gleichzeitig die Nachfrage der Arbitrageure immer kleiner, da nach (2.4) für die Gesamtnachfrage $N_1 + A_1 = 1$ gilt. Die elementaren Eigenschaften der Nachfragefunktionen werden praktisch umgekehrt:

Da ein steigendes Investment D_1 nach Satz 1 zu einem höheren Preis p_1 führt, müsste dadurch der Vermögensgegenstand eigentlich unattraktiver für die Noise trader werden. Für $0 < D_1 < S_1 - V$ im Fall $S_1 > V$ nimmt jedoch mit steigendem Investment D_1 die Nachfrage der Noise trader noch zu. Allgemein fragen die Noise trader den Vermögensgegenstand trotz einer sehr hohen pessimistischen Einstellung S_1 relativ stark nach. Die Nachfrage der Arbitrageure ist zudem negativ, obwohl eine sehr hohe Preisabweichung vom Fundamentalwert vorliegt. Dies führt letztendlich im vorliegenden Fall zu einer kompletten Hinterfragung der Funktionsweise des Modells.

SATZ 6 *Gilt $S_1 > V$ und $D_1 = S_1 - V \leq F_1$, dann trifft $p_1 = 0$ zu und die Nachfragefunktionen (2.1), (2.3) und (2.4) sind nicht definiert.*

BEWEIS: Mit $D_1 = S_1 - V$ gilt nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 = V - S_1 + (S_1 - V) = 0$. Da p_1 jeweils alleine im Nenner der Nachfragefunktionen (2.1), (2.3) und (2.4) steht, sind diese mit $p_1 = 0$ undefiniert. □

Der Fall $p_1 = 0$ ist generell zu vermeiden, da er nicht nur zur Undefiniertheit der Nachfragefunktionen führen würde, sondern letztendlich durch $p_1 = 0$ auch die Zielfunktion undefiniert sein würde.[55] Somit bleibt noch der folgende abschließende Fall:

Satz 7 *Gilt $S_1 > V$ und $D_1 > S_1 - V$ unter der zusätzlichen Restriktion $D_1 \leq F_1$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 1$ ein positiver Preis für den Vermögensgegenstand. Seitens der Noise trader besteht im Zeitpunkt $t = 1$ eine negative Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand und die Nachfrage der Arbitrageure ist größer als eins.*

Beweis: Mit $D_1 > S_1 - V$ trifft nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 > V - S_1 + S_1 - V = 0$ zu. Durch $S_1 > V$ gilt $V - S_1 < 0$ und mit $p_1 > 0$ folgt nach (2.1) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V - S_1}{p_1} < 0$. Mit $V - S_1 < 0$ trifft nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 < D_1$ zu. Da somit $0 < p_1 < D_1$ gilt, folgt aus (2.3) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Arbitrageure $A_1 = \frac{D_1}{p_1} > 1$. □

Für $D_1 > S_1 - V$ im Fall $S_1 > V$ ergibt sich auch hier ein Widerspruch zu den elementaren Eigenschaften der Nachfragefunktionen nach Satz 2, denn mit steigendem Investment D_1 seitens der Arbitrageure nimmt hier die Nachfrage der Noise trader im Zeitpunkt $t = 1$ analog zum Fall im Satz 5 trotzdem zu:

Der Preis p_1 im Nenner ist nun zwar positiv und wird mit steigendem Investment D_1 nach Satz 1 auch größer. Der konstante Zähler der Nachfragefunktion N_1 ist jedoch negativ. Daher nimmt mit wachsendem Nenner die Nachfrage nicht ab, sondern zu. Wegen der Gesamtnachfrage nach (2.4) nimmt dementsprechend die Nachfrage der Arbitrageure mit steigendem Investment D_1 gleichzeitig ab.

Bis auf den Sonderfall mit $D_1 = 0$ nach Satz 4 führt der Fall $S_1 > V$ für $0 < D_1 \leq F_1$ zu Problemen mit den Nachfragefunktionen. Die im Modell angenommenen Eigenschaften werden für Investments D_1 nach Satz 5 und nach Satz 7 praktisch umgekehrt. Trifft $p_1 = 0$ nach Satz 6 zu, dann sind die Nachfragefunktionen sogar undefiniert. Mathematisch lässt sich dies wie folgt erklären:

Satz 8 *Gilt $S_1 > V$, dann besitzt die Nachfragefunktion der Noise trader N_1 im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit von p_1 an der Stelle $p_1 = 0$ einen Pol mit Vorzeichen-*

[55] Vgl. Abschnitt 2.4.3, insbesondere Gleichung (2.46).

wechsel.[56] *Für $p_1 < 0$ ist der linksseitige Grenzwert $\lim_{p_1 \to 0^-} N_1 = +\infty$ und für $p_1 > 0$ ist der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{p_1 \to 0^+} N_1 = -\infty$. Für $D_1 = 0$ gilt $N_1 = 1$ und für $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V)$ ist $N_1 = -1$.*[57] *Für $p_1 \neq 0$ ist die Nachfragefunktion der Noise trader N_1 streng monoton wachsend, für $p_1 < 0$ ist die Funktion streng konvex und für $p_1 > 0$ streng konkav.*

BEWEIS: Da $S_1 > V$ gilt, ist der konstante Zähler $V - S_1$ der Nachfragefunktion N_1 nach (2.1) unabhängig von p_1 immer negativ. Der Nenner besteht nur aus p_1, daher ist das Vorzeichen des Preises p_1 entscheidend für das Vorzeichen des jeweiligen Grenzwertes. Nähert sich der Preis p_1 im Nenner einem Wert von null, dann strebt der Wert der Nachfragefunktion N_1 wegen des konstanten Zählers betragsmäßig gegen unendlich. Nähert sich der Preis ausgehend von einem negativen Preis p_1 einem Wert von null, dann strebt der Wert der Nachfragefunktion N_1 wegen des negativen Zählers gegen plus unendlich. Nähert sich der Preis ausgehend von einem positiven Preis p_1 einem Wert von null, dann strebt der Wert der Nachfragefunktion N_1 entsprechend gegen minus unendlich. Für $D_1 = 0$ ergibt sich nach (2.1) in Verbindung mit (2.5) für die Nachfragefunktion $N_1 = \frac{V-S_1}{p_1} = \frac{V-S_1}{V-S_1+D_1} = \frac{V-S_1}{V-S_1} = 1$. Im Fall $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V)$ trifft $N_1 = \frac{V-S_1}{V-S_1+2\cdot(S_1-V)} = \frac{V-S_1}{S_1-V} = -1$ zu. Die Nachfragefunktion besitzt die Steigung $\frac{d\,N_1}{d\,p_1} = -\frac{V-S_1}{p_1^2}$ für $p_1 \neq 0$. Da der Zähler durch $S_1 > V$ negativ ist, ist der gesamte Ausdruck für $p_1 \neq 0$ positiv. Die zweite Ableitung der Nachfragefunktion ergibt sich als $\frac{d^2\,N_1}{d\,p_1^2} = \frac{2\cdot(V-S_1)}{p_1^3}$ für $p_1 \neq 0$. Ist $p_1 < 0$, dann ist durch den negativen Zähler der gesamte Ausdruck positiv und die Nachfragefunktion N_1 ist linksgekrümmt bzw. streng konvex. Ist $p_1 > 0$, dann ist folglich der gesamte Ausdruck negativ und die Nachfragefunktion N_1 ist rechtsgekrümmt bzw. streng konkav. □

Die für $p_1 \neq 0$ durchgängig positive Steigung der Nachfragefunktion der Noise trader N_1 in Abhängigkeit von p_1 steht im Widerspruch zu den angenommenen Eigenschaften der Nachfragefunktionen bzw. zur ganzen Modellstruktur. Insbesondere die Polstelle bereitet Schwierigkeiten:

[56] Die Nachfragefunktionen sind nur für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ gültig. In Abhängigkeit von p_1 beginnen die Verläufe bei $p_1 = V - S_1$ und sie enden bei $p_1 = V - S_1 + F_1$. Daher ist es möglich, dass bei einem sehr kleinen zur Verfügung gestellten Betrag F_1 der Fall $p_1 = V - S_1 + F_1 < 0$ auftritt und die Polstelle somit in einem nicht mehr zum Definitionsbereich von D_1 zählenden Bereich liegt. Folglich ist für D_1 die Restriktion $0 \leq D_1 \leq F_1$ im Rahmen der Argumentation stets zu berücksichtigen.

[57] Unter der zusätzlichen Restriktion $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V) \leq F_1$.

Eine Nachfrage, die einen Preis p_1 nahe null erzeugt, reagiert sehr sensibel auf kleinste Preisänderungen. Der Wechsel des Preises p_1 von minus nach plus ändert das Vorzeichen der Nachfrage, so dass eine kleine Erhöhung des Preises eine sehr starke Nachfrage ins Gegenteil drehen kann. Durch den nach (2.4) bestehenden Zusammenhang zwischen den Nachfragefunktionen von Noise tradern und Arbitrageuren ergibt sich analog für die Nachfragefunktion der Arbitrageure der folgende Satz:

Satz 9 *Gilt $S_1 > V$, dann besitzt die Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 im Zeitpunkt $t = 1$ in Abhängigkeit von p_1 an der Stelle $p_1 = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel.*[58] *Für $p_1 < 0$ ist der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{p_1 \to 0^-} A_1 = -\infty$ und für $p_1 > 0$ ist der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{p_1 \to 0^+} A_1 = +\infty$. Für $D_1 = 0$ gilt $A_1 = 0$ und für $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V)$ ist $A_1 = 2$.*[59] *Für $p_1 \neq 0$ ist die Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 streng monoton fallend, für $p_1 < 0$ ist die Funktion streng konkav und für $p_1 > 0$ streng konvex.*

Beweis: Nach (2.5) gilt $p_1 = V - S_1 + D_1$. Da V und S_1 exogen vorgegeben sind, ändert sich der Preis p_1 nur dann, wenn D_1 variiert wird. Das Investment D_1 steht jedoch auch im Zähler der Nachfragefunktion A_1 nach (2.3), so dass sich der Zähler bei einer Variation von p_1 ebenfalls ändert. Daher muss die Nachfragefunktion A_1 hier zunächst noch umgeformt werden:

Es gilt $p_1 = V - S_1 + D_1 \Leftrightarrow D_1 = p_1 - (V - S_1)$. Eingesetzt in A_1 nach (2.3) ergibt sich $A_1 = \frac{D_1}{p_1} = \frac{p_1 - (V - S_1)}{p_1} = 1 - \frac{V - S_1}{p_1}$. Nähert sich der Preis ausgehend von einem negativen Preis p_1 einem Wert von null, dann strebt der Wert der Nachfragefunktion A_1 wegen $S_1 > V$ gegen minus unendlich. Nähert sich der Preis ausgehend von einem positiven Preis p_1 einem Wert von null, dann strebt der Wert der Nachfragefunktion A_1 entsprechend gegen plus unendlich. Für $D_1 = 0$ ergibt sich in Verbindung mit (2.5) für die Nachfragefunktion $A_1 = 1 - \frac{V - S_1}{p_1} = 1 - \frac{V - S_1}{V - S_1 + 0} = 1 - 1 = 0$. Im Fall $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V)$ trifft entsprechend $A_1 = 1 - \frac{V - S_1}{V - S_1 + 2 \cdot (S_1 - V)} = 1 - \frac{V - S_1}{S_1 - V} = 1 + 1 = 2$ zu.[60]

Die Nachfragefunktion besitzt die Steigung $\frac{d\,A_1}{d\,p_1} = +\frac{V - S_1}{p_1^2}$ für $p_1 \neq 0$. Mit $S_1 > V$ ist der gesamte Ausdruck für $p_1 \neq 0$ negativ. Die zweite Ableitung der Nachfragefunktion ergibt sich als $\frac{d^2\,A_1}{d\,p_1^2} = -\frac{2 \cdot (V - S_1)}{p_1^3}$ für $p_1 \neq 0$. Ist $p_1 < 0$, dann ist der gesamte Ausdruck

[58] Es gelten die Anmerkungen analog zu Satz 8. Vgl. Fußnote 56, Kapitel 2, S. 24.

[59] Auch hier unter der Restriktion $D_1 = 2 \cdot (S_1 - V) \leq F_1$.

[60] Da $A_1 + N_1 = 1$ bzw. $A_1 = 1 - N_1$ gilt, lassen sich die Ergebnisse auch mit Hilfe dieses Zusammenhangs erklären.

negativ und die Nachfragefunktion A_1 ist rechtsgekrümmt bzw. streng konkav. Ist $p_1 > 0$, dann ist der Ausdruck positiv und die Nachfragefunktion A_1 linksgekrümmt bzw. streng konvex.[61] □

Die für $p_1 \neq 0$ durchgängig negative Steigung der Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 in Abhängigkeit von p_1 steht hier ebenfalls im Widerspruch zu den angenommenen Eigenschaften der Nachfragefunktionen bzw. zur ganzen Modellstruktur.

Aufgrund der Sätze 4 bis 7 und der mathematischen Eigenschaften nach den Sätzen 8 und 9 muss daher der Fall $S_1 > V$ im Rahmen der weiteren Modellierung ausgeschlossen werden, um die geforderte Funktionsweise des Modells, insbesondere im Hinblick auf die Nachfragefunktionen, gewährleisten zu können. Daher ist es an dieser Stelle auch nicht nötig, den Sinn von einem negativen Preis p_1 an sich und die Auswirkungen einer Nachfrage größer als eins zu diskutieren. Im Folgenden wird jetzt der Fall $S_1 = V$ in Zusammenhang mit der Entscheidungsvariable D_1 betrachtet:

SATZ 10 *Gilt $S_1 = V$ und $D_1 = 0$, dann sind die Nachfragefunktionen (2.1), (2.3) und (2.4) nicht definiert.*

BEWEIS: Mit $S_1 = V$ und $D_1 = 0$ gilt nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 = S_1 - S_1 + 0 = 0$. Da p_1 jeweils alleine im Nenner der Nachfragefunktionen (2.1), (2.3) und (2.4) steht, sind diese mit einem Preis in Höhe von $p_1 = 0$ dann undefiniert. □

Wie bereits im Zusammenhang mit Satz 6 erwähnt, ist der Fall $p_1 = 0$ möglichst zu vermeiden, da neben den Nachfragefunktionen dann auch die Zielfunktion letztendlich undefiniert sein würde. Da jedoch ein Investment in Höhe von $D_1 = 0$ im Hinblick auf die Zielfunktion generell immer möglich ist und die Entscheidung, im Zeitpunkt $t = 1$ noch keine Mittel zu investieren, generell vom Modellhintergrund her zu vertreten ist, ist es nicht sinnvoll, den Fall $D_1 = 0$ auszuschließen.[62] Daher sollte im Hinblick auf die Aussagekraft des Modells eine derartige Einschränkung des Definitionsbereiches von D_1 vermieden werden und entsprechend D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ zulässig sein.

[61] Auch diese Eigenschaften der Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 lassen sich mit Hilfe der Eigenschaften der Nachfragefunktion der Noise trader N_1 nach Satz 8 erklären.

[62] Ein Investment in Höhe von $D_1 = 0$ als optimale Lösung ist durchaus möglich. Vgl. dazu insbesondere die Beispiele in Abschnitt 4.1.4.3.

Satz 11 *Gilt $S_1 = V$ und $D_1 > 0$, dann besteht seitens der Noise trader im Zeitpunkt $t = 1$ keine Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand und die Arbitrageure fragen den Vermögensgegenstand komplett alleine nach.*

Beweis: Mit $S_1 = V$ gilt nach (2.1) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V-V}{p_1} = \frac{0}{p_1} = 0$. Nach (2.5) trifft im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 = V - V + D_1 = D_1$ zu. Somit ergibt sich nach (2.3) für die Nachfrage der Arbitrageure $A_1 = \frac{D_1}{D_1} = 1$. □

Die Arbitrageure fragen den Vermögensgegenstand somit immer komplett alleine zum Preis $p_1 = D_1$ nach. Unabhängig von der genauen Höhe des Preises ist die Nachfrage der Noise trader daher immer gleich null. Die Nachfragefunktionen sind folglich konstant und unabhängig von der konkreten Höhe von p_1. Die grundlegenden Eigenschaften der Nachfragefunktionen im Sinne von Satz 2 gehen verloren.

Wegen der Sätze 10 und 11 muss daher auch der Fall $S_1 = V$ im Rahmen der weiteren Modellierung ausgeschlossen werden. Im Rahmen der Charakterisierung der Preisgleichung im Zeitpunkt $t = 1$ bezogen auf das Verhältnis der exogenen Größen S_1 und V zueinander wird nun abschließend noch der Fall $S_1 < V$ in Zusammenhang mit der Entscheidungsvariable D_1 betrachtet:

Satz 12 *Gilt $S_1 < V$ und $D_1 \geq 0$, dann ist der Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ positiv.*

Beweis: Mit $S_1 < V$ und $D_1 = 0$ gilt nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für den Preis $p_1 = V - S_1 + D_1 = V - S_1 > 0$. Mit Satz 1 folgt für $D_1 > 0$ daher auch $p_1 > 0$. □

Im Fall $S_1 < V$ ist somit gleichzeitig auch $p_1 > 0$ gegeben, so dass die Bedingungen in Satz 2 erfüllt sind und die grundlegenden Eigenschaften der Nachfragefunktionen Gültigkeit besitzen. Es bleibt zu prüfen, welche Werte die Nachfragefunktionen im Fall $S_1 < V$ annehmen können:

Satz 13 *Gilt $S_1 < V$ und $D_1 \geq 0$, dann besteht im Zeitpunkt $t = 1$ seitens der Noise trader eine positive Nachfrage kleiner oder gleich eins nach dem Vermögensgegenstand. Die nicht negative Nachfrage der Arbitrageure ist stets kleiner als eins.*

BEWEIS: Mit $S_1 < V$ und $D_1 = 0$ folgt aus (2.1) in Verbindung mit (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ für die Nachfrage der Noise trader $N_1 = \frac{V-S_1}{V-S_1+D_1} = \frac{V-S_1}{V-S_1} = 1$. Mit $S_1 < V$ und $D_1 > 0$ ist der nach Satz 12 positive Nenner der Nachfragefunktion der Noise trader größer als der mit $S_1 < V$ positive, konstante Zähler und somit gilt $N_1 = \frac{V-S_1}{V-S_1+D_1} < 1$ bzw. $N_1 > 0$. Nach (2.4) gilt für die Nachfrage der Noise trader N_1 und für die Nachfrage der Arbitrageure A_1 der Zusammenhang $N_1 + A_1 = 1$ bzw. $A_1 = 1 - N_1$. Im Fall $S_1 < V$ und $D_1 = 0$ gilt $N_1 = 1$ und somit $A_1 = 1 - 1 = 0$. Da für $S_1 < V$ und $D_1 > 0$ für die Nachfrage der Noise trader $0 < N_1 < 1$ gilt, folgt aus $A_1 = 1 - N_1$ für die Nachfrage der Arbitrageure ebenfalls $0 < A_1 < 1$. □

Neben einem positiven Preis p_1 ist im Fall $S_1 < V$ auch gewährleistet, dass sich für alle nicht negativen Werte von D_1 der Wertebereich der Nachfragefunktionen der Noise trader und der Arbitrageure im Intervall zwischen 0 und 1 bewegt. Durch ein Investment in Höhe von $D_1 = 0$ haben die Arbitrageure dabei jedoch die Möglichkeit, den Vermögensgegenstand gar nicht nachzufragen und die Nachfrage (bei einem entsprechend niedrigen Preis p_1) komplett auf die Noise trader abzuwälzen. Andererseits ist es durch ein entsprechend hohes Investment D_1 aber nicht möglich, den Vermögensgegenstand komplett alleine nachzufragen. Die Noise trader können somit nicht vollständig aus dem Markt verdrängt werden. In Shleifer/Vishny (1997) findet sich kein direkter Hinweis auf eine Nebenbedingung $S_1 < V$. Da die Nachfragefunktionen aber nur im Fall $S_1 < V$ ihre grundlegenden Eigenschaften behalten, muss in Zusammenhang mit der Preisgleichung im Zeitpunkt $t = 1$ die Gültigkeit der nachfolgenden Nebenbedingung für die exogenen Größen S_1 und V gefordert werden:

$$S_1 < V. \tag{2.8}$$

Bedingt durch $p_1 > 0$ im Fall $S_1 < V$ nach Satz 12 liegt in Abhängigkeit von p_1 der Pol mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $p_1 = 0$ sowohl bei der Nachfragefunktion der Noise trader N_1 als auch bei der Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$.[63] Im Zeitpunkt $t = 1$ führt nach Satz 2 die Wahl eines höheren Investments D_1 zu einer Abnahme der Nachfrage der Noise trader N_1 und zu einer Zunahme der Nachfrage der Arbitrageure A_1. Jeweils in Abhängigkeit von p_1 ist die Nachfragefunktion der Noise trader N_1 im für D_1 zulässigen Bereich streng

[63] Es gilt hier $\lim\limits_{p_1 \to 0^-} N_1 = -\infty$ und $\lim\limits_{p_1 \to 0^+} N_1 = +\infty$ sowie $\lim\limits_{p_1 \to 0^-} A_1 = +\infty$ und $\lim\limits_{p_1 \to 0^+} A_1 = -\infty$.

monoton fallend sowie streng konvex und die Nachfragefunktion der Arbitrageure A_1 ist in diesem Bereich streng monoton wachsend sowie streng konkav.[64]

In Verbindung mit den Nebenbedingungen (2.7) und (2.8) gilt somit insgesamt im Zeitpunkt $t = 1$ für die drei exogenen Größen F_1, S_1 und V die Relation:

$$F_1 < S_1 < V. \tag{2.9}$$

Nach Satz 3 gilt $p_1 < V$ und nach Satz 12 gilt $p_1 > 0$. In Verbindung mit der Nebenbedingung (2.7) ist somit V eine echte obere Grenze von p_1 und unter Berücksichtigung von (2.8) ist null eine echte untere Grenze von p_1.[65] Zusammenfassend kann aus (2.9) für den Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ die folgende Relation abgeleitet werden:

$$0 < p_1 < V. \tag{2.10}$$

Es ist allerdings auch möglich, ein Infimum für den Preis p_1 anzugeben. Dieses wird genau dann erreicht, wenn sich die Arbitrageure dazu entschließen, im Zeitpunkt $t = 1$ nicht in den Vermögensgegenstand zu investieren und entsprechend $D_1 = 0$ zu wählen. In diesem Fall ergibt sich $p_1 = V - S_1$ nach (2.5). Im Zeitpunkt $t = 1$ ist daher der Preis p_1 mit $S_1 < V$ nach (2.8) nicht nur positiv, sondern es gilt sogar

$$p_1 \geq V - S_1 > 0. \tag{2.11}$$

Für die weitere Argumentation im Rahmen des Modells dieser Arbeit wird die Gültigkeit von (2.9) vorausgesetzt und damit im Zeitpunkt $t = 1$ nach (2.10) auch gleichzeitig eine Unterbewertung des Vermögensgegenstandes und zudem ein positiver Preis p_1 bzw. nach (2.11) sogar ein Preis $p_1 \geq V - S_1$ erzwungen.

Die Unterbewertung des Vermögensgegenstandes deuten die Arbitrageure als Kaufsignal. Je höher der Noise trader shock S_1 bei einem gegebenen Investment D_1 der

[64] Es gilt hier $N_1^{'}(p_1) = -\frac{V-S_1}{p_1^2} < 0$ und $N_1^{''}(p_1) = \frac{2\cdot(V-S_1)}{p_1^3} > 0$ sowie $A_1^{'}(p_1) = \frac{V-S_1}{p_1^2} > 0$ und $A_1^{''}(p_1) = -\frac{2\cdot(V-S_1)}{p_1^3} < 0$.

[65] Mit „echter“ Grenze soll hier unterstrichen werden, dass diese Grenzen nicht erreicht werden, da hier der Gleichheitsfall nicht auftreten kann. Daher wurden auch nicht die Begriffe „Supremum“ und „Infimum“ aus der Mathematik benutzt. Die Begriffe „Preisobergrenze“ und „Preisuntergrenze“ wurden hier ebenfalls vermieden, da diesen in der Betriebswirtschaftslehre eine weitergehende Bedeutung zukommt.

Arbitrageure ausfällt, umso geringer ist die Nachfrage der Noise trader N_1 nach (2.1) und umso größer ist die Preisabweichung nach (2.6) bzw. umso attraktiver wird die Arbitragemöglichkeit für die Arbitrageure. Im Hinblick auf die Einstellung gegenüber dem Vermögensgegenstand können die Noise trader daher als Gegenpol zu den Arbitrageuren aufgefasst werden. Der Preis ergibt sich dann letztendlich über den Ausgleich von Angebot und Nachfrage.

Im nachfolgenden Abschnitt wird nun der Zeitpunkt $t = 2$ besprochen. Dabei spielt die Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrages F_1 eine wichtige Rolle.

2.3 Der Zeitpunkt $t = 2$

Im Vergleich zum Zeitpunkt $t = 1$ ergeben sich im Zeitpunkt $t = 2$ zwei wesentliche Unterschiede: Zum einen ist der erneute, zweite Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ stochastisch und zum anderen ist der von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag hier nicht mehr exogen vorgegeben.

Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ stellt aus Sicht der Arbitrageure eine Zufallsvariable dar und wird im Folgenden mit $\widetilde{S}_2$ bezeichnet. Dadurch wird letztendlich die Unsicherheit im Modell erzeugt.[66] Auch in diesem Zeitpunkt besitzt der Noise trader shock einen Einfluss auf die Preisbildung. Mit $\widetilde{S}_2$ wird der Preis stochastisch, wodurch dann auch die beiden Nachfragefunktionen stochastisch werden, da der Preis jeweils im Nenner der Nachfragefunktionen steht. Die spätere Bestimmung des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages hängt unter anderem von der Preisentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ ab. Somit wird dann auch der zur Verfügung gestellte Betrag durch einen stochastischen Preis im Zeitpunkt $t = 2$ letztendlich stochastisch. Im Rahmen der weiteren Untersuchung der Zusammenhänge im Zeitpunkt $t = 2$ wird daher zunächst eine konkrete Realisation S_2 der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ betrachtet. Die konkrete Modellierung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ erfolgt dann in Abschnitt 2.4.3.

Der von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag ist nicht mehr exogen vorgegeben, sondern nun abhängig von dem im Zeitpunkt $t = 1$ exo-

[66]Inwiefern die Arbitrageure Kenntnis von der Verteilung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ haben und wie die Darstellung der Zufallsvariable im Modell erfolgt, wird in Abschnitt 2.4.3 erläutert.

gen vorgegebenen Betrag F_1, dem Investment D_1 seitens der Arbitrageure und der Preisentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$.[67]

Analog zum Zeitpunkt $t = 1$ erfolgt hier im ersten Unterabschnitt 2.3.1 eine Betrachtung der Nachfragefunktionen und im zweiten Unterabschnitt 2.3.2 eine Untersuchung der Preisgleichung bezogen auf den Zeitpunkt $t = 2$. Der letzte Unterabschnitt 2.3.3 befasst sich ausführlich mit der Bestimmung des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages.

2.3.1 Die Nachfragefunktionen

Die Definition der Nachfragefunktionen erfolgt analog zur Darstellung der Nachfragefunktionen im Zeitpunkt $t = 1$. Die Nachfrage der Noise trader ist im Zeitpunkt $t = 2$ wie folgt gegeben:

$$N_2 = \frac{V - S_2}{p_2}. \tag{2.12}$$

Die pessimistische Einstellung der Arbitrageure gegenüber dem Vermögensgegenstand wird auch im Zeitpunkt $t = 2$ durch den Noise trader shock zum Ausdruck gebracht. Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ ist nicht mehr exogen vorgegeben und stellt aus Sicht der Arbitrageure eine Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ dar. In Gleichung (2.12) und im Rahmen der weiteren Analyse wird jedoch zunächst eine Realisation S_2 der Zufallsvariable betrachtet. Falls $S_2 > 0$ gilt, sind die Arbitrageure dem Vermögensgegenstand gegenüber weiterhin pessimistisch eingestellt bzw. besitzen die Arbitrageure weiterhin einen Liquiditätsbedarf.[68] Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass die Noise trader bereits im Zeitpunkt $t = 2$ Kenntnis vom Grundwert V erlangen.[69] In diesem Fall verschwindet die pessimistische Einstellung der Noise trader gegenüber dem Vermögensgegenstand, und dies ist dann gleichbedeutend mit $S_2 = 0$. Der Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 2$ wird entsprechend mit p_2 bezeichnet.[70]

Auch im Zeitpunkt $t = 2$ wird den Arbitrageuren von den Investoren ein Betrag zur Verfügung gestellt. Dieser Betrag F_2 ist jedoch nicht mehr exogen vorgegeben, sondern

[67] Vgl. Abschnitt 2.3.3.

[68] Inwieweit erreicht werden kann, dass alle möglichen Realisationen der Zufallsvariable nicht negativ sind, wird in Abschnitt 2.4.3.1 erörtert.

[69] Bzw. gleichzeitig verschwindet auch der Liquiditätsbedarf. Vgl. dazu auch Abschnitt 2.1.2.

[70] Zur genaueren Beschreibung von p_2 vgl. Abschnitt 2.3.2.

er wird innerhalb des Modells bestimmt. Einen Einfluss auf die konkrete Höhe von F_2 nimmt dabei der ursprünglich im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1, das Investment D_1 der Arbitrageure und die Preisentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$.[71] Es gilt jedoch $F_2 \geq 0$.[72] Die Arbitrageure müssen nun auch im Zeitpunkt $t = 2$ entscheiden, wie viel sie vom Betrag F_2 in den Vermögensgegenstand investieren. Dieser von den Arbitrageuren letztendlich investierte Betrag wird mit D_2 bezeichnet. Analog zum Zeitpunkt $t = 1$ muss auch hier $0 \leq D_2 \leq F_2$ gelten.[73] Die Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 2$ ist wie folgt gegeben:

$$A_2 = \frac{D_2}{p_2}. \tag{2.13}$$

Wie bereits im Zeitpunkt $t = 1$ muss auch im Zeitpunkt $t = 2$ die Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand mit dem Angebot übereinstimmen. Da nur ein Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V gehandelt wird, ergibt sich für die gesamte Nachfrage die Bedingung:

$$N_2 + A_2 = \frac{V - S_2}{p_2} + \frac{D_2}{p_2} = \frac{V - S_2 + D_2}{p_2} = 1. \tag{2.14}$$

Aus dem Zusammenhang nach (2.14) kann nun wiederum im nachfolgenden Abschnitt der Preis p_2 bestimmt werden.

2.3.2 Die Preisgleichung in $t = 2$

Aus der Bedingung (2.14) für die Gesamtnachfrage folgt analog zum Zeitpunkt $t = 1$ unmittelbar die Preisgleichung für den Zeitpunkt $t = 2$:

$$p_2 = V - S_2 + D_2. \tag{2.15}$$

Als Preisabweichung im Zeitpunkt $t = 2$ wird analog zum Zeitpunkt $t = 1$ die Differenz zwischen dem Grundwert V des Vermögensgegenstandes und dem Preis p_2 bezeichnet. Für die Preisabweichung gilt:

[71] Ob den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ von den Investoren im Vergleich zum Betrag F_1 ein größerer, ein kleinerer oder ein gleich hoher Betrag F_2 zur Verfügung gestellt wird, wird im letzten Unterabschnitt 2.3.3 genauer analysiert.
[72] Vgl. dazu Gleichung (2.24).
[73] Die Darstellung des Optimierungsproblems erfolgt in Abschnitt 2.4.3.

$$V - p_2 = V - (V - S_2 + D_2) = S_2 - D_2. \tag{2.16}$$

Durch die Betrachtung einer konkreten Realisation S_2 der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ kann diese Realisation S_2 im Zeitpunkt $t = 2$ in den Relationen genauso gehandhabt werden wie der exogen vorgegebene Noise trader shock S_1 im Zeitpunkt $t = 1$. Daher entsprechen die Zusammenhänge im Zeitpunkt $t = 2$ im Wesentlichen den Zusammenhängen im Zeitpunkt $t = 1$. Die Sätze des Zeitpunktes $t = 1$ werden daher im Folgenden nicht noch einmal für den Zeitpunkt $t = 2$ aufgeführt und bewiesen, wenn sie sich lediglich im Zeitpunktbezug unterscheiden, ansonsten aber in der Aussage identisch sind.

Satz 1 gilt demnach analog für den Preis p_2 und die Entscheidungsvariable D_2. Der Preis p_2 ist linear in der Entscheidungsvariable D_2 und die Ableitung von p_2 nach D_2 ist eins. Analog zu Satz 2 führt die Wahl eines höheren Investments D_2 im Zeitpunkt $t = 2$ zu einer Zunahme der Nachfrage der Arbitrageure und zu einer Abnahme der Nachfrage der Noise trader, wenn der Preis p_2 positiv ist und $S_2 < V$ gilt. Die elementaren Eigenschaften der Nachfragefunktionen sind in diesem Fall auch im Zeitpunkt $t = 2$ erfüllt. Shleifer/Vishny (1997) fordern auch im Zeitpunkt $t = 2$ die Gültigkeit der nachstehenden Ungleichung für die Größen F_2 und S_2:[74]

$$F_2 < S_2. \tag{2.17}$$

Wegen $F_2 \geq 0$ kann die Ungleichung (2.17) nur für den Fall $S_2 > 0$ Gültigkeit besitzen. Im Zeitpunkt $t = 1$ wird $S_1 > 0$ gefordert. Im Zeitpunkt $t = 2$ ist jedoch der Fall $S_2 = 0$ nicht ausgeschlossen. Tritt der Fall $S_2 = 0$ auf, muss die Ungleichung (2.17) letztendlich aber auch nicht mehr erfüllt sein.[75] Für $S_2 > 0$ liegt im Zeitpunkt $t = 2$ in Verbindung mit der Ungleichung (2.17) eine Unterbewertung des Vermögensgegenstandes vor und es gilt $p_2 < V$.[76]

Auch im Zeitpunkt $t = 2$ werden im Zusammenhang mit der Preisgleichung noch weitere Anforderungen an die Größenverhältnisse bestimmter Größen zueinander gestellt. Analog zum Verhältnis der Größen S_1 und V im Zeitpunkt $t = 1$ zueinander spielt dabei das Verhältnis der Größen S_2 und V im Zeitpunkt $t = 2$ zueinander eine entscheidende Rolle im Bezug auf die elementaren Eigenschaften der Nachfragefunktionen.

[74] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.
[75] Vgl. dazu Abschnitt 2.4.3.1.
[76] Vgl. dazu Satz 3.

Zusammengefasst muss im Zeitpunkt $t = 2$ folgendes Verhältnis der Größen S_2 und V zueinander gefordert werden:

$$S_2 < V. \tag{2.18}$$

Werden die Sätze 4 bis 7 bezogen auf den Zeitpunkt $t = 2$ formuliert, dann kann mit ihrer Hilfe begründet werden, warum auch der Fall $S_2 > V$ im Rahmen des Modells ausgeschlossen werden muss:

Bis auf den Sonderfall mit $D_2 = 0$ führt der Fall $S_2 > V$ für $0 < D_2 \leq F_2$ zu Problemen mit den Nachfragefunktionen. Die im Modell angenommenen Eigenschaften werden praktisch umgekehrt. Trifft $p_2 = 0$ zu, dann sind die Nachfragefunktionen sogar undefiniert. Die mathematischen Darstellungen nach den Sätzen 8 und 9 können ebenfalls auf den Zeitpunkt $t = 2$ übertragen werden. Der Fall $S_2 = 0$ kann hier vernachlässigt werden, da er durch $S_2 > V > 0$ nicht auftreten kann.

Werden die Sätze 10 und 11 bezogen auf den Zeitpunkt $t = 2$ formuliert, dann kann auch der Ausschluss des Falls $S_2 = V$ im Rahmen des Modells begründet werden:

Im Fall $D_2 = 0$ sind die Nachfragefunktionen (2.12), (2.13) und (2.14) nicht definiert. Für $D_2 > 0$ fragen die Arbitrageure den Vermögensgegenstand immer komplett alleine nach und die Nachfrage der Noise trader ist unabhängig vom Preis immer gleich null. Die grundlegenden Eigenschaften der Nachfragefunktionen im Sinne von Satz 2 gehen verloren, denn die Nachfragefunktionen sind konstant und unabhängig von der konkreten Höhe von p_2 bzw. unabhängig von der konkreten Höhe des gewählten Investments $D_2 > 0$. Der Fall $S_2 = 0$ kann auch hier vernachlässigt werden, da er durch $S_2 = V > 0$ nicht auftreten kann.[77]

Abschließend können auch die Sätze 12 und 13 auf den Zeitpunkt $t = 2$ übertragen werden. Somit ist neben einem positiven Preis p_2 im Fall $S_2 < V$ auch gewährleistet, dass sich für alle nicht negativen Werte von D_2 der Wertebereich der Nachfragefunktionen der Noise trader und der Arbitrageure im Intervall zwischen 0 und 1 bewegt. Durch ein Investment in Höhe von $D_2 = 0$ haben die Arbitrageure auch hier die Möglichkeit, den Vermögensgegenstand gar nicht nachzufragen und die Nachfrage komplett auf die Noise trader abzuwälzen. Analog ist eine komplette Verdrängung der Noise trader aus dem Markt nicht möglich.

[77] Entsprechend kann hier nun argumentiert werden, dass zumindest $S_2 < V$ zulässig sein muss, da sonst der durchaus realistische Fall $S_2 = 0$ wegen $V > 0$ nicht möglich wäre.

Zusammenfassend gilt im Zeitpunkt $t = 2$ in Verbindung mit der Ungleichung (2.17) und der Nebenbedingung (2.18) für die drei Größen F_2, S_2 und V die Relation:

$$F_2 < S_2 < V. \tag{2.19}$$

Dabei ist auch hier zu beachten, dass die Relation (2.19) nur für den Fall $S_2 > 0$ Gültigkeit besitzen kann.[78] Unter Berücksichtigung von (2.17) in Verbindung mit $S_2 > 0$ ist auch im Zeitpunkt $t = 2$ der Grundwert V eine echte obere Grenze von p_2 und unter Berücksichtigung von (2.18) ist null eine echte untere Grenze von p_2. Zusammenfassend kann daher auch hier aus (2.19) für den Preis p_2 im Zeitpunkt $t = 2$ die folgende Relation abgeleitet werden:

$$0 < p_2 < V. \tag{2.20}$$

Auch im Zeitpunkt $t = 2$ ist es möglich, ein Infimum für den Preis p_2 anzugeben. Dieses wird auch hier dann erreicht, wenn sich die Arbitrageure dazu entschließen, im Zeitpunkt $t = 2$ nicht in den Vermögensgegenstand zu investieren und entsprechend $D_2 = 0$ zu wählen. Es kann aber auch dann auftreten, wenn die Investoren den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ keine Mittel mehr zur Verfügung stellen und entsprechend $F_2 = 0$ gilt. Mit $0 \leq D_2 \leq F_2$ folgt dann auch in diesem Fall $D_2 = F_2 = 0$. Analog zum Zeitpunkt $t = 1$ ergibt sich im Fall $D_2 = 0$ im Zeitpunkt $t = 2$ ein Preis in Höhe von $p_2 = V - S_2$ nach (2.15). Daher ist auch der Preis p_2 mit $S_2 < V$ nach (2.18) nicht nur positiv, sondern es gilt sogar

$$p_2 \geq V - S_2 > 0. \tag{2.21}$$

Bezüglich der oberen Grenze des Preises p_2 bleibt anzumerken, dass die Ungleichung $F_2 < S_2$ nach (2.17) nur relativ schwierig einzuhalten ist, da F_2 innerhalb des Modells bestimmt wird. Durch die endogene Bestimmung innerhalb des Modells ist $F_2 < S_2$ zudem auch ökonomisch nicht zu begründen:

Weder die Noise trader im Fall $S_2 > 0$ noch die Investoren kennen den Grundwert V des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 2$. Daher ist ein Preis $p_2 > V$ durchaus möglich, wenn sich ein derart hoher Preis aus Sicht der Arbitrageure trotz Kenntnis des

[78] Vgl. dazu die Anmerkungen im Anschluss an Ungleichung (2.17).

Grundwertes V im Rahmen der Zielfunktion als sinnvoll erweist, und die Arbitrageure im Fall $F_2 > S_2$ ein Investment D_2 im Bereich $S_2 < D_2 \leq F_2$ als optimal erachten. Der Fall $F_2 = S_2$ ist ebenso denkbar, da er nach (2.15) maximal zu einem Preis in Höhe von $p_2 = V$ führt.

Im Folgenden wird daher hier abweichend von Shleifer/Vishny (1997) die Möglichkeit $F_2 \geq S_2$ nicht ausgeschlossen, da im Zeitpunkt $t = 2$ ein Preis $p_2 \geq V$ im Rahmen des Modells durchaus ökonomisch begründbar ist.[79]

Die bisherigen Ausführungen zum Zeitpunkt $t = 2$ bezogen sich hauptsächlich auf den Fall $S_2 > 0$, in welchem die Noise trader weiterhin pessimistisch dem Vermögensgegenstand gegenüber eingestellt sind. Abgesehen davon, dass der von den Investoren zur Verfügung gestellte Betrag F_2 im Zeitpunkt $t = 2$ funktional bestimmt wird, ist der Zeitpunkt $t = 2$ für $S_2 > 0$ hinsichtlich der Modellierung vergleichbar mit dem Zeitpunkt $t = 1$. Erlangen die Noise trader bereits im Zeitpunkt $t = 2$ Kenntnis vom Grundwert V, dann verschwindet ihre pessimistische Einstellung und dementsprechend gilt $S_2 = 0$. Im Fall $S_2 = 0$ ist der Zeitpunkt $t = 2$ dann vergleichbar mit dem Zeitpunkt $t = 3$. Deshalb sei für die weitere Interpretation des Falls $S_2 = 0$ an dieser Stelle auf Abschnitt 2.4 verwiesen.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich nun auf die Bestimmung des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages F_2.

2.3.3 Die Bestimmung des von den Investoren zur Verfügung gestellten Betrages

Im Zeitpunkt $t = 1$ stellen die Investoren den Arbitrageuren den Betrag F_1 zur Verfügung. Dieser Betrag ist im Rahmen der Modellierung exogen vorgegeben. Im Zeitpunkt $t = 2$ besitzen die Investoren dann die Möglichkeit, diesen ursprünglich zur Verfügung gestellten Betrag F_1 anzupassen. Da sie nur Laien und keine Experten bezüglich des speziellen Vermögensgegenstandes sind, stehen ihnen nur begrenzt Informationen zur Anpassung ihres Investments zur Verfügung. Insbesondere ist den Investoren der Grundwert V des Vermögensgegenstandes nicht bekannt, weshalb sie den Grundwert V zur Entscheidung über die zukünftige Höhe ihres Investments nicht heranziehen können. Shleifer/Vishny (1997) unterstellen deshalb, dass die Investoren nur eine relativ einfache Regel zur Anpassung ihres Investments anwenden:

[79] Zu Preisen $p_2 \geq V$ vgl. insbesondere Abschnitt 4.1.2.1 sowie die Abschnitte 4.1.4.4 und 4.3.

Die Investoren schauen sich im Zeitpunkt $t = 2$ die relative Wertentwicklung ihres im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrages F_1 an und entscheiden anhand dieser Wertentwicklung, welchen Betrag sie den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung stellen.[80] Diese im Folgenden mit x bezeichnete, relative Wertentwicklung berechnet sich wie folgt:

$$x = \frac{D_1}{F_1} \cdot \frac{p_2}{p_1} + \frac{F_1 - D_1}{F_1}. \tag{2.22}$$

Der erste Summand in (2.22) stellt die Wertentwicklung des investierten Betrages D_1 dar. Durch die Multiplikation von D_1 mit $\frac{p_2}{p_1}$ ergibt sich der aktuelle Marktwert von D_1 im Zeitpunkt $t = 2$. Der zweite Summand repräsentiert den im Zeitpunkt $t = 1$ nicht investierten Betrag $F_1 - D_1$. Beide Summanden werden außerdem durch den im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag F_1 dividiert, um so eine relative Wertentwicklung abzubilden. Mit $p_1 > 0$ nach (2.10) und $F_1 > 0$ nach (2.2) ist die relative Wertentwicklung x im Rahmen des Modells immer definiert. Für die weitere Analyse der relativen Wertentwicklung x wird die Gleichung (2.22) entsprechend umgeformt. Es ergibt sich:

$$x = 1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{F_1}. \tag{2.23}$$

Mit Hilfe der relativen Wertentwicklung x können die Investoren ermitteln, wie sich der von ihnen zur Verfügung gestellte Betrag F_1 wertmäßig entwickelt hat. Das Produkt $F_1 x$ spiegelt den aktuellen Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ wider.[81] Eine positive Performance ist gleichbedeutend mit einer relativen Wertentwicklung $x > 1$ und eine negative Performance entspricht einer relativen Wertentwicklung $x < 1$.

SATZ 14 *Für die relative Wertentwicklung x gilt: $x > 0$.*

BEWEIS: Nach (2.10) ist $p_1 > 0$ und nach (2.20) ist $p_2 > 0$. Demnach gilt $\frac{p_2}{p_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} - 1 > -1$. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) und $0 \leq D_1 \leq F_1$ folgt $0 \leq \frac{D_1}{F_1} \leq 1$. Für den zweiten Summanden in (2.23) trifft damit $\frac{D_1}{F_1} \cdot (\frac{p_2}{p_1} - 1) > -1$ zu und es gilt $x > 0$. □

[80] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40.

[81] Das Produkt $100 \cdot x$ entspricht dem aktuellen Wert von F_1 in Prozent von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$.

Durch die positiven Preise bzw. insbesondere durch $p_2 > 0$ ist demnach ein Totalverlust des im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrages F_1 im Modell ausgeschlossen, da mit $x > 0$ auch der aktuelle Wert $F_1 x$ von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ positiv ist.

SATZ 15 *Eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$ ergibt sich genau dann, wenn $D_1 = 0$ oder $p_1 = p_2$ zutrifft.*

BEWEIS: Nach Gleichung (2.23) ergibt sich eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$ genau dann, wenn der Zähler des zweiten Summanden den Wert null annimmt. Dies ist hier der Fall, wenn einer der beiden Faktoren den Wert null annimmt. In Gleichung (2.23) trifft dies für $D_1 = 0$ bzw. für $\frac{p_2}{p_1} - 1 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$ zu. □

Falls demnach seitens der Arbitrageure kein Investment erfolgt und somit $D_1 = 0$ gewählt wird, ergibt sich unabhängig von den konkreten Preisen p_1 und p_2 eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$.[82] Eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$ ergibt nach Satz 15 insbesondere auch im Fall $p_1 = p_2$. Dieser Fall ist jedoch nicht unabhängig von dem konkret gewählten Investment D_1, da zu jedem Preis p_1 ein entsprechendes Investment D_1 gehört.

SATZ 16 *Investieren die Arbitrageure einen Betrag D_1 mit $0 < D_1 \leq F_1$, dann ergibt sich im Fall $p_2 > p_1$ eine relative Wertentwicklung $x > 1$ und im Fall $p_2 < p_1$ eine relative Wertentwicklung $x < 1$.*

BEWEIS: Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) ergibt sich eine relative Wertentwicklung $x > 1$, wenn der Zähler des zweiten Summanden in (2.23) positiv ist. Da $D_1 > 0$ vorausgesetzt wird, muss auch der zweite Faktor positiv sein. Daraus folgt $(\frac{p_2}{p_1} - 1) > 0 \Leftrightarrow p_2 > p_1$. Analog folgt $x < 1$ für $(\frac{p_2}{p_1} - 1) < 0 \Leftrightarrow p_2 < p_1$. □

Für $D_1 > 0$ ist eine positive Preisentwicklung $p_2 > p_1$ demnach gleichbedeutend mit einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$. Ebenso ist eine negative Preisentwicklung $p_2 < p_1$ gleichbedeutend mit einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$.[83]

[82] Dies muss auch so sein, da dann im Zeitpunkt $t = 1$ nicht investiert wurde und daher der Betrag F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ wegen eines risikolosen Zinssatzes von 0% pro Periode einen unveränderten Marktwert in Höhe von F_1 aufweist.

[83] Nach Satz 14 gilt $x > 0$. „Negativ“ bedeutet daher, dass x im Bereich $0 < x < 1$ liegt.

SATZ 17 *Investieren die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ den gesamten zur Verfügung stehenden Betrag F_1 und wählen dementsprechend $D_1 = F_1$, dann ergibt sich eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = \frac{p_2}{p_1}$.*

BEWEIS: Mit $D_1 = F_1$ folgt nach Gleichung (2.23) eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1 + \frac{F_1 \cdot (\frac{p_2}{p_1} - 1)}{F_1} = 1 + \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{p_2}{p_1}$. □

In Abhängigkeit von der relativen Wertentwicklung x bestimmen die Investoren nun den Betrag F_2, welchen sie den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung stellen. Das bedeutet, die Investoren müssen im Zeitpunkt $t = 2$ entscheiden, ob sie den Arbitrageuren noch zusätzlich Mittel zukommen lassen oder ob sie Mittel abziehen. Diese Entscheidung basiert einzig und allein auf der relativen Wertentwicklung x, welche sie mit Hilfe einer sogenannten „Update-Funktion" G bewerten.[84] Dabei führt eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ tendenziell dazu, dass den Arbitrageuren von den Investoren noch zusätzlich Mittel im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellt werden. Andererseits führt eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ tendenziell dazu, dass von den Investoren Mittel im Zeitpunkt $t = 2$ abgezogen werden.[85] Für den Betrag F_2 ergibt sich in Kombination mit der Update-Funktion G die Gleichung

$$F_2 = \max\left[F_1 \cdot G(x), 0\right]. \tag{2.24}$$

Die Funktion G ordnet jeder relativen Wertentwicklung x nach Gleichung (2.22) bzw. nach Gleichung (2.23) einen eindeutigen Funktionswert $G(x)$ zu. Das Produkt aus dem im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag F_1 und dem Funktionswert $G(x)$ ergibt dann den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag F_2, sofern der Funktionswert $G(x)$ nicht negativ ist.[86] Für $G(x) \leq 0$ resultiert aus Gleichung (2.24) ein zur Verfügung gestellter Betrag in Höhe von $F_2 = 0$. Arnold (2009) verwendet bei seiner Darstellung ebenfalls eine Maximum-Funktion.[87] Shleifer/Vishny (1997) verwenden bei ihrer Darstellung von F_2 keine Maximum-Funktion, weisen aber indirekt darauf hin,

[84] Die Investoren versuchen, die Fähigkeiten der Arbitrageure zu beurteilen und nehmen dazu als Grundlage die relative Wertentwicklung x. Je nach Wertentwicklung passen sie ihren zur Verfügung gestellten Betrag mit Hilfe der Update-Funktion G an. Der Begriff „Update" ist hier demnach im Sinne von „Aktualisierung" zu verstehen. Vgl. auch Shleifer/Vishny (1997), S. 40.

[85] Zur Einschränkung „tendenziell" vgl. Kapitel 3, insbesondere Abschnitt 3.1.

[86] Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) kann das Produkt nur negativ sein, wenn $G(x)$ negativ ist.

[87] Vgl. Arnold (2009), S. 525.

da sie bei der Schilderung des Falls, in dem sich die Arbitrageure komplett aus dem Markt zurückziehen müssen, letztendlich durch $p_2 = V - S_2$ auch $F_2 \geq 0$ annehmen.[88]

Zur weiteren Interpretation des zur Verfügung gestellten Betrages F_2 ist es notwendig, die Größe ΔF einzuführen. Diese ist wie folgt definiert:

$$\Delta F = F_2 - F_1 x. \tag{2.25}$$

Die Größe ΔF bezeichnet den Mittelzufluss bzw. den Mittelabfluss im Zeitpunkt $t = 2$.[89] Ist ΔF positiv, dann handelt es sich um einen Mittelzufluss und ist ΔF negativ, dann liegt ein Mittelabfluss vor. Zur Klärung, warum sich der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss nicht einfach als Differenz aus F_2 und F_1 ergibt, kann beispielsweise der folgende Fall herangezogen werden:

Angenommen, es tritt aufgrund einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ der Fall $F_2 = 0$ ein. Das heißt, die Investoren entschließen sich dazu, den Arbitrageuren keine Mittel mehr zur Verfügung zu stellen und sämtliche Mittel abzuziehen. Bei Betrachtung der einfachen Differenz aus F_2 und F_1 würde das bedeuten, der Mittelabfluss beträgt $F_2 - F_1 = 0 - F_1 = -F_1$. Da eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ vorliegt, haben die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ einen Betrag $D_1 > 0$ investiert.[90] Dieser zuvor zum Preis p_1 investierte Betrag muss nun im Zeitpunkt $t = 2$ zum niedrigeren Preis $p_2 < p_1$ liquidiert werden.[91] Folglich steht nur ein Betrag kleiner als F_1 zur Verfügung, welchen die Arbitrageure an die Investoren zurückzahlen können. Der zur Verfügung stehende Betrag entspricht genau $F_1 x$, dem aktuellen Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$. Eine Kapitalgarantie, das heißt, die Rückzahlung eines Betrages größer oder gleich F_1 im Zeitpunkt $t = 2$, wurde nicht vereinbart. Ein Rückzahlungsanspruch im Zeitpunkt $t = 2$ seitens der Investoren besteht in diesem Fall nur in Höhe von $F_1 x$. Der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss ergibt sich somit immer nach (2.25) als Differenz aus F_2 und $F_1 x$, dem aktuellen Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$.

Aufgrund der Maximum-Funktion in Gleichung (2.24) ist es zur konkreten Berechnung des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses im Zeitpunkt $t = 2$ erforderlich, zwischen zwei

[88] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 46.

[89] In Shleifer/Vishny (1997) wird die Größe ΔF nicht verwendet bzw. eingeführt. Zur genauen Quantifizierung des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses ist diese Größe jedoch sinnvoll.

[90] Für $D_1 = 0$ trifft nach Satz 15 immer $x = 1$ zu.

[91] Nach Satz 16 ist die hier vorliegende negative relative Wertentwicklung $x < 1$ gleichbedeutend mit einer negativen Preisentwicklung $p_2 < p_1$.

Fällen zu unterscheiden. Ist der Funktionswert $G(x)$ positiv, dann ergibt sich der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag nach (2.24) als $F_2 = F_1 \cdot G(x)$. In Verbindung mit Gleichung (2.25) folgt entsprechend für den Fall $G(x) > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_2 - F_1 x &= F_1 \cdot G(x) - F_1 x \\ &= F_1 \cdot (G(x) - x)\,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Im Fall $G(x) > 0$ erfolgt mit $F_1 > 0$ nach (2.2) für $G(x) > x$ ein Mittelzufluss und für $G(x) < x$ ein Mittelabfluss. Ist der Funktionswert $G(x)$ negativ oder trifft $G(x) = 0$ zu, dann gilt nach (2.24) für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 = 0$. In Verbindung mit Gleichung (2.25) folgt für den Fall $G(x) \leq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta F = F_2 - F_1 x &= 0 - F_1 x \\ &= -F_1 x. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Im Fall $G(x) \leq 0$ tritt somit immer ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ auf. Da dann gleichzeitig auch $F_2 = 0$ zutrifft, wird im Folgenden ein Mittelabfluss nach (2.27) auch als vollständiger Mittelabzug bezeichnet. Für den Fall $G(x) = 0$ stimmen die Gleichungen (2.26) und (2.27) überein, denn es gilt $\Delta F = F_1 \cdot (0 - x) = -F_1 x$. Wegen der Gemeinsamkeit hinsichtlich des vollständigen Mittelabzugs wird der Fall $G(x) = 0$ hier jedoch der Gleichung (2.27) zugeordnet.[92]

Erfolgt eine entsprechende Umstellung von Gleichung (2.25), dann ergibt sich der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag auch als

$$F_2 = F_1 x + \Delta F. \tag{2.28}$$

Der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_2 setzt sich demnach immer aus dem aktuellen Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ und ΔF, dem Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss im Zeitpunkt $t = 2$, zusammen. Mit Gleichung (2.28) folgt im Fall $F_2 = 0$ direkt ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$. Ist der im Zeitpunkt $t = 2$ von den Investoren zur Verfügung gestellte Betrag kleiner als das Investment im Zeitpunkt $t = 1$ seitens der Arbitrageure und gilt somit formal $F_2 < D_1$, dann

[92] Rein rechnerisch besitzt Gleichung (2.26) somit aber auch Gültigkeit für $G(x) = 0$ und daher insgesamt für $G(x) \geq 0$.

sind die Arbitrageure dazu gezwungen, ihre Position teilweise bzw. im Fall $F_2 = 0$ auch vollständig zu liquidieren. Ein Mittelabfluss $\Delta F < 0$ nach (2.26) führt jedoch nicht zwangsläufig auch zu einer teilweisen Liquidation der Position der Arbitrageure, solange in diesem Fall $D_1 \leq F_2 < F_1$ zutrifft. Die Begriffe Mittelabfluss und Liquidation sind demnach im Modell strikt zu unterscheiden.

Der Betrag F_1, welchen die Investoren den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung stellen, wird je nach Vorzeichen von ΔF im Zeitpunkt $t = 2$ entweder aufgestockt oder vermindert. Insgesamt investieren die Investoren im Rahmen des Modells somit den Betrag

$$I = F_1 + \Delta F. \tag{2.29}$$

Der Betrag I nach Gleichung (2.29) stellt aus Sicht der Investoren letztendlich die Basis der Erfolgsmessung dar. Dieser tatsächlich investierte Betrag ist abzugrenzen von dem im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag F_2, da im Betrag F_2 auch die relative Wertentwicklung berücksichtigt wird. Für eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ gilt $F_2 > I$ und für eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ folgt $F_2 < I$. Im Fall $x = 1$ stimmen (2.28) und (2.29) überein.

Je nach Vorzeichen der Größe ΔF nach (2.25) erfolgt seitens der Investoren ein Mittelzufluss bzw. ein Mittelabfluss im Zeitpunkt $t = 2$. Ein Mittelabfluss bedeutet innerhalb des Modells, dass die Investoren die abgezogenen Mittel nun Arbitrageuren in einem anderen Marktsegment zur Verfügung stellen. Folglich bedeutet ein Mittelzufluss im Modell, dass die Investoren von Arbitrageuren in einem anderen Marktsegment entsprechend Mittel abziehen. Da hier jedoch nur ein spezielles Marktsegment betrachtet wird, handelt es sich bei dem vorgestellten Modell um ein Partialmodell. Wohin die Mittel abfließen bzw. woher die zufließenden Mittel stammen, ist nur innerhalb eines Totalmodells genau zu klären.

Einen entscheidenden Einfluss auf die Höhe von F_2 und somit auf den Prozess der Mittelanpassung besitzt nach Gleichung (2.24) insbesondere die Update-Funktion G. Daher widmet sich Kapitel 3 ausführlich dieser Funktion. Für die restlichen Abschnitte dieses Kapitels wird zunächst davon ausgegangen, dass ein zur Verfügung gestellter Betrag F_2 für den Zeitpunkt $t = 2$ bereits bestimmt wurde.

Im nachfolgenden Abschnitt wird nun der Zeitpunkt $t = 3$ besprochen. Dabei bildet insbesondere die Herleitung der Zielfunktion der Arbitrageure einen Schwerpunkt.

2.4 Der Zeitpunkt $t = 3$

Mit diesem Zeitpunkt endet die Modellierung. Die Performance vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ wird letztendlich nicht mehr herangezogen. Analog zu den vorangegangenen Zeitpunkten erfolgt in den ersten beiden Unterabschnitten eine Betrachtung der Nachfragefunktionen und der Preisgleichung bezogen auf den letzten Zeitpunkt $t = 3$. Die Tatsache, dass in diesem Zeitpunkt kein Noise trader shock bzw. kein Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader mehr vorliegt und die Noise trader gleichzeitig auch Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes erlangen, wirkt sich entsprechend auf die zunächst allgemein formulierten Nachfragefunktionen und die Preisgleichung aus. Den Schwerpunkt des letzten Unterabschnitts 2.4.3 bildet die sich auf den Zeitpunkt $t = 3$ beziehende Zielfunktion der Arbitrageure.

2.4.1 Die Nachfragefunktionen

Die Definition der Nachfragefunktionen erfolgt analog zu den vorangegangenen Zeitpunkten. Die Nachfrage der Noise trader im Zeitpunkt $t = 3$ ist wie folgt gegeben:

$$N_3 = \frac{V - S_3}{p_3}. \tag{2.30}$$

In den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ wird die pessimistische Einstellung bzw. ein Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader jeweils durch $S_t > 0$ zum Ausdruck gebracht. Im Zeitpunkt $t = 3$ verschwindet nun die pessimistische Einstellung bzw. der zuvor vorhandene Liquiditätsbedarf. Folglich gilt hier $S_3 = 0$. Die Nachfrage der Noise trader vereinfacht sich demnach zu

$$N_3 = \frac{V}{p_3}. \tag{2.31}$$

Angenommen, den Arbitrageuren wird auch im Zeitpunkt $t = 3$ von den Investoren ein Betrag F_3 zur Verfügung gestellt, welcher erneut innerhalb des Modells bestimmt wird.[93] Dann müssen die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ wiederum entscheiden, welchen Betrag D_3 mit $0 \leq D_3 \leq F_3$ sie letztendlich investieren. Die Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ ist daher zunächst wie folgt gegeben:

[93] Analog ist dann die Wertentwicklung des im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages F_2 vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ ausschlaggebend für die konkrete Höhe von F_3.

$$A_3 = \frac{D_3}{p_3}. \tag{2.32}$$

Im Zeitpunkt $t = 3$ erlangen jedoch die Noise trader ebenfalls Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes. Dadurch ist der Informationsvorsprung seitens der Arbitrageure in diesem speziellen Marktsegment nicht mehr vorhanden und eine Arbitragemöglichkeit aufgrund der Kenntnis des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes liegt nun nicht mehr vor. Das bedeutet, unabhängig von der konkreten Höhe eines von den Investoren im Zeitpunkt $t = 3$ zur Verfügung gestellten Betrages F_3 werden sich die Arbitrageure aus diesem speziellen Marktsegment komplett zurückziehen und die Entscheidung $D_3 = 0$ treffen.[94] Die Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ beträgt somit

$$A_3 = \frac{0}{p_3} = 0. \tag{2.33}$$

Wie in den vorangegangenen Zeitpunkten muss auch im Zeitpunkt $t = 3$ die Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand mit dem Angebot übereinstimmen. Da nur ein Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V gehandelt wird, ergibt sich gemäß den konkretisierten Gleichungen (2.31) und (2.33) im Zeitpunkt $t = 3$ für die gesamte Nachfrage:

$$N_3 + A_3 = \frac{V}{p_3} + \frac{0}{p_3} = \frac{V}{p_3} = 1. \tag{2.34}$$

Aus dem Zusammenhang nach (2.34) kann nun wiederum im nachfolgenden Abschnitt der Preis p_3 bestimmt werden.

2.4.2 Die Preisgleichung in $t = 3$

Aus der Bedingung (2.34) für die Gesamtnachfrage folgt analog zu den vorherigen Zeitpunkten unmittelbar die Preisgleichung für den Zeitpunkt $t = 3$:

$$p_3 = V. \tag{2.35}$$

[94] Diese Entscheidung wird auch noch einmal mit der Preisgleichung in Abschnitt 2.4.2 begründet.

Als Preisabweichung im Zeitpunkt $t = 3$ wird analog zu den vorangegangenen Zeitpunkten die Differenz zwischen dem Grundwert V des Vermögensgegenstandes und dem Preis p_3 bezeichnet. Da nach Gleichung (2.35) hier $p_3 = V$ gilt, folgt für die Preisabweichung somit:

$$V - p_3 = V - V = 0. \tag{2.36}$$

Im Zeitpunkt $t = 3$ entspricht der Preis p_3 genau dem Grundwert V des Vermögensgegenstandes. Mit $V > 0$ gilt $p_3 > 0$. Somit sind alle Nachfragefunktionen im Zeitpunkt $t = 3$ ohne Definitionslücke. Mit $p_3 = V$ nach (2.35) folgt $N_3 = 1$ nach (2.31) und die Noise trader fragen den Vermögensgegenstand komplett alleine nach. Dies liegt daran, dass sich die Arbitrageure vollständig aus diesem speziellen Marktsegment zurückgezogen haben und die Gruppe der Noise trader nun die einzige Gruppe ist, die noch in diesem speziellen Marktsegment agiert. Der Preis $p_3 = V$, zu welchem die Noise trader den Vermögensgegenstand nachfragen, ergibt sich hier direkt aus der Bedingung (2.34). Ökonomisch kann dieser Preis auch wie folgt begründet werden:

Für eine Markträumung müssen Angebot und Nachfrage übereinstimmen. Folglich muss ein Preis p_3 gefunden werden, zudem die Noise trader bereit sind, den Vermögensgegenstand komplett alleine nachzufragen. Da die Noise trader nun auch den Grundwert V des Vermögensgegenstandes kennen, sind sie folglich nicht bereit, einen höheren Preis für den Gegenstand zu bezahlen. Das bedeutet, für $p_3 > V$ ist die Nachfrage kleiner als das Angebot.[95] Der Preis ist zu hoch und muss entsprechend gesenkt werden. Gilt andererseits $p_3 < V$, dann fragen die Noise trader den Gegenstand verstärkt nach, da sie ihn günstig erwerben können. Folglich ist in diesem Fall die Nachfrage größer als das Angebot.[96] Der Preis ist zu niedrig und muss entsprechend erhöht werden. Als einzige Lösung bleibt somit nur $p_3 = V$ übrig, da nur dann Angebot und Nachfrage ausgeglichen sind und der Markt geräumt ist.

Angenommen, den Arbitrageuren wird auch im Zeitpunkt $t = 3$ von den Investoren ein Betrag F_3 zur Verfügung gestellt und die Arbitrageure investieren nun doch einen positiven Betrag D_3 mit $D_3 \leq F_3$ in den Vermögensgegenstand. Ist die Nachfrage der Noise trader weiterhin mit $S_3 = 0$ durch Gleichung (2.31) definiert, dann bewirkt ein

[95] Mit $p_3 > V$ gilt nach (2.31) für die Nachfrage der Noise trader: $N_3 < 1$. Es liegt somit ein Überangebot des Vermögensgegenstandes vor.

[96] Mit $p_3 < V$ gilt nach (2.31) für die Nachfrage der Noise trader $N_3 > 1$. Es besteht eine Übernachfrage nach dem Vermögensgegenstand.

Investment $D_3 > 0$ seitens der Arbitrageure, dass die Preisgleichung für den Zeitpunkt $t = 3$ abweichend von Gleichung (2.35) nun $p_3 = V + D_3$ lautet.[97] Da in diesem Fall $p_3 > V$ gilt, sind offensichtlich sowohl die Noise trader als auch die Arbitrageure trotz Kenntnis des Grundwertes V bereit, einen Preis über dem Grundwert V für den Vermögensgegenstand zu bezahlen.

Aus Sicht der Arbitrageure könnte im Hinblick auf die Entlohnung ein Anreiz bestehen, einen möglichst hohen Preis p_3 zu erzielen. Aus Sicht der Noise trader macht es jedoch keinen Sinn, nun trotz Kenntnis des Grundwertes V einen höheren Preis als $p_3 = V$ für den Vermögensgegenstand zu bezahlen. Vielmehr ist bei einer positiven Nachfrage der Arbitrageure $D_3 > 0$ damit zu rechnen, dass im Zeitpunkt $t = 3$ dann auch $S_3 > 0$ zutrifft. Zwar fragen die Noise trader auch im Fall $S_3 = 0$ den Vermögensgegenstand durch $p_3 > V$ nicht mehr komplett alleine nach und haben somit ihre Nachfrage gegenüber dem Fall, in dem die Arbitrageure nicht mehr in diesem speziellen Marktsegment agieren und $p_3 = V$ gilt, entsprechend reduziert.[98] Trotzdem ist wegen der Kenntnis des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes damit zu rechnen, dass die Noise trader ihre Nachfrage soweit reduzieren, bis letztendlich wieder $p_3 = V$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $S_3 = D_3$ gewählt wird.[99] Sobald die Noise trader Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes erlangen und sie gleichzeitig auch keinen Liquiditätsbedarf mehr haben, wird sich immer ein Preis in Höhe des Grundwertes V einstellen.

Im aufgeführten Szenario mit $S_3 = D_3 > 0$ ändert sich allerdings die Rolle der Noise trader im Rahmen des Modells. Die Noise trader shocks in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ sind unabhängig von den Investitionsentscheidungen der Arbitrageure. Die Wahl eines Investments $D_3 > 0$ seitens der Arbitrageure bewirkt nun jedoch eine Reaktion bei den Noise tradern dergestalt, dass diese $S_3 = D_3$ wählen und somit im Zeitpunkt $t = 3$ auf das Investment D_3 der Arbitrageure reagieren. Die Höhe von S_3 ist nun abhängig von D_3, denn aus Sicht der Noise trader ist es wegen der Kenntnis

[97] Da Angebot und Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand übereinstimmen müssen, gilt für die Nachfrage der Noise trader nach (2.31) und für die Nachfrage der Arbitrageure nach (2.32) hier $N_3 + A_3 = \frac{V}{p_3} + \frac{D_3}{p_3} = \frac{V+D_3}{p_3} = 1$ und dementsprechend $p_3 = V + D_3$.

[98] Mit $p_3 > V$ gilt nach (2.31) für die Nachfrage der Noise trader $N_3 < 1$. Es liegt jedoch kein Überangebot des Vermögensgegenstandes vor, da in diesem Fall mit $D_3 > 0$ dann auch $A_3 > 0$ nach (2.32) gilt und der Markt durch $p_3 = V + D_3$ geräumt ist.

[99] Da Angebot und Nachfrage nach dem Vermögensgegenstand übereinstimmen müssen, gilt für die Nachfrage der Noise trader nach (2.30) und für die Nachfrage der Arbitrageure nach (2.32) hier $N_3 + A_3 = \frac{V-S_3}{p_3} + \frac{D_3}{p_3} = \frac{V-S_3+D_3}{p_3} = 1$ und dementsprechend $p_3 = V - S_3 + D_3$. Soll gleichzeitig $p_3 = V$ gelten, muss entsprechend auch $S_3 = D_3$ zutreffen.

des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes in diesem Szenario nicht sinnvoll, an $S_3 = 0$ festzuhalten.

Folglich besteht seitens der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ keine Möglichkeit, mit einem Investment $D_3 > 0$ einen Preis $p_3 \neq V$ bzw. einen Preis $p_3 > V$ zu erzielen, da die Noise trader ihre Nachfrage durch die entsprechende Wahl von S_3 immer so anpassen, dass letztendlich $p_3 = V$ gilt. Der Preis p_3 ist durch das Bekanntwerden des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 3$ demnach unabhängig von einem seitens der Arbitrageure getätigten Investment $D_3 > 0$. Da durch das Bekanntwerden des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes auch der Informationsvorsprung seitens der Arbitrageure nicht mehr vorhanden ist, werden sich die Arbitrageure selbst im Fall $F_3 > 0$ komplett aus diesem speziellen Marktsegment zurückziehen und entsprechend $D_3 = 0$ wählen.

Ob im Zeitpunkt $t = 3$ seitens der Investoren noch ein Betrag $F_3 > 0$ zur Verfügung gestellt wird oder nicht, hat zwar aus bereits aufgeführten Gründen keinen Einfluss auf die Entscheidung der Arbitrageure, $D_3 = 0$ zu wählen. Dennoch hätte die Bereitstellung eines derartigen Betrages zur Folge, dass die Performance vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ ebenfalls entscheidungsrelevant wird.[100] Dadurch würden sich unter Umständen die Investitionsentscheidungen hinsichtlich D_1 und D_2 verändern: Durch das Bekanntwerden des Grundwertes V des Vermögensgegenstandes ergibt sich zwar $p_3 = V$, die Investitionsentscheidungen hinsichtlich D_1 und D_2 besitzen jedoch einen Einfluss auf die Preise p_1 und p_2, wodurch die nun entscheidungsrelevante Performance vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ insbesondere über p_2 beeinflussbar wird.

Shleifer/Vishny (1997) gestehen den Investoren in ihrem Modell jedoch nur eine Anpassungsmöglichkeit in Form des im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages F_2 zu. Die Performance vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ wird nicht mehr herangezogen. Im Zeitpunkt $t = 3$ gilt im Prinzip $F_3 = 0$, da die Investoren in diesem Zeitpunkt sämtliche Mittel abziehen. Daraus ergibt sich $D_3 = 0$ und in Verbindung mit $S_3 = 0$ folgt $p_3 = V$ nach (2.35). Das bedeutet, die von den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ zum Preis p_2 investierten Mittel D_2 müssen zum Preis $p_3 = V$ liquidiert werden und zusammen mit den im Zeitpunkt $t = 2$ nicht investierten Mitteln an die Investoren zurückgezahlt werden. Dieses Endvermögen EV, welches die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ letztendlich aus F_2 für die Investoren erzielen, bildet die

[100] Das Verhältnis von $p_3 = V$ zu p_2 würde letztendlich zu einem (weiteren) Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss führen.

Grundlage der Entlohnung der Arbitrageure.[101] Das Endvermögen EV ist somit auch Ausgangspunkt der Zielfunktion der Arbitrageure, welche im nachfolgenden Abschnitt nun ausführlich behandelt wird.

2.4.3 Die Zielfunktion

Die Zielfunktion im Rahmen des Modells ist letztlich die Zielfunktion der Arbitrageure, da es ihnen obliegt, die Entscheidungen hinsichtlich der Investitionsbeträge in den einzelnen Zeitpunkten zu treffen. Sie bilden somit die aktive Gruppe, wohingegen die anderen beiden Gruppen mehr oder weniger passiv agieren.

Die Gruppe der Noise trader nimmt im Modellrahmen eine rein passive Rolle ein. Der erste Noise trader shock S_1 im Zeitpunkt $t = 1$ ist im Modell exogen vorgegeben und unabhängig von den Investitionsentscheidungen der Arbitrageure. Dies trifft auch auf den zweiten Noise trader shock $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ zu, welcher im Modell eine von den Investitionsentscheidungen der Arbitrageure unabhängige Zufallsvariable darstellt.[102] Mit $S_3 = 0$ ist auch der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 3$ vorgegeben.

Die Rolle der Gruppe der Investoren ist im Rahmen der Modellierung etwas schwieriger zu beschreiben. Im Zeitpunkt $t = 1$ stellen sie den Arbitrageuren den Betrag F_1 zur Verfügung, welcher hier analog zum Noise trader shock S_1 exogen vorgegeben und unabhängig von den Investitionsentscheidungen der Arbitrageure ist.[103] Die Investoren stellen den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ den Betrag F_2 zur Verfügung, welcher nicht mehr exogen vorgegeben ist, sondern innerhalb des Modells bestimmt wird.[104] Nach Gleichung (2.24) gilt $F_2 = \max[F_1 \cdot G(x), 0]$. Neben dem Betrag F_1 hat somit insbesondere die relative Wertentwicklung x über die Funktion G, welche im nachfolgenden Kapitel 3 noch näher betrachtet wird, einen entscheidenden Einfluss auf den Betrag F_2.

Nach Gleichung (2.22) setzt sich die relative Wertentwicklung x aus den Größen D_1 und F_1 sowie den Preisen p_1 und p_2 zusammen. Demnach ist der Betrag F_2 von der Investitionsentscheidung D_1 der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 1$ abhängig. Nach Gleichung (2.15) hängt der Preis p_2 von der Investitionsentscheidung D_2 der Arbitrageure

[101] Wird den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 3$ von den Investoren ein Betrag F_3 zur Verfügung gestellt, gilt durch $D_3 = 0$ entsprechend $EV = F_3$.

[102] Der zweite Noise trader shock ist in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung letztendlich auch exogen vorgegeben (vgl. Tabelle 2.1, S. 51).

[103] Die Investitionsentscheidung D_1 ist jedoch durch $D_1 \leq F_1$ entsprechend durch F_1 begrenzt.

[104] Vgl. dazu Abschnitt 2.3.3.

ab, wodurch auch D_2 einen Einfluss auf die Höhe des Betrages F_2 besitzt. Über die Entscheidungsvariablen D_1 und D_2 haben die Arbitrageure somit einen Einfluss auf den Betrag F_2, welcher ihnen im Zeitpunkt $t = 2$ seitens der Investoren zur Verfügung gestellt wird.

Zusätzlich ist den Arbitrageuren die Funktion G der Investoren bekannt. Dadurch kennen sie die Reaktion der Investoren auf jede mögliche relative Wertentwicklung. Da das Verhalten der Investoren durch die Funktion G genau vorgegeben ist, kommt den Investoren modelltechnisch auch eher eine passive Rolle zu. Der Investitionsbetrag D_3 und der von den Investoren im Zeitpunkt $t = 3$ zur Verfügung gestellte Betrag F_3 müssen hier nicht mehr gesondert betrachtet werden, da nach Abschnitt 2.4.2 im Rahmen des Modells $F_3 = 0$ angenommen wird, woraus unmittelbar auch $D_3 = 0$ folgt.

Seitens der Arbitrageure muss eine Entscheidung hinsichtlich des Investitionsbetrages D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ und eine Entscheidung bezüglich des Investitionsbetrages D_2 im Zeitpunkt $t = 2$ getroffen werden. Shleifer/Vishny (1997) unterstellen in ihrem Modell, dass im Zeitpunkt $t = 2$ immer der Betrag $D_2 = F_2$ investiert wird, sofern $S_2 > 0$ zutrifft und der Betrag $D_2 = 0$, wenn $S_2 = 0$ gilt.[105] Dieser Ansatz vereinfacht das Modell erheblich, da somit nur noch der Investitionsbetrag D_1 als einzige Entscheidungsvariable übrig bleibt. Eine Darstellung dieses vereinfachten Ansatzes erfolgt im nachfolgenden Unterabschnitt 2.4.3.1.

Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Vereinfachung, im Zeitpunkt $t = 2$ nur zwischen $D_2 = F_2$ und $D_2 = 0$ zu unterscheiden, im Sinne der Zielsetzung nicht immer die optimale Entscheidung darstellt.[106] Daher wird mit dem Ansatz in Unterabschnitt 2.4.3.2 die Möglichkeit in Betracht gezogen, auch im Zeitpunkt $t = 2$ nur einen anteiligen Betrag zu investieren und somit die zweite Entscheidungsvariable zu berücksichtigen.

2.4.3.1 Modell mit einer Entscheidungsvariable

Um im Rahmen des Modells eine Entscheidung hinsichtlich des Investitionsbetrages D_1 treffen zu können, müssen die Arbitrageure insbesondere die Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ berücksichtigen. Diese Zufallsvariable stellt aus Sicht der Arbitrageure die einzige Unsicherheit dar. Für eine konkrete Realisation S_2 der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ kann hinsichtlich des Endvermögens EV, welches die Arbitrageure

[105] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 42f. Im Fall $S_2 = 0$ erlangen die Noise trader gleichzeitig auch Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes.

[106] Vgl. dazu Abschnitt 4.3.

im Zeitpunkt $t = 3$ letztendlich aus F_2 für die Investoren erzielen, die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 18 *Investieren die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 2$ den gesamten zur Verfügung stehenden Betrag F_2 und wählen dementsprechend $D_2 = F_2$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 3$ ein Endvermögen in Höhe von*

$$EV = F_2 \cdot \frac{V}{p_2}. \tag{2.37}$$

BEWEIS: Analog zu Satz 17 ergibt sich im Fall $D_2 = F_2$ eine relative Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ in Höhe von $\frac{p_3}{p_2}$. Wird diese relative Wertentwicklung mit F_2 multipliziert, dann ergibt sich mit $p_3 = V$ genau das Endvermögen aus Gleichung (2.37). $\square$

In Gleichung (2.37) ist die Entscheidungsvariable D_1 nicht direkt zu erkennen. Nach (2.23) trägt D_1 jedoch zur Bestimmung der relativen Wertentwicklung x bei, welche über die Funktion G einen entscheidenden Einfluss auf die Höhe von F_2 hat.[107] Mit $D_2 = F_2$ ist der Investitionsbetrag D_1 letztendlich auch ausschlaggebend für die Höhe des Preises p_2 nach (2.15), sofern $S_2 > 0$ gilt.

Bei den vorangegangenen Ausführungen wurde bisher immer eine konkrete Realisation S_2 der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ betrachtet und die Stochastik der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ noch nicht berücksichtigt. Eine Hauptschwierigkeit im Rahmen des Modells bzw. seitens der Arbitrageure besteht jedoch darin, die Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ bzw. den unbekannten Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ entsprechend zu berücksichtigen bzw. irgendwie einzuschätzen. Im Folgenden wird nun auch die Unsicherheit hinsichtlich des stochastischen Noise trader shocks im Zeitpunkt $t = 2$ hinzugezogen. Den stochastischen Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ modellieren Shleifer/Vishny (1997) wie folgt:[108] Sie unterstellen für die Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit nur zwei Zuständen Z_1 und Z_2. Der Zustand Z_1 besitzt die Eintrittswahrscheinlichkeit q mit $q \in [0, 1]$. Der Zustand Z_2 hat dementsprechend die Eintrittswahrscheinlichkeit $1 - q$. Durch die zustandsbezogene Betrachtungsweise ist eine Anpassung der

[107] Vgl. dazu Kapitel 3.
[108] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 42.

Notation im Zeitpunkt $t = 2$ erforderlich: Es bezeichne daher S_{2i} die Realisation der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ im Zustand Z_i mit $i = 1, 2$.[109] Tritt der Zustand Z_1 ein, dann nimmt die Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ den Wert $S_{21} > 0$ an. Tritt hingegen der Zustand Z_2 ein, dann nimmt die Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ den Wert $S_{22} = 0$ an. In diesem Fall erlangen die Noise trader gleichzeitig auch Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes. Tabelle 2.1 gibt diese Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ noch einmal wieder.

Zustand	Z_1	Z_2
Eintrittswahrscheinlichkeit	q	$1 - q$
Realisation von $\widetilde{S}_2$	$S_{21} > 0$	$S_{22} = 0$

Tabelle 2.1: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$

Im Zustand Z_1 sind die Noise trader durch $S_{21} > 0$ somit weiterhin pessimistisch gegenüber dem Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V eingestellt bzw. es besteht weiterhin einen Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader. Shleifer/Vishny (1997) fordern zusätzlich noch, dass im Zustand Z_1 die Nebenbedingung

$$S_{21} > S_1 \tag{2.38}$$

erfüllt ist.[110] Das bedeutet, die Noise trader sind in diesem Fall nicht nur weiterhin pessimistisch gegenüber dem Vermögensgegenstand mit dem Grundwert V eingestellt, sondern ihre pessimistische Einstellung verschärft sich bzw. der Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader vergrößert sich bei Eintritt von Zustand Z_1 sogar noch entsprechend. Im weiteren Verlauf der Analyse wird jedoch auch die Möglichkeit in Betracht gezogen, von der von Shleifer/Vishny (1997) geforderten Nebenbedingung (2.38) abzuweichen und somit $S_{21} \leq S_1$ ebenfalls zuzulassen.

[109] Eine derartige Anpassung der Notation ist im Zeitpunkt $t = 2$ auch für die folgenden Größen erforderlich: p_{2i} bezeichne den Preis, F_{2i} den von den Investoren zur Verfügung gestellten Betrag und D_{2i} die Entscheidungsvariable im Zustand Z_i mit $i = 1, 2$. Ebenso gilt nun zustandsbezogen im Zeitpunkt $t = 2$ die Nachfragefunktion der Noise trader N_{2i} und die Nachfragefunktion der Arbitrageure A_{2i} für $i = 1, 2$.

[110] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 42.

Tritt Zustand Z_2 ein und somit $S_{22} = 0$, dann verschwindet der Pessimismus der Noise trader gegenüber dem Vermögensgegenstand bereits im Zeitpunkt $t = 2$ bzw. es besteht bereits einen Zeitpunkt früher kein Liquiditätsbedarf seitens der Noise trader mehr. Gleichzeitig erhalten die Noise trader bei Eintritt des Zustandes Z_2 bereits im Zeitpunkt $t = 2$ Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes. Der Zustand Z_2 im Zeitpunkt $t = 2$ entspricht praktisch einem vorgezogenen Zeitpunkt $t = 3$ und ist demnach gleichbedeutend mit einer Verkürzung der Laufzeit des Modells. Folglich nehmen bei Eintritt von Zustand Z_2 die Nachfragefunktionen im Zeitpunkt $t = 2$ die Gestalt der Nachfragefunktionen im Zeitpunkt $t = 3$ an. Das bedeutet, mit $S_{22} = 0$ im Zustand Z_2 besitzt die Nachfragefunktion der Noise trader nun die Gestalt $N_{22} = \frac{V}{p_{22}}$ und entsprechend die Nachfragefunktion der Arbitrageure die Gestalt $A_{22} = \frac{0}{p_{22}}$. Somit hat die Preisgleichung bereits im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_2 die Gestalt $p_{22} = V$.[111]

Die Einschränkung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ dergestalt, dass nur zwei Zustände existieren und dementsprechend nur die zwei Ausprägungen $S_{21} > 0$ und $S_{22} = 0$ möglich sind, ist natürlich eine erhebliche Einschränkung. Allerdings lässt sich bereits bei dieser einfachen Form der stochastischen Modellierung die Funktionsweise des Modells sehr gut beschreiben.

Unter Berücksichtigung des stochastischen Noise trader shocks im Zeitpunkt $t = 2$ in Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $\widetilde{S}_2$ nach Tabelle 2.1 lässt sich im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable das erwartete Endvermögen mit (2.37) nun darstellen als

$$\mu = \mathrm{E}(\widetilde{EV}) = qF_{21} \cdot \frac{V}{p_{21}} + (1-q) \cdot F_{22}. \tag{2.39}$$

Der erste Summand in (2.39) repräsentiert den Zustand Z_1 mit $S_{21} > 0$ und entspricht dabei folglich der Gleichung (2.37) entsprechend multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit q. Im Zustand Z_2 ergibt sich durch den Verlust des Informationsvorsprungs und durch $S_{22} = 0$ unabhängig vom getätigten Investment D_{22} der Arbitrageure immer ein Preis in Höhe von $p_{22} = V$. Die Arbitrageure werden sich daher komplett aus dem speziellen Marktsegment zurückziehen und $D_{22} = 0$ wählen. Mit einem risikolosen Zinssatz von 0% beträgt das Endvermögen im Zustand Z_2 somit $EV = F_{22}$. Entsprechend multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit $1 - q$ ergibt sich der zweite Summand von Gleichung (2.39).

[111] Vgl. dazu auch Abschnitt 2.4.2.

Letztendlich wird im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable davon ausgegangen, dass im Zustand Z_1 der Betrag $D_{21} = F_{21}$ und im Zustand Z_2 der Betrag $D_{22} = 0$ von den Arbitrageuren investiert wird, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach Tabelle 2.1 zugrunde gelegt wird. Somit bleibt nur noch der Investitionsbetrag D_1 als einzige Entscheidungsvariable übrig. In Verbindung mit Gleichung (2.39) lautet die Zielfunktion der Arbitrageure demnach

$$\max_{D_1} \mu \qquad \text{mit} \quad \mu = \mathrm{E}(\widetilde{EV}) = qF_{21} \cdot \frac{V}{p_{21}} + (1-q) \cdot F_{22}. \tag{2.40}$$

Zur Bestimmung des Maximums ist es notwendig, Gleichung (2.40) noch weiter aufzulösen. Nach Gleichung (2.24) gilt für den von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 = \max\left[F_1 \cdot G(x), 0\right]$. Wie bereits erwähnt, hängt dieser Betrag neben der Update-Funktion G und dem im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag F_1 maßgeblich von der relativen Wertentwicklung x ab. Da diese relative Wertentwicklung wiederum zustandsabhängig ist, wird im Folgenden zwischen der relativen Wertentwicklung x_{Z_1} im Zustand Z_1 und der relativen Wertentwicklung x_{Z_2} im Zustand Z_2 unterschieden. Die relative Wertentwicklung x_{Z_1} im Zustand Z_1 ergibt sich nach Gleichung (2.23) als

$$x_{Z_1} = 1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}. \tag{2.41}$$

Im Zustand Z_1 gilt nach Tabelle 2.1 für den Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ hier $S_{21} > 0$. Da der Grundwert V des Vermögensgegenstandes den Noise tradern in diesem Zustand noch nicht bekannt ist, wird der Preis p_{21} endogen im Modell bestimmt und ist somit abhängig von D_{21} bzw. F_{21}. Die relative Wertentwicklung x_{Z_2} im Zustand Z_2 ergibt sich nach Gleichung (2.23) hingegen als

$$x_{Z_2} = 1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)}{F_1}. \tag{2.42}$$

Der Grundwert V ist den Noise tradern im Zustand Z_2 bekannt. Folglich ergibt sich der Preis als $p_{22} = V$. Da nach Gleichung (2.10) insbesondere $p_1 < V$ gilt, liegt hier für $D_1 > 0$ eine positive relative Wertentwicklung $x_{Z_2} > 1$ vor bzw. im Fall $D_1 = 0$ gilt $x_{Z_2} = 1$. Daher gilt insbesondere in Verbindung mit der Update-Funktion G in diesem

Zustand $G(x_{Z_2}) \geq 1$ bzw. $F_{22} \geq F_1 > 0$.[112] Das bedeutet, der von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_2 zur Verfügung gestellte Betrag F_{22} ist in jedem Fall positiv. Der Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) lässt sich demnach konkreter darstellen als

$$\mu = q \cdot \max\left[F_1 \cdot G(x_{Z_1}), 0\right] \cdot \frac{V}{p_{21}} + (1-q) \cdot F_1 \cdot G(x_{Z_2}). \tag{2.43}$$

Problematisch ist in Gleichung (2.43) die Maximum-Funktion im Zustand Z_1. Es muss letztendlich bei jeder relativen Wertentwicklung x_{Z_1} zwischen den Fällen $G(x_{Z_1}) > 0$ und $G(x_{Z_1}) \leq 0$ unterschieden werden. Gilt $G(x_{Z_1}) > 0$, dann ergibt sich für μ die Gleichung

$$\mu = qF_1 \cdot G(x_{Z_1}) \cdot \frac{V}{p_{21}} + (1-q) \cdot F_1 \cdot G(x_{Z_2}). \tag{2.44}$$

Im anderen Fall $G(x_{Z_1}) \leq 0$ vereinfacht sich die Berechnung von μ erheblich. Durch $F_{21} = 0$ ergibt sich ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0$, wenn Zustand Z_1 eintritt.[113] Gilt $G(x_{Z_1}) \leq 0$, ergibt sich somit für μ die Gleichung

$$\mu = (1-q) \cdot F_1 \cdot G(x_{Z_2}). \tag{2.45}$$

Wird x_{Z_1} gemäß Gleichung (2.41) und x_{Z_2} gemäß Gleichung (2.42) in Gleichung (2.43) ersetzt, dann ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem

$$\begin{aligned} \mu &= q \cdot \max\left[F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right), 0\right] \cdot \frac{V}{p_{21}} \\ &+ (1-q) \cdot F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Um diesen Erwartungswert μ maximieren zu können, muss insbesondere noch auf die Bestimmung der Preise p_1 und p_{21} sowie auf die Update-Funktion G eingegangen werden. Während sich der Preis p_1 relativ einfach nach (2.5) als $p_1 = V - S_1 + D_1$ ergibt, gestaltet sich die Bestimmung des Preises p_{21} im Zustand Z_1 etwas schwieriger.[114]

[112] Vgl. dazu Kapitel 3.
[113] EV_{Z_1} bezeichnet das Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, wenn im Zeitpunkt $t = 2$ der Zustand Z_1 eintritt und $D_{21} = F_{21}$ gewählt wird.
[114] Im Zustand Z_2 gilt $p_{22} = V$, da $S_{22} = 0$ und $D_{22} = 0$ zutrifft.

Nach Gleichung (2.15) gilt $p_{21} = V - S_{21} + D_{21}$ im Zustand Z_1. Da im Entscheidungsmodell mit einer Entscheidungsvariable $D_{21} = F_{21}$ angenommen wird, ergibt sich somit für den Preis p_{21} im Zustand Z_1 die Gleichung

$$p_{21} = V - S_{21} + F_{21}. \tag{2.47}$$

Der von den Investoren im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellte Betrag ergibt sich jedoch wiederum nach Gleichung (2.24) als $F_{21} = \max\left[F_1 \cdot G(x_{Z_1}), 0\right]$. Wird zusätzlich noch x_{Z_1} in dieser Maximum-Funktion gemäß Gleichung (2.41) ersetzt, dann ergibt sich für den Preis p_{21} im Zustand Z_1 die folgende, etwas ausführlichere Gleichung

$$p_{21} = V - S_{21} + \max\left[F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right), 0\right]. \tag{2.48}$$

Bei Betrachtung von Gleichung (2.48) fällt auf, dass p_{21} sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung auftaucht. Das bedeutet, p_{21} hängt wiederum selbst von p_{21} ab. Dies ist genau deshalb der Fall, weil zur Bestimmung von F_{21} letztendlich die Performance von F_1 unter Berücksichtigung der Preise p_1 und p_{21} herangezogen wird. Durch diesen simultanen Schritt ergibt sich hier die Abhängigkeit des Preises p_{21} vom Preis p_{21} selbst. Dies trifft allerdings im Zustand Z_1 nur für $G(x_{Z_1}) > 0$ zu. Gilt $G(x_{Z_1}) \leq 0$, dann ergibt sich der Preis im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 als

$$p_{21} = V - S_{21}. \tag{2.49}$$

Im Zustand Z_2 gilt $p_{22} = V$, und zwar unabhängig von F_{22}.[115] Wegen der Maximum-Funktion muss im Zustand Z_1 zwischen den Fällen $G(x_{Z_1}) \leq 0$ und $G(x_{Z_1}) > 0$ unterschieden werden. Durch die Maximum-Funktion in Gleichung (2.48) ist im Fall $G(x_{Z_1}) \leq 0$ letztendlich gesichert, dass sich $p_{21} = V - S_{21}$ als untere Grenze für den Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 ergibt. Indirekt ist dadurch auch $F_{21} \geq 0$ gesichert.

Im anderen Fall $G(x_{Z_1}) > 0$ muss die obige Gleichung (2.48) erst noch nach p_{21} aufgelöst werden, weil p_{21} auch auf der rechten Seite der Gleichung auftaucht. Da p_{21} auf der

[115] Da $S_{22} = 0$ und vor allem $D_{22} = 0$ zutrifft, ist die konkrete Höhe von F_{22} letztendlich irrelevant für den Preis $p_{22} = V$.

rechten Seite der Gleichung jedoch über x_{Z_1} in die Funktion G einfließt, ist es nun erforderlich, eine konkrete Update-Funktion G anzugeben.

Bis zu dieser Stelle besitzen die bisherigen Ausführungen somit Gültigkeit für jede zulässige Update-Funktion G. Zur weiteren Analyse von μ und zur Bestimmung des Preises p_{21} muss nun eine Update-Funktion G ausgewählt werden.[116]

Analog zu diesem Abschnitt werden jedoch im nachfolgenden Abschnitt zunächst noch die Grundlagen des Modells mit zwei Entscheidungsvariablen kurz dargelegt.

2.4.3.2 Modell mit zwei Entscheidungsvariablen

Die Vereinfachung, im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 immer den Betrag $D_{21} = F_{21}$ zu investieren, stellt im Sinne der Zielsetzung nicht immer die optimale Entscheidung dar.[117] Daher wird mit dem nachfolgenden Ansatz die Möglichkeit in Betracht gezogen, im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 nur einen anteiligen Betrag zu investieren. Der von den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 investierte Betrag sei im Folgenden definiert als

$$D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)} \tag{2.50}$$

mit $\beta \in [0, 1]$.[118] Der Faktor β gibt dabei den Anteil an, welcher vom Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ investiert wird. In diesem Zusammenhang bedeutet $\beta = 1$, dass der Betrag $F_{21}^{(1)}$ vollständig investiert wird. Unter der Voraussetzung $D_1^{(1)} = D_1$ gilt dann $D_{21}^{(1)} = F_{21}^{(1)} = F_{21}$.[119] Aus $\beta = 0$ folgt $D_{21}^{(0)} = 0$ nach (2.50) und somit auch immer $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$ nach (2.15).

Im Zeitpunkt $t = 1$ ist der von den Investoren zur Verfügung gestellte Betrag F_1 exogen vorgegeben. Die Entscheidungsvariablen besitzen keinen Einfluss auf die Höhe dieses Betrages. Im Zeitpunkt $t = 2$ ist dies jedoch anders, da im Zustand Z_1 beispielsweise $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ nach Gleichung (2.15) beeinflusst und dieser

[116] Die genauere Betrachtung diverser Update-Funktionen erfolgt in Kapitel 3 und die Analyse konkreter Entscheidungsmodelle in Kapitel 4.

[117] Vgl. Abschnitt 4.3.

[118] Der Zusatz (β) wird hier zur Kennzeichnung des Modells mit zwei Entscheidungsvariablen verwendet. Die Kennzeichnung erstreckt sich neben den endogen im Modell bestimmten Werten auch auf die Entscheidungsvariable im Zeitpunkt $t = 1$.

[119] Im Folgenden bedeutet $D_1^{(1)} = D_1$, dass in beiden Modellen im Zeitpunkt $t = 1$ der gleiche Betrag investiert wird. Unter dieser Voraussetzung kann im Fall $\beta = 1$ auf die Kennzeichnung mit (β) verzichtet werden, da dann das Modell mit nur einer Entscheidungsvariable und das Modell mit zwei Entscheidungsvariablen übereinstimmen.

Preis wiederum einen Einfluss auf die relative Wertentwicklung nach (2.23) besitzt, welche nach (2.24) über die Funktion G den von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 zur Verfügung gestellten Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ bestimmt. Über die relative Wertentwicklung nach (2.23) besteht auch ein Einfluss von $D_1^{(\beta)}$ auf $F_{21}^{(\beta)}$.[120]

Das bedeutet, hinter jedem Investitionsbetrag $D_{21}^{(\beta)}$ bzw. hinter jedem Anteil β steht in der Regel ein anderer von den Investoren zur Verfügung gestellter Betrag $F_{21}^{(\beta)}$. Da somit die obere Begrenzung von $D_{21}^{(\beta)}$ endogen innerhalb des Modells bestimmt wird, gestaltet es sich äußerst schwierig, einen konkreten Investitionsbetrag $D_{21}^{(\beta)}$ anzugeben. Denn es ist möglich, dass dieser zunächst gewählte, konkrete Investitionsbetrag letztlich größer ist als die sich aus diesem Investitionsbetrag ergebende, obere Begrenzung. Für jeden Investitionsbetrag $D_{21}^{(\beta)}$ muss demnach im Nachhinein überprüft werden, ob dieser wegen der Grenze $F_{21}^{(\beta)}$ überhaupt zulässig war.

Diese umständliche Art der Überprüfung kann jedoch vermieden werden, indem nach Gleichung (2.50) der Investitionsbetrag $D_{21}^{(\beta)}$ anteilig von $F_{21}^{(\beta)}$ definiert wird. Die Arbitrageure treffen dann im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 eine Entscheidung dergestalt, dass sie einen Anteil β des zur Verfügung gestellten Betrages investieren. Diese Vorgehensweise birgt den Vorteil, dass für diese Entscheidung eine konkrete Angabe des Investitionsbetrages nicht erforderlich ist. Aus dem gewählten β ergibt sich $F_{21}^{(\beta)}$ und nach Gleichung (2.50) dann auch immer ein zulässiger Betrag $D_{21}^{(\beta)}$.

Hinsichtlich des Endvermögens $EV_{Z_1}^{(\beta)}$, welches die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 3$ letztendlich bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ aus $F_{21}^{(\beta)}$ für die Investoren erzielen, kann die folgende Aussage getroffen werden:

Satz 19 *Investieren die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 2$ den Betrag $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ mit $\beta \in [0, 1]$ bei Eintritt von Zustand Z_1, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 3$ ein Endvermögen in Höhe von*

$$EV_{Z_1}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)} \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + (1 - \beta) \cdot F_{21}^{(\beta)}. \tag{2.51}$$

Beweis: Der Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ wird in die Teilbeträge $\beta F_{21}^{(\beta)}$ und $(1 - \beta) \cdot F_{21}^{(\beta)}$ aufgeteilt. Der erste Summand von Gleichung (2.51) repräsentiert analog zu Gleichung (2.37) das Endvermögen bezogen auf den investierten Betrag in Höhe von $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$. Da der

[120] Ebenso besitzt $D_1^{(\beta)}$ über die relative Wertentwicklung einen Einfluss auf $F_{22}^{(\beta)}$ im Zustand Z_2.

risikolose Zinssatz 0% beträgt, kann der im Zeitpunkt $t = 2$ nicht investierte Betrag $(1-\beta) \cdot F_{21}^{(\beta)}$ zur Bestimmung des Endvermögens $EV_{Z_1}^{(\beta)}$ im Zeitpunkt $t = 3$ direkt in Form des zweiten Summanden hinzuaddiert werden. □

Im Fall $\beta = 1$ investieren die Arbitrageure den Betrag $D_{21}^{(1)} = F_{21}^{(1)}$. Unter der Voraussetzung $D_1^{(1)} = D_1$ gilt $F_{21}^{(1)} = F_{21}$ und es ergibt sich nach Gleichung (2.51) das gleiche Endvermögen wie nach Gleichung (2.37).[121] Im Fall $\beta = 0$ erfolgt seitens der Arbitrageure kein Investment im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1. Es gilt $D_{21}^{(0)} = 0$ nach (2.50) und nach Gleichung (2.51) ergibt sich $EV_{Z_1}^{(0)} = F_{21}^{(0)}$.[122]

Mit $\beta \in [0, 1]$ und $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ nach (2.50) ergibt sich das erwartete Endvermögen als

$$\mu^{(\beta)} = \mathrm{E}(\widetilde{EV}^{(\beta)}) = q \cdot \left(\beta F_{21}^{(\beta)} \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + (1-\beta) \cdot F_{21}^{(\beta)} \right) + (1-q) \cdot F_{22}^{(\beta)}. \tag{2.52}$$

Der erste Summand repräsentiert auch hier den Zustand Z_1 mit $S_{21} > 0$ und entspricht Gleichung (2.51) multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit q. Die Investition eines anteiligen Betrages $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ ist nur im Zustand Z_1 relevant, da aus zuvor genannten Gründen im Zustand Z_2 seitens der Arbitrageure kein Investment erfolgt. Mit einem risikolosen Zinssatz von 0% beträgt das Endvermögen bei Eintritt von Zustand Z_2 hier $EV_{Z_2}^{(\beta)} = F_{22}^{(\beta)}$ und multipliziert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit $1-q$ ergibt sich der zweite Summand von Gleichung (2.52).

Im Fall $\beta = 1$ investieren die Arbitrageure im Zustand Z_1 den Betrag $D_{21}^{(1)} = F_{21}^{(1)}$. Unter der Voraussetzung $D_1^{(1)} = D_1$ gilt sowohl $F_{21}^{(1)} = F_{21}$ als auch $F_{22}^{(1)} = F_{22}$ und es ergibt sich nach Gleichung (2.52) das gleiche erwartete Endvermögen wie nach Gleichung (2.39), wenn auch die gleichen Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1-q$ zugrunde gelegt werden.[123] Im Fall $\beta = 0$ erfolgt weder im Zustand Z_1 noch im Zustand Z_2 ein Investment seitens der Arbitrageure. Es gilt $D_{21}^{(0)} = 0$ und nach Gleichung (2.52) ergibt sich ein erwartetes Endvermögen in Höhe von $\mu^{(0)} = \mathrm{E}(\widetilde{EV}^{(0)}) = qF_{21}^{(0)} + (1-q) \cdot F_{22}^{(0)}$. Abhängig vom eintretenden Zustand wird entweder ein Endvermögen in Höhe des Betrages $F_{21}^{(0)}$ oder in Höhe des Betrages $F_{22}^{(0)}$ erzielt.

[121] Mit $\beta = 1$ und $D_1^{(1)} = D_1$ gilt $EV_{Z_1}^{(1)} = 1F_{21}^{(1)}V/p_{21}^{(1)} + (1-1) \cdot F_{21}^{(1)} = F_{21}V/p_{21} = EV$.

[122] Mit $\beta = 0$ gilt $EV_{Z_1}^{(0)} = 0F_{21}^{(0)}V\,/\,p_{21}^{(0)} + (1-0) \cdot F_{21}^{(0)} = F_{21}^{(0)}$. Der Betrag $F_{21}^{(0)}$ ist auch im Fall $D_1^{(1)} = D_1$ in der Regel nicht mit dem Betrag F_{21} identisch, welcher sich für $\beta = 1$ ergibt.

[123] Es gilt $\mu^{(1)} = q \cdot (F_{21}^{(1)}V/p_{21}^{(1)} + (1-1) \cdot F_{21}^{(1)}) + (1-q) \cdot F_{22}^{(1)} = qF_{21}V/p_{21} + (1-q) \cdot F_{22} = \mu$ mit $\beta = 1$, $D_1^{(1)} = D_1$ und den gleichen Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1-q$.

Mit der Möglichkeit, im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 ein Investment $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ zu wählen, lautet die Zielfunktion der Arbitrageure im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen in Verbindung mit Gleichung (2.52) demnach

$$\max_{D_1^{(\beta)},\beta} \mu^{(\beta)} \quad \text{mit } \mu^{(\beta)} = \mathrm{E}(\widetilde{EV}^{(\beta)}) = q \cdot \left(\beta F_{21}^{(\beta)} \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + (1-\beta) \cdot F_{21}^{(\beta)}\right) + (1-q) \cdot F_{22}^{(\beta)}. \tag{2.53}$$

Wegen der zuvor aufgeführten Schwierigkeiten in Verbindung mit der Angabe eines konkreten Investmentbetrages $D_{21}^{(\beta)}$ erfolgt die Maximierung im Rahmen der Zielfunktion über $D_1^{(\beta)}$ und β. Die Maximierung über β steht jedoch nach (2.50) im Einklang mit der Maximierung über $D_{21}^{(\beta)}$. Wird $\beta = 1$ gesetzt, dann liegt wiederum das Modell mit nur einer Entscheidungsvariable nach Gleichung (2.40) vor. Zur Bestimmung des Maximums ist es erforderlich, Gleichung (2.53) weiter aufzulösen. Wird der Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ entsprechend ausgeklammert und werden $F_{21}^{(\beta)}$ bzw. $F_{22}^{(\beta)}$ gemäß (2.24) ersetzt, dann ergibt sich für den Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.53) der Ausdruck

$$\mu^{(\beta)} = q \cdot \max\left[F_1 \cdot G(x_{Z_1}^{(\beta)}), 0\right] \cdot \left(\beta \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + 1 - \beta\right) + (1-q) \cdot F_1 \cdot G(x_{Z_2}^{(\beta)}). \tag{2.54}$$

Die Maximum-Funktion hinsichtlich des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages muss auch in diesem Modell nur beim Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ im Zustand Z_1 berücksichtigt werden. Die zustandsabhängige relative Wertentwicklung nach (2.23) hat die gleiche Gestalt wie im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable. Die Gleichungen (2.41) und (2.42) besitzen daher ebenfalls Gültigkeit.[124] Analog zum Modell mit einer Entscheidungsvariable muss bei der relativen Wertentwicklung bezogen auf den Zustand Z_1 zwischen den Fällen $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$ und $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) \leq 0$ unterschieden werden. Im letzteren Fall ergibt sich $\mu^{(\beta)} = (1-q) \cdot F_1 \cdot G(x_{Z_2}^{(\beta)})$ nach (2.54).[125]

Wird $x_{Z_1}^{(\beta)}$ gemäß Gleichung (2.41) und $x_{Z_2}^{(\beta)}$ gemäß Gleichung (2.42) in Gleichung (2.54) ersetzt, dann ergibt sich für den Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.53) der Ausdruck

[124] Da die relativen Wertentwicklungen insbesondere auch von der Entscheidungsvariable $D_1^{(\beta)}$ abhängen, werden diese mit $x_{Z_1}^{(\beta)}$ und $x_{Z_2}^{(\beta)}$ bezeichnet.

[125] Im Fall $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$ ist das Ergebnis der Maximum-Funktion in (2.54) positiv.

$$\mu^{(\beta)} = q \cdot \max\left[F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{p_{21}^{(\beta)}}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)}{F_1}\right), 0\right] \cdot \left(\beta \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + 1 - \beta\right)$$
$$+ (1-q) \cdot F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{V}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)}{F_1}\right). \tag{2.55}$$

Gleichung (2.55) ähnelt Gleichung (2.46) und scheint sich, abgesehen von den Kennzeichnungen mit (β), auf den ersten Blick nur durch den Faktor mit β zu unterscheiden. Da jedoch insbesondere auch β einen Einfluss auf die Höhe des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ besitzt, unterscheiden sich die beiden Gleichungen letztendlich relativ deutlich. Analog zum Modell mit nur einer Entscheidungsvariable haben auch hier neben der Update-Funktion G die Preise $p_1^{(\beta)}$ und $p_{21}^{(\beta)}$ einen entscheidenden Einfluss auf den Erwartungswert. Während sich der Preis $p_1^{(\beta)}$ relativ einfach nach (2.5) als $p_1^{(\beta)} = V - S_1 + D_1^{(\beta)}$ ergibt, gestaltet sich die Bestimmung des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ im Zustand Z_1 wiederum etwas schwieriger.[126]

Nach Gleichung (2.15) gilt $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21} + D_{21}^{(\beta)}$ im Zustand Z_1. Da im Entscheidungsmodell mit zwei Entscheidungsvariablen nun $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ nach (2.50) mit $\beta \in [0,1]$ angenommen wird, ergibt sich hier abweichend für den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ die Gleichung

$$p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21} + \beta F_{21}^{(\beta)}. \tag{2.56}$$

Wird in Gleichung (2.56) der von den Investoren zur Verfügung gestellte Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ gemäß (2.24) ersetzt, dann folgt mit $x_{Z_1}^{(\beta)}$ nach (2.41) für den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ die etwas ausführlichere Gleichung

$$p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21} + \beta \cdot \max\left[F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{p_{21}^{(\beta)}}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)}{F_1}\right), 0\right]. \tag{2.57}$$

Durch die Maximum-Funktion in (2.57) ist gesichert, dass $p_{21}^{(\beta)} \geq V - S_{21}$ gilt. Im Fall $p_{21}^{(\beta)} > V - S_{21}$ bzw. für $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$ hängt auch in diesem Modell der Preis $p_{21}^{(\beta)}$

[126] Im Zustand Z_2 gilt analog zum Modell mit nur einer Entscheidungsvariable $p_{22} = V$, da $S_{22} = 0$ und $D_{22} = 0$ zutrifft.

wiederum von sich selbst ab.[127] Der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ fließt auf der rechten Seite der Gleichung über $x_{Z_1}^{(\beta)}$ in die Funktion G ein, so dass eine Auflösung von (2.57) nach $p_{21}^{(\beta)}$ erst nach der Angabe einer konkreten Update-Funktion G möglich ist.

Tabelle 2.2 stellt die beiden Ansätze zur Bestimmung des erwarteten Endvermögens gegenüber und fasst dabei die wesentlichen Merkmale noch einmal zusammen.

	$\mu = \mathrm{E}(\widetilde{EV})$	$\mu^{(\beta)} = \mathrm{E}(\widetilde{EV}^{(\beta)})$
Eingabeparameter	$V,\ S_1,\ S_{21},\ F_1,\ q$	
Festlegungen	$S_{22} = S_3 = 0,\ p_{22} = p_3 = V,\ D_{22} = D_3 = 0,\ F_3 = 0$	
Entscheidungsvariable(n)	D_1	$D_1^{(\beta)},\ \beta$
Investment D_{21} bzw. $D_{21}^{(\beta)}$	$D_{21} = F_{21}$	$D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$
endogene Größen	$p_1,\ p_{21},\ F_{21},\ F_{22}$	$p_1^{(\beta)},\ p_{21}^{(\beta)},\ F_{21}^{(\beta)},\ F_{22}^{(\beta)}$

Tabelle 2.2: Ansätze zur Bestimmung des erwarteten Endvermögens

Die Eingabeparameter und die Festlegungen sind in beiden Modellen unabhängig von den Entscheidungsvariablen. Insbesondere bei den Festlegungen besteht im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen auch keine Abhängigkeit von der Entscheidungsvariable β. Daher erfolgt bei den Eingabeparametern und den Festlegungen keine Unterscheidung zwischen den beiden Modellen und entsprechend auch keine Kennzeichnung mit (β).

Da im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen zwischen der optimalen Entscheidung im Zeitpunkt $t = 1$ und der optimalen Entscheidung im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 eine gewisse Abhängigkeit besteht, wird die Entscheidungsvariable im Zeitpunkt $t = 1$ entsprechend mit $D_1^{(\beta)}$ bezeichnet.[128]

Die zwei Ansätze unterscheiden sich durch das Investment D_{21} bzw. $D_{21}^{(\beta)}$. Die Entscheidung hinsichtlich $D_{21}^{(\beta)}$ bzw. hinsichtlich β hat dabei insbesondere einen Einfluss auf die in Tabelle 2.2 aufgeführten endogenen Größen, weshalb diese auch mit (β) gekennzeichnet werden. Auch weitere endogene Größen, wie beispielsweise die relativen

[127] Vgl. dazu auch Gleichung (2.48) und die sich daran anschließenden Anmerkungen.
[128] Zur Abhängigkeit vgl. Abschnitt 4.3.

Wertentwicklungen, werden im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen entsprechend gekennzeichnet. Da es sich bei diesen weiteren endogenen Größen jedoch nur um untergeordnete Hilfsgrößen handelt, werden diese in Tabelle 2.2 nicht aufgeführt.

Das nachfolgende Kapitel widmet sich nun ausführlich der Update-Funktion G, deren Angabe zur weiteren Analyse erforderlich ist. Die beiden hier aufgeführten Ansätze werden dann in Kapitel 4 weiter vertieft.

Kapitel 3

Update-Funktionen

Den entscheidenden Einfluss auf die Bestimmung des im Zeitpunkt $t = 2$ seitens der Investoren zur Verfügung gestellten Betrages besitzt die Update-Funktion G. Die Gleichungen von μ nach (2.46) und p_{21} nach (2.48) im Modell mit einer Entscheidungsvariable in Abschnitt 2.4.3.1 können ohne die Angabe einer konkreten Update-Funktion ebenso wenig weiter analysiert werden wie die Gleichungen von $\mu^{(\beta)}$ nach (2.55) und $p_{21}^{(\beta)}$ nach (2.57) im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen in Abschnitt 2.4.3.2. Die Angabe einer expliziten Update-Funktion G ist daher im Hinblick auf die Entscheidungsmodelle in Kapitel 4 zwingend notwendig.

Die relative Wertentwicklung x nach (2.23) bildet den Input der Update-Funktion G. Im Rahmen dieses Kapitels steht die Reaktion von G auf unterschiedliche relative Wertentwicklungen x im Vordergrund, weshalb die Update-Funktion im Folgenden genauer mit $G(x)$ bezeichnet wird. Die Zielfunktion nach Abschnitt 2.4.3 spielt dabei keine Rolle, so dass eine zustandsbezogene Betrachtungsweise hier nicht erforderlich ist. Entsprechend erfolgt im Zeitpunkt $t = 2$ auch keine zustandsbezogene Kennzeichnung.[1]

Einer positiven bzw. negativen relativen Wertentwicklung x wird je nach Gestalt der Funktion $G(x)$ mehr oder weniger Bedeutung beigemessen. Shleifer/Vishny (1997) stellen an die Update-Funktion $G(x)$ die folgenden drei Anforderungen:[2]

$$(1): \; G(1) = 1, \quad (2): \; G'(x) \geq 1, \quad (3): \; G''(x) \leq 0. \tag{3.1}$$

[1]Beispielsweise muss beim Preis im Zeitpunkt $t = 2$ nicht zwischen p_{21} und p_{22} unterschieden werden, sondern es reicht die Kennzeichnung mit p_2.

[2]Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40. Die Funktion $G(x)$ wird im Folgenden stets nach x abgeleitet.

Die erste Anforderung $G(1) = 1$ bewirkt, dass der im Zeitpunkt $t = 2$ seitens der Investoren zur Verfügung gestellte Betrag F_2 wiederum genau dem im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag F_1 entspricht.[3] Eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$ führt demnach weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss.[4] Nach Satz 15 ergibt sich eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x = 1$ genau dann, wenn sich die Arbitrageure dazu entschließen, im Zeitpunkt $t = 1$ nicht zu investieren und $D_1 = 0$ wählen, oder wenn mit $p_1 = p_2$ die Preise in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ übereinstimmen. Da in beiden Fällen der aktuelle Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ mit $x = 1$ genau F_1 entspricht, ist es sinnvoll, dass sich die Investoren in diesen beiden Fällen passiv verhalten und den ursprünglich im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ nicht anpassen. Der Funktionswert jeder Update-Funktion $G(x)$ muss somit an der Stelle $x = 1$ immer genau $G(1) = 1$ betragen. Bedingt durch die Relationszeichen bieten die zweite und die dritte Anforderung in (3.1) mehr Spielraum hinsichtlich der Update-Funktion $G(x)$. Eine genauere Analyse dieser beiden Anforderungen im Hinblick auf das Anpassungsverhalten der Investoren erfolgt in den nachfolgenden Abschnitten.

In Abschnitt 3.1 werden zunächst nicht stückweise definierte Update-Funktionen näher betrachtet. Diese sind relativ einfach zu handhaben, da sie nicht abschnittsweise definiert sind und somit eine Funktion für den gesamten Definitionsbereich von x Gültigkeit besitzt. Die drei Anforderungen nach (3.1) schließen jedoch auch die Verwendung von stückweise definierten Update-Funktionen bzw. zusammengesetzten Update-Funktionen mit ein. In Abschnitt 3.2 wird dann beispielhaft dargestellt, worauf bei derartigen Update-Funktionen zu achten ist. Eine Unterscheidung zwischen zwei Update-Funktionen im Hinblick auf das Anpassungsverhalten der Investoren ist insbesondere dann gut möglich, wenn Dominanzen vorliegen. Diesem Aspekt widmet sich ausführlich Abschnitt 3.3. Schließlich fasst der letzte Abschnitt 3.4 die gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich der unterschiedlichen Update-Funktionen noch einmal kurz zusammen.

3.1 Nicht stückweise definierte Update-Funktionen

Bei stückweise definierten Update-Funktionen besteht die Möglichkeit, den Definitionsbereich von x in einzelne Abschnitte zu unterteilen, und für jeden Abschnitt jeweils

[3] Mit $G(1) = 1 > 0$ und $F_1 > 0$ nach (2.2) ergibt sich $F_2 = \max[F_1 \cdot G(1), 0] = F_1$ nach (2.24).
[4] Nach (2.25) gilt $\Delta F = F_2 - F_1 x = F_1 - F_1 = 0$.

eine eigene Funktion anzugeben.[5] Bei nicht stückweise definierten Update-Funktionen ist diese Möglichkeit, die Update-Funktion aus mehreren einzelnen Funktionen zusammenzusetzen, entsprechend ausgeschlossen. Für den gesamten Definitionsbereich von x wird nur genau eine Funktion als Update-Funktion verwendet.

Im Folgenden werden zunächst nicht stückweise definierte Update-Funktionen betrachtet, bei denen eine konstante, von der relativen Wertentwicklung x unabhängige, erste Ableitung vorliegt. Diese linearen Update-Funktionen werden in Abschnitt 3.1.1 genauer untersucht. Im sich daran anschließenden Abschnitt 3.1.2 erfolgt eine Verallgemeinerung auf die Fälle, in denen die erste Ableitung nicht konstant, sondern abhängig von der relativen Wertentwicklung x ist. In diese Betrachtung werden auch streng konvexe Update-Funktionen miteinbezogen, welche mit $G''(x) > 0$ die dritte Anforderung in (3.1) verletzen. Warum Shleifer/Vishny (1997) konvexe Update-Funktionen ausschließen, wird dann abschließend in Abschnitt 3.1.3 durch die Gegenüberstellung von Mittelzufluss und Mittelabfluss erörtert.

3.1.1 Lineare Update-Funktionen

Ist die erste Ableitung der Funktion $G(x)$ konstant, dann liegt eine lineare Update-Funktion vor. Aus einer konstanten, von der relativen Wertentwicklung x unabhängigen, ersten Ableitung folgt unmittelbar $G''(x) = 0$ und somit die Gültigkeit der dritten Anforderung in (3.1). Sind auch die anderen beiden Anforderungen erfüllt, dann kann über die Gestalt der linearen Update-Funktion $G(x)$ die folgende Aussage getroffen werden:

Satz 20 *Ist die erste Ableitung der Funktion $G(x)$ konstant und gilt $G'(x) = a > 1$ für alle relativen Wertentwicklungen x, dann hat die Funktion $G(x)$ unter der Nebenbedingung $G(1) = 1$ die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$.*

Beweis: Ist die erste Ableitung von $G(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen x konstant, dann ist die Funktion $G(x)$ linear in x und hat die Gestalt $G(x) = mx + b$. Mit $G'(x) = a$ folgt $m = a$ und mit $G(1) = 1$ folgt $a \cdot 1 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - a$. Das heißt, die Funktion $G(x)$ hat die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$. □

[5] Vgl. Abschnitt 3.2.

Die Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 erfüllt somit alle drei Anforderungen nach (3.1) und ist nach Shleifer/Vishny (1997) zur Beurteilung der Wertentwicklung geeignet.[6] Für eine lineare Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ ergibt sich nach (2.24) für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag konkret

$$\begin{aligned} F_2 = \max\left[F_1 \cdot G(x), 0\right] &= \max\left[F_1 \cdot (ax + 1 - a), 0\right] \\ &= \max\left[aF_1 \cdot (x - 1) + F_1, 0\right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bevor auf den Mittelzufluss bzw. auf den Mittelabfluss näher eingegangen werden kann, muss zunächst geklärt werden, für welche Kombinationen von F_1, a und x der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_2 positiv ist.

SATZ 21 *Hat die Update-Funktion nach Satz 20 die Gestalt $G(x) = ax+1-a$, dann ist der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_2 positiv, wenn die Bedingung $x > 1 - \frac{1}{a}$ erfüllt ist.*

BEWEIS: Nach (3.2) ist $F_2 > 0$, wenn $F_1 \cdot (ax + 1 - a) > 0$ zutrifft. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) reduziert sich die Bedingung auf $ax + 1 - a > 0$.[7] Es gilt

$$ax + 1 - a > 0 \Leftrightarrow x > \frac{a-1}{a} \Leftrightarrow x > 1 - \frac{1}{a}. \tag{3.3}$$

□

Ist die relative Wertentwicklung x nicht größer als der kritische Wert $1 - \frac{1}{a}$, dann hat dies einen kompletten Mittelabzug seitens der Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Folge. Nach Satz 20 ist $a > 1$, daher gilt $0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$. Das heißt, solange keine negative relative Wertentwicklung vorliegt und dementsprechend $x \geq 1$ gilt, ist die Bedingung nach (3.3) immer erfüllt, und den Arbitrageuren wird im Zeitpunkt $t = 2$ ein positiver Betrag F_2 zur Verfügung gestellt.

SATZ 22 *Hat die Update-Funktion nach Satz 20 die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$, dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ zu einem Mittelzufluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x > 1$ gilt und zu einem Mittelabfluss, wenn $x < 1$ zutrifft.*

[6] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40f.

[7] F_1 kann hier vernachlässigt werden. Da F_1 aber zur Berechnung von x nach (2.22) bzw. nach (2.23) herangezogen wird, hat F_1 noch einen indirekten Einfluss über x auf die Bedingung.

BEWEIS: Ist die Bedingung nach (3.3) erfüllt, dann ergibt sich aus (3.2) in Verbindung mit Satz 21 der im Zeitpunkt $t = 2$ den Arbitrageuren zur Verfügung gestellte Betrag als $F_2 = aF_1 \cdot (x-1) + F_1$. Für den Mittelzufluss bzw. für den Mittelabfluss nach (2.25) gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta F = F_2 - F_1 x &= aF_1 \cdot (x-1) + F_1 - F_1 x \\ &= aF_1 \cdot (x-1) - F_1 \cdot (x-1) \\ &= (a-1) \cdot F_1 \cdot (x-1)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit $a > 1$ nach Satz 20 erfolgt für $x > 1$ ein Mittelzufluss und für $x < 1$ ein Mittelabfluss. Ist die Bedingung nach (3.3) nicht erfüllt, dann ergibt sich $F_2 = 0$ nach (3.2) und ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ nach (2.25). □

Der maximal mögliche Mittelabfluss beträgt demnach $\Delta F = -F_1 x$.[8] Dies entspricht dann genau dem aktuellen Wert von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$. Für den Spezialfall $a = 1$ ergibt sich die folgende Aussage:

SATZ 23 *Ist die erste Ableitung der Funktion $G(x)$ konstant und gilt $G'(x) = 1$ für alle relativen Wertentwicklungen x, dann hat die Funktion $G(x)$ unter der Nebenbedingung $G(1) = 1$ die Gestalt $G(x) = x$ und es kommt im Zeitpunkt $t = 2$ weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss, und zwar unabhängig von der letztendlich realisierten relativen Wertentwicklung x.*

BEWEIS: Ist die erste Ableitung von $G(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen x konstant, dann ist die Funktion $G(x)$ linear in x und hat die Gestalt $G(x) = mx + b$. Mit $G'(x) = 1$ folgt $m = 1$ und mit $G(1) = 1$ folgt $b = 0$. Das heißt, die Funktion $G(x)$ besitzt die Gestalt $G(x) = x$. Somit ergibt sich nach (2.24) für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 = F_1 x$.[9] Nach (2.25) gilt für den Mittelzufluss bzw. für den Mittelabfluss $\Delta F = F_2 - F_1 x = F_1 x - F_1 x = 0$.[10] □

[8] Nach Gleichung (2.28) ist $F_2 = F_1 x + \Delta F$. Da $F_2 \geq 0$ gilt, folgt somit $\Delta F \geq -F_1 x$.

[9] Nach Satz 14 ist $x > 0$, daher ist auch $F_1 x > 0$ und die Maximum-Funktion aus (3.2) bezogen auf F_2 kann hier vernachlässigt werden.

[10] Aus Gleichung (2.28) folgt auch direkt mit $F_2 = F_1 x$, dass $\Delta F = 0$ ist.

Die Update-Funktion $G(x) = x$ erfüllt alle drei Anforderungen nach (3.1)[11] Wählen die Investoren eine Update-Funktion nach Satz 23, dann stellen sie den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ immer genau den aktuellen Wert von F_1 zur Verfügung, und zwar unabhängig von der konkreten Preisentwicklung. Das heißt, im Fall $p_2 < p_1$ werden keine Beträge zurückgefordert und im Fall $p_2 > p_1$ werden aber auch keine weiteren, zusätzlichen Mittel im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellt. Die Investoren verhalten sich demnach passiv und greifen nicht aktiv durch zusätzlich zur Verfügung gestellte Mittel bzw. durch den Abzug von Mitteln im Zeitpunkt $t = 2$ in die Investitionsstrategie der Arbitrageure ein. Aufgrund dieses passiven Verhaltens für alle relativen Wertentwicklungen x wird die Funktion $G(x) = x$ im Folgenden als Benchmark-Update-Funktion verwendet und erhält die Bezeichnung $G_B(x)$. Satz 23 ergibt sich auch als Spezialfall von Satz 20, wenn dort $a = 1$ gewählt werden könnte. Bedingung (3.3) ist im Fall $a = 1$ immer erfüllt, da sich diese dann zu $x > 0$ vereinfacht und $x \leq 0$ nach Satz 14 nicht möglich ist. Da hier $F_2 = F_1 x$ gilt, ist folglich $F_2 > 0$ gewährleistet. Das bedeutet, die Arbitrageure besitzen im Fall $a = 1$ immer die Möglichkeit, einen Betrag $D_2 > 0$ im Zeitpunkt $t = 2$ zu investieren. Der vollständige Mittelabzug ist somit ausgeschlossen. Die Möglichkeit des Mittelabzugs und auch des vollständigen Mittelabzugs im Zeitpunkt $t = 2$ durch die Investoren ist ein entscheidender Bestandteil der Modellierung. Ohne diese Möglichkeit vereinfacht sich das Modell entsprechend.[12]

Im Folgenden wird anhand der linearen Update-Funktion untersucht, warum die von Shleifer/Vishny (1997) getroffene, zweite Anforderung $G'(x) \geq 1$ in (3.1) im Rahmen des Modells sinnvoll ist. Dazu wird die Möglichkeit $a < 1$ in Betracht gezogen.

SATZ 24 *Hat die Update-Funktion die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ und erfüllt der Parameter a die Bedingung $0 < a < 1$, dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ zu einem Mittelzufluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x < 1$ gilt und zu einem Mittelabfluss, wenn $x > 1$ zutrifft.*

BEWEIS: Nach Satz 14 ist die relative Wertentwicklung x positiv. Für $0 < a < 1$ gilt $1 - \frac{1}{a} < 0$. Somit ist Bedingung (3.3) immer erfüllt und es folgt $F_2 > 0$ für alle relativen Wertentwicklungen x. Nach (3.4) ergibt sich der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss als $\Delta F = (a - 1) \cdot F_1 \cdot (x - 1)$. Da für $a < 1$ der Faktor $(a - 1)$ negativ ist, erfolgt für

[11] Aus einer konstanten ersten Ableitung folgt, dass $G''(x) = 0$ gilt und somit hier auch die dritte Anforderung nach (3.1) erfüllt ist.

[12] Vgl. Abschnitt 4.1.1 sowie Anhang C.4.

$x < 1$ ein Mittelzufluss und für $x > 1$ ein Mittelabfluss. $\square$

Gilt für den Parameter a der Update-Funktion $0 < a < 1$, dann stellen die Investoren den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ bei einer negativen Preisentwicklung $p_2 < p_1$ noch zusätzliche Mittel zur Verfügung und bei einer positiven Preisentwicklung $p_2 > p_1$ werden Mittel abgezogen. Zwar haben die Arbitrageure im Falle einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ einen Betrag $F_2 < F_1$[13] und im Falle einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ einen Betrag $F_2 > F_1$[14] zur Verfügung. Dennoch widerspricht dieses Verhalten der Investoren dem im Modell ursprünglich angenommenen Verhalten: Eine negative relative Wertentwicklung wird im Fall $0 < a < 1$ nicht bestraft, sondern durch Mittelzufluss belohnt. Eine positive Performance wird sogar noch durch Mittelabzug bestraft. Weiterhin ist analog zum Fall $a = 1$ auch für $0 < a < 1$ ein vollständiger Mittelabzug ausgeschlossen.[15]

SATZ 25 *Hat die Update-Funktion die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ und ist $a = 0$, dann gilt unabhängig von der relativen Wertentwicklung x für den im Zeitpunkt $t = 2$ von den Investoren zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 = F_1$. Es kommt im Zeitpunkt $t = 2$ zu einem Mittelzufluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x < 1$ gilt und zu einem Mittelabfluss, wenn $x > 1$ zutrifft.*

BEWEIS: Mit $a = 0$ ergibt sich $G(x) = 1$. Die Update-Funktion ist konstant und unabhängig von x. Nach (3.2) gilt $F_2 = F_1$. Aus (3.4) folgt für den Mittelzufluss bzw. für den Mittelabfluss $\Delta F = -F_1 \cdot (x - 1)$. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) erfolgt für $x < 1$ ein Mittelzufluss und für $x > 1$ ein Mittelabfluss. $\square$

Im Vergleich zu Satz 24 ist im Fall $a = 0$ der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss betragsmäßig größer, da der Faktor $(a - 1)$ für $0 < a < 1$ größer ist als -1. Nach Satz 25 ist im Fall $x < 1$ der Mittelzufluss gerade so groß, dass im Zeitpunkt $t = 2$ wiederum der Betrag F_1 zur Verfügung steht. Und entsprechend ist im Fall $x > 1$ der Mittelabfluss so groß, dass hier auch nur der Betrag F_1 vorhanden ist, und somit

[13] Mit $x < 1$ und $a > 0$ gilt $F_2 = aF_1 \cdot (x - 1) + F_1 < F_1$ nach (3.2).
[14] Mit $x > 1$ und $a > 0$ gilt $F_2 = aF_1 \cdot (x - 1) + F_1 > F_1$ nach (3.2).
[15] Nach (2.2) ist $F_1 > 0$. Für $x > 1$ gilt somit $F_2 > F_1 > 0$. Nach (2.28) ist $F_2 = F_1 x + \Delta F$. Mit $x > 0$ nach Satz 14 folgt $F_1 x > 0$. Falls $x < 1$ eintritt, erfolgt ein positiver Mittelzufluss $\Delta F > 0$, so dass $F_2 > 0$ gilt.

unabhängig von der konkreten relativen Wertentwicklung x im Zeitpunkt $t = 2$ immer der Betrag F_1 verfügbar ist. Das bedeutet, noch stärker als bereits in Satz 24 steht auch hier die Reaktion auf die Performance im Widerspruch zum im Modell ursprünglich angenommenen Verhalten. Der vollständige Mittelabzug ist durch $F_2 = F_1$ mit $F_1 > 0$ nach (2.2) ebenfalls ausgeschlossen.

SATZ 26 *Hat die Update-Funktion die Gestalt $G(x) = ax+1-a$ und gilt für den Parameter $a < 0$, dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ zu einem Mittelzufluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x < 1$ zutrifft. In diesem Fall gilt für den von den Investoren zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 > F_1$. Es kommt zu einem Mittelabfluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x > 1$ zutrifft und es gilt für den von den Investoren zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 < F_1$.*

BEWEIS: Analog zum Beweis von Satz 21 gilt $F_2 > 0$, wenn $ax + 1 - a > 0$ zutrifft. Im Unterschied zu (3.3) folgt jedoch mit $a < 0$ als Bedingung

$$ax + 1 - a > 0 \Leftrightarrow x < \frac{a-1}{a} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{1}{a}. \tag{3.5}$$

Mit $1 < 1-\frac{1}{a}$ ist die Bedingung (3.5) für $x < 1$ immer erfüllt. Im Fall $x < 1$ ergibt sich nach (3.4) mit $a < 0$ ein Mittelzufluss, da $\Delta F = (a - 1) \cdot F_1 \cdot (x - 1) > 0$ ist, und nach (3.2) gilt $F_2 = aF_1 \cdot (x - 1) + F_1 > F_1$. Ist die Bedingung (3.5) im Fall $x > 1$ erfüllt, dann ergibt sich analog mit $a < 0$ ein Mittelabfluss, da $\Delta F = (a - 1) \cdot F_1 \cdot (x - 1) < 0$ ist und $F_2 = aF_1 \cdot (x - 1) + F_1 < F_1$ zutrifft. Ist die Bedingung (3.5) im Fall $x > 1$ nicht erfüllt, dann gilt $F_2 = 0 < F_1$ nach (3.2) und es ergibt sich nach (2.25) ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1x$. □

Wird für die Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ ein Parameter $a < 0$ gewählt, dann führt eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ dazu, dass die Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ einen noch größeren Betrag $F_2 > F_1$ zur Verfügung stellen. Eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ hingegen bewirkt, dass Mittel abgezogen werden und nur ein Betrag $F_2 < F_1$ zur Verfügung gestellt wird. Das heißt, auch hier steht die Reaktion auf die Performance im Widerspruch zu dem im Modell ursprünglich angenommenen Verhalten. Wenn die relative Wertentwicklung x sehr groß und/oder der Parameter a sehr klein ist, erfolgt sogar trotz positiver Performance ein kompletter

Mittelabzug.[16] Auch wenn der vollständige Mittelabzug für $a < 0$ nicht ausgeschlossen wird, so steht dieser Fall doch im Widerspruch zum ursprünglich angenommenen Verhalten der Investoren, da der vollständige Mittelabzug hier nur bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ auftreten kann.

Zusammenfassend kann demnach festgehalten werden, dass bei linearen Update-Funktionen nur eine Update-Funktion nach Satz 20 die gewünschte Funktionsweise des Modells widerspiegelt: Hat die Update-Funktion die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$, dann ist ein kompletter Mittelabzug im Zeitpunkt $t = 2$ bei negativer Performance nicht ausgeschlossen. Alle anderen Fälle bereiten gewisse Schwierigkeiten:[17] Im Fall $a = 1$ verhalten sich die Investoren passiv und greifen nicht in die Investitionsstrategie der Arbitrageure ein. Der Fall $a = 0$ bewirkt, dass unabhängig von der konkreten relativen Wertentwicklung x im Zeitpunkt $t = 2$ immer ein Betrag in Höhe von $F_2 = F_1$ zur Verfügung steht. Trifft $0 \leq a \leq 1$ zu, dann ist ein kompletter Mittelabzug ausgeschlossen, so dass immer ein Handlungsspielraum für die Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 2$ vorhanden ist.[18] Für $a < 1$ steht die Reaktion der Investoren auf die Performance im Widerspruch zum im Modell ursprünglich angenommenen Verhalten: Eine negative Performance wird durch Mittelzufluss belohnt und eine positive Performance durch Mittelabzug bestraft. Und für $a < 0$ ist es sogar möglich, dass eine positive Performance zu einem kompletten Mittelabzug führt.

Letztendlich ist die zweite Anforderung $G'(x) \geq 1$ in (3.1), welche Shleifer/Vishny (1997) an eine Update-Funktion $G(x)$ stellen, für $a < 1$ bei einer linearen Update-Funktion der Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ nicht erfüllt. Die vorangegangenen Analysen haben aufgezeigt, warum derartige Update-Funktionen mit $a < 1$ im Rahmen dieses Modells nicht geeignet sind. Hinsichtlich des Falls $a = 1$ bleibt anzumerken, dass eine konstante erste Ableitung $G'(x) = 1$ für alle relativen Wertentwicklungen $x > 0$ wegen der daraus resultierenden Passivität der Investoren zu vermeiden ist. Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ eignet sich jedoch als Vergleichsbasis, um die Auswirkungen des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses beurteilen zu können.

Wird bei den Update-Funktionen von einer konstanten ersten Ableitung abgewichen, dann erlangt die dritte Anforderung in (3.1), welche bei linearen Update-Funktionen mit $G''(x) = 0$ immer erfüllt ist, einen höheren Stellenwert. Im nachfolgenden Abschnitt werden nun derartige Update-Funktionen in die Betrachtung miteinbezogen.

[16] Dies trifft genau dann zu, wenn Bedingung (3.5) nicht mehr erfüllt ist.
[17] Gemeint sind hier Update-Funktionen der Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a \leq 1$.
[18] Das bedeutet, unabhängig von der Performance ist ein Investment $D_2 > 0$ immer möglich.

3.1.2 Verallgemeinerung

Der Kreis der linearen Update-Funktionen wird in diesem Abschnitt um diejenigen Update-Funktionen erweitert, deren erste Ableitung von der relativen Wertentwicklung x abhängig und somit nicht konstant ist. Dabei wird weiterhin vorausgesetzt, dass es sich bei sämtlichen Update-Funktionen um nicht stückweise definierte Update-Funktionen handelt, welche die erste Anforderung $G(1) = 1$ in (3.1) erfüllen. Auch die zweite Anforderung $G'(x) \geq 1$ sollte aus zuvor genannten Gründen immer Gültigkeit besitzen.[19] Hinsichtlich der dritten Anforderung $G''(x) \leq 0$ wird zunächst davon ausgegangen, dass auch diese zutrifft. Im Laufe des Abschnittes erfolgt jedoch auch eine Betrachtung des Falls $G''(x) > 0$.

Als Erstes stellt sich die Frage, inwieweit der Fall $G'(x) = 1$ bei nicht-linearen Update-Funktionen unter Einhaltung von (3.1) überhaupt auftreten kann. Konkret: Ist es möglich, eine nicht stückweise definierte Update-Funktion $G(x)$ anzugeben, bei der hinsichtlich der zweiten Anforderung sowohl der Gleichheitsfall als auch die echte Ungleichung für relative Wertentwicklungen $x > 0$ auftritt, und bei der trotzdem noch die zwei verbleibenden Anforderungen in (3.1) erfüllt sind? Nach dem folgenden Satz ist dies nicht möglich:

SATZ 27 *Die Update-Funktion $G(x)$ sei über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar[20], nicht stückweise definiert[21] und erfülle die drei Anforderungen nach (3.1). Dann ist es nicht möglich, eine Funktion $G(x)$ zu bestimmen, bei der für mindestens ein $\hat{x} > 0$ der Fall $G'(\hat{x}) = 1$ zutrifft und bei der gleichzeitig für alle anderen $x > 0$ mit $x \neq \hat{x}$ die Anforderung $G'(x) > 1$ erfüllt ist.*

BEWEIS: Angenommen, es existiert genau ein $\hat{x} > 0$, für welches $G'(\hat{x}) = 1$ zutrifft. Ist für alle anderen $x > 0$ die Anforderung $G'(x) > 1$ erfüllt, dann besitzt die erste Ableitung $G'(x)$ an der Stelle $\hat{x}$ ein lokales Minimum, woraus $G''(\hat{x}) = 0$ folgt. In unmittelbarer Umgebung von $\hat{x}$ gilt somit $G''(\hat{x}) < 0$ für $x < \hat{x}$ und $G''(\hat{x}) > 0$ für

[19] Trifft für einen Teil des Definitionsbereiches von x bei nicht-linearen Update-Funktionen $G'(x) < 1$ zu, dann steht (analog zu linearen Update-Funktionen) in diesem Bereich die Reaktion der Investoren auf die Performance im Widerspruch zum im Modell ursprünglich angenommenen Verhalten.

[20] Aus der Differenzierbarkeit einer Funktion folgt deren Stetigkeit (vgl. Kaballo (2000), S. 146). Daher ist die Update-Funktion $G(x)$ hier ebenfalls stetig. Zweimal stetig differenzierbar bedeutet, dass auch $G''(x)$ stetig sein muss (vgl. Kaballo (2000), S. 149).

[21] Dadurch sind insbesondere auch Minimum- und Maximum-Funktionen sowie Betragsfunktionen ausgeschlossen.

$x > \hat{x}$. Demnach ist für $x > \hat{x}$ die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ nach (3.1) verletzt. Für weitere $\hat{x} > 0$, für die $G'(\hat{x}) = 1$ zutrifft, kann analog argumentiert werden. □

Da es sich bei dem Definitionsbereich von x um ein offenes Intervall handelt, kann die Funktion $G'(x)$ ihr Minimum auch nicht an den Randstellen annehmen.[22] Letztendlich trifft für eine Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 27 entweder für alle $x > 0$ die Bedingung $G'(x) > 1$ oder für alle $x > 0$ die Bedingung $G'(x) = 1$ zu. Gilt letztere Bedingung, dann liegt die lineare Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ nach Satz 23 vor. Ist die erste Ableitung konstant mit $G'(x) = a > 1$, dann hat die lineare Update-Funktion nach Satz 20 die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$. Für nicht-lineare Update-Funktionen $G(x)$ trifft somit immer $G'(x) > 1$ bei der zweiten Anforderung in (3.1) zu. Zusammengefasst ist die Bedingung $G'(x) > 1$ letztendlich entscheidend für einen im Rahmen des Modells gewünschten Mittelzufluss bei positiver relativer Wertentwicklung bzw. für einen Mittelabfluss bei negativer relativer Wertentwicklung, und zwar unabhängig davon, ob die erste Ableitung $G'(x) > 1$ konstant oder nicht konstant ist. Dies kann mit Hilfe des folgenden Satzes zum Ausdruck gebracht werden:

Satz 28 *Die Update-Funktion $G(x)$ sei über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ stetig differenzierbar, nicht stückweise definiert und erfülle die Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$. Dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ zu einem Mittelzufluss, wenn für die relative Wertentwicklung $x > 1$ gilt und zu einem Mittelabfluss, wenn $x < 1$ gilt.*

Beweis: Nach (2.25) gilt für den Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss $\Delta F = F_2 - F_1 x$. Im Fall $G(x) \leq 0$ ist $F_2 = 0$ und es kommt nach (2.27) zu einem vollständigen Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$. Tritt der Fall $G(x) > 0$ ein, dann ergibt sich nach (2.26) ein Mittelzufluss bzw. ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$.[23] Für $x = 1$ gilt $G(1) = 1$ und für relative Wertentwicklungen $x > 1$ folgt daher mit $G'(x) > 1$ auch $G(x) > x$. Das heißt, es ergibt sich ein Mittelzufluss, da ΔF positiv ist. Analog gilt für relative Wertentwicklungen $x < 1$ in Verbindung mit $G'(x) > 1$ die Relation $G(x) < x$ und es folgt mit $\Delta F < 0$ ein Mittelabfluss. □

[22] Es gilt $x \in]0, \infty[$ nach Satz 14.

[23] Da $F_1 > 0$ gilt, ist somit das Vorzeichen der Differenz $G(x) - x$ entscheidend für einen Mittelzufluss bzw. für einen Mittelabfluss.

Nach Satz 28 ist eine konstante erste Ableitung nun nicht mehr zwingend erforderlich, um das gewünschte Verhalten hinsichtlich eines Mittelzuflusses bzw. eines Mittelabflusses zu erhalten, solange insbesondere die Voraussetzung $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ erfüllt ist. Im Fall eines Mittelabflusses konnte bei einer linearen Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ mit $0 \leq a \leq 1$ gezeigt werden, dass ein vollständiger Mittelabzug nicht möglich ist und somit bei derartigen Update-Funktionen immer $F_2 > 0$ zutrifft.[24] Liegt eine lineare Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20 vor, dann ist der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_2 positiv, solange die Bedingung $x > 1 - \frac{1}{a}$ erfüllt ist.[25] Tritt jedoch der Fall $x \leq 1 - \frac{1}{a}$ ein, dann erfolgt ein vollständiger Mittelabzug. Da $a > 1$ vorausgesetzt wird, besitzt die Update-Funktion eine positive Nullstelle an der Stelle $1-\frac{1}{a}$. Das bedeutet, wird im Fall $a > 1$ eine relative Wertentwicklung $x \leq 1 - \frac{1}{a}$ erzielt, dann erfolgt der vollständige Mittelabzug. Inwieweit eine derartige negative Performance überhaupt erzielt werden kann, hängt nicht nur von der Entscheidungsvariable D_1 ab, sondern auch von den externen Parametern, die in die Berechnung von x einfließen.[26] Je nach Parameterkonstellation ist aber eine relative Wertentwicklung nahe null prinzipiell möglich. Dieser Fall für konstante erste Ableitungen kann auch auf nicht konstante erste Ableitungen übertragen werden:

SATZ 29 *Die Update-Funktion $G(x)$ sei über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ stetig differenzierbar, nicht stückweise definiert und erfülle die Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$. Dann existiert genau eine relative Wertentwicklung $x_0 > 0$, für die $G(x_0) = 0$ gilt.[27] Für alle relativen Wertentwicklungen $x \leq x_0$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug und es gilt $F_2 = 0$.*

BEWEIS: Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ hat die Steigung $G'_B(x) = 1$ und genau eine Nullstelle an der Stelle $x_0 = 0$. Alle Update-Funktionen, einschließlich der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$, erfüllen die Anforderung $G(1) = 1$. Folglich besitzen sämtliche Update-Funktionen mit $G'(x) > 1$ eine Nullstelle $x_0 > 0$, da bei diesen Update-Funktionen für alle relativen Wertentwicklungen $x < 1$ die Relation $G(x) < G_B(x)$ gilt. Für $x < x_0$ ist wegen $G'(x) > 1 > 0$ der Funktionswert der

[24]Solche Update-Funktionen spiegeln nicht die gewünschte Funktionsweise des Modells wider und verletzen die Anforderung $G'(x) = a > 1$ (vgl. Sätze 23, 24 und 25).
[25]Vgl. Satz 21 bzw. Bedingung (3.3).
[26]Vgl. (2.23) für die einfließenden Parameter.
[27]x_0 bezeichnet im Folgenden die Nullstelle einer nicht stückweise definierten Update-Funktion.

Update-Funktion $G(x)$ negativ. Nach (2.24) folgt für $G(x) \leq 0$ ein im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellter Betrag in Höhe von $F_2 = 0$. □

Die Update-Funktionen nach Satz 29 besitzen demnach eine positive Nullstelle mit $0 < x_0 < 1$.[28] Folglich besteht für alle diese Update-Funktionen prinzipiell die Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs bei einer negativen Performance. Hinsichtlich des Mittelabflusses kommt der Nullstelle x_0 eine besondere Bedeutung zu:

SATZ 30 *Die Update-Funktion $G(x)$ sei über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ stetig differenzierbar, nicht stückweise definiert und erfülle die Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$. Dann ist der Mittelabfluss der relativen Wertentwicklung x_0 mit $G(x_0) = 0$ betragsmäßig am größten und betragsmäßig kleiner als F_1.*

BEWEIS: Nach Satz 29 besitzt eine derartige Update-Funktion genau eine relative Wertentwicklung $x_0 > 0$, für die $G(x_0) = 0$ gilt. Nach Gleichung (2.27) ergibt sich der vollständige Mittelabzug im Fall $G(x_0) = 0$ als $\Delta F = -F_1 x_0$.[29] Da nach Satz 28 ein Mittelabfluss nur für eine relative Wertentwicklung $0 < x < 1$ auftreten kann, bleibt zu zeigen, dass ΔF für $0 < x < 1$ an der Stelle x_0 ein Minimum annimmt.[30] Für $x > x_0$ ist wegen $G'(x) > 1 > 0$ der Funktionswert der Update-Funktion $G(x)$ positiv. Nach (2.26) ergibt sich für alle relativen Wertentwicklungen $x_0 < x < 1$ ein Mittelabfluss mit $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$. Mit $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ folgt $G(x) < x$ für $x < 1$. Das heißt, mit fallendem x wird die negative Differenz $G(x) - x$ betragsmäßig immer größer. Für $x > x_0$ folgt daher $F_1 \cdot (G(x) - x) > F_1 \cdot (G(x_0) - x_0) = -F_1 x_0$. Für $x < x_0$ ist wegen $G'(x) > 1 > 0$ der Funktionswert der Update-Funktion $G(x)$ negativ. Nach (2.27) ergibt sich für alle relativen Wertentwicklungen $x < x_0$ ein vollständiger Mittelabzug mit $\Delta F = -F_1 x$. Für $x < x_0$ folgt $-F_1 x > -F_1 x_0$. Der Mittelabfluss ist somit an der Stelle x_0 betragsmäßig am größten und mit $F_1 > 0$ nach (2.2) in Verbindung mit $0 < x_0 < 1$ gilt $F_1 x_0 < F_1$. □

Nach Satz 29 erfolgt zwar für alle relativen Wertentwicklungen $x \leq x_0$ ein vollständiger Mittelabzug, da in diesen Fällen jeweils $F_2 = 0$ gilt. Trotzdem ist der vollständige Mittelabzug für die relative Wertentwicklung x_0 betragsmäßig am größten. Dies liegt

[28] Da $G(1) = 1$ ist, gilt insbesondere mit $G'(x) > 1 > 0$ auch $x_0 < 1$.

[29] Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) und $x_0 > 0$ gilt hier $\Delta F < 0$.

[30] ΔF ist nach Satz 28 für $0 < x < 1$ stets negativ. Somit ist das Minimum betragsmäßig am größten.

daran, dass nur so viele Mittel abgezogen werden können, wie auch tatsächlich vorhanden sind. Je schlechter sich der im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 entwickelt hat, und je kleiner somit die relative Wertentwicklung x ausfällt, umso weniger steht für die Rückforderung im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung, da maximal der Betrag $F_1 x$ zurückgefordert werden kann. Bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ kann somit auch nur ein Betrag $F_1 x < F_1$ zurückgefordert werden. Nur im Fall einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ wäre es prinzipiell möglich, einen Betrag größer als F_1 zurückzuzahlen. Dann erfolgt jedoch im Rahmen des Modells ein Mittelzufluss.

Beispiele für konkave, nicht-lineare Update-Funktionen $G(x)$ sind die Funktionen

$$G(x) = x - e^{-x} + e^{-1} \quad \text{und} \tag{3.6}$$

$$G(x) = x + ln(x). \tag{3.7}$$

Sie erfüllen die Voraussetzungen nach Satz 27 und bei beiden Update-Funktionen ist zusätzlich für alle $x > 0$ die Bedingung $G'(x) > 1$ erfüllt.[31] Beide Funktionen weisen die im Modell geforderten Eigenschaften hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses nach Satz 28 auf[32] und besitzen auch prinzipiell die Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs nach Satz 29.[33] Die Funktionsverläufe der beiden Update-Funktionen in Abhängigkeit von x werden in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

Die durchgezogene Linie in Abbildung 3.1 repräsentiert zum Vergleich die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ nach Satz 23. Jeweils in Abhängigkeit von x wird durch die fein gestrichelte Kurve die Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) und durch die grob gestrichelte Kurve die Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) dargestellt. Anhand der graphischen Veranschaulichung ist gut zu erkennen, dass die Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ sensibler auf Veränderungen der relativen Wertentwicklung x reagiert als die Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$.

[31] Die Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ ist zweimal stetig differenzierbar mit $G'(x) = 1 + e^{-x} > 1$ und $G''(x) = -e^{-x} < 0$. Da $G(1) = 1 - e^{-1} + e^{-1} = 1$ ist, sind die drei Anforderungen nach (3.1) erfüllt. Die Funktion $G(x) = x + ln(x)$ ist für $x > 0$ ebenfalls zweimal stetig differenzierbar mit $G'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 1$ und $G''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Da $G(1) = 1 + ln(1) = 1$ ist, sind auch hier die drei Anforderungen nach (3.1) erfüllt.

[32] Für $G(x) > 0$ ergibt sich für $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ durch $\Delta F = F_1 \cdot \left(e^{-1} - e^{-x}\right)$ und für $G(x) = x + ln(x)$ durch $\Delta F = F_1 \cdot ln(x)$ jeweils für $x > 1$ ein Mittelzufluss und für $x < 1$ ein Mittelabfluss. Für $G(x) \leq 0$ folgt jeweils ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$.

[33] Für $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ muss die Nullstelle die Bedingung $e^{-x_0} - x_0 = e^{-1}$ erfüllen. Da e^{-x} monoton fallend und x monoton steigend ist, ergibt sich hier $x_0 = 0,342274$. Für $G(x) = x + ln(x)$ ergibt sich analog mit der Bedingung $x_0 = e^{-x_0}$ die Nullstelle $x_0 = 0,567143$.

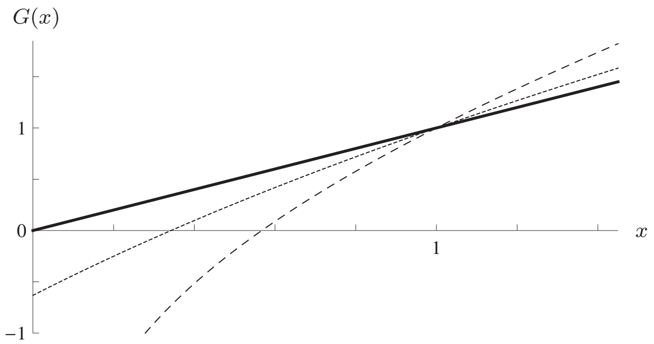


Abbildung 3.1: Konkave Update-Funktionen

Die Kombination einer einfachen linearen Funktion mit der Exponentialfunktion bzw. mit dem natürlichen Logarithmus hat den Vorteil, dass durch $G''(x) < 0$ auch eine Konkavität der Update-Funktion erreicht werden kann. Die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ nach (3.1) ist zwar auch bei einer linearen Update-Funktion der Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ für alle Parameter a erfüllt, da in diesen Fällen dann $G''(x) = 0$ gilt.[34] Der Fall $G''(x) < 0$ und damit Konkavität kann aber nur bei einer nicht konstanten ersten Ableitung der Update-Funktion auftreten.

Im Rahmen der weiteren Analyse steht nun die zweite Ableitung der Update-Funktion im Vordergrund. Dazu ist es hilfreich, die Voraussetzungen für die Update-Funktion noch einmal genauer zu betrachten: In Satz 27 muss die Update-Funktion $G(x)$ über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar sein, wohingegen in den Sätzen 28, 29 und 30 lediglich gefordert wird, dass die Update-Funktion $G(x)$ über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ nur stetig differenzierbar sein muss. Dies liegt daran, dass in Satz 27 auch die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ nach (3.1) erfüllt sein muss, weil diese Bedingung im Rahmen der Beweisführung benötigt wird. Die Bedingung hinsichtlich der zweiten Ableitung wurde in Satz 28 nicht aufgeführt, da eine nicht positive zweite Ableitung weder als Voraussetzung für die Aussage des Satzes erforderlich ist noch im Rahmen der Beweisführung benötigt wird. Dies trifft auch für die Sätze 29 und 30 zu. Da im Folgenden jedoch zwischen konvexen, linearen und konkaven Update-Funktionen unterschieden und auch in der Beweisführung auf die zweite Ableitung zurückgegriffen wird, ist es notwendig, dass die Update-Funktion $G(x)$ über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar ist. Demnach sind die Voraussetzungen der Sätze

[34] Die erste Ableitung ist mit $G'(x) = a$ konstant. Daraus folgt $G''(x) = 0$.

28, 29 und 30 nicht ausreichend. Die Voraussetzungen nach Satz 27 sind wiederum zu eng gefasst, da dort auch die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ nach (3.1) erfüllt sein muss, wodurch eine konvexe Update-Funktion generell ausgeschlossen wird. Außerdem wird durch diese Anforderung auch nicht zwischen einer linearen und konkaven Update-Funktion unterschieden und $G'(x) = 1$ ist in Satz 27 prinzipiell zulässig. Es werden demnach Voraussetzungen benötigt, welche sich zwischen denen von Satz 27 und denen von den Sätzen 28, 29 und 30 befinden. Diese Voraussetzungen werden im Rahmen der weiteren Betrachtung wie folgt definiert:

DEFINITION 1 *Die Update-Funktion $G(x)$*

(1) ist über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar,

(2) ist nicht stückweise definiert und

(3) erfüllt die Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$.

Wird im weiteren Verlauf beispielsweise eine streng konvexe Update-Funktion nach Definition 1 unterstellt, dann ist darunter zu verstehen, dass diese Update-Funktion neben den Eigenschaften (1) bis (3) aus Definition 1 noch zusätzlich die Bedingung $G''(x) > 0$ für alle $x > 0$ erfüllt.[35] Analoges gilt für lineare bzw. streng konkave Update-Funktionen.[36] Weiterhin erfüllt eine Update-Funktion nach Definition 1 auch die Voraussetzungen bezüglich der Sätze 28, 29 und 30, da Definition 1 sämtliche Voraussetzungen dieser Sätze beinhaltet und diese sogar noch um die Eigenschaft zweimal stetig differenzierbar erweitert. Folglich besitzen diese Sätze auch Gültigkeit für Update-Funktionen nach Definition 1. Bei Satz 27 muss jedoch zusätzlich noch die Bedingung $G''(x) \leq 0$ erfüllt und $G'(x) = 1$ prinzipiell zulässig sein.

Insgesamt ist der Stellenwert von $G''(x) \leq 0$ im Rahmen des Modells nicht ganz klar: Shleifer/Vishny (1997) schreiben dazu, dass ihre Ergebnisse nicht auf der Annahme

[35] Auch bei streng konvexen Funktionen kann für einzelne Werte x der Fall $G''(x) = 0$ auftreten, wie beispielsweise bei der Funktion $G(x) = x^4$ an der Stelle $x = 0$. Im Allgemeinen gilt daher $G''(x) \geq 0$ für streng konvexe Update-Funktionen. Im Folgenden werden jedoch nur streng konvexe Funktionen betrachtet, für die $G''(x) > 0$ im Bereich $x > 0$ zutrifft.

[36] Eine lineare Update-Funktion erfüllt zusätzlich die Bedingung $G''(x) = 0$ und eine streng konkave Update-Funktion erfüllt zusätzlich die Bedingung $G''(x) < 0$ für alle $x > 0$. Auch bei streng konkaven Funktionen kann für einzelne Werte x der Fall $G''(x) = 0$ auftreten, wie beispielsweise bei der Funktion $G(x) = -x^4$ an der Stelle $x = 0$. Im Allgemeinen gilt somit auch hier $G''(x) \leq 0$ für streng konkave Update-Funktionen. Im Folgenden werden jedoch nur streng konkave Funktionen betrachtet, für die $G''(x) < 0$ im Bereich $x > 0$ zutrifft.

einer konkaven Update-Funktion beruhen.[37] Mit einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 ziehen sie sich daher auf die Bedingung $G''(x) = 0$ zurück. Dabei erwähnen sie jedoch nicht, inwieweit eine konvexe Update-Funktion einen Einfluss auf die Ergebnisse ihrer Arbeit hätte. Eine einfache konvexe Update-Funktion ist beispielsweise

$$G(x) = e^x + 1 - e. \tag{3.8}$$

Neben den Voraussetzungen nach Definition 1 erfüllt sie gleichzeitig auch die Eigenschaften hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses nach Satz 28 und es besteht prinzipiell die Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs nach Satz 29.[38] Somit kann hier nicht direkt mit passivem oder widersprüchlichem Verhalten argumentiert werden, wie es beispielsweise bei einer linearen Update-Funktion nach den Sätzen 23, 24, 25 und 26 der Fall ist. Der Funktionsverlauf der konvexen Update-Funktion in Abhängigkeit von x wird in Abbildung 3.2 veranschaulicht.

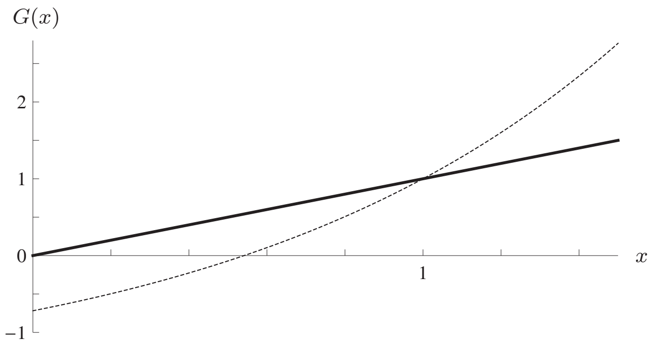


Abbildung 3.2: Konvexe Update-Funktion

Die durchgezogene Linie in Abbildung 3.2 repräsentiert wiederum zum Vergleich die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ nach Satz 23. Durch die fein gestrichelte Kurve wird die konvexe Update-Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) dargestellt.

Konvexe, lineare und konkave Update-Funktionen weisen unterschiedliche Verhaltensweisen auf, wenn die absolute Höhe des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wert-

[37] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 41.

[38] Die Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ ist über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar, nicht stückweise definiert und erfüllt die zwei Anforderungen $G(1) = e^1 + 1 - e = 1$ und $G'(x) = e^x > 1$ für $x > 0$. Für $G(x) > 0$ bzw. für $x > x_0 = ln(e-1) = 0,541325$ ergibt sich $\Delta F = F_1 \cdot (e^x + 1 - e - x)$ nach (2.26). Für $x = 1$ ergibt sich $\Delta F = 0$, für $x > 1$ erfolgt ein Mittelzufluss und für $x < 1$ ein Mittelabfluss. Im Fall $G(x) \leq 0$ bzw. $x \leq x_0$ tritt der vollständige Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ auf.

entwicklung $x > 1$ mit der absoluten Höhe des Mittelabflusses einer entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ verglichen wird. Diese unterschiedlichen Reaktionen der drei Typen von Update-Funktionen haben Shleifer/Vishny (1997) höchstwahrscheinlich dazu bewogen, konvexe Update-Funktionen durch die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ in (3.1) von der Betrachtung auszuschließen. Der nachfolgende Abschnitt widmet sich ausführlich diesen unterschiedlichen Verhaltensweisen.

3.1.3 Mittelzufluss versus Mittelabfluss

Die positive relative Wertentwicklung, bei welcher ein Mittelzufluss erfolgt, wird im Folgenden mit $x = 1 + \Delta x$ bezeichnet, wobei $\Delta x > 0$ gilt.[39] Die entsprechende negative relative Wertentwicklung, welche dann jeweils zum Vergleich herangezogen wird, besitzt die Gestalt $x = 1 - \Delta x$.[40] Das bedeutet, der Vergleich von Mittelzufluss und Mittelabfluss basiert letztendlich auf dem Vergleich der relativen Wertentwicklungen $x = 1 + \Delta x$ und $x = 1 - \Delta x$ für unterschiedlich hohe Δx im Bereich $0 < \Delta x < 1$.

Hinsichtlich einer streng konvexen Update-Funktion kann bei einem derartigen Vergleich die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 31 *Liegt eine streng konvexe Update-Funktion nach Definition 1 vor, dann fällt für Δx im Bereich $0 < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ größer aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.*

BEWEIS: Nach Satz 28 ergibt sich für $x = 1 + \Delta x > 1$ in Verbindung mit Gleichung (2.26) ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G(1 + \Delta x) - (1 + \Delta x))$.[41] Im Fall $x = 1 - \Delta x < 1$ ergibt sich nach Satz 28 ein Mittelabfluss. Gilt $G(1 - \Delta x) > 0$, dann ergibt sich nach (2.26) dieser Mittelabfluss als $\Delta F = F_1 \cdot (G(1 - \Delta x) - (1 - \Delta x))$. Folglich ist ΔF negativ für $x = 1 - \Delta x$. Beim betragsmäßigen Vergleich muss daher gelten: $F_1 \cdot (G(1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)) > -F_1 \cdot (G(1 - \Delta x) - (1 - \Delta x))$. Mit $F_1 > 0$ bleibt im Fall $G(1 - \Delta x) > 0$ zu zeigen: $G(1 + \Delta x) - (1 + \Delta x) > (1 - \Delta x) - G(1 - \Delta x)$.

[39] $\Delta x > 0$ entspricht somit der (positiven) Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$.

[40] Nach Satz 14 gilt $x > 0$. Für einen sinnvollen Vergleich folgt unmittelbar $1 - \Delta x > 0 \Leftrightarrow \Delta x < 1$.

[41] Nach Satz 28 gilt $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$. Da $x = 1 + \Delta x > 1$ ist, trifft folglich $G(1 + \Delta x) > G(1) = 1 > 0$ zu. Somit kann hier Gleichung (2.26) zur Bestimmung von ΔF herangezogen werden.

Es folgt $G'(1+\Delta x) > G'(1) > G'(1-\Delta x) > 1$ in Verbindung mit der strengen Konvexität $G''(x) > 0$ für alle $x > 0$. Da $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ gelten muss, gilt insbesondere auch

$$\frac{G(1+\Delta x) - G(1)}{(1+\Delta x) - 1} > \frac{G(1) - G(1-\Delta x)}{1-(1-\Delta x)} > 1. \tag{3.9}$$

Der Nenner vereinfacht sich jeweils zu Δx. Mit $G(1) = 1$ und durch Multiplikation von (3.9) mit Δx ergibt sich $G(1+\Delta x) - 1 > 1 - G(1-\Delta x) > \Delta x$. Durch die Subtraktion von Δx folgt $G(1+\Delta x) - (1+\Delta x) > (1-\Delta x) - G(1-\Delta x) > 0$ und somit die Behauptung im Fall $G(1-\Delta x) > 0$.

Im Fall $G(1-\Delta x) \leq 0$ ergibt sich nach (2.27) der Mittelabfluss als $\Delta F = -F_1 \cdot (1-\Delta x)$. Mit $F_1 > 0$ bleibt in diesem Fall beim betragsmäßigen Vergleich daher zu zeigen: $G(1+\Delta x) - (1+\Delta x) > (1-\Delta x)$.

Die Zusammenhänge in (3.9) gelten unabhängig vom Vorzeichen von $G(1-\Delta x)$ und insbesondere auch für den Fall $G(1-\widehat{\Delta x}) = 0$.[42] Durch entsprechende Umformung folgt analog $G(1+\widehat{\Delta x}) - (1+\widehat{\Delta x}) > (1-\widehat{\Delta x}) - 0 > 0$ und somit die Behauptung im Fall $G(1-\widehat{\Delta x}) = 0$. Die Wahl eines $\Delta x > \widehat{\Delta x}$ hat zur Folge, dass wegen $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ dann $G(1-\Delta x) < 0$ gilt und somit $G(1+\Delta x) - (1+\Delta x) > (1-\Delta x) - G(1-\Delta x) > (1-\Delta x)$ folgt. □

Die Nullstelle $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ erfüllt die Relation $G(1+\widehat{\Delta x}) - (1+\widehat{\Delta x}) > (1-\widehat{\Delta x})$, welche sich zu $G(1+\widehat{\Delta x}) > 2$ vereinfachen lässt.[43] Das bedeutet, dass bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ der vollständige Mittelabzug erfolgt, wohingegen bei der entsprechenden positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \widehat{\Delta x}$ der zuvor in $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 durch $G(1+\widehat{\Delta x}) > 2$ im Zeitpunkt $t = 2$ mehr als verdoppelt wird, da in diesem Fall $F_2 = F_1 \cdot G(1+\widehat{\Delta x}) > F_1 \cdot 2$ zutrifft. Dabei ist jedoch zwischen dem direkten Vergleich von F_2 mit F_1 und dem Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss zu unterscheiden: Beispielsweise ist eine Verdoppelung des zur Verfügung gestellten Betrages nicht gleichbedeutend mit einem Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1$.[44] Aus der für die Nullstelle $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ erfüllten Ungleichung

[42] $\widehat{\Delta x}$ bezeichnet die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ gilt. Mit $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ folgt $\widehat{\Delta x} > 0$. Nach Satz 29 ist $x_0 > 0$ und somit gilt $1 - \widehat{\Delta x} > 0 \Leftrightarrow \widehat{\Delta x} < 1$.

[43] Vgl. Beweis zu Satz 31.

[44] Der Mittelzufluss ist nach (2.25) definiert als $\Delta F = F_2 - F_1 x$. Da hier nur im Fall einer positiven

$G(1+\widehat{\Delta x}) > 2$ lässt sich somit nicht direkt folgern, dass hier der Mittelzufluss für die relative Wertentwicklung $x = 1+\widehat{\Delta x}$ betragsmäßig größer ist als der Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1-\widehat{\Delta x}$, wie es mit Hilfe von Satz 31 gezeigt wurde.[45]

Für die zuvor in (3.8) genannte konvexe Update-Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ gilt entsprechend $\widehat{\Delta x} = 1 - x_0 = 1 - 0,541325 = 0,458675$.[46] Bei einer negativen relativen Wertentwicklung in Höhe von $x_0 = 0,541325$ erfolgt demnach ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot 0,541325$. Für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1+\widehat{\Delta x} = 1,458675$ ergibt sich $G(1,458675) = 2,581976$ und somit ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (2,581976 - 1,458675) = F_1 \cdot 1,123301$. Das heißt, es gilt in diesem Fall nicht nur $G(1,458675) > 2$, sondern der Mittelzufluss ist sogar mehr als doppelt so groß wie der entsprechende betragsmäßige Mittelabfluss.

Bei einer konvexen Update-Funktion nach Satz 31 wird demnach eine positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss betragsmäßig stärker belohnt als eine vergleichbare negative relative Wertentwicklung durch Mittelabfluss bestraft wird. Im Vordergrund steht somit die Intensität der Reaktion auf eine relative Wertentwicklung: Wird die Reaktion auf eine positive relative Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ als Vergleichsbasis genommen, dann fällt die Reaktion auf die entsprechende negative relative Wertentwicklung $x = 1-\Delta x$ schwächer aus. Und wird andererseits die Reaktion auf eine negative relative Wertentwicklung $x = 1-\Delta x$ als Vergleichsbasis herangezogen, dann ist die Reaktion auf die entsprechende positive relative Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ stärker. Die Investoren messen somit einer negativen relativen Wertentwicklung weniger und einer positiven relativen Wertentwicklung mehr Bedeutung bei. Eine streng konvexe Update-Funktion der Investoren kommt somit den Arbitrageuren entgegen, da sie im Fall einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1-\Delta x$ mit einer gemilderten Reaktion rechnen können, wohingegen sie im Fall der entsprechenden positiven relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ mit einem verhältnismäßig hohen Mittelzufluss belohnt werden. Ein derartiges Verhalten der Investoren bei konvexen Update-Funktionen könnte Shleifer/Vishny (1997) dazu veranlasst haben, die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ in (3.1) zu stellen.

relativen Wertentwicklung ein Betrag $F_2 > F_1$ zur Verfügung gestellt wird, muss $x > 1$ gelten und somit $\Delta F < F_1$.

[45]Konkret: Ein vollständiger Mittelabzug ist nicht gleichbedeutend mit einem Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1$ und wegen $G(1+\widehat{\Delta x}) > 2$ muss bei einer streng konvexen Update-Funktion für $x = 1+\widehat{\Delta x}$ nicht unbedingt $\Delta F > F_1$ zutreffen.

[46]Als Nullstelle ergibt sich $x_0 = ln(e-1) = 0,541325$. Vgl. Fußnote 38, Kapitel 3, S. 79.

Im Fall einer linearen Update-Funktion ergibt sich hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses der folgende Satz:

SATZ 32 *Liegt eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 vor, dann entspricht für* Δx *im Bereich* $0 < \Delta x \leq \frac{1}{a}$ *der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung* $x = 1 + \Delta x$ *genau dem betragsmäßigen Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung* $x = 1 - \Delta x$.[47] *Für* Δx *im Bereich* $\frac{1}{a} < \Delta x < 1$ *fällt der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung* $x = 1 + \Delta x$ *größer aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung* $x = 1 - \Delta x$.

BEWEIS: Nach Satz 20 hat die Update-Funktion die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$. Die erste Ableitung der Funktion $G(x)$ ist konstant und es gilt $G'(x) = a > 1$ für alle relativen Wertentwicklungen x. Nach (3.4) ergibt sich für den Mittelzufluss bzw. für den Mittelabfluss die Gleichung $\Delta F = (a-1) \cdot F_1 \cdot (x-1)$, wenn $x > 1 - \frac{1}{a}$ nach Bedingung (3.3) zutrifft. Für $x = 1 + \Delta x$ mit $\Delta x > 0$ trifft diese Bedingung immer zu, da $1 + \Delta x > 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \Delta x > -\frac{1}{a}$ mit $a > 1 > 0$ immer erfüllt ist. Für $x = 1 - \Delta x$ ist die Bedingung erfüllt für $1 - \Delta x > 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \Delta x < \frac{1}{a}$.

Somit ergibt sich für $x = 1 + \Delta x > 1$ nach Satz 22 ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = (a-1) \cdot F_1 \cdot (1 + \Delta x - 1) = (a-1) \cdot F_1 \Delta x$ und für $x = 1 - \Delta x$ mit $0 < \Delta x < \frac{1}{a}$ ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = (a-1) \cdot F_1 \cdot (1 - \Delta x - 1) = -(a-1) \cdot F_1 \Delta x$.

Im Gleichheitsfall $\Delta x = \frac{1}{a}$ ergibt sich für $x = 1 + \Delta x = 1 + \frac{1}{a}$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = (a-1) \cdot F_1 \cdot \frac{1}{a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \cdot F_1$. Mit $G(1 - \frac{1}{a}) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) + 1 - a = 0$ folgt $x_0 = 1 - \frac{1}{a}$ als Nullstelle.[48] Nach Satz 29 erfolgt für alle relativen Wertentwicklungen $x \leq x_0 \Leftrightarrow 1 - \Delta x \leq 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \Delta x \geq \frac{1}{a}$ ein vollständiger Mittelabzug und es gilt $F_2 = 0$. Im Fall $\Delta x = \frac{1}{a}$ ergibt sich somit nach (2.27) für $x = 1 - \Delta x = 1 - \frac{1}{a}$ ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 x = -F_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Für $\Delta x > \frac{1}{a}$ erfolgt für $x = 1 + \Delta x$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = (a-1) \cdot F_1 \Delta x$ und für $x = 1 - \Delta x$ nach (2.27) ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot (1 - \Delta x)$. Mit $\Delta x < 1$ ist ΔF im Fall $x = 1 - \Delta x$ negativ. Beim betragsmäßigen Vergleich muss daher gelten: $(a-1) \cdot F_1 \Delta x > F_1 \cdot (1 - \Delta x)$. Mit $F_1 > 0$ lässt sich die Ungleichung vereinfachen zu: $(a-1) \cdot \Delta x > 1 - \Delta x \Leftrightarrow a\Delta x > 1 \Leftrightarrow \Delta x > \frac{1}{a}$. □

[47] Handelt es sich bei einer Update-Funktion nach Definition 1 um eine lineare Update-Funktion, dann besitzt diese eine Gestalt nach Satz 20. Deshalb wird hier eine Update-Funktion konkret nach Satz 20 und nicht allgemein nach Definition 1 unterstellt.

[48] Die Nullstelle lässt sich auch als $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ darstellen. Somit gilt $1 - \widehat{\Delta x} = 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$.

Bei einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 wird demnach eine positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss betragsmäßig genauso belohnt wie eine vergleichbare negative relative Wertentwicklung durch Mittelabfluss bestraft wird, sofern Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \frac{1}{a}$ liegt. Die Reaktion auf eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ ist identisch mit der Reaktion auf die entsprechende negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ und die Investoren messen somit einer negativen relativen Wertentwicklung die gleiche Bedeutung bei wie einer positiven relativen Wertentwicklung. Das bedeutet, bezogen auf den Mittelzufluss bzw. auf den Mittelabfluss können die Arbitrageure im Fall einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit der betragsmäßig gleichen Reaktion rechnen wie im Fall der entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$, sofern Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \frac{1}{a}$ liegt.

Für Δx im Bereich $\frac{1}{a} < \Delta x < 1$ fällt der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ größer aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Dies liegt daran, dass für Δx in diesem Bereich bei der negativen relativen Wertentwicklung immer der vollständige Mittelabzug erfolgt: Mit $\Delta F = -F_1 \cdot (1 - \Delta x)$ nach (2.27) nimmt der Mittelabfluss mit steigendem Δx betragsmäßig ab, da nur die Mittel abgezogen werden können, die auch tatsächlich in Form von $F_1 \cdot (1 - \Delta x)$ noch vorhanden sind. Im Gegensatz dazu nimmt der Mittelzufluss $\Delta F = (a - 1) \cdot F_1 \cdot (x - 1)$ nach (3.4) für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit steigendem Δx weiter zu. Da für Δx im Bereich $\frac{1}{a} < \Delta x < 1$ bereits der vollständige Mittelabzug erfolgt, sollte hier jedoch nicht der Schluss gezogen werden, dass in diesem Bereich eine positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss betragsmäßig stärker belohnt wird, als eine vergleichbare negative relative Wertentwicklung durch Mittelabfluss bestraft wird.

Bei einer streng konkaven Update-Funktion ergibt sich hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses der folgende Satz:

SATZ 33 *Liegt eine streng konkave Update-Funktion nach Definition 1 vor, dann fällt für Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.*[49]

[49]Eine Aussage zum Verhalten streng konkaver Update-Funktionen für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ wird in Satz 36 getroffen.

BEWEIS: Für den Fall $G(1-\Delta x) > 0$ erfolgt der Beweis analog zum Beweis von Satz 31. Allerdings muss hier wegen der streng konkaven Update-Funktion beim betragsmäßigen Vergleich nun $G(1+\Delta x) - (1+\Delta x) < (1-\Delta x) - G(1-\Delta x)$ gelten.

Es folgt $G'(1-\Delta x) > G'(1) > G'(1+\Delta x) > 1$ in Verbindung mit der strengen Konkavität $G''(x) < 0$ für alle $x > 0$. Da $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ gelten muss, gilt insbesondere auch

$$\frac{G(1) - G(1-\Delta x)}{1-(1-\Delta x)} > \frac{G(1+\Delta x) - G(1)}{(1+\Delta x) - 1} > 1. \tag{3.10}$$

Der Nenner vereinfacht sich auch hier jeweils zu Δx. Mit $G(1) = 1$ und durch Multiplikation von (3.10) mit Δx ergibt sich $1 - G(1-\Delta x) > G(1+\Delta x) - 1 > \Delta x$. Durch anschließende Subtraktion von Δx folgt $(1-\Delta x) - G(1-\Delta x) > G(1+\Delta x) - (1+\Delta x) > 0$ und somit die Behauptung im Fall $G(1-\Delta x) > 0$.

Für $G(1-\Delta x) \leq 0$ ergibt sich nach (2.27) der Mittelabfluss als $\Delta F = -F_1 \cdot (1-\Delta x)$. Mit $F_1 > 0$ bleibt daher im Fall $G(1-\widehat{\Delta x}) = 0$ beim betragsmäßigen Vergleich zu zeigen: $G(1+\widehat{\Delta x}) - (1+\widehat{\Delta x}) < (1-\widehat{\Delta x})$. Die Zusammenhänge in (3.10) gelten insbesondere auch für den Fall $G(1-\widehat{\Delta x}) = 0$. Durch entsprechende Umformung folgt analog $(1-\widehat{\Delta x}) - 0 > G(1+\widehat{\Delta x}) - (1+\widehat{\Delta x}) > 0$ und somit die Behauptung. □

Für die zuvor in (3.6) erwähnte konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ ergibt sich konkret $\widehat{\Delta x} = 1 - x_0 = 1 - 0,342274 = 0,657726$.[50] Bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x_0 = 0,342274$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot 0,342274$. Für $x = 1 + \widehat{\Delta x} = 1,657726$ mit $G(1,657726) = 1,835034$ ergibt sich ein Mittelzufluss $\Delta F = F_1 \cdot (1,835034 - 1,657726) = F_1 \cdot 0,177308$. Das bedeutet, der Mittelabfluss ist in diesem Beispiel betragsmäßig fast doppelt so groß wie der entsprechende Mittelzufluss.

Für die andere in (3.7) genannte konkave Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ ergibt sich $\widehat{\Delta x} = 1 - x_0 = 1 - 0,567143 = 0,432857$.[51] Der vollständige Mittelabzug bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x_0 = 0,567143$ beträgt $\Delta F = -F_1 \cdot 0,567143$. Für $x = 1 + \widehat{\Delta x} = 1,432857$ ergibt sich mit $G(1,432857) = 1,792527$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (1,792527 - 1,432857) = F_1 \cdot 0,359670$. Der Mittelabfluss ist betragsmäßig mehr als eineinhalb mal so groß wie der entsprechende Mittelzufluss.

[50] Vgl. Fußnote 33, Kapitel 3, S. 76 zur Berechnung der Nullstelle $x_0 = 0,342274$.
[51] Als Nullstelle ergibt sich $x_0 = 0,567143$. Vgl. Fußnote 33, Kapitel 3, S. 76.

Die beiden konkaven Funktionen reagieren unterschiedlich stark auf die relative Wertentwicklung x. Der Mittelabfluss ist bei der Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ an der Stelle $x = 1 - \widehat{\Delta x}$ fast doppelt so groß wie der entsprechende Mittelzufluss, wohingegen der Mittelabfluss bei der Funktion $G(x) = x + ln(x)$ an der Stelle $x = 1 - \widehat{\Delta x}$ nur mehr als eineinhalb mal so groß ist wie der entsprechende Mittelzufluss. Dieser Vergleich täuscht allerdings, da auch $\widehat{\Delta x}$ bei der Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ entsprechend größer ist als bei der Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$. Dadurch liegt eine völlig unterschiedliche Vergleichsbasis bei den beiden Funktionen vor. Insgesamt reagiert hier die Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ sensibler auf Veränderungen der relativen Wertentwicklung x als die Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$.[52] Allgemein trifft für konkave Update-Funktionen jedoch Folgendes zu:

Wird bei einer konkaven Update-Funktion nach Satz 33 die Reaktion auf eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ als Vergleichsbasis genommen, dann fällt die Reaktion auf die entsprechende negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ stärker aus. Wird andererseits die Reaktion auf eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ als Vergleichsbasis herangezogen, dann ist die Reaktion auf die entsprechende positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ schwächer. Eine negative relative Wertentwicklung wird somit durch Mittelabfluss betragsmäßig stärker bestraft als eine vergleichbare positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss belohnt wird. Eine streng konkave Update-Funktion der Investoren verschärft somit die Situation der Arbitrageure noch: Im Fall einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ müssen die Arbitrageure mit einem verhältnismäßig hohen Mittelabfluss rechnen, wohingegen sie im Fall der entsprechenden positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit einem vergleichsweise niedrigen Mittelzufluss belohnt werden.

Bei der Beurteilung der Reaktion einer Update-Funktion nach Definition 1 kommt der Nullstelle $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ der Update-Funktion eine besondere Bedeutung zu. Nicht nur, weil nach Satz 30 der Mittelabfluss bei einer negativen relativen Wertentwicklung x_0 betragsmäßig am größten ist, sondern auch, weil sich für eine relative Wertentwicklung $x > x_0$ eine andere Gleichung für den Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss ergibt als für eine relative Wertentwicklung $x < x_0$.[53] Begründet liegt diese Unterscheidung in (2.24), da für die Auswertung der Maximum-Funktion entscheidend ist, ob $G(x) \geq 0$ oder

[52] Vgl. dazu Abbildung 3.1, S. 77.

[53] Da $G'(x) > 1 > 0$ gilt, trifft für $x > x_0$ auch $G(x) > 0$ zu und somit Gleichung (2.26). Für $x < x_0$ gilt $G(x) < 0$ und folglich Gleichung (2.27).

$G(x) < 0$ zutrifft.[54] Im Folgenden wird daher zwischen den Fällen Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ und Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ unterschieden:[55]

SATZ 34 *Liegt Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$, dann nimmt bei Update-Funktionen nach Definition 1 mit steigendem Δx sowohl der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ als auch der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ betragsmäßig zu.*

BEWEIS: Es gilt $G(x_0) = G(1 - \widehat{\Delta x}) = 0$. Mit $G'(x) > 1 > 0$ für alle $x > 0$ folgt $G(1 - \Delta x) > 0$ für $\Delta x < \widehat{\Delta x}$. Nach (2.26) ergibt sich für $G(x) > 0$ bzw. für $G(x) \geq 0$ der Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss als $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$. Mit $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ nimmt mit steigendem $\Delta x > 0$ sowohl für $x > 1$ als auch für $x < 1$ die Differenz $(G(x) - x)$ betragsmäßig zu. □

Ob nach Satz 34 der Mittelzufluss einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ betragsmäßig größer oder kleiner ist als der Mittelabfluss der entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ bzw. ob der Mittelzufluss einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ und der Mittelabfluss der entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ betragsmäßig identisch sind, hängt von der Gestalt der zweiten Ableitung der Update-Funktion ab: Jeweils bezogen auf $x = 1 + \Delta x$ bzw. auf $x = 1 - \Delta x$ mit Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ ist der Mittelzufluss nach Satz 31 bei einer konvexen Update-Funktion betragsmäßig größer und nach Satz 33 bei einer konkaven Update-Funktion betragsmäßig kleiner als der entsprechende Mittelabfluss. Nach Satz 32 sind bei einer linearen Update-Funktion für Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \frac{1}{a}$ der Mittelzufluss und der entsprechende Mittelabfluss betragsmäßig identisch.[56]

SATZ 35 *Für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ nimmt bei Update-Funktionen nach Definition 1 mit steigendem $\Delta x > 0$ der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ weiter zu, der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ nimmt nun jedoch mit steigendem Δx betragsmäßig ab.*

[54] Der Gleichheitsfall $G(x) = 0$ kann auch Gleichung (2.26) zugeordnet werden. Vgl. Fußnote 92, Kapitel 2, S. 41.

[55] Es gilt: $\Delta x \leq \widehat{\Delta x} \Leftrightarrow -\Delta x \geq -\widehat{\Delta x} \Leftrightarrow 1 - \Delta x \geq 1 - \widehat{\Delta x} = x_0$. Das heißt, aus $\Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ folgt $x = 1 - \Delta x \geq 1 - \widehat{\Delta x} = x_0$ und somit $G(x) \geq 0$. Aus $\Delta x > \widehat{\Delta x}$ folgt analog $x = 1 - \Delta x < 1 - \widehat{\Delta x} = x_0$ und somit $G(x) < 0$. Vgl. dazu auch die vorangegangene Fußnote 53.

[56] Nach Fußnote 48, Kapitel 3, S. 83 gilt $\widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$.

BEWEIS: Für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1+\Delta x > 1$ ergibt sich nach (2.26) ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G(1+\Delta x) - (1+\Delta x))$. Da $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ gilt, nimmt ΔF mit steigendem Δx weiter zu. Für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ gilt $G(1-\Delta x) < 0$, woraus $\Delta F = -F_1 \cdot (1-\Delta x)$ nach (2.27) folgt. Mit steigendem Δx wird der Ausdruck $1 - \Delta x$ kleiner und ΔF nimmt betragsmäßig ab. □

Diese betragsmäßige Abnahme im Fall des Mittelabflusses läßt sich wie folgt erklären: Eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ führt zu einem vollständigen Mittelabzug und es gilt für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag $F_2 = 0$.[57] Ein vollständiger Mittelabzug bedeutet die Rückforderung des aktuellen Wertes von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$. Dieser aktuelle Wert hängt jedoch von der relativen Wertentwicklung x ab.[58] Je geringer x ausfällt, umso geringer fällt somit auch die betragsmäßige Rückforderung aus. Daher nimmt für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit steigendem Δx betragsmäßig ab.

In Definition 1 wurden außer der Eigenschaft zweimal stetig differenzierbar keine weiteren Anforderungen an die Update-Funktion hinsichtlich der zweiten Ableitung gestellt. Daher trifft Satz 35 gleichermaßen für konvexe, lineare und konkave Update-Funktionen zu. Mit Hilfe von Satz 35 kann nun eine Erklärung dafür abgegeben werden, warum bei Satz 31 keine Unterscheidung zwischen den Bereichen $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ und $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ vorgenommen wird, bei Satz 32 eine Unterscheidung erfolgt und bei Satz 33 noch keine Aussage für den Fall Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ aufgeführt wurde:[59]

Nach Satz 31 ist bei einer streng konvexen Update-Funktion der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ betragsmäßig immer größer als der Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Hier muss nicht für Δx zwischen den zwei Bereichen $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ und $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ unterschieden werden: Bereits für Δx im ersten Bereich ist der Mittelzufluss betragsmäßig größer als der entsprechende Mittelabfluss, obwohl auch in diesem Bereich nach Satz 34 der Mittelabfluss mit steigendem Δx betragsmäßig zunimmt. Für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ nimmt dann nach Satz 35 der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit

[57] Mit Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ ist $G(1-\Delta x) < 0$ und nach (2.24) folgt $F_2 = 0$.

[58] Der aktuelle Wert ergibt sich als $F_1 x$.

[59] In Satz 32 wird abweichend zwischen den Bereichen $0 < \Delta x \leq \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} < \Delta x < 1$ unterschieden. Es gilt jedoch $\widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$ nach Fußnote 48, Kapitel 3, S. 83.

steigendem Δx noch weiter zu, wohingegen der Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ nun mit steigendem Δx betragsmäßig abnimmt. Dadurch wächst die Differenz zwischen dem Mittelzufluss und dem entsprechenden betragsmäßigen Mittelabfluss mit steigendem $\Delta x > \widehat{\Delta x}$ noch stärker an, so dass hier eine Unterscheidung zwischen den Bereichen $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ und $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ nicht erforderlich ist.[60]

Nach Satz 32 entspricht bei einer linearen Update-Funktion der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ betragsmäßig dem Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$, sofern Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$ liegt. Mit steigendem Δx ist sowohl für $x = 1 + \Delta x$ als auch für $x = 1 - \Delta x$ die betragsmäßige Zunahme identisch. Nach Satz 35 erfolgt für Δx im Bereich $\frac{1}{a} = \widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ mit steigendem Δx für $x = 1 + \Delta x$ weiterhin eine Zunahme des Mittelzuflusses und für $x = 1 - \Delta x$ nun eine betragsmäßige Abnahme des Mittelabflusses. Dadurch fällt für Δx im Bereich $\frac{1}{a} = \widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss größer aus als der entsprechende betragsmäßige Mittelabfluss. Somit ist hier eine Unterscheidung zwischen den Bereichen $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} = \widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ nötig.

In Satz 33 wurde bei einer streng konkaven Update-Funktion noch keine Aussage für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ getroffen. Das liegt daran, dass für Δx in diesem Bereich keine einheitliche Aussage hinsichtlich des Größenverhältnisses zwischen Mittelzufluss und betragsmäßigem Mittelabfluss getroffen werden kann. Nach Satz 33 ist für Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ kleiner als der betragsmäßige Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Nach Satz 35 nimmt dann jedoch für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit steigendem Δx weiter zu, wohingegen der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit steigendem Δx nun betragsmäßig abnimmt. Für ein genügend großes Δx^* im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x^* < 1$ sind demzufolge der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*$ und der Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*$ betragsmäßig identisch.[61] Daher muss der Be-

[60] Für die zuvor in (3.8) genannte konvexe Update-Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ ergab sich mit $\widehat{\Delta x} = 0,458675$ (vgl. S. 82) für $x = 1 + \widehat{\Delta x}$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot 1,123301$ und für $x = 1 - \widehat{\Delta x}$ ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot 0,541325$. Trifft beispielsweise $\Delta x = 0,75 > \widehat{\Delta x}$ zu, dann ergibt sich für $x = 1 + \Delta x$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot 2,286321$ und für $x = 1 - \Delta x$ ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot 0,25$.

[61] Δx^* bezeichnet die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*$ und der Mittelabfluss der entsprechenden relativen

reich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ bei einer konkaven Update-Funktion nochmals unterteilt werden, um die Größenverhältnisse in diesem Bereich genauer analysieren zu können:

SATZ 36 *Liegt eine streng konkave Update-Funktion nach Definition 1 vor, dann existiert genau ein Δx^* mit den folgenden Eigenschaften: Für Δx^* gilt $\widehat{\Delta x} < \Delta x^* < 1$. Für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < \Delta x^*$ fällt der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Für $\Delta x = \Delta x^*$ entspricht der Mittelzufluss der relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*$ betragsmäßig dem Mittelabfluss der relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*$. Für Δx im Bereich $\Delta x^* < \Delta x < 1$ ist der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ größer als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.*

BEWEIS: Nach Satz 33 fällt für Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Daher muss $\Delta x^* > \widehat{\Delta x}$ gelten. Nach Satz 35 nimmt für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ mit steigendem Δx weiter zu, während der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit steigendem Δx nun betragsmäßig abnimmt. Es gilt daher zu zeigen, dass ein entsprechendes $\Delta x^* < 1$ existiert, für welches der Mittelzufluss der relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x^*$ betragsmäßig mit dem Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*$ übereinstimmt. Mit $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ ist $G(1 + \Delta x^*) > 0$ und es ergibt sich nach Gleichung (2.26) für $x = 1 + \Delta x^*$ ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G(1 + \Delta x^*) - (1 + \Delta x^*))$. Aus $\Delta x^* > \widehat{\Delta x}$ folgt $G(1 - \Delta x^*) < 0$ und somit folgt nach Gleichung (2.27) für $x = 1 - \Delta x^*$ ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = -F_1 \cdot (1 - \Delta x^*) < 0$. Unter der Annahme $\Delta x^* < 1$ muss für den betragsmäßigen Vergleich demnach gelten:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot (G(1 + \Delta x^*) - (1 + \Delta x^*)) &= F_1 \cdot (1 - \Delta x^*) \\ \Leftrightarrow \qquad G(1 + \Delta x^*) &= 2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*$ betragsmäßig übereinstimmen. Mit $\widehat{\Delta x} > 0$ folgt mit $\Delta x^* > \widehat{\Delta x}$ auch $\Delta x^* > 0$ (vgl. Fußnote 42, Kapitel 3, S. 81). Nach Satz 14 gilt $x > 0$ und somit ist Δx^* ökonomisch nur relevant, wenn auch $1 - \Delta x^* > 0 \Leftrightarrow \Delta x^* < 1$ zutrifft. Der Beweis zu $\Delta x^* < 1$ erfolgt in Satz 36.

Mit $G(1) = 1$ und $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ folgt $G(2) > 2$. Demnach existiert bei einer streng konkaven Update-Funktion ein Δx^* mit $\widehat{\Delta x} < \Delta x^* < 1$, für welches die Bedingung $G(1 + \Delta x^*) = 2$ nach (3.11) erfüllt ist.

Nach Satz 35 nimmt für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < 1$ mit steigendem Δx der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ weiter zu und der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ betragsmäßig ab. Da Δx^* ebenfalls in diesem Bereich liegt, ist folglich der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ für Δx im Bereich $\widehat{\Delta x} < \Delta x < \Delta x^*$ kleiner und für Δx im Bereich $\Delta x^* < \Delta x < 1$ größer als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. □

Für die zuvor in (3.6) erwähnte konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ ergibt sich hier nach Gleichung (3.11) konkret $\Delta x^* = 0,797786$.[62] Das bedeutet, insbesondere für ein Δx im Bereich zwischen $\widehat{\Delta x} = 0,657726$ und $\Delta x^* = 0,797786$ ist der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ immer noch kleiner als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$, obwohl nach Satz 35 in diesem Bereich mit steigendem Δx der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ weiter zunimmt und der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ betragsmäßig abnimmt.

Für die andere in (3.7) genannte konkave Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ ergibt sich nach Gleichung (3.11) konkret $\Delta x^* = 0,557146$.[63] Das bedeutet, hier ist beispielsweise für Δx im Bereich $\Delta x^* = 0,557146 < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ größer als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.

Bei linearen Update-Funktionen nach Satz 20 gibt es nicht nur ein Δx^*, für welches der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ betragsmäßig mit dem Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ übereinstimmt.

[62] Aus der Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ und der Bedingung $G(1+\Delta x^*) = 2$ ergibt sich hier $e^{-(1+\Delta x^*)} = \Delta x^* + e^{-1} - 1 \Leftrightarrow e^{-(1+\Delta x^*)} = \Delta x^* - 0,632121$. Während die linke Seite der Gleichung mit steigendem Δx^* kleiner wird, wird die rechte Seite der Gleichung größer. Mit $\Delta x^* > \widehat{\Delta x}$ und $e^{-(1+\widehat{\Delta x})} = e^{-(1,657726)} = 0,190572 > 0,025605 = \widehat{\Delta x} - 0,632121$ ergibt sich hier eine eindeutige Lösung und somit numerisch $\Delta x^* = 0,797786$. Zur Berechnung von $\widehat{\Delta x} = 0,657726$ vgl. S. 85.

[63] Hier ergibt sich analog $ln(1 + \Delta x^*) = 1 - \Delta x^*$. Während die linke Seite der Gleichung mit steigendem Δx^* größer wird, wird die rechte Seite der Gleichung kleiner. Auch hier ergibt sich mit $\Delta x^* > \widehat{\Delta x}$ und $ln(1+\widehat{\Delta x}) = ln(1,432857) = 0,359670 < 0,567143 = 1 - \Delta x^*$ eine eindeutige Lösung und somit numerisch $\Delta x^* = 0,557146$. Zur Berechnung von $\widehat{\Delta x} = 0,432857$ vgl. S. 85.

Nach Satz 32 trifft die betragsmäßige Gleichheit bei linearen Update-Funktionen für alle Δx mit $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x} = \frac{1}{a}$ zu. Bei konvexen Update-Funktionen nach Definition 1 hingegen existiert kein entsprechendes Δx^*. Denn nach Satz 31 fällt für Δx im gesamten Bereich $0 < \Delta x < 1$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ immer größer aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.

Im Rahmen der nicht stückweise definierten Update-Funktionen erfolgte eine Betrachtung von linearen, streng konkaven und streng konvexen Update-Funktionen. Trigonometrische Funktionen werden hier nicht aufgeführt, da sie sich wegen ihres periodischen Verhaltens nicht als Update-Funktionen eignen. Auch eine Analyse von Funktionen mit Wendestellen im für die relative Wertentwicklung zulässigen Bereich $x > 0$ ist nicht mehr vorgesehen, da derartige Funktionen eine grundlegende Verhaltensänderung der Investoren ab dieser Wendestelle bewirken.[64] Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt nun noch die beispielhafte Betrachtung einer stückweise definierten Update-Funktion, welche den drei Anforderungen nach (3.1) genügt.

3.2 Stückweise definierte Update-Funktionen

In den bisherigen Ausführungen wurde anhand von linearen Update-Funktionen die Notwendigkeit der zweiten Anforderung $G'(x) \geq 1$ in (3.1) im Gesamtzusammenhang des Modells herausgestellt. Nach Satz 27 ist es unter Einhaltung der drei Anforderungen nach (3.1) jedoch nicht möglich, eine nicht stückweise definierte Update-Funktion $G(x)$ zu bestimmen, bei der für mindestens ein $\hat{x} > 0$ der Fall $G'(\hat{x}) = 1$ zutrifft und bei der gleichzeitig für alle anderen $x > 0$ mit $x \neq \hat{x}$ die Anforderung $G'(x) > 1$ erfüllt ist. Wird allerdings in Satz 27 die Annahme einer nicht stückweise definierten Update-Funktion fallen gelassen, dann können derartige Update-Funktionen angegeben werden. Ein Beispiel stellt die nachfolgende Funktion dar:

$$G_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3 & \text{für } x < \bar{x} \\ x - (1 - \bar{x})^3 & \text{für } x \geq \bar{x}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Die Konstante $\bar{x}$ bezeichnet hier die Stelle, an der die Funktion zusammengesetzt wird. Der Definitionsbereich von $\bar{x}$ muss auf $\bar{x} \geq 1$ eingeschränkt werden, da sonst die Anfor-

[64] Bei diesen Funktionen ändert sich das Vorzeichen von $G''(x)$ im für x relevanten Bereich.

derung $G_{\bar{x}}(1) = 1$ verletzt ist.[65] Typische Funktionsverläufe der stückweise definierten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ für unterschiedliche Konstanten $\bar{x}$ werden in Abbildung 3.3 veranschaulicht.

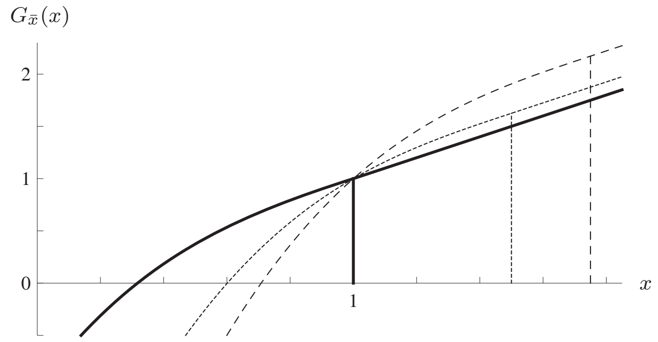


Abbildung 3.3: Stückweise definierte Update-Funktionen

Jeweils in Abhängigkeit von x wird in Abbildung 3.3 durch die durchgezogene Kurve die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$, durch die fein gestrichelte Kurve die Update-Funktion $G_{1,5}(x)$ und durch die grob gestrichelte Kurve die Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ dargestellt. Durch die senkrechten Linien wird in der entsprechenden Linienart die jeweilige Stelle $\bar{x}$ verdeutlicht, an welcher die Funktionen zusammengesetzt sind. Für $x < \bar{x}$ besitzt die Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ einen streng konkaven Verlauf und für $x \geq \bar{x}$ einen linearen Verlauf.

Im Folgenden wird nun zunächst überprüft, ob die übrigen Annahmen aus Satz 27 für die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ Gültigkeit besitzen.

Satz 37 *Die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ ist über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die drei Anforderungen nach (3.1).*

Beweis: Die Funktionen $(x-\bar{x})^3+x-(1-\bar{x})^3$ und $x-(1-\bar{x})^3$ sind Polynome dritten bzw. ersten Grades und daher unendlich oft differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.[66] Zu überprüfen ist der Übergang an der Stelle $\bar{x}$. Die Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ ist an der Stelle $\bar{x}$ stetig, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} G_{\bar{x}}(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} G_{\bar{x}}(x)$

[65] Angenommen, es gilt $\bar{x} < 1$. Dann ist $G_{\bar{x}}(1) = 1 - (1-\bar{x})^3 < 1$, da $(1-\bar{x})^3$ für $\bar{x} < 1$ positiv ist.
[66] Vgl. Kaballo (2000), S. 149.

übereinstimmt. Es gilt: $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} G_{\bar{x}}(x) = (\bar{x}-\bar{x})^3+\bar{x}-(1-\bar{x})^3 = \bar{x}-(1-\bar{x})^3 = \lim\limits_{x\to\bar{x}^+} G_{\bar{x}}(x)$. Für $G'_{\bar{x}}(x)$ folgt analog $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} G'_{\bar{x}}(x) = 3\cdot(\bar{x}-\bar{x})^2+1 = 1 = \lim\limits_{x\to\bar{x}^+} G'_{\bar{x}}(x)$ und für $G''_{\bar{x}}(x)$ ergibt sich $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} G''_{\bar{x}}(x) = 6\cdot(\bar{x}-\bar{x}) = 0 = \lim\limits_{x\to\bar{x}^+} G''_{\bar{x}}(x)$. Da $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} G'_{\bar{x}}(x) = G'_{\bar{x}}(\bar{x}) = \lim\limits_{x\to\bar{x}^+} G'_{\bar{x}}(x)$ ist, stimmt somit auch die erste Ableitung $G'_{\bar{x}}(x)$ der beiden Polynome an der Stelle $\bar{x}$ überein. Dies folgt auch analog für die zweite Ableitung $G''_{\bar{x}}(x)$.

Für $\bar{x} = 1$ folgt $G_{\bar{x}}(1) = 1-(1-1)^3 = 1$ und für $\bar{x} > 1$ folgt $G_{\bar{x}}(1) = (1-\bar{x})^3+1-(1-\bar{x})^3 = 1$. Für $x < \bar{x}$ ist $G'_{\bar{x}}(x) = 3\cdot(x-\bar{x})^2+1 > 1$ und $G''_{\bar{x}}(x) = 6\cdot(x-\bar{x}) < 0$. Für $x \geq \bar{x}$ ist $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ und $G''_{\bar{x}}(x) = 0$. □

Eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ erfüllt somit alle drei Anforderungen nach (3.1). Der Fall $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ tritt hier nicht nur für ein bestimmtes $\hat{x} > 0$ auf, sondern für einen ganzen Bereich $x \geq \bar{x}$. Es wird nun untersucht, inwieweit die Eigenschaften von nicht stückweise definierten Update-Funktionen auf eine stückweise definierte Update-Funktion nach (3.12) übertragen werden können. Hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses treffen dabei die folgenden Eigenschaften zu:

SATZ 38 *Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ vor, dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ für eine relative Wertentwicklung $x < 1$ zu einem Mittelabfluss. Für eine relative Wertentwicklung $x > 1$ kommt es nur dann zu einem Mittelzufluss, wenn $\bar{x} > 1$ zutrifft. Im Fall $\bar{x} = 1$ kommt es bei einer relativen Wertentwicklung $x > 1$ weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss.*

BEWEIS: Nach (2.25) gilt für den Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss $\Delta F = F_2 - F_1 x$. Im Fall $G_{\bar{x}}(x) \leq 0$ ist $F_2 = 0$ und es kommt nach (2.27) zu einem vollständigen Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$. Tritt der Fall $G_{\bar{x}}(x) > 0$ ein, dann ergibt sich nach (2.26) ein Mittelzufluss bzw. ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G_{\bar{x}}(x) - x)$. Mit $F_1 > 0$ ist das Vorzeichen der Differenz $G_{\bar{x}}(x) - x$ entscheidend für einen Mittelzufluss bzw. für einen Mittelabfluss. Nach (3.12) ist $G_{\bar{x}}(x) = (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3$ für $x < \bar{x}$.

Mit $\bar{x} \geq 1$ gilt diese Funktion insbesondere auch für $x < 1$. Für die Ableitung trifft $G'_{\bar{x}}(x) = 3\cdot(x-\bar{x})^2+1 > 1$ für $x \neq \bar{x}$ zu. Nach Satz 37 gilt $G_{\bar{x}}(1) = 1$ und für relative Wertentwicklungen $x < 1$ folgt daher mit $G'_{\bar{x}}(x) > 1$ auch $G_{\bar{x}}(x) < x$. Demnach ergibt sich ein Mittelabfluss, da ΔF negativ ist.

Für $\bar{x} > 1$ und x im Bereich $1 < x < \bar{x}$ gilt ebenfalls $G_{\bar{x}}(x) = (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3$.

Für positive relative Wertentwicklungen $x > 1$ in diesem Bereich folgt mit $G'_{\bar{x}}(x) > 1$ somit $G_{\bar{x}}(x) > x$ und es kommt zu einem Mittelzufluss, da ΔF positiv ist.

Für $\bar{x} \geq 1$ und $x \geq \bar{x}$ trifft $G_{\bar{x}}(x) = x - (1 - \bar{x})^3$ zu. Für $\bar{x} > 1$ ist die Differenz $G_{\bar{x}}(x) - x = x - (1 - \bar{x})^3 - x = -(1 - \bar{x})^3$ positiv. Im Fall $\bar{x} > 1$ kommt es daher für eine relative Wertentwicklung $x > 1$ zu einem Mittelzufluss. Im Fall $\bar{x} = 1$ gilt $G_1(x) - x = -(1 - 1)^3 = 0$. Somit kommt es für eine relative Wertentwicklung $x > 1$ im Fall $\bar{x} = 1$ weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss.[67] □

Aus modelltheoretischer Sicht ist insbesondere die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) sehr interessant: Bei einer derartigen Update-Funktion kommt es nie zu einem Mittelzufluss und eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ wird immer durch einen Mittelabfluss bestraft.[68] Dies stellt aus Sicht der Arbitrageure eine besondere Schwierigkeit dar, da eine zwischenzeitliche positive Preisentwicklung im Zeitpunkt $t = 2$ nicht durch Mittelzufluss belohnt wird. Hinsichtlich der Nullstelle zusammengesetzter Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ gilt:

Satz 39 *Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ vor, dann existiert genau eine relative Wertentwicklung $x_0(\bar{x}) > 0$, welche die Bedingung $G_{\bar{x}}(x_0(\bar{x})) = 0$ erfüllt.*[69] *Für alle relativen Wertentwicklungen $x \leq x_0(\bar{x})$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug und es gilt $F_2 = 0$. Der Mittelabfluss der relativen Wertentwicklung $x_0(\bar{x})$ ist betragsmäßig am größten und betragsmäßig kleiner als F_1.*

Beweis: Nach Satz 37 ist eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die drei Anforderungen nach (3.1). Da $G_{\bar{x}}(1) = 1$ ist, gilt insbesondere mit $G'_{\bar{x}}(x) \geq 1 > 0$ auch $x_0(\bar{x}) < 1$ für die einzige positive Nullstelle. Die zusammengesetzte Funktion besitzt für $x < \bar{x}$ einen streng konkaven Verlauf.[70] Mit $\bar{x} \geq 1$ befindet sich die Nullstelle somit in einem Bereich, der nicht stückweise definiert ist. Die hier aufgeführten Aussagen bezüglich der Nullstelle wurden bereits mit Satz 29 und mit Satz 30 für nicht stückweise definierte Update-Funktionen bewiesen. Da die

[67] Der Fall x im Bereich $1 < x < \bar{x}$ mit $\bar{x} = 1$ kann nicht auftreten.

[68] Ursache dafür sind der streng konkave Verlauf dieser zusammengesetzten Update-Funktion für den Bereich $x < 1$ und der lineare Verlauf mit $G_1(x) = x$ für $x \geq 1$.

[69] $x_0(\bar{x})$ bezeichnet die Nullstelle der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$.

[70] Für $x < \bar{x}$ gilt $G_{\bar{x}}(x) = (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3$. Mit $G'_{\bar{x}}(x) = 3 \cdot (x - \bar{x})^2 + 1 > 1$ für $x \neq \bar{x}$ und $G''_{\bar{x}}(x) = 6 \cdot (x - \bar{x}) < 0$ für $x < \bar{x}$ ist die Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ für $x < \bar{x}$ streng konkav.

zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ im hier letztendlich für die Nullstelle relevanten Bereich $x < \bar{x}$ bzw. $x < 1$ nicht stückweise definiert ist und mit Satz 37 auch die übrigen Voraussetzungen von Satz 29 und Satz 30 erfüllt sind, besitzen die Beweise dieser Sätze hier entsprechend Gültigkeit. □

Mit $\bar{x} = 1$ ergibt sich nach (3.12) für $x < 1$ die Funktion $G_1(x) = (x-1)^3 + x$. Diese Funktion ist für $x < 1$ streng konkav[71] und besitzt an der Stelle $x_0(1) = 0,317672$ eine Nullstelle.[72] Das heißt, für eine relative Wertentwicklung $x \leq 0,317672$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug und dieser ist an der Stelle $x_0(1)$ mit $\Delta F = -F_1 \cdot 0,317672$ betragsmäßig am größten.

Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ ergibt sich beim betragsmäßigen Vergleich des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x(\bar{x})$ mit dem entsprechenden Mittelabfluss einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ eine zusätzliche Schwierigkeit.[73] Für $\bar{x} > 1$ muss im Bereich des Mittelzuflusses $x > 1$ eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Der Fall $\bar{x} = 1$ gestaltet sich jedoch noch relativ einfach:

SATZ 40 *Liegt die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) vor, dann fällt für $\Delta x(1)$ im Bereich $0 < \Delta x(1) < 1$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(1)$ kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(1)$.*

BEWEIS: Nach (3.12) mit $\bar{x} = 1$ ergibt sich für $x = 1+\Delta x(1)$ die Funktion $G_1(x) = x$. Nach Satz 23 kommt es bei einer derartigen Funktion weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss und es gilt $\Delta F = 0$. Nach (3.12) ergibt sich mit $\bar{x} = 1$ für $x = 1 - \Delta x(1)$ die Funktion $G_1(x) = (x-1)^3 + x$. Für $G_1(x) \leq 0$ gilt nach (2.27) für den vollständigen Mittelabzug $\Delta F = -F_1 x$ und für $G_1(x) > 0$ nach (2.26) für den Mittelabfluss $\Delta F = F_1 \cdot ((x-1)^3 + x - x) = F_1 \cdot (x-1)^3$. Mit $0 < \Delta x(1) < 1$ bzw. $0 < x < 1$ und $F_1 > 0$ ergibt sich jeweils betragsmäßig ein Betrag größer null. □

[71] Für $x < 1$ gilt: $G_1'(x) = 3 \cdot (x-1)^2 + 1 > 1$ und $G_1''(x) = 6 \cdot (x-1) < 0$.

[72] Dies ist auch die einzige reelle Nullstelle der kubischen Gleichung, da die Diskriminante positiv ist (vgl. Bronstein et al. (2008), S. 41). Als exakter Wert ergibt sich mit der Cardano'schen Formel $x_0(1) = (-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}})^{\frac{1}{3}} + (-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}})^{\frac{1}{3}} + 1$ (vgl. Anhang A.1, insbesondere (A.6)). Zur Lösbarkeit von Polynomen dritten Grades sowie zur Cardano'schen Formel vgl. auch Cigler (1995), S. 30ff.

[73] $\Delta x(\bar{x})$ bezeichnet hier die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$ bei zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$.

Offen sind nun noch die Fälle $\bar{x} > 1$, in denen nach Satz 38 für eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ immer ein Mittelzufluss vorliegt. Bedingt durch die Aufspaltung des Bereichs $x > 1$ in einen konkaven Abschnitt $1 < x < \bar{x}$ und in einen linearen Abschnitt $\bar{x} \leq x$ besitzt der Mittelzufluss bei der genannten zusammengesetzten Update-Funktion die folgende besondere Eigenschaft:

SATZ 41 *Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ vor, dann nimmt für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $0 < \Delta x(\bar{x}) < \bar{x} - 1$ der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ zu. Für $\Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} - 1$ ist der Mittelzufluss konstant mit $\Delta F = F_1 \cdot (\bar{x} - 1)^3$.*

BEWEIS: Nach Satz 37 erfüllt die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ die drei Anforderungen nach (3.1). Mit $G_{\bar{x}}(1) = 1$ und $G'_{\bar{x}}(x) \geq 1$ gilt für $x > 1$ somit auch $G_{\bar{x}}(x) > 1$. Nach Satz 38 erfolgt für eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ ein Mittelzufluss, welcher sich mit $G_{\bar{x}}(x) > 0$ nach (2.26) als $\Delta F = F_1 \cdot (G_{\bar{x}}(x) - x)$ ergibt.

Nach (3.12) gilt für $x < \bar{x}$ die Funktion $G_{\bar{x}}(x) = (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3$. Somit trifft für den Mittelzufluss $\Delta F = F_1 \cdot ((x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3 - x) = F_1 \cdot ((x - \bar{x})^3 - (1 - \bar{x})^3)$ für x im Bereich $1 < x < \bar{x}$ zu. Mit $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ folgt äquivalent ein Mittelzufluss $\Delta F = F_1 \cdot ((1 + \Delta x(\bar{x}) - \bar{x})^3 - (1 - \bar{x})^3)$ für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $0 < \Delta x(\bar{x}) < \bar{x} - 1$. Mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ nimmt somit der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ in diesem Bereich zu.

Nach (3.12) gilt für $x \geq \bar{x}$ die Funktion $G_{\bar{x}}(x) = x - (1 - \bar{x})^3$. Der Mittelzufluss ergibt sich somit für $x \geq \bar{x}$ als $\Delta F = F_1 \cdot (x - (1 - \bar{x})^3 - x) = F_1 \cdot (-(1 - \bar{x})^3) = F_1 \cdot (\bar{x} - 1)^3$. Mit $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ ist dieser somit für $1 + \Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} \Leftrightarrow \Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} - 1$ konstant. □

Dementsprechend ist für einen Vergleich des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit dem entsprechenden Mittelabfluss einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ gemäß Satz 41 darauf zu achten, ob der Mittelzufluss im Bereich $x > 1$ mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ noch weiter zunimmt, oder ob schon der Bereich $\Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} - 1$ erreicht wurde und der Mittelzufluss konstant ist. Da hier bei der zusammengesetzten Update-Funktion für den Bereich $x < 1$ und somit für $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ immer eine konkave Update-Funktion vorliegt, spielt analog zu den bisherigen Analysen neben $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ auch insbesondere $\Delta x^*(\bar{x})$ eine Rolle.[74] Für die Größenverhältnisse ist hier vor allem entscheidend, in welcher Relation $\bar{x}$ bzw. $\bar{x}-1$ zu den Größen $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ steht. Dies bereitet für bestimmte Werte von $\bar{x}$ gewisse Schwierigkeiten. Ebenso einfach wie der Fall $\bar{x} = 1$ gestaltet sich jedoch der Fall $\bar{x} \geq 2$:

SATZ 42 *Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 2$ vor, dann gelten hinsichtlich eines Vergleiches des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit dem entsprechenden Mittelabfluss einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ die Aussagen aus Satz 33 und aus Satz 36.*

BEWEIS: Die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) besitzt für $x < \bar{x}$ einen streng konkaven Verlauf.[75] Im vorliegenden Fall gilt $\bar{x} \geq 2$ und somit ist der Verlauf mindestens für den Bereich $x < 2$ konkav. Mit $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ folgt $1 + \Delta x(\bar{x}) < 2 \Leftrightarrow \Delta x(\bar{x}) < 1$ und damit ein konkaver Verlauf zumindest für den Bereich $\Delta x(\bar{x}) < 1$. Aus $x > 0$ nach Satz 14 folgt $1 - \Delta x(\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow \Delta x(\bar{x}) < 1$, wonach auch nur Vergleiche mit $\Delta x(\bar{x}) < 1$ ökonomisch relevant sind. Folglich treffen für eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 2$ ebenfalls die Aussagen für eine konkave Update-Funktion aus Satz 33 bzw. aus Satz 36 zu. □

Der für den Vergleich relevante Bereich wird letztendlich bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 2$ durch eine nicht stückweise definierte, konkave Update-Funktion repräsentiert, wodurch sich die Ergebnisse entsprechend übertragen lassen. Insbesondere gilt nach Satz 36 für die hier relevanten Größen die Relation $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) < \Delta x^*(\bar{x}) < 1$. Etwas aufwendiger im Beweis gestalten sich die Fälle für $\bar{x}$ im Bereich $1 < \bar{x} < 2$, da für ein $\bar{x}$ in diesem Bereich jeweils berücksichtigt werden muss, ob im Vergleich des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit dem Mittelabfluss der entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ ein konkaver oder ein linearer Funktionsverlauf für die

[74] Analog zu den vorherigen Untersuchungen bezeichnet hier $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die $x_0(\bar{x}) = 1 - \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ gilt. Und $\Delta x^*(\bar{x})$ bezeichnet die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*(\bar{x})$ und der Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*(\bar{x})$ betragsmäßig übereinstimmen. Zu den Bezeichnungen vgl. auch Fußnote 42, Kapitel 3, S. 81 und Fußnote 61, Kapitel 3, S. 89.

[75] Vgl. Fußnote 70, Kapitel 3, S. 95.

positive relative Wertentwicklung $x = 1+\Delta x(\bar{x})$ zugrunde gelegt werden muss. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Aussagen von Satz 33 und von Satz 36 auch für $1 < \bar{x} < 2$ Gültigkeit besitzen und somit Satz 42 auf den Bereich $\bar{x} > 1$ erweitert werden kann:

Satz 43 *Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ vor, dann gelten hinsichtlich eines Vergleiches des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit dem entsprechenden Mittelabfluss einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ die Aussagen aus Satz 33 und aus Satz 36.*

Beweis: Nach Satz 33 fällt bei streng konkaven Update-Funktionen für Δx im Bereich $0 < \Delta x \leq \widehat{\Delta x}$ der Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$. Die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ stellt für $x < \bar{x}$ und somit insbesondere auch für x im Bereich $1 < x < \bar{x}$ eine streng konkave Update-Funktion dar. Mit $x = 1+\Delta x(\bar{x})$ gilt Satz 33 analog für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $0 < \Delta x(\bar{x}) < \bar{x} - 1$, sofern $\bar{x} - 1 \leq \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ zutrifft.[76]

Für $x \geq \bar{x}$ bzw. $\Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} - 1$ ist der Mittelzufluss nach Satz 41 bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ mit $\Delta F = F_1 \cdot (\bar{x} - 1)^3$ konstant und nimmt mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ nicht mehr weiter zu.[77] Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ liegt für den Bereich $x < 1$ eine streng konkave, nicht stückweise definierte Update-Funktion vor. Trifft $\bar{x} - 1 < \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ zu, dann nimmt für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $\bar{x} - 1 \leq \Delta x(\bar{x}) \leq \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ der Mittelabfluss nach Satz 34 bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ betragsmäßig weiter zu, wohingegen der Mittelzufluss bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x(\bar{x})$ konstant bleibt. Folglich ist für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $\bar{x} - 1 \leq \Delta x(\bar{x}) \leq \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ kleiner als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$.

[76] Die Behandlung des Falls $\bar{x} - 1 > \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ erfolgt im Anschluss.

[77] Mit $\bar{x} > 1$ folgt $\Delta F > 0$. Obwohl bei der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) für $x \geq \bar{x}$ die Anforderung $G'_{\bar{x}}(x) > 1$ nach Definition 1 durch $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ für alle $x \geq \bar{x}$ nicht mehr erfüllt ist, gilt die Aussage von Satz 33 auch noch für $\Delta x(\bar{x}) = \bar{x} - 1$. Dies kann zum einen nach Satz 37 mit der Stetigkeit der Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ an der Übergangsstelle $\bar{x}$ begründet werden und zum anderen damit, dass der im Vergleich zum Mittelabfluss kleinere Mittelzufluss durch $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ nun konstant ist und nicht mehr wächst, wie es ursprünglich durch $G'_{\bar{x}}(x) > 1$ nach Definition 1 noch erlaubt war.

Gilt weiterhin $\bar{x} - 1 \leq \widehat{\Delta x}(\bar{x})$, dann nimmt für $\Delta x(\bar{x}) > \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ der Mittelabfluss nach Satz 35 bei einer relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$ nun kontinuierlich betragsmäßig ab, wohingegen der Mittelzufluss bei einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ weiterhin konstant bleibt. Der Mittelabfluss ergibt sich für $\Delta x(\bar{x}) > \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ nach Gleichung (2.27) als $\Delta F = -F_1 x = -F_1 \cdot (1 - \Delta x(\bar{x}))$ und strebt mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ betragsmäßig linear gegen null. Der Mittelzufluss hingegen verharrt konstant bei $\Delta F = F_1 \cdot (\bar{x} - 1)^3 > 0$. Demnach existiert ein $\Delta x^*(\bar{x})$ mit $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) < \Delta x^*(\bar{x}) < 1$, für welches der Mittelzufluss der positiven relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*(\bar{x})$ dem betragsmäßigen Mittelabfluss der negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*(\bar{x})$ entspricht. Für $\Delta x(\bar{x}) > \Delta x^*(\bar{x})$ ist dann der konstante Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x(\bar{x})$ größer als der betragsmäßig linear abnehmende Mittelabfluss für die entsprechende relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(\bar{x})$.

Tritt der Fall $\bar{x} - 1 > \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ auf, dann verhält sich die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ für $\Delta x(\bar{x})$ im Bereich $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) \leq \Delta x(\bar{x}) < \bar{x} - 1$ wie eine konkave Update-Funktion. Das bedeutet, der Mittelzufluss nimmt in diesem Bereich noch weiter zu und ist erst für $\Delta x(\bar{x}) \geq \bar{x} - 1$ konstant. Der Fall $\bar{x} - 1 > \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ bewirkt nur, dass durch das Ansteigen des Mittelzuflusses bis zur Stelle $\bar{x}$ die Stelle $\Delta x^*(\bar{x})$, an welcher der Mittelzufluss der relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*(\bar{x})$ dem betragsmäßigen Mittelabfluss der relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*(\bar{x})$ entspricht, noch schneller erreicht wird als bei einem bereits konstanten Mittelzufluss. Im Fall $\bar{x} - 1 > \Delta x^*(\bar{x})$ liegen alle relevanten Größen im nicht stückweise definierten, konkaven Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$, so dass dann analog zum Beweis von Satz 42 argumentiert werden kann. □

Somit nimmt lediglich der Fall $\bar{x} = 1$ nach Satz 40 noch eine Sonderstellung ein: Aus $x_0(1) = 0,317672$ lässt sich zwar noch $\widehat{\Delta x}(1) = 1 - x_0(1) = 0,682328$ bestimmen, ein $\Delta x^*(1)$ mit $\widehat{\Delta x}(1) < \Delta x^*(1) < 1$ existiert hier jedoch nicht, da es im Fall $\bar{x} = 1$ nie zu einem Mittelzufluss kommt.[78] Die Aussagen von Satz 34 und von Satz 35 besitzen nur Gültigkeit für den konkaven Abschnitt $x < \bar{x}$ der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$, da im linearen Abschnitt der Mittelzufluss für $x \geq \bar{x}$ konstant ist und daher mit steigendem $\Delta x(\bar{x})$ nicht weiter zunimmt. Aber auch wenn

[78] Rein rechnerisch lässt sich dies auch mit Hilfe von Gleichung (3.11) zeigen, welche hier prinzipiell Gültigkeit besitzt, da aus $G(1 + \Delta x^*(1)) = 2$ unmittelbar $1 + \Delta x^*(1) = 2 \Leftrightarrow \Delta x^*(1) = 1$ folgt.

die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) grundsätzlich aus einem konkaven und aus einem linearen Abschnitt besteht, so hat die Wahl von $\bar{x}$ dennoch einen gewissen Einfluss auf die Gestalt der Funktion. Zwar gestaltet sich der Beweis relativ einfach, wenn alle zu vergleichenden Größen im konkaven Abschnitt liegen, wie es in Satz 42 durch $\bar{x} \geq 2$ der Fall ist bzw. wenn $\bar{x}-1 > \Delta x^*(\bar{x})$ zutrifft.[79] Dies bedeutet aber nicht, dass bei allen Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ mit $\bar{x} - 1 > \Delta x^*(\bar{x})$ auch $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ bzw. $\Delta x^*(\bar{x})$ gleich groß ist. Im Folgenden wird daher noch erörtert, welchen Einfluss die Wahl von $\bar{x}$ auf die Intensität der Reaktion auf eine relative Wertentwicklung x und auf die Größen $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ besitzt.

Satz 44 *Die Funktionen $G_{\bar{x}_*}(x)$ und $G_{\bar{x}}(x)$ seien Update-Funktionen nach (3.12) und es gelte $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1$. Für alle $x < 1$ gilt dann $G_{\bar{x}_*}(x) < G_{\bar{x}}(x)$. Für alle $x > 1$ trifft $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$ zu und für alle $x \geq \bar{x}_*$ ist die Differenz $G_{\bar{x}_*}(x) - G_{\bar{x}}(x)$ konstant.*[80]

Beweis: Für $x < 1$ gilt mit $\bar{x}_* > 1$ die Gleichung $G_{\bar{x}_*}(x) = (x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3$ und mit $\bar{x} \geq 1$ die Gleichung $G_{\bar{x}}(x) = (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3$. Demnach ist im Fall $x < 1$ zu zeigen: $(x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3 < (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3$. Durch entsprechendes Ausmultiplizieren und anschließendes Faktorisieren ergibt sich daraus die Bedingung $(1 - x) \cdot (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_* + \bar{x} - 1 - x) > 0$.[81] Mit $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1 > x$ sind alle drei Faktoren positiv und die Bedingung ist für $x < 1$ und $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1$ immer erfüllt.

Im Fall $x > 1$ muss zwischen den drei Bereichen $1 < x < \bar{x}$, $\bar{x} \leq x < \bar{x}_*$ und $\bar{x}_* \leq x$ unterschieden werden.[82] Für x im ersten Bereich $1 < x < \bar{x}$ gelten wegen $x < \bar{x} < \bar{x}_*$ ebenfalls die bereits aufgeführten Gleichungen $G_{\bar{x}}(x) = (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3$ und $G_{\bar{x}_*}(x) = (x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3$. Für x im Bereich $1 < x < \bar{x}$ ist nun jedoch zu zeigen: $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$. Analog zum Fall $x < 1$ ergibt sich für $x > 1$ die Bedingung $(1-x) \cdot (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_* + \bar{x} - 1 - x) < 0$. Mit $\bar{x}_* > \bar{x} > x > 1$ ist der erste Faktor negativ, die beiden anderen Faktoren sind jedoch positiv, so dass die Bedingung für $x > 1$ und $x < \bar{x} < \bar{x}_*$ immer erfüllt ist.

[79] Vgl. Beweis zu Satz 43, letzter Abschnitt.

[80] Im Fall $x = 1$ gilt die Gleichheit, da nach Satz 37 für alle zusammengesetzten Update-Funktionen nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ auch $G_{\bar{x}}(1) = 1$ zutrifft. Zur Veranschaulichung der Aussagen von Satz 44 vgl. Abbildung 3.3, S. 93.

[81] Vgl. Anhang A.2.

[82] Für $\bar{x} = 1$ entfällt der erste Unterfall und wegen $x > 1$ muss dann im zweiten Unterfall entsprechend $1 = \bar{x} < x < \bar{x}_*$ gelten.

Für x im zweiten Bereich $\bar{x} \leq x < \bar{x}_*$ gilt mit $x < \bar{x}_*$ weiterhin die Gleichung $G_{\bar{x}_*}(x) = (x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3$ und mit $x \geq \bar{x}$ nun die Gleichung $G_{\bar{x}}(x) = x - (1 - \bar{x})^3$. Für $x > 1$ bzw. konkreter für $1 = \bar{x} < x < \bar{x}_*$ und $1 < \bar{x} \leq x < \bar{x}_*$ ist hier $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$ zu zeigen. Somit ergibt sich die Bedingung $(x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3 > x - (1 - \bar{x})^3 \Leftrightarrow (x - \bar{x}_*)^3 - (1 - \bar{x}_*)^3 + (1 - \bar{x})^3 > 0 \Leftrightarrow (\bar{x}_* - 1)^3 - (\bar{x}_* - x)^3 - (\bar{x} - 1)^3 > 0$. Für $\bar{x} = 1$ vereinfacht sich die Relation zu $(\bar{x}_* - 1)^3 - (\bar{x}_* - x)^3 > 0 \Leftrightarrow (\bar{x}_* - 1)^3 > (\bar{x}_* - x)^3$, welche durch $1 = \bar{x} < x < \bar{x}_*$ bzw. genauer durch $x > 1$ immer erfüllt ist. Für $\bar{x} > 1$ und $x = \bar{x}$ muss die Bedingung $(\bar{x}_* - 1)^3 - (\bar{x}_* - \bar{x})^3 - (\bar{x} - 1)^3 > 0 \Leftrightarrow (\bar{x}_* - 1)^3 > (\bar{x}_* - \bar{x})^3 + (\bar{x} - 1)^3$ gelten. Mit $c_1 = \bar{x}_* - 1$, $c_2 = \bar{x}_* - \bar{x}$ und $c_3 = \bar{x} - 1$ lässt sich die Bedingung schreiben als ${c_1}^3 > {c_2}^3 + {c_3}^3$. Da für $1 < \bar{x} = x < \bar{x}_*$ alle drei Differenzen positiv sind und zusätzlich $c_1 = c_2 + c_3$ zutrifft, gilt ${c_1}^3 = (c_2 + c_3)^3 = {c_2}^3 + 3{c_2}^2 c_3 + 3c_2{c_3}^2 + {c_3}^3 > {c_2}^3 + {c_3}^3$. Für $\bar{x} > 1$ und $x > \bar{x}$ trifft nun abweichend $c_2 = \bar{x}_* - x < \bar{x}_* - \bar{x}$ zu. Die positive Differenz c_2 wird kleiner und es gilt $c_1 > c_2 + c_3$, woraus direkt ${c_1}^3 > (c_2 + c_3)^3 > {c_2}^3 + {c_3}^3$ folgt.

Für x im dritten Bereich $\bar{x}_* \leq x$ gelten nun durch $x \geq \bar{x}_* > \bar{x}$ jeweils die Gleichungen $G_{\bar{x}_*}(x) = x - (1 - \bar{x}_*)^3$ und $G_{\bar{x}}(x) = x - (1 - \bar{x})^3$. Es muss gelten: $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x) \Leftrightarrow x - (1 - \bar{x}_*)^3 > x - (1 - \bar{x})^3 \Leftrightarrow (\bar{x}_* - 1)^3 > (\bar{x} - 1)^3$. Durch $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1$ ist diese Bedingung immer erfüllt und die Differenz $G_{\bar{x}_*}(x) - G_{\bar{x}}(x) = (\bar{x}_* - 1)^3 - (\bar{x} - 1)^3$ ist positiv und konstant. □

Unter der Verwendung von Satz 44 können nun Aussagen bezüglich des vollständigen Mittelabzugs und über das Verhalten der Größen $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ im Zusammenhang mit einer Erhöhung von $\bar{x}$ getroffen werden.

SATZ 45 *Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ erfolgt umso eher ein vollständiger Mittelabzug, je höher $\bar{x}$ gewählt wird und es gilt $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) \leq 0,682328$.*

BEWEIS: Nach Satz 39 besteht bei zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ prinzipiell die Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$. Im Fall $\bar{x} = 1$ ergibt sich für eine relative Wertentwicklung $x \leq x_0(1) = 0,317672$ ein vollständiger Mittelabzug.[83] In Verbindung mit Satz 44 und $\bar{x}_* > \bar{x} = 1$ folgt aus $G_1(0,317672) = 0$ demnach $G_{\bar{x}_*}(0,317672) < 0$. Mit $G'_{\bar{x}_*}(x) > 1$ für $x < \bar{x}_*$ und $G_{\bar{x}_*}(1) = 1$ besitzt die Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}$ eine Nullstelle, für die $x_0(1) = 0,317672 < x_0(\bar{x}_*) < 1$ zutrifft. Allgemein

[83] Zur Berechnung von $x_0(1)$ vgl. Fußnote 72, Kapitel 3, S. 96 bzw. Anhang A.1.

gilt nach Satz 44 für $\bar{x}_* > \bar{x} > 1$ somit $G_{\bar{x}_*}(x_0(\bar{x})) < 0$ und $x_0(\bar{x}) < x_0(\bar{x}_*) < 1$. Das bedeutet, je höher $\bar{x}$ gewählt wird, umso größer ist die Nullstelle und umso eher erfolgt ein vollständiger Mittelabzug.

Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ gilt somit für die Nullstelle $x_0(\bar{x}) \geq 0,317672$. Mit $\widehat{\Delta x}(1) = 1 - x_0(1) = 0,682328$ folgt daraus für eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ entsprechend $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) \leq 0,682328$. □

Je höher $\bar{x}$ gewählt wird, umso kleiner ist $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$. Gleiches gilt für die Größe $\Delta x^*(\bar{x})$:

Satz 46 *Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ ist $\Delta x^*(\bar{x})$ umso kleiner, je höher $\bar{x}$ gewählt wird.*[84]

Beweis: Auch bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ muss für $\Delta x^*(\bar{x})$ die Bedingung $G_{\bar{x}}(1+\Delta x^*(\bar{x})) = 2$ nach (3.11) erfüllt sein bzw. mit $\bar{x}_* > \bar{x} > 1$ muss auch für $\Delta x^*(\bar{x}_*)$ die Bedingung $G_{\bar{x}_*}(1+\Delta x^*(\bar{x}_*)) = 2$ zutreffen. Nach Satz 44 gilt wegen $1+\Delta x^*(\bar{x}_*) > 1$ auch $G_{\bar{x}_*}(1+\Delta x^*(\bar{x}_*)) = 2 > G_{\bar{x}}(1+\Delta x^*(\bar{x}_*))$. Mit $G_{\bar{x}}(1 + \Delta x^*(\bar{x}_*)) < 2$ und $G_{\bar{x}}(1 + \Delta x^*(\bar{x})) = 2$ trifft somit insbesondere auch $G_{\bar{x}}(1 + \Delta x^*(\bar{x}_*)) < G_{\bar{x}}(1 + \Delta x^*(\bar{x}))$ zu. Da $G'_{\bar{x}}(x) \geq 1$ nach Satz 37 gilt, folgt daraus die Relation $\Delta x^*(\bar{x}_*) < \Delta x^*(\bar{x})$ für $\bar{x}_* > \bar{x} > 1$. □

Im Fall $\bar{x} = 1$ existiert kein $\Delta x^*(1)$ mit $0 < \Delta x^*(1) < 1$.[85] Dies liegt daran, weil es in diesem Fall nie zu einem Mittelzufluss kommt und daher für die entsprechende negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*(1)$ auch $\Delta F = 0$ gelten muss. Dies ist jedoch nur für $x = 0$ und $x = 1$ bzw. nur für $\Delta x^*(1) = 1$ und $\Delta x^*(1) = 0$ der Fall, welche nicht zulässig sind.[86] Hinsichtlich eines Vergleichs unterschiedlicher Werte von $\bar{x}$ bietet es sich jedoch an, auch den Fall $\bar{x} = 1$ mit aufzunehmen, da für $\bar{x} \geq 1$ zum einen $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) \leq 0,682328$ und zum anderen, zumindest rein rechnerisch, $\Delta x^*(\bar{x}) \leq 1$ zutrifft und sich die Maximalwerte von $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ jeweils für $\bar{x} = 1$ ergeben. Die Tabelle 3.1 gibt eine Übersicht über $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ für unterschiedliche Werte der Konstanten $\bar{x}$.

[84] Da es im Fall $\bar{x} = 1$ nie zu einem Mittelzufluss kommt, wurde dieser hier ausgeschlossen.
[85] Vgl. Fußnote 78, Kapitel 3, S. 100.
[86] Nach Satz 14 gilt $x > 0$ und im Fall $x = 1$ bzw. $\Delta x^*(1) = 0$ sind $1 + \Delta x^*(1)$ und $1 - \Delta x^*(1)$ identisch und ein Vergleich erübrigt sich.

$\bar{x}$	$\widehat{\Delta x}(\bar{x})$	$\Delta x^*(\bar{x})$
$1,00$	$0,682328$	$1,000000$
$1,05$	$0,652878$	$0,999875$
$1,25$	$0,533907$	$0,984375$
$1,50$	$0,398833$	$0,875000$
$1,65$	$0,330884$	$0,725375$
$1,70$	$0,310664$	$0,657079$
$1,75$	$0,291650$	$0,582799$
$2,00$	$0,213412$	$0,317672$
$2,75$	$0,093567$	$0,103579$
$5,00$	$0,020307$	$0,020511$

Tabelle 3.1: $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und $\Delta x^*(\bar{x})$ für unterschiedliche Konstanten $\bar{x}$

Während zur Berechnung von $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ lediglich die Gleichung $(x-\bar{x})^3+x-(1-\bar{x})^3 = 0$ für $x = 1-\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ und entsprechende Werte von $\bar{x}$ gelöst werden muss, da die Nullstelle für $\bar{x} \geq 1$ immer im konkaven Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) liegt, ist bei der Berechnung von $\Delta x^*(\bar{x})$ eine Unterscheidung zwischen zwei Fällen notwendig: Zur Berechnung von $\Delta x^*(\bar{x})$ muss nach (3.11) die Gleichung $G_{\bar{x}}(1+\Delta x^*(\bar{x})) = 2$ gelöst werden. Allerdings muss dazu bekannt sein, ob $1+\Delta x^*(\bar{x})$ im konkaven oder im linearen Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ liegt bzw. ob $1+\Delta x^*(\bar{x}) < \bar{x}$ oder $1+\Delta x^*(\bar{x}) \geq \bar{x}$ zutrifft, da nach (3.12) für $x < \bar{x}$ eine andere Funktion zu Grunde gelegt werden muss als im Fall $x \geq \bar{x}$. Folgende Aussage kann dazu getroffen werden:

SATZ 47 *Bei einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ liegt die Stelle $1+\Delta x^*(\bar{x})$ für $\bar{x} \leq 1,682328$ im linearen Abschnitt und für $\bar{x} > 1,682328$ im konkaven Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion.*

BEWEIS: Da die Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ an der Stelle $\bar{x}$ zusammengesetzt ist, muss zunächst genau die Konstante $\bar{x}$ bestimmt werden, für welche $1 + \Delta x^*(\bar{x}) = \bar{x}$ zutrifft. Nach (3.11) in Verbindung mit (3.12) muss gelten:

$G_{\bar{x}}(1+\Delta x^*(\bar{x})) = 2 \Leftrightarrow G_{\bar{x}}(\bar{x}) = 2 \Leftrightarrow \bar{x} - (1-\bar{x})^3 = 2 \Leftrightarrow \bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 3 = 0$. Die einzige reelle Nullstelle dieser Gleichung ist $\bar{x} = 1,682328$.[87] Nach Satz 46 wird $\Delta x^*(\bar{x})$ mit steigendem $\bar{x}$ immer kleiner. Somit liegt die Stelle $1 + \Delta x^*(\bar{x})$ für $\bar{x} > 1,682328$ im konkaven Abschnitt und für $\bar{x} \leq 1,682328$ im linearen Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion. □

Dementsprechend muss für $\bar{x} \leq 1,682328$ die lineare Funktion $G_{\bar{x}}(x) = x - (1-\bar{x})^3$ und für $\bar{x} > 1,682328$ die konkave Funktion $G_{\bar{x}}(x) = (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3$ aus (3.12) zur Berechnung von $\Delta x^*(\bar{x})$ in Tabelle 3.1 herangezogen werden.

In Tabelle 3.1 werden die Eigenschaften der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) noch einmal verdeutlicht: Für alle $\bar{x} \geq 1$ gilt $\widehat{\Delta x}(\bar{x}) < \Delta x^*(\bar{x})$ und sowohl $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ als auch $\Delta x^*(\bar{x})$ nehmen mit steigendem $\bar{x}$ ab. $\widehat{\Delta x}(\bar{x})$ kann dabei als derjenige relative Wertverlust angesehen werden, ab dem ein vollständiger Mittelabzug erfolgt. Beispielsweise erfolgt im Fall $\bar{x} = 2$ schon ein vollständiger Mittelabzug ab einem relativen Wertverlust von $21,3412\%$. Das bedeutet, je höher $\bar{x}$ gewählt wird, umso eher erfolgt ein vollständiger Mittelabzug und umso sensibler reagiert die Update-Funktion auch auf die relative Wertentwicklung für x im Bereich $1 - \widehat{\Delta x}(\bar{x}) < x < \bar{x}$. Für $x \leq 1 - \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ erfolgt der vollständige Mittelabzug und für $x \geq \bar{x}$ bleibt der Mittelzufluss konstant. Für $\bar{x} = 1$ ergibt sich sogar der Extremfall, in dem es nie zu einem Mittelzufluss kommt, sondern nur zu einem Mittelabfluss bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$. Dafür ist jedoch im Fall $\bar{x} = 1$ der Mittelabfluss einer negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x(1)$ für $\Delta x(1)$ im Bereich $0 < \Delta x(1) < \widehat{\Delta x}(1)$ jeweils kleiner als in den Fällen $\bar{x} > 1$.[88]

Zusammengefasst ist bei einer zusammengesetzten Update-Funktion darauf zu achten, dass sie über ihrem Definitionsbereich $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar ist.[89] Weiterhin sollte eine zusammengesetzte Update-Funktion zumindest den Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) \geq 1$ aus (3.1) genügen.[90] Dabei sollte berücksichtigt werden, dass

[87] Exakt ergibt sich $\bar{x} = (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}})^{\frac{1}{3}} + (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}})^{\frac{1}{3}} + 1$ (vgl. Anhang A.1, insbesondere (A.7)).

[88] Nach Satz 44 gilt $G_{\bar{x}}(x) < G_1(x)$ für alle $x < 1$. Für $G_1(x) > 0$ bzw. für $\Delta x(1)$ im Bereich $0 < \Delta x(1) < \widehat{\Delta x}(1)$ ist daher nach (2.26) der Mittelabfluss geringer als in den Fällen $\bar{x} > 1$. Für $G_1(x) \leq 0$ bzw. für $\Delta x(1)$ im Bereich $\widehat{\Delta x}(1) \leq \Delta x(1) < 1$ ist jedoch nach (2.27) der Mittelabfluss genauso hoch wie in den Fällen $\bar{x} > 1$.

[89] Dadurch werden insbesondere unstetige Sprungstellen vermieden. Eine Sprungstelle hätte zur Folge, dass sich der Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss im Bereich der Sprungstelle bei einer kleinen Änderung der relativen Wertentwicklung x abrupt verändert. Eine derartige sprunghafte Veränderung dürfte im Rahmen des Modells, wenn überhaupt, nur schwer zu erklären sein.

[90] Es wird absichtlich nicht mehr die Bezeichnung $G_{\bar{x}}(x)$ verwendet, da sich die Update-Funktion

$G'(x) = 1$ möglichst nicht für alle negativen relativen Wertentwicklungen $x < 1$ auftritt, da sonst ein Mittelabfluss im Rahmen des Modells ausgeschlossen ist.[91] Der Ausschluss eines Mittelzuflusses für alle positiven relativen Wertentwicklungen $x > 1$ kann aus modelltheoretischer Sicht wiederum sehr interessant sein.[92] Die Einhaltung der dritten Anforderung $G''(x) \leq 0$ aus (3.1) bedeutet den gänzlichen Ausschluss konvexer Bereiche bei zusammengesetzten Update-Funktionen. Dies kann wegen Satz 31 sinnvoll sein. Die absolute Notwendigkeit eines Ausschlusses konvexer Update-Funktionen ist meines Erachtens nach jedoch nicht gegeben. Vielmehr sollte eine zusammengesetzte Update-Funktion die grundlegenden Eigenschaften hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses erfüllen. Das bedeutet, eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ sollte zu einem Mittelabfluss führen und ein vollständiger Mittelabzug prinzipiell möglich sein. Bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ sollte es zu einem Mittelzufluss bzw. zumindest nicht zu einem Mittelabfluss kommen.[93] Eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ erfüllt alle diese Forderungen und steht daher im Folgenden stellvertretend für zusammengesetzte Update-Funktionen.

Abschließend stellt sich nun noch die Frage, welche Update-Funktion, stückweise oder nicht stückweise definiert, im Rahmen des Modells gewählt werden sollte. Die dafür notwendige Abgrenzung einer Update-Funktion von einer anderen Update-Funktion ist insbesondere dann gut möglich, wenn eine Dominanz vorliegt. Diesem Aspekt widmet sich nun ausführlich der nachfolgende Abschnitt.

3.3 Dominanzen

Im Rahmen dieser Arbeit wird zwischen zwei verschiedenen Formen von Dominanz unterschieden. Im ersten Abschnitt 3.3.1 erfolgt die Betrachtung von Dominanz hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses. Liegt eine derartige Dominanz vor, dann ist bei der dominierenden Update-Funktion sowohl der Mittelzufluss jeder positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ als auch der betragsmäßige Mittelabfluss jeder negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ nicht kleiner als bei der dominierten Update-Funktion.[94] Das bedeutet, ΔF ist für jede relative Wertentwicklung bei

allgemein auch aus mehr als zwei Abschnitten zusammensetzen kann.

[91] Im Fall $G'(x) = 1$ für alle $x < 1$ ergibt sich für diesen Bereich die Funktion $G(x) = x$, welche nach (2.24) zu $F_2 = F_1 x$ und somit nach (2.25) zu $\Delta F = 0$ führt. Vgl. auch Satz 23.

[92] Vgl. dazu die Update-Funktion $G_1(x)$.

[93] Dies wird in der Regel bereits durch $G(1) = 1$ und $G'(x) \geq 1$ gewährleistet.

[94] Die formale Definition erfolgt mit Definition 2 in Abschnitt 3.3.1.

der dominierenden Update-Funktion betragsmäßig nie kleiner als bei der dominierten Update-Funktion. Die dominierende Update-Funktion reagiert somit in der Regel stärker bzw. zumindest nicht schwächer auf jede relative Wertentwicklung x, und zwar sowohl hinsichtlich des Mittelzuflusses als auch hinsichtlich des Mittelabflusses.

Im zweiten Abschnitt 3.3.2 erfolgt eine eher technische Definition von Dominanz hinsichtlich der Funktionswerte. Diese unterscheidet sich von der Dominanz in Abschnitt 3.3.1 dadurch, dass der betragsmäßige Mittelabfluss jeder negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ bei der dominierenden Update-Funktion nun nicht größer sein darf als bei der dominierten Update-Funktion.[95] Hinsichtlich des Mittelzuflusses für eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ stimmen die beiden Definitionen überein. Bei einer Dominanz hinsichtlich der Funktionswerte geht in der Regel ein höherer Mittelzufluss bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ mit einem niedrigeren Mittelabfluss bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ einher.

3.3.1 Dominanz hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses

Formal lässt sich bei Update-Funktionen eine Dominanz hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. hinsichtlich des Mittelabflusses wie folgt beschreiben:

Definition 2 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1.*[96] *Eine Update-Funktion $G(x)$ wird von einer Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ dominiert, wenn*

(1) $\hat{G}(x) \leq G(x)$ für $\hat{x}_0 \leq x < 1$,

(2) $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für $x > 1$ und

(3) $\hat{G}(x) < G(x)$ für mindestens ein x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x < 1$ oder
$\hat{G}(x) > G(x)$ für mindestens ein $x > 1$ zutrifft.[97]

[95] Die formale Definition erfolgt mit Definition 3 in Abschnitt 3.3.2.

[96] $\hat{G}(x)$ bezeichnet hier eine von $G(x)$ verschiedene Update-Funktion zur Beurteilung der relativen Wertentwicklung x.

[97] $\hat{x}_0$ bezeichnet hier die positive Nullstelle der Update-Funktion $\hat{G}(x)$. Bei Bedingung (3) handelt es sich um eine nicht ausschließende Disjunktion und somit nicht um eine Kontravalenz.

Nach Definition 1 muss für alle Update-Funktionen $G(1) = 1$ erfüllt sein. Daher gilt $\hat{G}(1) = G(1) = 1$. In Verbindung mit Definition 2 kann folgende vergleichende Aussage zum vollständigen Mittelabzug bzw. zu den Nullstellen der Update-Funktionen getroffen werden:

SATZ 48 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Wird die Update-Funktion $G(x)$ von der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert, dann gilt für die Nullstelle x_0 der Update-Funktion $G(x)$ und für die Nullstelle $\hat{x}_0$ der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Relation $x_0 \leq \hat{x}_0$.*

BEWEIS: Nach Bedingung (1) aus Definition 2 muss für die Nullstelle $\hat{x}_0$ der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ der Zusammenhang $0 = \hat{G}(\hat{x}_0) \leq G(\hat{x}_0)$ gelten. Mit $G'(x) > 1$ nach Definition 1 folgt im Fall $\hat{G}(\hat{x}_0) < G(\hat{x}_0)$ für die Nullstelle x_0 der Update-Funktion $G(x)$ somit $x_0 < \hat{x}_0$. Im Fall $\hat{G}(\hat{x}_0) = G(\hat{x}_0)$ gilt entsprechend $x_0 = \hat{x}_0$. □

Die Relation in Satz 48 gilt unabhängig davon, ob es sich bei den Funktionen um konkave, lineare oder konvexe Update-Funktionen nach Definition 1 handelt. Beim Vorliegen eines Dominanzfalls nach Definition 2 kann nun auch eine Aussage hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses getroffen werden:

SATZ 49 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Wird die Update-Funktion $G(x)$ von der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert, dann ist der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ für jede relative Wertentwicklung $x > 0$ betragsmäßig nicht kleiner als der Mittelzufluss bzw. der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$.*

BEWEIS: Nach (2.26) gilt im Fall $\hat{G}(x) > 0$ und somit für $x > \hat{x}_0$ bezüglich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses die Gleichung $\Delta F = F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x)$.[98] Für $x > 1$ ergibt sich ein Mittelzufluss und es gilt $\hat{G}(x) > x$.[99] Mit $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für $x > 1$ nach Definition 2 ist der Mittelzufluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nicht kleiner als der Mittelzufluss in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$, da $F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x) \geq F_1 \cdot (G(x) - x) > 0$ gilt. Für x im Bereich $\hat{x}_0 < x < 1$ ergibt sich ein

[98] Analog gilt für die Update-Funktion $G(x)$ die Gleichung $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$ für $x > x_0$.
[99] Vgl. Beweis zu Satz 28. Für $x > 1$ folgt entsprechend auch $G(x) > x$.

Mittelabfluss und es gilt $\hat{G}(x) < x$.[100] Mit $\hat{G}(x) \leq G(x)$ nach Definition 2 ist in diesem Bereich der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ betragsmäßig nicht kleiner als der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$, da mit $x_0 \leq \hat{x}_0$ nach Satz 48 hier $F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x) \leq F_1 \cdot (G(x) - x) < 0$ zutrifft.

Nach (2.27) tritt im Fall $\hat{G}(x) \leq 0$ und somit für $x \leq \hat{x}_0$ immer ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ auf. Für $G(x) \leq 0$ und somit für $x \leq x_0$ ergibt sich ein vollständiger Mittelabzug in gleicher Höhe. Nach Satz 48 folgt mit $0 = \hat{G}(\hat{x}_0) \leq G(\hat{x}_0)$ die Relation $x_0 \leq \hat{x}_0$. Gilt $x_0 < \hat{x}_0$, dann ergibt sich im Bereich $x_0 < x \leq \hat{x}_0$ in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$ ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x) = F_1 \cdot G(x) - F_1 x > -F_1 x$. Da für diesen Mittelabfluss $\Delta F = F_1 \cdot G(x) - F_1 x < 0$ zutrifft, ist der vollständige Mittelabzug $\Delta F = -F_1 x < 0$ in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x_0 < x \leq \hat{x}_0$ betragsmäßig größer. Gilt $x_0 = \hat{x}_0$, dann ergibt sich für $x \leq x_0 = \hat{x}_0$ ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$, welcher in diesem Bereich unabhängig von der jeweils konkreten Update-Funktion und somit für beide Update-Funktionen identisch ist. □

Das bedeutet, sowohl der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung $x > 1$ als auch der Mittelabfluss für eine negative relative Wertentwicklung $x < 1$ sind in Verbindung mit einer Update-Funktion $\hat{G}(x)$ betragsmäßig mindestens genauso groß wie der entsprechende Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss in Verbindung mit einer Update-Funktion $G(x)$, wenn die Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Update-Funktion $G(x)$ dominiert. Obwohl die Dominanz nur für den Bereich $x \geq \hat{x}_0$ zutreffen muss, kann hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses nach Satz 49 eine Aussage für den kompletten Bereich $x > 0$ getroffen werden. Dominanz im Sinne von Definition 2 bedeutet demnach betragsmäßige Dominanz hinsichtlich der Größe ΔF. Es bleibt allerdings zu klären, ob durch die Einschränkung auf den Bereich $x \geq \hat{x}_0$ bei Definition 2 auch Dominanzfälle verloren gehen können bzw. ob teilweise vielleicht sogar gar keine Dominanz vorliegt, wenn der Bereich $x < \hat{x}_0$ mit einbezogen wird.

SATZ 50 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Stimmen die beiden Update-Funktionen im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ überein, dann ist auch der Mittelabfluss bei beiden Update-Funktionen für alle relativen Wertentwicklungen x im Bereich $0 < x < \hat{x}_0$ identisch.*

[100] Vgl. Beweis zu Satz 28. ΔF ist in diesem Fall negativ. Analog gilt $G(x) < x$ für $x_0 < x < 1$.

BEWEIS: Durch die Übereinstimmung im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ folgt insbesondere auch $\hat{G}(\hat{x}_0) = G(\hat{x}_0) = 0$ und letztendlich $x_0 = \hat{x}_0$. Da nach Definition 1 sowohl $G'(x) > 1$ als auch $\hat{G}'(x) > 1$ für alle $x > 0$ zutrifft, gilt $G(x) < 0$ bzw. $\hat{G}(x) < 0$ für $x < x_0 = \hat{x}_0$ und $G(x) > 0$ bzw. $\hat{G}(x) > 0$ für $x > x_0 = \hat{x}_0$. Nach (2.26) ergibt sich der Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss im Fall $x > x_0 = \hat{x}_0$ als $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$ bzw. als $\Delta F = F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x)$. Mit $G(x) = \hat{G}(x)$ ist der Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss für $x > x_0 = \hat{x}_0$ demnach identisch. Nach (2.27) tritt im Fall $x < x_0 = \hat{x}_0$ ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ auf. Da dieser vollständige Mittelabzug nur noch von x und nicht mehr von $G(x)$ bzw. $\hat{G}(x)$ abhängt, ist der Mittelabfluss bei beiden Update-Funktionen für alle relativen Wertentwicklungen x im Bereich $0 < x < \hat{x}_0$ identisch.[101] □

Stimmen die beiden Update-Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ im relevanten Bereich $x \geq \hat{x}_0$ überein, dann führen sie nach Satz 50 für alle relativen Wertentwicklungen $x > 0$ zum gleichen Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Funktionen notwendigerweise identisch sein müssen, da $\hat{G}(x) = G(x)$ für $x < \hat{x}_0$ nicht gefordert wird. Letztendlich ist eine Übereinstimmung der beiden Update-Funktionen für den Bereich $x < \hat{x}_0$ aber auch nicht erforderlich, da für $x < \hat{x}_0$ der vollständige Mittelabzug bei beiden Update-Funktionen gleich hoch ist. Vielmehr könnte die Einbeziehung des Bereiches $x < \hat{x}_0$ bei Definition 2 unter Umständen zu falschen Schlüssen führen: Ist beispielsweise eine der Bedingungen aus Definition 2 nur in diesem Bereich verletzt, dann wird eine vorliegende Dominanz hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses nicht erkannt. Oder stimmen die beiden Update-Funktionen nach Satz 50 im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ überein und ist Bedingung (3) aus Definition 2 nur im Bereich $x < \hat{x}_0$ erfüllt, dann wird fälschlicherweise eine Dominanz angenommen, obwohl beide Update-Funktionen hinsichtlich der Größe ΔF identisch sind. Daher reicht eine Beschränkung auf den Bereich $x \geq \hat{x}_0$ bei Definition 2 im Hinblick auf Dominanzüberlegungen nicht nur aus, sondern sie ist aufgrund der sonst möglichen falschen Schlussfolgerungen sogar zwingend notwendig.

Im Folgenden werden die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 vorgestellten Update-Funktionen im Hinblick auf eine Dominanz im Sinne von Definition 2 überprüft.

SATZ 51 *Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ nach Satz 23 wird von allen Update-Funktionen $G(x)$ nach Definition 1 im Sinne von Definition 2 dominiert.*

[101] Vgl. auch Ende des Beweises von Satz 49.

BEWEIS: Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ stellt keine Update-Funktion nach Definition 1 dar, da sie mit $G'_B(x) = 1$ die Anforderung $G'(x) > 1$ nicht erfüllt. Somit sind die Voraussetzungen für Definition 2 verletzt. Nach Satz 23 kommt es aber bei der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen x weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss. Nach Satz 28 erfolgt jedoch bei Update-Funktionen nach Definition 1 für $x > 1$ immer ein Mittelzufluss und für $x < 1$ immer ein Mittelabfluss.[102] Sei $\hat{G}(x)$ eine Update-Funktion nach Definition 1. Dann gilt für $x > 1$ auch $\hat{G}(x) > x$ und für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x < 1$ entsprechend $\hat{G}(x) < x$.[103] Mit $G_B(x) = x$ sind alle drei Bedingungen von Definition 2 erfüllt und es liegt eine Dominanz im Sinne von Definition 2 vor. □

Da die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ mit $G'_B(x) = 1$ hier nur die Anforderung $G'(x) > 1$ nach Definition 1 verletzt, alle drei Bedingungen hinsichtlich der Dominanz im Sinne von Definition 2 aber anwendbar sind, besitzen Satz 48 und Satz 49 trotzdem Gültigkeit für die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$.[104] Da sie von allen Update-Funktionen nach Definition 1 dominiert wird, bietet es sich an, die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Vergleichsbasis heranzuziehen. Insbesondere auch deshalb, weil sich die Investoren bei Verwendung einer derartigen Update-Funktion völlig passiv verhalten, da weder Mittel abzogen noch zusätzlich zur Verfügung gestellt werden.

SATZ 52 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a}$ und $G(x)$ mit Parameter a seien lineare Update-Funktionen nach Satz 20. Gilt $\hat{a} > a$, dann wird die Update-Funktion $G(x)$ von der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert.*

BEWEIS: Die Update-Funktion $\hat{G}(x)$ besitzt die Gestalt $\hat{G}(x) = \hat{a}x + 1 - \hat{a}$ und die Update-Funktion $G(x)$ hat die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$. Mit $\hat{a} > a$ ist die Differenz $\hat{G}(x) - G(x) = \hat{a}x + 1 - \hat{a} - (ax + 1 - a) = (\hat{a} - a) \cdot (x - 1)$ für $x > 1$ positiv und für $x < 1$ negativ. Das bedeutet, für $x > 1$ gilt $\hat{G}(x) > G(x)$ und für $x < 1$ trifft $\hat{G}(x) < G(x)$ zu. Nach Definition 2 wird die lineare Update-Funktion $G(x)$ somit von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ dominiert. □

[102] Eine Update-Funktion nach Definition 1 erfüllt insbesondere auch sämtliche Voraussetzungen von Satz 28. Vgl. dazu die Anmerkungen direkt nach Definition 1.
[103] Vgl. Beweis zu Satz 28.
[104] Im Beweis zu Satz 48 ist $G'_B(x) > 0$ ausreichend.

Mit steigendem Parameter a reagiert eine lineare Update-Funktion somit umso sensibler auf die relative Wertentwicklung x. Es ist demnach möglich, zu jeder linearen Update-Funktion nach Satz 20 eine andere lineare Update-Funktion nach Satz 20 anzugeben, die erstere im Sinne von Definition 2 dominiert. Mit Satz 48 folgt zusätzlich, dass die Nullstelle x_0 einer linearen Update-Funktion mit steigendem Parameter a immer größer wird. Mit $\hat{a} > a$ trifft dann hinsichtlich der Nullstellen $\hat{x}_0 > x_0$ zu.

Für lineare und streng konkave Update-Funktionen können in Verbindung mit einer Dominanz im Sinne von Definition 2 die folgenden Aussagen getroffen werden:

SATZ 53 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 und die Funktion $G(x)$ sei eine streng konkave Update-Funktion nach Definition 1. Die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ wird von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn für den Parameter $\hat{a}$ der linearen Update-Funktion $\hat{a} \geq (1 - x_0)^{-1}$ zutrifft.*

BEWEIS: Im Dominanzfall folgt $0 = \hat{G}(\hat{x}_0) \leq G(\hat{x}_0)$ nach Bedingung (1) aus Definition 2. Für die Nullstelle $\hat{x}_0$ der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ und die Nullstelle x_0 der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ gilt nach Satz 48 die Relation $x_0 \leq \hat{x}_0$. Tritt der Gleichheitsfall $x_0 = \hat{x}_0$ ein, dann stimmen für $x \geq x_0 = \hat{x}_0$ die Funktionswerte der beiden Update-Funktionen $G(x)$ und $\hat{G}(x)$ nur an den zwei Stellen $x = x_0 = \hat{x}_0$ und $x = 1$ überein, da die Update-Funktion $G(x)$ einen streng konkaven Verlauf und die Update-Funktion $\hat{G}(x)$ einen linearen Verlauf aufweist. Bei der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ liegen die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = x_0$ und $x = 1$ oberhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(x_0)$ und $G(1)$.[105] Diese Verbindungsgerade entspricht mit $x_0 = \hat{x}_0$ der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x) = \hat{a}x + 1 - \hat{a}$ mit $\hat{a} > 1$ nach Satz 20. Mit $\hat{x}_0 = x_0$ ist $\hat{G}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \hat{a}x_0 + 1 - \hat{a} = 0 \Leftrightarrow \hat{a} = (1 - x_0)^{-1}$.[106] Für x im Bereich $x_0 = \hat{x}_0 < x < 1$ trifft folglich $\hat{G}(x) < G(x)$ zu. Da sich beide Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$ schneiden, gilt entsprechend $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x > 1$.

[105] Mit der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(x_0)$ und $G(1)$ sind hier sämtliche Linearkombinationen der Funktionswerte $G(x_0)$ und $G(1)$ mit $h \cdot G(x_0) + (1 - h) \cdot G(1)$ mit $0 \leq h \leq 1$ gemeint. Da die Update-Funktion streng konkav ist, gilt im entsprechenden Bereich für $0 < h < 1$ die Ungleichung $G(hx_0 + (1 - h) \cdot 1) > h \cdot G(x_0) + (1 - h) \cdot G(1)$. Vgl. Kaballo (2000), S. 161.

[106] Durch die spezielle Form ist $\hat{G}(1) = 1$ mit $1 = \hat{a} + 1 - \hat{a} = 1$ immer erfüllt.

Nach Satz 52 wird eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 von einer anderen linearen Update-Funktion nach Satz 20 im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn diese andere lineare Update-Funktion einen größeren Parameter $\hat{a}$ aufweist. Folglich gilt hier die Dominanz nicht nur für die lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} = (1 - x_0)^{-1}$, sondern für alle linearen Update-Funktionen $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} \geq (1 - x_0)^{-1}$. □

Die zuvor in (3.6) erwähnte konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ wird somit von jeder linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} \geq 1,520390$ im Sinne von Definition 2 dominiert.[107] Bei der anderen in (3.7) genannten konkaven Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ trifft eine derartige Dominanz erst für $\hat{a} \geq 2,310232$ zu.[108]

Nach Satz 53 wird bei entsprechender Wahl des Parameters $\hat{a}$ die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Eine umgekehrte Dominanz ist hier ebenfalls möglich. Diese ist jedoch nicht uneingeschränkt für den Bereich $x \geq \hat{x}_0$, sondern nur eingeschränkt für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ mit $x_U > 1$ realisierbar:[109]

SATZ 54 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine streng konkave Update-Funktion nach Definition 1 und die Funktion $G(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20. Die lineare Update-Funktion $G(x)$ wird von der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn für den Parameter a der linearen Update-Funktion $a \leq (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ mit $x_U > 1$ zutrifft.*

BEWEIS: Bei der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ liegen die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = 1$ und $x = x_U > 1$ oberhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $\hat{G}(1)$ und $\hat{G}(x_U)$.[110] Für die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$, welche mit dieser Verbindungsgeraden identisch ist, gilt für x im Bereich $1 < x < x_U$ die Ungleichung $\hat{G}(x) > G(x)$.[111] Die beiden Update-Funktionen schneiden sich nur an den Stellen $x = 1$ und $x = x_U$. Sowohl für $x < 1$ als auch für $x > x_U$ gilt folglich $\hat{G}(x) < G(x)$. Da mit $\hat{G}(x) < G(x)$ für $x > x_U$ die Bedingung (2) von Definition 2 verletzt ist, wird die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit

[107] Es muss gelten $\hat{a} \geq (1 - x_0)^{-1} = (\widehat{\Delta x})^{-1} = (0,657726)^{-1} = 1,520390$. Zur Berechnung von x_0 vgl. Fußnote 33, Kapitel 3, S. 76 bzw. zur Bestimmung von $\widehat{\Delta x}$ vgl. S. 85.

[108] Analog gilt hier $\hat{a} \geq (\widehat{\Delta x})^{-1} = (0,432857)^{-1} = 2,310232$. Zur Berechnung von $\widehat{\Delta x}$ vgl. S. 85.

[109] x_U bezeichnet hier den Schnittpunkt der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit der linearen Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ im „up"-Bereich $x > 1$.

[110] Vgl. dazu Fußnote 105, Kapitel 3, S. 112.

[111] Mit Satz 20 und $G(x_U) = \hat{G}(x_U)$ gilt $\hat{G}(x_U) = ax_U + 1 - a \Leftrightarrow a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$.

Parameter $a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ somit nur für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ von der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert.

Wird als Parameter ein Wert $\hat{a} > (\hat{G}(x_U)-1)\cdot(x_U-1)^{-1}$ gewählt, dann dominiert nach Satz 52 die lineare Update-Funktion mit dem größeren Parameter $\hat{a}$ die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (\hat{G}(x_U)-1)\cdot(x_U-1)^{-1}$ im Sinne von Definition 2. Entsprechend sind auch die Funktionswerte der linearen Update-Funktion mit dem größeren Parameter $\hat{a}$ im Bereich $x > 1$ größer als die Funktionswerte der linearen Update-Funktion $G(x)$.[112] Somit ist insbesondere auch der Funktionswert der linearen Update-Funktion mit dem größeren Parameter $\hat{a}$ an der Stelle $x = x_U$ größer als der Funktionswert $\hat{G}(x_U)$ der streng konkaven Update-Funktion. Folglich ist an der Stelle $x = x_U$ bei einer derartigen linearen Update-Funktion mit einem Parameter $\hat{a} > a$ die Bedingung (2) von Definition 2 verletzt und es kann an der Stelle $x = x_U$ keine Dominanz nach Satz 54 mehr vorliegen. Lineare Update-Funktionen mit einem Parameter kleiner als $(\hat{G}(x_U)-1)\cdot(x_U-1)^{-1}$ werden hingegen nach Satz 52 von der linearen Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (\hat{G}(x_U)-1)\cdot(x_U-1)^{-1}$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Da die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit Parameter $a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ wiederum für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ von der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert wird, dominiert die streng konkave Update-Funktion $\hat{G}(x)$ auch lineare Update-Funktionen mit einem Parameter kleiner als $(\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ im Sinne von Definition 2. □

Für die umgekehrte Dominanz ist nicht wie in Satz 53 der Bereich $x < 1$ entscheidend, sondern der Bereich $x > 1$. Mit $x_U > 1$ ist die Dominanz für den Bereich $x < 1$ nach dem obigen Beweis immer gegeben. Dementsprechend kommt der Nullstelle der streng konkaven Update-Funktion hier keine so große Bedeutung zu wie in Satz 53.

Je höher x_U gewählt wird, umso kleiner ist das zulässige Intervall für den Parameter a, denn der Ausdruck $(\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ wird wegen der strengen Konkavität von $\hat{G}(x)$ mit steigendem $x_U > 1$ immer kleiner. Lineare Update-Funktionen mit einem Parameter kleiner als $(\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ werden nach Satz 52 von der linearen Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (\hat{G}(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Entsprechend sind auch die Funktionswerte der linearen Update-Funktion mit dem kleineren Parameter für x im Bereich $1 < x \leq x_U$ kleiner als die Funktionswerte der linearen Update-Funktion $G(x)$ und somit auch kleiner als die Funktionswerte der

[112] Vgl. Beweis zu Satz 52.

streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$. Falls sich auch die lineare Update-Funktion mit dem kleineren Parameter bzw. der geringeren Steigung und die streng konkave Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x > 1$ schneiden, dann ist der Schnittpunkt hier entsprechend größer als x_U.[113] Existiert kein solcher Schnittpunkt, dann gilt die Dominanz hier auch uneingeschränkt für den gesamten Bereich $x \geq \hat{x}_0$.

Für den umgekehrten Fall der Dominanz nach Satz 54 kann in der Regel jedoch nur eine Aussage für den Bereich $0 < x \leq x_U$ getroffen werden. Beispielsweise wird eine lineare Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 nur dann von der bereits zuvor in (3.6) erwähnten konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ für x im eingeschränkten Bereich $0 < x \leq 1,5$ im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn für den Parameter a die Bedingung $a \leq 1,289499$ erfüllt ist.[114] Für eine entsprechende Dominanz im Bereich $0 < x \leq 2$ muss bereits $a \leq 1,232544$ zutreffen.[115] Bei der anderen in (3.7) genannten konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x) = x + ln(x)$ trifft eine derartige Dominanz für x im Bereich $0 < x \leq 1,5$ für $a \leq 1,810930$ und für x im Bereich $0 < x \leq 2$ für $a \leq 1,693147$ zu.[116] Das zulässige Intervall für den Parameter a ist bei der konkaven Update-Funktion nach (3.7) demnach etwas größer.[117]

Eine eingeschränkte Dominanz, wie sie in Satz 54 vorliegt, ist nur bedingt für den Vergleich zweier Update-Funktionen geeignet, da insbesondere keine relativen Wertentwicklungen $x > x_U$ möglich sein dürfen. Derartig eingeschränkte Dominanzen sollten daher möglichst vermieden werden. Vor allem sollten auch keine Einschränkungen hinsichtlich einer Dominanz im Sinne von Definition 2 für negative relative Wertentwicklungen $x < 1$ erfolgen, da der Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq 1$ ohnehin sehr klein ausfällt. Zudem ist eine Einschränkung in diesem Bereich nicht brauchbar, wenn der vollständige Mittelabzug bei einer bestimmten Parameterkonstellation möglich ist.[118]

Ein Vergleich zweier streng konkaver Update-Funktionen nach Definition 1 hinsichtlich einer Dominanz im Sinne von Definition 2 gestaltet sich etwas schwieriger. Berühren sich die beiden Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$, dann kann eine Dominanz im

[113] Für die Steigung einer konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x) = 2x - e^{-x} + e^{-1} - 1$ gilt beispielsweise immer $\hat{G}'(x) = 2 + e^{-x} > 2$. Trifft für die lineare Update-Funktion $G'(x) = a \leq 2$ zu, dann existiert trotz der strengen Konkavität von $\hat{G}(x)$ bzw. trotz $\hat{G}''(x) = -e^{-x} < 0$ kein Schnittpunkt für $x > 1$, da $\hat{G}'(1) > G'(1)$ gilt und $\hat{G}'(x) < G'(x)$ für $x > 1$ hier nicht möglich ist.

[114] Es gilt $a \leq (\hat{G}(1,5) - 1) \cdot (1,5 - 1)^{-1} = 1,289499$.

[115] Analog gilt $a \leq (\hat{G}(2) - 1) \cdot (2 - 1)^{-1} = 1,232544$.

[116] Es gilt $a \leq (\hat{G}(1,5) - 1) \cdot (1,5 - 1)^{-1} = 1,810930$ bzw. $a \leq (\hat{G}(2) - 1) \cdot (2 - 1)^{-1} = 1,693147$.

[117] Für lineare Update-Funktionen gilt nach Satz 20 insbesondere auch $a > 1$.

[118] Da ein vollständiger Mittelabzug erst für relative Wertentwicklungen $x \leq \hat{x}_0$ auftritt, sind somit dann auch sämtliche relative Wertentwicklungen x mit $\hat{x}_0 \leq x \leq 1$ möglich.

Sinne von Definition 2 nicht vorliegen.[119] Im Fall eines Schnittpunkts an der Stelle $x = 1$ muss für die zwei konkreten Update-Funktionen überprüft werden, ob ein weiterer Schnittpunkt für $x \geq \hat{x}_0$ vorliegt, wodurch die Dominanz dann jedoch auf einen Teilbereich eingeschränkt wäre.[120] Die streng konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) wird beispielsweise aber uneingeschränkt für $x \geq \hat{x}_0$ von der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) im Sinne von Definition 2 dominiert.[121]

Für streng konvexe Update-Funktionen und lineare Update-Funktionen können hinsichtlich einer Dominanz im Sinne von Definition 2 die folgenden Aussagen getroffen werden:

SATZ 55 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 und die Funktion $G(x)$ sei eine streng konvexe Update-Funktion nach Definition 1. Die streng konvexe Update-Funktion $G(x)$ wird von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn für den Parameter $\hat{a}$ der linearen Update-Funktion $\hat{a} \geq (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ mit $x_U > 1$ zutrifft.*[122]

BEWEIS: Vgl. Anhang B.1.[123] □

Wird beispielsweise $x_U = 1,5$ gewählt, dann wird die streng konvexe Update-Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) von jeder linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} \geq 3,526814$ im Sinne von Definition 2 dominiert.[124] Soll eine Dominanz bis zur Stelle $x_U = 2$ erzeugt werden, dann muss bereits $\hat{a} \geq 4,670774$ gelten.[125] Wegen der strengen Konvexität von $G(x)$ wird hier der Ausdruck $(G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ mit steigendem $x_U > 1$ immer größer.[126]

[119] Mit $\hat{G}'(1) = G'(1)$ gilt in unmittelbarer Umgebung der Stelle $x = 1$ sowohl für $x < 1$ als auch für $x > 1$ entweder $\hat{G}(x) < G(x)$ oder $\hat{G}(x) > G(x)$.

[120] Bei $\hat{x}_0$ handelt es sich um die Nullstelle der dominierenden Update-Funktion $\hat{G}(x)$.

[121] Es gilt $\hat{G}(x) - G(x) = x + ln(x) - (x - e^{-x} + e^{-1}) = ln(x) + e^{-x} - e^{-1}$. Nach Abbildung 3.1, S. 77 ist diese Differenz für x im Bereich $\hat{x}_0 = 0,567143 \leq x < 1$ negativ und für x im Bereich $1 < x \leq 1,45$ positiv. Für $x > 1$ ist $ln(x)$ positiv und nimmt mit steigendem x weiter zu. Mit $e^{-x} > 0$ und $ln(x) = e^{-1} \Leftrightarrow x = 1,444668$ gilt entsprechend $\hat{G}(x) > G(x)$ auch für $x > 1,45$.

[122] x_U bezeichnet hier den Schnittpunkt der streng konvexen Update-Funktion $G(x)$ mit der linearen Update Funktion $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} = (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ im „up"-Bereich $x > 1$.

[123] Der Beweis wurde in den Anhang ausgegliedert, da die Argumentation zunächst analog zum Beweis von Satz 54 und dann analog zum Beweis von Satz 53 verläuft.

[124] Es gilt $\hat{a} \geq (G(1,5) - 1) \cdot (1,5 - 1)^{-1} = 3,526814$.

[125] Analog gilt hier $\hat{a} \geq (G(2) - 1) \cdot (2 - 1)^{-1} = 4,670774$.

[126] Trifft $\hat{G}'(1) = \hat{a} > G'(1) = 2,718282$ zu, dann existiert hier ein Schnittpunkt $x_U > 1$, da $\hat{G}'(x) = \hat{a}$ konstant ist und $G'(x) = e^x$ wegen $G''(x) = e^x > 0$ mit steigendem x gegen $+\infty$ strebt.

Nach Satz 55 wird eine streng konvexe Update-Funktion somit in der Regel nur bis zu einer bestimmten Stelle $x_U > 1$ durch eine entsprechende lineare Update-Funktion im Sinne von Definition 2 dominiert. Die umgekehrte Dominanz ist hier jedoch wieder uneingeschränkt für den gesamten Bereich $x \geq \hat{x}_0$ realisierbar:

SATZ 56 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine streng konvexe Update-Funktion nach Definition 1 und die Funktion $G(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20. Die lineare Update-Funktion $G(x)$ wird von der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert, wenn für den Parameter a der linearen Update-Funktion $a \leq (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ zutrifft.*

BEWEIS: Vgl. Anhang B.2.[127] □

Nach Satz 56 dominiert die streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) somit jede lineare Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 mit $a \leq 2,180193$ im Sinne von Definition 2.[128] Hinsichtlich eines Vergleiches zweier streng konvexer Update-Funktionen gelten die gleichen Anmerkungen wie zum Vergleich zweier streng konkaver Update-Funktionen. Ob eine uneingeschränkte oder nur eine eingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 2 vorliegt, hängt von der konkreten Gestalt der beiden streng konvexen Update-Funktionen ab.

Für den Vergleich zwischen streng konvexen und streng konkaven Update-Funktionen ist ebenfalls die Angabe konkreter Update-Funktionen erforderlich. Beispielsweise wird die streng konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) von der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) im Sinne von Definition 2 dominiert.[129] Zwischen der streng konkaven Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) und der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) liegt keine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 2 vor.[130]

[127] Der Beweis wurde in den Anhang ausgegliedert, da die Argumentation zunächst analog zum Beweis von Satz 53 und dann analog zum Beweis von Satz 54 verläuft.

[128] Es muss gelten $a \leq (1 - \hat{x}_0)^{-1} = (\widehat{\Delta x})^{-1} = (0,458675)^{-1} = 2,180193$. Zur Berechnung von $\hat{x}_0$ vgl. Fußnote 38, Kapitel 3, S. 79 bzw. zur Bestimmung von $\widehat{\Delta x}$ vgl. S. 82.

[129] Mit $\hat{G}'(1) = e^1 = 2,718282 > G'(1) = 1 + e^{-1} = 1,367879$ und $\hat{G}''(x) > 0$ sowie $G''(x) < 0$ folgt $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x > 1$. Durch die strenge Konvexität von $\hat{G}(x)$ und die strenge Konkavität von $G(x)$ liegt hier ein weiterer Schnittpunkt an einer Stelle $x < 1$ vor. Mit $\hat{G}(\hat{x}_0) = 0 < G(\hat{x}_0) = 0,327228$ gilt jedoch $\hat{G}(x) < G(x)$ für x im Bereich $\hat{x}_0 = 0,541325 \leq x < 1$.

[130] Die Funktionen schneiden sich an der Stelle $x = 0,618261$. Mit $\hat{x}_0 = 0,541325$ und $x_0 = 0,567143$ trifft $\hat{x}_0 \geq x_0$ nicht zu. Somit liegt keine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 2 vor.

Für zusammengesetzte Update-Funktionen nach (3.12) kann bezüglich der Dominanz im Sinne von Definition 2 die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 57 *Die Funktionen $G_{\bar{x}_*}(x)$ und $G_{\bar{x}}(x)$ seien Update-Funktionen nach (3.12). Gilt $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1$, dann wird die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert.*[131]

BEWEIS: Update-Funktionen nach (3.12) sind keine Update-Funktionen nach Definition 1, da sie stückweise definiert sind und $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ für $x \geq \bar{x}$ zutrifft. Die Voraussetzungen für Definition 2 sind verletzt. Nach Satz 44 gilt jedoch $G_{\bar{x}_*}(x) < G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x < 1$ und $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x > 1$. Demnach sind alle drei Bedingungen von Definition 2 erfüllt und es liegt eine Dominanz im Sinne von Definition 2 vor.[132] □

Eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ besitzt für $x < \bar{x}$ einen streng konkaven Verlauf. Für diesen Bereich $x < \bar{x}$ und daher insbesondere auch für $x < 1$ stellt sie somit eine nicht stückweise definierte Update-Funktion nach Definition 1 dar. Dementsprechend gestaltet sich ein Vergleich dieser zusammengesetzten Update-Funktion mit einer linearen Update-Funktion hinsichtlich einer Dominanz im Sinne von Definition 2 im Prinzip wie ein Vergleich einer streng konkaven Update-Funktion mit einer linearen Update-Funktion: Satz 53 lässt sich direkt auf eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ und eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 übertragen. Satz 54 besitzt nur eingeschränkt Gültigkeit für eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ und eine lineare Update-Funktion nach Satz 20. Der Fall $\bar{x} = 1$ nimmt eine Sonderstellung ein, welche im Folgenden erläutert wird.

Liegt eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ vor, dann dominiert diese einerseits nach Satz 57 jede andere zusammengesetzte Update-Funktion mit einer kleineren Konstante $\bar{x}$. Andererseits wird diese Update-Funktion von jeder anderen zusammengesetzten Update-Funktion mit einer größeren Konstante $\bar{x}$ dominiert. Die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) wird zwar auch von allen anderen zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Allerdings existiert keine zusammengesetzte Update-

[131] Veranschaulicht wird diese Aussage insbesondere durch Abbildung 3.3, S. 93.

[132] Entsprechend besitzen die Sätze 48, 49 und 50 auch Gültigkeit für eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$.

Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$, welche von der Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) dominiert wird. Eine Update-Funktion, welche von der Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) dominiert wird, ist jedoch die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$:

Satz 58 *Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ nach Satz 23 wird von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) im Sinne von Definition 2 dominiert und es gilt $G_1(x) \leq G_B(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen $x > 0$.*

Beweis: Weder die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ noch die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ stellt eine Update-Funktion nach Definition 1 dar. Obwohl die Voraussetzungen für Definition 2 verletzt sind, können die Anforderungen hinsichtlich der Dominanz jedoch auch für diese beiden Update-Funktionen gezeigt werden.

Nach (3.12) besitzt die zusammengesetzte Update-Funktion für $x > 1$ die Gestalt $G_1(x) = x$. Mit $G_1(x) - G_B(x) = 0$ für $x > 1$ sind die Update-Funktionen $G_1(x)$ und $G_B(x)$ in diesem Bereich identisch. Nach (3.12) besitzt die zusammengesetzte Update-Funktion für $x < 1$ die Gestalt $G_1(x) = (x-1)^3 + x$. Für die Differenz im Bereich $x < 1$ gilt $G_1(x) - G_B(x) = (x-1)^3 < 0$, woraus $G_1(x) < G_B(x)$ resultiert.

Aus $G_1(x) < G_B(x)$ für $x < 1$ und $G_1(x) = G_B(x)$ für $x > 1$ folgt $G_1(x) \leq G_B(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen $x > 0$. □

In der Regel bedeutet Dominanz im Sinne von Definition 2 eine Dominanz sowohl hinsichtlich des betragsmäßigen Mittelabflusses als auch bezüglich des Mittelzuflusses. Ein potentiell höherer Mittelabfluss für eine relative Wertentwicklung $x < 1$ geht in den meisten Fällen mit einem potentiell höheren Mittelzufluss für eine relative Wertentwicklung $x > 1$ einher. Bei Bedingung (3) von Definition 2 wird jedoch nur $\hat{G}(x) < G(x)$ für mindestens ein x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x < 1$ oder $\hat{G}(x) > G(x)$ für mindestens ein $x > 1$ gefordert. Demnach können zwar beide Teilaussagen im Rahmen der dritten Bedingung zutreffen, es müssen jedoch nicht zwingend notwendig beide erfüllt sein, da es sich bei Bedingung (3) um eine nicht ausschließende Disjunktion handelt. Ein Beispiel für einen derartigen Fall wird mit Satz 58 geliefert. Die Dominanz beruht hier nur auf dem ersten Teil von Bedingung (3), da die Update-Funktionen für $x > 1$ identisch sind.

In Satz 58 ist noch ein weiterer Aspekt interessant. Obwohl die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_1(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert wird, gilt $G_1(x) \leq G_B(x)$ für alle $x > 0$ und $G_1(x) < G_B(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen $x < 1$. Das heißt, die Funktionswerte der dominierten Update-Funktion $G_B(x)$ sind für alle relativen Wertentwicklungen $x < 1$ sogar größer und in keinem Fall kleiner als die Funktionswerte der anderen, eigentlich dominierenden Update-Funktion $G_1(x)$. Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich wie folgt erklären:

Dominanz im Sinne von Definition 2 ist hier gleichbedeutend mit heftigeren Reaktionen auf einzelne relative Wertentwicklungen x und zumindest gleich starke Reaktionen auf die restlichen relativen Wertentwicklungen. Unter heftigeren Reaktionen ist hier ein höherer Mittelzufluss bei positiven relativen Wertentwicklungen $x > 1$ und ein höherer Mittelabfluss bei negativen relativen Wertentwicklungen $x < 1$ zu verstehen. Wird eine Update-Funktion $G(x)$ von einer anderen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq \hat{x}_0$ im Sinne von Definition 2 dominiert, dann bedeutet eine heftigere Reaktion für eine relative Wertentwicklung x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x < 1$ hier formal $\hat{G}(x) < G(x)$, da ein höherer Mittelabfluss in diesem Bereich nur durch einen niedrigeren Funktionswert erreicht werden kann. Dominanz im Sinne von Definition 2 ist demnach nicht zu verwechseln mit einer Dominanz hinsichtlich der Funktionswerte, welche im nachfolgenden Abschnitt genauer betrachtet wird.

Auf den Vergleich einer konkaven bzw. konvexen Update-Funktion mit einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ im Hinblick auf eine Dominanz im Sinne von Definition 2 wird verzichtet, da dieser Vergleich wiederum von der konkreten Gestalt der konkaven bzw. konvexen Update-Funktion abhängig ist.

3.3.2 Dominanz hinsichtlich der Funktionswerte

Formal lässt sich bei Update-Funktionen eine Dominanz hinsichtlich der Funktionswerte wie folgt beschreiben:

DEFINITION 3 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Eine Update-Funktion $G(x)$ wird von einer Update-Funktion $\hat{G}(x)$ hinsichtlich der Funktionswerte im Bereich $x \geq x_0$ dominiert, wenn*

(1) $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für $x \geq x_0$ und

(2) $\hat{G}(x) > G(x)$ für mindestens ein x im Bereich $x \geq x_0$ zutrifft.[133]

[133] x_0 bezeichnet hier die positive Nullstelle der Update-Funktion $G(x)$.

Der Unterschied zwischen Definition 2 und Definition 3 wird anhand der zwei Update-Funktionen aus Satz 58 deutlich. Im Zusammenhang mit Definition 3 gilt nun:

Satz 59 *Die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) wird von der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ nach Satz 23 im Sinne von Definition 3 dominiert.*

Beweis: Nach Satz 58 trifft $G_B(x) \geq G_1(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen $x > 0$ zu. Bei Update-Funktionen nach Definition 1 gilt für negative relative Wertentwicklungen $x < 1$ die Relation $x > G_1(x)$ bzw. $G_B(x) > G_1(x)$.[134] Obwohl es sich bei beiden Funktionen nicht um Update-Funktionen nach Definition 1 handelt, sind beide Bedingungen von Definition 3 erfüllt und es liegt eine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor. □

Für den Bereich $x > 1$ werden nach beiden Definitionen die gleichen Anforderungen gestellt. Sowohl nach Definition 2 als auch nach Definition 3 muss jeweils die Bedingung $\hat{G}(x) \geq G(x)$ erfüllt sein. Der Unterschied zwischen den Definitionen beruht auf dem Bereich der negativen Wertentwicklungen $x < 1$. Bei den beiden Update-Funktionen $G_1(x)$ und $G_B(x)$ führt dies letztendlich dazu, dass die zuvor nach Definition 2 dominierende Update-Funktion $G_1(x)$ nach Definition 3 zur dominierten Update-Funktion wird, da in dem Abschnitt $x < 1$ ein höherer Mittelabfluss mit einem niedrigeren Funktionswert einhergeht.

Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Definitionen scheint bezüglich des Definitionsbereiches zu bestehen: Bei Definition 2 wird der Bereich $x \geq \hat{x}_0$ zu Grunde gelegt, wohingegen bei Definition 3 der Bereich $x \geq x_0$ maßgeblich ist. Zur Klärung dieses Sachverhalts trägt die folgende Aussage bei:

Satz 60 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Wird die Update-Funktion $G(x)$ von der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert, dann gilt für die Nullstelle $\hat{x}_0$ der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ und für die Nullstelle x_0 der Update-Funktion $G(x)$ die Relation $\hat{x}_0 \leq x_0$.*

Beweis: Nach Bedingung (1) aus Definition 3 muss für die Nullstelle x_0 der Update-Funktion $G(x)$ der Zusammenhang $\hat{G}(x_0) \geq G(x_0) = 0$ gelten. Mit $\hat{G}'(x) > 1$ nach

[134] Vgl. Beweis zu Satz 28.

Definition 1 folgt im Fall $\hat{G}(x_0) > G(x_0)$ für die Nullstelle $\hat{x}_0$ der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ somit $\hat{x}_0 < x_0$. Im Fall $\hat{G}(x_0) = G(x_0)$ gilt entsprechend $\hat{x}_0 = x_0$. □

Sowohl nach Satz 48 als auch nach Satz 60 kann der Fall $\hat{x}_0 = x_0$ auftreten. Stimmen die beiden Nullstellen nicht überein und liegt Dominanz im Sinne von Definition 2 vor, dann ist nach Satz 48 die Nullstelle $\hat{x}_0$ die größere Nullstelle. Liegt andererseits Dominanz im Sinne von Definition 3 vor und gilt $\hat{x}_0 \neq x_0$, dann ist nach Satz 60 nun x_0 die größere Nullstelle. Es besteht demnach hinsichtlich des Definitionsbereiches kein wirklicher Unterschied zwischen den beiden Definitionen, da als untere Grenze des Definitionsbereiches jeweils die größere Nullstelle zugrunde gelegt wird.

Bezogen auf die Update-Funktionen $G_1(x)$ und $G_B(x)$ bedeutet dies: Nach Satz 58 wird die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_1(x)$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Nach Definition 2 ist diese Dominanz für $x \geq \hat{x}_0$ erforderlich, wobei $\hat{x}_0$ die Nullstelle der dominierenden Update-Funktion $G_1(x)$ bezeichnet und $\hat{x}_0 = x_0(1) = 0,317672$ gilt.[135] Nach Satz 59 wird die zusammengesetzte Update-Funktion $G_1(x)$ von der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert. Nach Definition 3 ist diese Dominanz nun für $x \geq x_0$ erforderlich, wobei x_0 die Nullstelle der dominierten Update-Funktion $G_1(x)$ bezeichnet und $x_0 = x_0(1) = 0,317672$ gilt. Folglich wird hier die Dominanz jeweils für den gleichen Bereich $x \geq 0,317672$ gefordert.[136]

Nach Definition 3 muss $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ gelten. Somit lautet die Aussage hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses nun:

SATZ 61 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ und $G(x)$ seien Update-Funktionen nach Definition 1. Wird die Update-Funktion $G(x)$ von der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert, dann ist der Mittelzufluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ für jede positive relative Wertentwicklung $x > 1$ mindestens genauso groß wie der Mittelzufluss in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$. Für jede negative relative Wertentwicklung $x < 1$ ist der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ betragsmäßig höchstens genauso groß wie der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$.*

[135] Zur Berechnung von $x_0(1) = 0,317672$ vgl. Fußnote 72, Kapitel 3, S. 96.

[136] Sowohl im Beweis zu Satz 58 als auch im Beweis zu Satz 59 wird nicht explizit auf den Bereich $x \geq 0,317672$ eingegangen, da in den Beweisen allgemeiner unter Bezugnahme auf andere Sätze argumentiert wird.

Beweis: Vgl. Anhang B.3.[137] □

Falls eine Dominanz im Sinne von Definition 3 für den Bereich $x \geq x_0$ vorliegt, kann auch hier hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses eine Aussage für den kompletten Bereich $x > 0$ getroffen werden. Satz 50 gilt analog.[138] Ein Ausschluss des Bereiches $x < x_0$ ist auch innerhalb von Definition 3 erforderlich, da eine Einbeziehung dieses Bereiches ebenfalls zu falschen Schlüssen führen könnte.[139]

Im Folgenden werden die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 vorgestellten Update-Funktionen nun analog im Hinblick auf eine Dominanz im Sinne von Definition 3 überprüft.

Satz 62 *Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ nach Satz 23 wird von keiner Update-Funktion $G(x)$ nach Definition 1 im Sinne von Definition 3 dominiert und umgekehrt.*[140]

Beweis: Nach Satz 23 kommt es bei der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ für alle relativen Wertentwicklungen x weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss. Nach Satz 28 erfolgt jedoch bei Update-Funktionen nach Definition 1 für $x > 1$ immer ein Mittelzufluss und es gilt $G(x) > x$.[141] Mit $G_B(x) = x$ folgt somit $G(x) > G_B(x)$ für $x > 1$. Demnach ist es nach Definition 3 hier nur möglich, dass die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ von der Update-Funktion $G(x)$ dominiert wird. Nach Satz 28 erfolgt jedoch bei Update-Funktionen nach Definition 1 für $x < 1$ immer ein Mittelabfluss und es gilt $G(x) < x$.[142] Daher folgt $G(x) < G_B(x)$ für $x < 1$. Mit $G(x) > G_B(x)$ für $x > 1$ führt dies für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ zu einem Widerspruch in Verbindung mit Bedingung (1) von Definition 3. Somit kann hier keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vorliegen. □

[137] Der Beweis wurde in den Anhang ausgegliedert, da die Argumentation analog zum Beweis von Satz 49 verläuft.

[138] Vgl. Beweis zu Satz 50. Mit $x_0 = \hat{x}_0$ muss der Satz nicht neu formuliert werden.

[139] Die Anmerkungen im Anschluss an den Beweis zu Satz 50 gelten entsprechend angepasst auch für die zwei Bedingungen in Definition 3 in Verbindung mit der Nullstelle x_0.

[140] Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ stellt keine Update-Funktion nach Definition 1 dar. Daher sind die Voraussetzungen für Definition 3 verletzt. Trotzdem ist ein Vergleich hinsichtlich Dominanz hier möglich. Vgl. Beweis zu Satz 51 und die sich daran anschließenden Anmerkungen.

[141] Vgl. Beweis zu Satz 28.

[142] Vgl. Beweis zu Satz 28.

Die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ eignet sich daher nicht als allgemeine Vergleichsbasis in Verbindung mit Dominanzüberlegungen im Sinne von Definition 3. Lediglich ein Vergleich mit der zusammengesetzten Update-Funktion $G_1(x)$ nach (3.12) erscheint nach Satz 59 sinnvoll. Dominanzfälle im Sinne von Definition 3 liegen auch beim Vergleich zweier linearer Update-Funktionen nicht vor:

SATZ 63 *Die Funktionen $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a}$ und $G(x)$ mit Parameter a seien lineare Update-Funktionen nach Satz 20 mit $\hat{a} \neq a$. Dann wird weder die lineare Update-Funktion $G(x)$ von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert noch umgekehrt.*

BEWEIS: Folgt direkt aus dem Beweis zu Satz 52: Im Fall $\hat{a} > a$ gilt $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x > 1$ und $\hat{G}(x) < G(x)$ für $x < 1$. Für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ ist somit die Bedingung (1) von Definition 3 verletzt und es liegt keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor. Für $\hat{a} < a$ gilt entsprechend $\hat{G}(x) < G(x)$ für $x > 1$ und $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x < 1$.[143] Für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x < 1$ ergibt sich auch hier ein Widerspruch zu Bedingung (1) von Definition 3. □

Im Gleichheitsfall $\hat{a} = a$ sind die beiden linearen Update-Funktionen identisch, wodurch Bedingung (2) von Definition 3 verletzt ist und ebenfalls keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vorliegt. Es liegen jedoch Dominanzfälle im Sinne von Definition 3 vor, wenn lineare und streng konkave Update-Funktionen miteinander verglichen werden:

SATZ 64 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 und die Funktion $G(x)$ sei eine streng konkave Update-Funktion nach Definition 1. Die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ wird von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert, wenn für den Parameter $\hat{a}$ der linearen Update-Funktion $\hat{a} = G'(1)$ zutrifft.*

BEWEIS: Die Tangente in x_T an den Graphen $G(x)$ besitzt allgemein die Gestalt $T_{x_T}(x) = G(x_T) + G'(x_T) \cdot (x - x_T)$.[144] Da die Tangente an den Graphen einer streng konkaven Funktion oberhalb dieses Graphen verläuft, gilt $G(x) < T_{x_T}(x)$ für $x \neq x_T$.[145]

[143] Im Fall $\hat{a} < a$ tauschen die beiden linearen Update-Funktionen nur ihre Rollen.
[144] Vgl. Kaballo (2000), S. 145.
[145] An der Stelle $x = x_T$ trifft $T_{x_T}(x_T) = G(x_T)$ zu. Mit $h > 0$ folgt wegen der strengen Konkavität $G'(x_T) < (G(x_T) - G(x_T - h))/(x_T - (x_T - h)) \Leftrightarrow G(x_T - h) < G(x_T) - h \cdot G'(x_T) = T_{x_T}(x_T - h)$

Mit $x_T = 1$ und $G(1) = 1$ ergibt sich $G(x) < 1 + G'(1) \cdot (x-1) = G'(1) \cdot x + 1 - G'(1)$ für $x \neq 1$. Da die Tangente eine Gerade ist und die Update-Funktion $G(x)$ mit der Tangente $T_1(x)$ an der Stelle $x = 1$ übereinstimmt, stellt diese Tangente selbst eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 dar.[146] Mit $\hat{G}(x) = T_1(x) = G'(1) \cdot x + 1 - G'(1)$ gilt somit die Ungleichung $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x \neq 1$. Das bedeutet, die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ wird von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a} = G'(1)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert. □

Die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ verläuft unterhalb der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ und beide Update-Funktionen berühren sich nur an der Stelle $x = 1$. Die Eindeutigkeit der linearen Update-Funktion unterstreicht der nachfolgende Satz:

Satz 65 *Jede streng konkave Update-Funktion $G(x)$ nach Definition 1 wird nur von genau einer bestimmten linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} = G'(1)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert.*

Beweis: Für jede lineare Update-Funktion muss $\hat{G}(1) = 1$ gelten. Nach Satz 64 berührt die lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} = G'(1)$ die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ nach Definition 1 an der Stelle $x = 1$. Somit schneidet jede andere lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} < G'(1)$ die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ an der Stelle $x = 1$ und, falls $G'(x) < \hat{a}$ für $x > 1$ möglich ist, an einer weiteren Stelle $x_U > 1$.[147] Für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ und für $x > x_U$ gilt dann zwar weiterhin $\hat{G}(x) > G(x)$. Für jede positive relative Wertentwicklung x im Bereich $1 < x < x_U$ trifft nun allerdings $G(x) > \hat{G}(x)$ zu, da bei der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = 1$ und $x = x_U$ oberhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(1)$ und $G(x_U)$ liegen.[148] Existiert kein zweiter Schnittpunkt $x_U > 1$, dann gilt sogar $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x > 1$. Folglich liegt für $\hat{a} < G'(1)$ im Bereich $x \geq x_0$ keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor.

und somit $G(x) < T_{x_T}(x)$ für $x < x_T$. Analog gilt $G'(x_T) > (G(x_T + h) - G(x_T))/(x_T + h - x_T) \Leftrightarrow G(x_T + h) < G(x_T) + h \cdot G'(x_T) = T_{x_T}(x_T + h)$, woraus $G(x) < T_{x_T}(x)$ auch für $x > x_T$ resultiert.

[146] Die lineare Update-Funktion hat nach Satz 20 die Gestalt $\hat{G}(x) = \hat{a}x + 1 - \hat{a}$ mit $\hat{a} > 1$. Mit $\hat{a} = G'(1)$ ergibt sich die rechte Seite der Ungleichung und somit genau die Tangente. Es gilt $G'(1) > 1$, da nach Definition 1 für alle $x > 0$ die Anforderung $G'(x) > 1$ erfüllt sein muss.

[147] Zur Existenz von $x_U > 1$ vgl. Fußnote 113, Kapitel 3, S. 115.

[148] Die Verbindungsgerade entspricht hier genau der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$. Zu Verbindungsgeraden bei streng konkaven Update-Funktionen vgl. Fußnote 105, Kapitel 3, S. 112.

Analog schneidet eine lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} > G'(1)$ die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ an der Stelle $x = 1$ und gegebenenfalls an einer weiteren Stelle $x_D < 1$. Liegt diese Stelle x_D im Bereich $x_0 < x_D < 1$, dann gilt für x im Bereich $x_0 \leq x < x_D$ und für $x > 1$ zwar weiterhin $\hat{G}(x) > G(x)$. Für jede negative relative Wertentwicklung x im Bereich $x_D < x < 1$ trifft jedoch $G(x) > \hat{G}(x)$ zu, da bei der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = x_D$ und $x = 1$ wiederum oberhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(x_D)$ und $G(1)$ liegen.[149] Im Fall $x_D = x_0$ ergibt sich die Verbindungsgerade $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} = (1 - x_0)^{-1}$, bei welcher für x im Bereich $x_D = x_0 < x < 1$ die Ungleichung $\hat{G}(x) < G(x)$ zutrifft.[150] Für $x > 1$ gilt jedoch $\hat{G}(x) > G(x)$. Somit liegt auch für $\hat{a} > G'(1)$ und x_D im Bereich $x_0 \leq x_D < 1$ im Bereich $x \geq x_0$ keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor.

Gilt $x_D < x_0$ oder liegt sogar kein weiterer Schnittpunkt $x_D < 1$ mehr vor, dann ist dies gleichbedeutend mit $\hat{a} > (1 - x_0)^{-1}$. Nach Satz 52 wird die lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} = (1 - x_0)^{-1}$ von jeder anderen linearen Update-Funktion mit einem noch größeren Parameter als $\hat{a}$ im Sinne von Definition 2 dominiert. Die Funktionswerte dieser anderen linearen Update-Funktion sind für x im Bereich $x_0 < x < 1$ kleiner als die Funktionswerte von $\hat{G}(x)$ und somit auch kleiner als die Funktionswerte der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$. Im Bereich $x > 1$ sind die Funktionswerte dieser anderen linearen Update-Funktion größer als die Funktionswerte von $\hat{G}(x)$ und daher auch größer als die Funktionswerte von $G(x)$.[151] Demnach besteht zwischen einer linearen Update-Funktion mit $\hat{a} > (1-x_0)^{-1}$ und der streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ ebenfalls keine Dominanz im Sinne von Definition 3.[152] □

Zu jeder streng konkaven Update-Funktion $G(x)$ nach Definition 1 existiert somit nach Satz 65 nur genau eine lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} = G'(1)$, die erstere im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert.

Die streng konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) wird beispielsweise von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Satz 20 mit $\hat{a} = 1,367879$ im Sinne

[149] Die Verbindungsgerade entspricht auch hier genau der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$.
[150] Vgl. Beweis zu Satz 53.
[151] Vgl. Beweis zu Satz 52.
[152] Gilt $\hat{a} > G'(1)$ und existiert kein Schnittpunkt x_D im Bereich $x_0 \leq x_D < 1$, dann ist letztendlich irrelevant, ob der Schnittpunkt noch im für x zulässigen Bereich $x > 0$ liegt, da in einem derartigen Fall immer $\hat{a} > (1 - x_0)^{-1}$ zutrifft und somit auf Satz 52 zurückgegriffen werden kann.

von Definition 3 dominiert.[153] Eine derartige Dominanz trifft bei der anderen streng konkaven Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) genau für $\hat{a} = 2$ zu.[154] Die Werte für $\hat{a}$ sind im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 3 kleiner als die Werte für $\hat{a}$ im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 2:[155] Nach Satz 53 muss im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 2 für den Parameter der linearen Update-Funktion $\hat{a} \geq (1-x_0)^{-1}$ zutreffen. Mit $\hat{a} = (1-x_0)^{-1}$ schneidet die lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die streng konkave Update-Funktion $G(x)$ an den Stellen $x_D = x_0 < 1$ und $x = 1$.[156] Ein Schnittpunkt $x_D < 1$ kann jedoch nur für $\hat{a} > G'(1)$ vorliegen.[157] Folglich gilt $\hat{a} \geq (1 - x_0)^{-1} > G'(1)$.

Entspricht der Parameter der linearen Update-Funktion nicht der Steigung der streng konkaven Update-Funktion an der Stelle $x = 1$, dann schneiden sich die beiden Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$.[158] Folglich kann eine lineare Update-Funktion $G(x)$ von einer streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nicht im gesamten für x zulässigen Bereich im Sinne von Definition 3 dominiert werden: Für $a > \hat{G}'(1)$ müssen zumindest alle positiven relativen Wertentwicklungen $x > 1$ und für $a < \hat{G}'(1)$ alle negativen relativen Wertentwicklungen $x < 1$ von der Dominanzbetrachtung ausgeschlossen werden.[159] Gleichzeitig wird bei der Existenz eines zweiten Schnittpunktes x_D bzw. x_U auch noch der für eine Dominanz verbleibende Teilbereich weiter eingeschränkt. Aufgrund dieser erheblichen Einschränkungen werden die Fälle, in denen eine lineare Update-Funktion $G(x)$ von einer streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 nur in kleinen Teilbereichen dominiert wird, von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

Eine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen zwei streng konkaven Update-Funktionen nach Definition 1 kann nur dann vorliegen, wenn sich die beiden Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$ berühren. Neben dem Funktionswert, welcher bei Update-Funktionen nach Definition 1 an dieser Stelle immer identisch ist, muss dazu die Steigung der beiden streng konkaven Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$ übereinstimmen. Zusätzlich dürfen sich die beiden Update-Funktionen für eine uneingeschränkte Dominanz im gesamten Bereich $x \geq x_0$ nicht schneiden. Folglich

[153] Mit $G'(x) = 1 + e^{-x}$ ergibt sich $G'(1) = 1 + e^{-1} = 1,367879$.

[154] Mit $G'(x) = 1 + x^{-1}$ ergibt sich $G'(1) = 1 + 1^{-1} = 2$.

[155] Dominanz im Sinne von Definition 2 liegt bei $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ für $\hat{a} \geq 1,520390$ und bei $G(x) = x + ln(x)$ für $\hat{a} \geq 2,310232$ vor. Vgl. dazu die Ausführungen im Anschluss an Satz 53.

[156] Neben $\hat{G}(1) = G(1) = 1$ gilt insbesondere $\hat{G}(x_0) = (1 - x_0)^{-1} \cdot x_0 + 1 - (1 - x_0)^{-1} = 0 = G(x_0)$.

[157] Vgl. Beweis zu Satz 65.

[158] Vgl. Beweis zu Satz 65.

[159] Trifft $a > \hat{G}'(1)$ zu, dann gilt $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x > 1$. Im Fall $a < \hat{G}'(1)$ folgt entsprechend $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x < 1$.

liegt zwischen der streng konkaven Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) und der streng konkaven Update-Funktion $\hat{G}(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) keine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 vor, da sich beide Update-Funktionen wegen $G'(1) = 1,367879 \neq 2 = \hat{G}'(1)$ an der Stelle $x = 1$ schneiden.

Auch bei einer streng konvexen Update-Funktion kommt es in Verbindung mit einer linearen Update-Funktion zu einer uneingeschränkten und zu einer eingeschränkten Dominanz im Sinne von Definition 3. Eine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 liegt im folgenden Fall vor:

SATZ 66 *Die Funktion $\hat{G}(x)$ sei eine streng konvexe Update-Funktion nach Definition 1 und die Funktion $G(x)$ sei eine lineare Update-Funktion nach Satz 20. Die lineare Update-Funktion $G(x)$ wird von der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert, wenn für den Parameter a der linearen Update-Funktion $a = \hat{G}'(1)$ zutrifft.*

BEWEIS: Vgl. Anhang B.4.[160] □

Im Unterschied zu Satz 64 wird hier die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a = \hat{G}'(1)$ uneingeschränkt im Sinne von Definition 3 dominiert, wenn zum Vergleich eine streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ herangezogen wird. Graphisch betrachtet verläuft die streng konvexe Update-Funktion somit oberhalb der linearen Update-Funktion. Analog zum Fall mit der streng konkaven Update-Funktion berühren sich die streng konvexe und die lineare Update-Funktion nur an der Stelle $x = 1$. Bezüglich der Eindeutigkeit der linearen Update-Funktion gilt:

SATZ 67 *Im Sinne von Definition 3 dominiert im gesamten Bereich $x \geq x_0$ jede streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Definition 1 nur genau eine bestimmte lineare Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 mit $a = \hat{G}'(1)$.*

BEWEIS: Vgl. Anhang B.5.[161] □

[160] Der Beweis wurde in den Anhang ausgegliedert, da die Argumentation analog zum Beweis von Satz 64 verläuft.

[161] Der Beweis wurde in den Anhang ausgegliedert, da die Argumentation analog zum Beweis von Satz 65 verläuft.

Nach Satz 67 existiert demnach nur genau eine lineare Update-Funktion, welche von der streng konvexen Update-Funktion uneingeschränkt im Sinne von Definition 3 dominiert wird. Der Parameter a dieser linearen Update-Funktion muss dabei genau der Steigung der streng konvexen Update-Funktion an der Stelle $x = 1$ entsprechen.

Eine lineare Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 wird beispielsweise nur dann im Sinne von Definition 3 von der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) dominiert, wenn für den Parameter a der linearen Update-Funktion $a = 2,718282$ zutrifft.[162] Alle anderen linearen Update-Funktionen $G(x)$ nach Satz 20 werden folglich nicht uneingeschränkt von dieser speziellen konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ im Sinne von Definition 3 dominiert. Der Wert für den Parameter a ist im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 3 größer als der Wert für den Parameter a im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 2:[163] Nach Satz 56 muss im Fall der Dominanz im Sinne von Definition 2 für den Parameter der linearen Update-Funktion die Bedingung $a \leq (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ erfüllt sein. Mit $a = (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ schneidet die lineare Update-Funktion $G(x)$ die streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ an den Stellen $x_D = \hat{x}_0 < 1$ und $x = 1$.[164] Ein Schnittpunkt $x_D < 1$ kann jedoch nur für $a < \hat{G}'(1)$ vorliegen.[165] Folglich gilt $a \leq (1 - \hat{x}_0)^{-1} < \hat{G}'(1)$.

Entspricht der Parameter der linearen Update-Funktion nicht der Steigung der streng konvexen Update-Funktion an der Stelle $x = 1$, dann schneiden sich die beiden Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$.[166] Eine streng konvexe Update-Funktion $G(x)$ kann somit von einer linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nicht im gesamten für x zulässigen Bereich im Sinne von Definition 3 dominiert werden:[167] Für $\hat{a} < G'(1)$ müssen zumindest alle positiven relativen Wertentwicklungen $x > 1$ und für $\hat{a} > G'(1)$ alle negativen relativen Wertentwicklungen $x < 1$ von der Dominanzbetrachtung ausgeschlossen werden.[168] Gleichzeitig wird bei der Existenz eines zweiten Schnittpunktes x_D bzw. x_U auch noch der für eine Dominanz verbleibende Teilbereich weiter eingeschränkt. Aufgrund dieser Einschränkungen werden die Fälle, in denen eine streng konvexe Update-

[162] Mit $\hat{G}'(x) = e^x$ ergibt sich $\hat{G}'(1) = e^1 = 2,718282$.

[163] Dominanz im Sinne von Definition 2 liegt bei $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ für $a \leq 2,180193$ vor. Vgl. dazu die Ausführungen im Anschluss an Satz 56.

[164] Neben $G(1) = \hat{G}(1) = 1$ gilt insbesondere $G(\hat{x}_0) = (1 - \hat{x}_0)^{-1} \cdot \hat{x}_0 + 1 - (1 - \hat{x}_0)^{-1} = 0 = \hat{G}(\hat{x}_0)$.

[165] Vgl. Beweis zu Satz 67.

[166] Vgl. Beweis zu Satz 67.

[167] Vergleichbare Einschränkungen liegen in den Fällen vor, in denen eine lineare Update-Funktion von einer streng konkaven Update-Funktion im Sinne von Definition 3 dominiert wird.

[168] Trifft $\hat{a} < G'(1)$ zu, dann gilt $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x > 1$. Im Fall $\hat{a} > G'(1)$ folgt entsprechend $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x < 1$.

Funktion $G(x)$ von einer linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 nur in kleinen Teilbereichen dominiert wird, hier ebenfalls von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

Eine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen zwei streng konvexen Update-Funktionen nach Definition 1 kann auch hier nur dann vorliegen, wenn sich die beiden Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$ berühren. Die Ausführungen zur uneingeschränkten Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen zwei streng konkaven Update-Funktionen nach Definition 1 gelten daher entsprechend. Gleiches trifft für eine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen einer streng konkaven und einer streng konvexen Update-Funktion nach Definition 1 zu. Die Steigung der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) entspricht mit $\hat{G}'(1) = e^1 = 2,718282$ jedoch weder der Steigung der streng konkaven Update-Funktion nach (3.6) noch der Steigung der streng konkaven Update-Funktion nach (3.7) an der Stelle $x = 1$.[169] Folglich liegt auch zwischen dieser streng konvexen Update-Funktion und den beiden speziellen, streng konkaven Update-Funktionen keine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 vor.

Für zusammengesetzte Update-Funktionen nach (3.12) kann hinsichtlich der Dominanz im Sinne von Definition 3 die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 68 *Die Funktionen $G_{\bar{x}_*}(x)$ und $G_{\bar{x}}(x)$ seien Update-Funktionen nach (3.12). Gilt $\bar{x}_* > \bar{x} \geq 1$, dann wird weder die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}(x)$ im Bereich $x \geq x_0(\bar{x})$ noch die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ im Bereich $x \geq x_0(\bar{x}_*)$ im Sinne von Definition 3 dominiert.*

BEWEIS: Nach Satz 44 trifft $G_{\bar{x}_*}(x) < G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x < 1$ und $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x > 1$ zu. Nach Satz 45 gilt zudem $x_0(\bar{x}) < x_0(\bar{x}_*) < 1$, so dass eine Dominanz im Sinne von Definition 3 im gesamten Bereich $x \geq x_0(\bar{x})$ bzw. $x \geq x_0(\bar{x}_*)$ hier nicht vorliegen kann. □

Eine uneingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 liegt somit für den gesamten Bereich beim Vergleich zweier zusammengesetzter Update-Funktionen nach (3.12) nicht vor. Obwohl Update-Funktionen nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ keine Update-Funktionen

[169] Vgl. Fußnote 153, Kapitel 3, S. 127 sowie Fußnote 154, Kapitel 3, S. 127.

nach Definition 1 darstellen, da sie stückweise definiert sind und $G'_{\bar{x}}(x) = 1$ für $x \geq \bar{x}$ zutrifft und somit streng genommen die Voraussetzungen für Definition 3 verletzt sind, existiert eine eingeschränkte Dominanz im Sinne von Definition 3 entweder für den Bereich $x \geq 1$ oder für den Bereich $x \leq 1$.[170] Mit $G_{\bar{x}_*}(x) > G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x > 1$ nach Satz 44 wird die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ im Bereich $x \geq 1$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert. Analog wird die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}_*}(x)$ von der zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ im Bereich $x \leq 1$ im Sinne von Definition 3 dominiert, da $G_{\bar{x}_*}(x) < G_{\bar{x}}(x)$ für alle $x < 1$ nach Satz 44 zutrifft.

Eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ besitzt für $x < \bar{x}$ und daher insbesondere auch für $x < 1$ einen streng konkaven Verlauf. Dadurch gestaltet sich ein Vergleich dieser zusammengesetzten Update-Funktion mit einer linearen Update-Funktion hinsichtlich einer Dominanz im Sinne von Definition 3 im Prinzip wie ein Vergleich einer streng konkaven Update-Funktion mit einer linearen Update-Funktion. Der Fall $\bar{x} = 1$ ist bereits mit Satz 59 abgegolten. Satz 64 lässt sich direkt auf eine zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ und eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 übertragen. Für den Parameter $\hat{a}$ der dominierenden linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ muss dann entsprechend $\hat{a} = G'_{\bar{x}}(1)$ zutreffen. Die zusammengesetzte Update-Funktion nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ verläuft damit unterhalb der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ und beide Update-Funktionen berühren sich nur an der Stelle $x = 1$. Da die Berührung an der Stelle $x = 1$ durch $\bar{x} > 1$ im streng konkaven Abschnitt der zusammengesetzten Update-Funktion erfolgt, gilt auch hier Satz 65 bezüglich der Eindeutigkeit der linearen Update-Funktion. Der Parameter $\hat{a}$ und somit die Steigung der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ ist umso größer, je höher die Konstante $\bar{x}$ der zusammengesetzten Update-Funktion nach (3.12) mit $\bar{x} > 1$ ausfällt.[171] Die umgekehrte Dominanz ist auch hier nur unter erheblichen Einschränkungen möglich und wird daher nicht herangezogen.[172]

In der Regel bedeutet Dominanz im Sinne von Definition 3, dass ein höherer Mittelzufluss bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ mit einem niedrigeren

[170] Für Dominanz im Sinne von Definition 3 müssen beim Vergleich nicht notwendig zwei Update-Funktionen nach Definition 1 vorliegen. Es kommt in erster Linie auf die Erfüllung der zwei Bedingungen in Definition 3 an. Vgl. beispielsweise Satz 59.

[171] Bei der zusammengesetzten Update-Funktion nach (3.12) ergibt sich $G'_{\bar{x}}(x) = 3 \cdot (x - \bar{x})^2 + 1$ für $x < \bar{x}$. Mit $\bar{x} > 1$ gilt somit $G'_{\bar{x}}(1) = 3 \cdot (1 - \bar{x})^2 + 1$. Für $\bar{x}_* > \bar{x} > 1$ trifft demnach $G'_{\bar{x}_*}(1) > G'_{\bar{x}}(1)$ zu, da $3 \cdot (1 - \bar{x}_*)^2 + 1 > 3 \cdot (1 - \bar{x})^2 + 1 \Leftrightarrow (1 - \bar{x}_*)^2 > (1 - \bar{x})^2$ hier wegen $\bar{x}_* > \bar{x} > 1$ gilt.

[172] Vgl. dazu auch die entsprechenden Ausführungen im Anschluss an den Beweis zu Satz 65.

Mittelabfluss bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ einhergeht.[173] Eine Update-Funktion $\hat{G}(x)$, welche eine Update-Funktion $G(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert, ist daher insbesondere aus Sicht der Arbitrageure von Vorteil, denn in der Regel sind bei der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Reaktionen auf positive relative Wertentwicklungen $x > 1$ heftiger und die Reaktionen auf negative relative Wertentwicklungen $x < 1$ entsprechend gemäßigter als bei der Update-Funktion $G(x)$.

Auf den Vergleich einer konkaven bzw. konvexen Update-Funktion mit einer zusammengesetzten Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$ im Hinblick auf eine Dominanz im Sinne von Definition 3 wird verzichtet, da dieser Vergleich wiederum von der konkreten Gestalt der konkaven bzw. konvexen Update-Funktion abhängig ist.

3.4 Fazit

Durch die beiden Anforderungen $G(1) = 1$ und $G'(x) \geq 1$ nach (3.1) werden die grundlegenden Eigenschaften der Update-Funktion sichergestellt. Trifft $G'(x) = 1$ für alle $x > 0$ zu, dann liegt nach Satz 23 die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ vor und die Investoren verhalten sich entsprechend passiv. Gilt $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$, dann erfolgt nach Satz 28 bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ ein Mittelzufluss und bei einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ ein Mittelabfluss.[174] Die Diskussion der beiden Anforderungen, welche für alle Update-Funktionen zutreffen müssen, steht hier jedoch nicht mehr im Vordergrund. Vielmehr stellt sich die Frage, ob eine lineare, eine konkave, eine konvexe oder gar eine zusammengesetzte Update-Funktion im Rahmen des Modells am besten geeignet ist.[175] Unterschiede zwischen diesen einzelnen Typen von Update-Funktionen bestehen dabei insbesondere beim Vergleich des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x = 1+\Delta x$ mit der entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$.[176]

Bei linearen Update-Funktionen entspricht nach Satz 32 die Reaktion auf eine positive relative Wertentwicklung betragsmäßig der Reaktion auf die vergleichbare negative

[173] Da nach Definition 3 prinzipiell $\hat{G}(x) = G(x)$ für $x > 1$ oder für $x < 1$ möglich ist, kann die Aussage aber auch nur für einen Teilbereich Gültigkeit besitzen. Vgl. beispielsweise Satz 59.

[174] Bei einer entsprechend negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ ist dann auch ein vollständiger Mittelabzug möglich.

[175] Die nicht stückweise definierten Update-Funktionen lassen sich dabei insbesondere anhand ihrer zweiten Ableitung unterscheiden.

[176] Vgl. Abschnitt 3.1.3.

relative Wertentwicklung, solange die Bedingung $G(x) \geq 0$ erfüllt ist.[177] Der Vorteil einer linearen Update-Funktion besteht darin, dass positive und negative relative Wertentwicklungen bezogen auf den Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss betragsmäßig gleich behandelt werden und somit weder eine positive noch eine negative relative Wertentwicklung bevorteilt wird. Außerdem sind lineare Update-Funktionen relativ einfach zu handhaben und bieten gewisse Vorteile bei den weiteren Berechnungen.[178]

Bei streng konkaven Update-Funktionen fällt nach Satz 33 der Mittelzufluss für eine positive relative Wertentwicklung kleiner aus als der betragsmäßige Mittelabfluss für die entsprechende negative relative Wertentwicklung, solange $G(x) \geq 0$ zutrifft. Eine negative relative Wertentwicklung wird hier durch Mittelabfluss betragsmäßig stärker bestraft als eine vergleichbare positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss belohnt wird. Weiterhin führt eine konkave Update-Funktion auch dazu, dass tendenziell der Mittelabfluss im Bereich einer negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ mit fallendem x betragsmäßig relativ stark zunimmt. Die Situation der Arbitrageure wird somit durch eine streng konkave Update-Funktion der Investoren letztendlich noch verschärft.[179]

Im Gegensatz dazu bewirkt eine streng konvexe Update-Funktion, dass eine positive relative Wertentwicklung durch einen entsprechenden Mittelzufluss betragsmäßig stärker belohnt als eine vergleichbare negative relative Wertentwicklung durch Mittelabfluss bestraft wird.[180] Eine derartige Update-Funktion der Investoren kommt den Arbitrageuren entgegen, da im direkten Vergleich negative relative Wertentwicklungen weniger hart bestraft werden. Weiterhin führt eine streng konvexe Update-Funktion dazu, dass tendenziell der Mittelzufluss im Bereich einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ mit steigendem x relativ stark zunimmt. Dies könnten auch die Hauptgründe dafür sein, warum Shleifer/Vishny (1997) konvexe Update-Funktionen durch die dritte Anforderung $G''(x) \leq 0$ ausgeschlossen haben.[181] Die Relation zwi-

[177] Das bedeutet, bei den entsprechenden Vergleichen muss insbesondere für die negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ die Bedingung $G(1 - \Delta x) \geq 0$ zutreffen. Für $G(x) \leq 0$ erfolgt der vollständige Mittelabzug.

[178] Die Gleichungen (2.48) und (2.57) lassen sich dann relativ einfach nach p_{21} bzw. nach $p_{21}^{(\beta)}$ auflösen. Bei nicht-linearen Update-Funktionen ist ein allgemeines Auflösen dieser Gleichungen nach dem Preis im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 unter Umständen gar nicht möglich.

[179] Um der Möglichkeit des kompletten Mittelabzugs mehr Gewicht zu geben, scheint die Forderung von Shleifer/Vishny (1997) nach einer konkaven bzw. höchstens linearen Update-Funktion durch $G''(x) \leq 0$ sinnvoll zu sein.

[180] Vgl. Satz 31.

[181] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 40. Eine direkte Begründung zum Ausschluss konvexer Update-Funktionen geben Shleifer/Vishny (1997) jedoch nicht an.

schen Mittelzufluss und Mittelabfluss trifft bei streng konvexen Update-Funktionen für den gesamten Definitionsbereich $x > 0$ zu und nicht nur für $G(x) \geq 0$.

Die Vergleiche hinsichtlich des Mittelzuflusses und des Mittelabflusses gestalten sich bei linearen und streng konkaven Update-Funktionen im Fall $G(x) < 0$ etwas komplizierter.[182] Während bei linearen Update-Funktionen der Mittelabfluss nun wie bei streng konvexen Update-Funktionen betragsmäßig geringer ausfällt als der Mittelzufluss bei der vergleichbaren positiven relativen Wertentwicklung, muss bei streng konkaven Update-Funktionen sogar noch zwischen weiteren Fällen in diesem Bereich unterschieden werden.[183] Letztendlich kann dieses Verhalten jedoch mit Hilfe der Ausführungen zu Satz 35 relativ einfach erklärt werden: Für $G(x) < 0$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug in Form des aktuellen Wertes von F_1 im Zeitpunkt $t = 2$, welcher sich als $F_1 x$ ergibt. Dieser Wert nimmt mit fallendem x bzw. mit steigendem Δx betragsmäßig ab, und zwar unabhängig davon, welche Art von Update-Funktion vorliegt. Bei konvexen Update-Funktionen spielt dies nur deshalb eine untergeordnete Rolle, da dort bereits im Bereich $G(x) \geq 0$ der Mittelzufluss betragsmäßig höher ausfällt als der entsprechende Mittelabfluss. Im Rahmen der weiteren Betrachtung ist jedoch der Bereich $G(x) < 0$ nur noch von geringer Bedeutung, da es im Fall des vollständigen Mittelabzugs aus Sicht der Arbitrageure letztendlich keine Rolle mehr spielt, welchen Wert die relative Wertentwicklung x in diesem Bereich genau annimmt.[184] Insofern sprechen auch die Fallunterscheidungen bei einer streng konkaven Update-Funktion im Bereich $G(x) < 0$ nicht gegen die Wahl einer derartigen Update-Funktion und für die Wahl einer konvexen Update-Funktion.

Interessanter im Hinblick auf die Auswahl einer konkreten Update-Funktion ist somit der Bereich $G(x) \geq 0$. Dabei ist dann insbesondere von Bedeutung, ab welcher negativen relativen Wertentwicklung ein vollständiger Mittelabzug erfolgt.[185] Es können jedoch diesbezüglich keine allgemeinen Aussagen dergestalt getroffen werden, dass beispielsweise eine streng konkave Update-Funktion früher zu einem vollständigen Mittelabzug führt als eine lineare Update-Funktion.[186] Dies kann wie folgt begründet werden: Die streng konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) besitzt die Null-

[182] Der Fall $G(x) < 0$ bezieht sich hier natürlich nur auf die negative relative Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x$ mit $G(1 - \Delta x) < 0$. Für die entsprechende positive relative Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x$ gilt natürlich weiterhin $G(1 + \Delta x) > 0$.

[183] Vgl. Satz 36.

[184] Aus $G(x) < 0$ folgt immer $F_2 = 0$ nach (2.24).

[185] Damit ist die Nullstelle x_0 mit $G(x_0) = 0$ gemeint.

[186] Mit „früher“ ist hier gemeint, dass die Nullstelle der konkaven Update-Funktion größer ist als die Nullstelle der linearen Update-Funktion.

stelle $x_0 = 0,342274$.[187] Eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 mit $a = 1,520390$ besitzt ebenfalls an dieser Stelle ihre Nullstelle.[188] Dementsprechend ist die Nullstelle der linearen Update-Funktion für $a > 1,520390$ größer und für $a < 1,520390$ kleiner als die Nullstelle der konkaven Update-Funktion. Analog kann auch beim Vergleich streng konkaver und streng konvexer Update-Funktionen hinsichtlich der Nullstellen argumentiert werden.[189] Eine pauschale Differenzierung anhand des Typs der Update-Funktion in Verbindung mit der Größe der Nullstelle ist demnach hier nicht möglich. Es kommt dabei immer auf die konkrete Gestalt der Update-Funktion an.

Liegt allerdings eine Dominanz im Sinne von Definition 2 oder im Sinne von Definition 3 vor, dann kann jedoch zwischen zwei Update-Funktionen unterschieden werden. Neben den entsprechenden Verhaltensweisen bezüglich des Mittelzuflusses und des Mittelabflusses spiegelt eine Dominanz in Abschnitt 3.3 auch immer eine Rangfolge hinsichtlich der Nullstellen wieder. Insbesondere lineare Update-Funktionen eignen sich dabei als Vergleichsbasis zu streng konkaven bzw. streng konvexen Update-Funktionen, da sie durch die Wahl eines entsprechenden Parameters a relativ leicht angepasst werden können.

Letztendlich kann an dieser Stelle aber noch keine Entscheidung darüber getroffen werden, ob im Rahmen des Modells eine lineare, eine konkave, eine konvexe oder eine zusammengesetzte Update-Funktion am besten geeignet ist. Dazu muss die Zielfunktion im Rahmen des nachfolgenden Kapitels noch genauer analysiert werden.

[187] Vgl. Fußnote 33, Kapitel 3, S. 76.

[188] Es gilt $0,342274a + 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1,520390$.

[189] Die andere streng konkave Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) besitzt die Nullstelle $x_0 = 0,567143$. Die streng konvexe Update-Funktion $G(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) hat die Nullstelle $x_0 = 0,541325$, welche somit genau zwischen den Nullstellen der beiden konkaven Update-Funktionen $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ und $G(x) = x + ln(x)$ liegt. Zur Berechnung der Nullstellen vgl. Fußnote 33, Kapitel 3, S. 76 sowie Fußnote 38, Kapitel 3, S. 79.

Kapitel 4

Entscheidungsmodelle

Die Zielfunktion der Arbitrageure, welche bereits in Abschnitt 2.4.3 näher erörtert wurde, bildet die Grundlage der hier vorgestellten Entscheidungsmodelle. Die Entlohnung der Arbitrageure erfolgt prozentual vom erzielten Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$. Die Arbitrageure sind daher bestrebt, den Erwartungswert μ im Modell mit einer Entscheidungsvariable über D_1 bzw. den Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen über $D_1^{(\beta)}$ und β zu maximieren.[1] Diese Maximierung gestaltet sich allerdings umso komplizierter, je mehr Arbitrageure in dem speziellen Marktsegment agieren:

Angenommen, im Modell mit einer Entscheidungsvariable ist es aus Sicht der Arbitrageure optimal, insgesamt den Betrag D_1^{opt} zu investieren.[2] Dann stellt sich die Frage, wie sich dieser Betrag genau zusammensetzt. Agieren beispielsweise zwei Arbitrageure in dem speziellen Marktsegment, dann ist es möglich, dass beide jeweils die Hälfte von D_1^{opt} investieren. Genauso kann es aber auch sein, dass ein Arbitrageur den Betrag D_1^{opt} komplett alleine investiert und der andere Arbitrageur nichts investiert.[3] Andere Aufteilungen des optimalen Investitionsbetrages D_1^{opt} auf die Arbitrageure sind aber ebenso vorstellbar: Wird mit F_1 in diesem Zusammenhang der Betrag bezeichnet, welcher den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 1$ von allen Investoren insgesamt zur Verfügung gestellt wird, dann ist hier auch ein anteiliges Investment dergestalt denkbar, dass jeder Arbitrageur einen Betrag investiert, welcher dem ihm zur Verfügung gestellten Betrag

[1] Vgl. Gleichung (2.40) in Abschnitt 2.4.3.1 bzw. Gleichung (2.53) in Abschnitt 2.4.3.2.

[2] D_1^{opt} bezeichnet die optimale Lösung im Sinne der Zielfunktion (2.40). Die nachfolgenden Aussagen lassen sich auch auf das Modell mit zwei Entscheidungsvariablen übertragen.

[3] Vorausgesetzt, D_1^{opt} ist maximal so groß wie der Betrag, der dem entsprechenden Arbitrageur von den Investoren zur Verfügung gestellt wird.

multipliziert mit D_1^{opt}/F_1 entspricht. Eine derartige Aufteilung bietet sich an, wenn mehr als zwei Arbitrageure in dem speziellen Marktsegment agieren. Die Relevanz der Aufteilung des Betrages D_1^{opt} auf die Arbitrageure wird insbesondere dann deutlich, wenn die Investorenseite hinzugezogen wird:

Unter der Annahme, dass die Anzahl der Investoren mit der Anzahl der Arbitrageure übereinstimmt und jeder Investor genau einem Arbitrageur zugeordnet ist, muss die Aufteilung des Betrages D_1^{opt} auf die Arbitrageure besonders dann bekannt sein, wenn die Investoren unterschiedliche Update-Funktionen besitzen. In diesem Fall steht auch der optimale Betrag D_1^{opt} in seiner Gesamthöhe in direktem Zusammenhang mit der konkreten Aufteilung. Beispielsweise bedeutet bei zwei Arbitrageuren und zwei Investoren mit unterschiedlichen Update-Funktionen eine Erhöhung des investierten Betrages des einen Arbitrageurs um ΔD_1 und eine gleichzeitige Reduzierung des investierten Betrages des anderen Arbitrageurs um ΔD_1 nicht zwangsläufig, dass der zuvor optimale Betrag D_1^{opt} nun immer noch optimal ist. Da der jeweils investierte Betrag einen direkten Einfluss auf die jeweilige relative Wertentwicklung besitzt, verändern sich über die unterschiedlichen Update-Funktionen auch die jeweils im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Beträge.[4] Der dann insgesamt im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag variiert somit mit der Aufteilung des Betrages D_1^{opt} auf die Arbitrageure. Nach (2.40) bzw. (2.53) fließt der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag jedoch auch in die Zielfunktion ein.[5] Ein Änderung der optimalen Lösung D_1^{opt} ist demnach höchstwahrscheinlich.

Stimmen die Update-Funktionen der Investoren überein, dann ist unter Umständen die Aufteilung des Betrages D_1^{opt} auf die Arbitrageure ebenfalls nicht irrelevant: Angenommen, einer der zwei Arbitrageure investiert den Betrag D_1^{opt} komplett alleine. Resultiert daraus eine relative Wertentwicklung, für die $G(x) < 0$ zutrifft, dann erfolgt nach (2.24) für diesen Arbitrageur der vollständige Mittelabzug.[6] Da der andere Arbitrageur jedoch nichts investiert hat, steht diesem wiederum im Zeitpunkt $t = 2$ der gleiche Betrag wie im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung. Insgesamt gesehen erfolgt somit kein vollständiger Mittelabzug, da nur ein Arbitrageur investiert hat. Bekommen die zwei Arbitrageure von ihren Investoren unterschiedlich hohe Beträge im Zeitpunkt

[4] Vgl. insbesondere (2.23) und (2.24).

[5] Zusätzlich besteht über Gleichung (2.15) ein Einfluss auf den Preis im Zeitpunkt $t = 2$.

[6] Auch wenn $D_1^{opt} > 0$ im Zustand Z_1 zu einem vollständigen Mittelabzug führt, kann ein derartiges Investment optimal sein, wenn der Zustand Z_2 eine entsprechend hohe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt (vgl. beispielsweise Abschnitt 4.1.4.3).

$t = 1$ zur Verfügung gestellt, dann verändert sich bereits die Lösung, wenn der Arbitrageur, der zuvor nichts investiert hat, nun den Betrag D_1^{opt} komplett alleine investiert. Agieren mehr als zwei Arbitrageure in dem speziellen Marktsegment, lässt sich auf diese Weise ein relativ hoher Anteil des insgesamt zur Verfügung gestellten Betrages F_1 in den Zeitpunkt $t = 2$ übertragen, da nur für einen Investor der vollständige Mittelabzug erfolgt. Entsprechend spielt hier im Fall des vollständigen Mittelabzugs auch die Gesamtanzahl der Arbitrageure eine entscheidende Rolle.

Eine größere Anzahl von Arbitrageuren und mehrere Investoren mit unterschiedlichen Update-Funktionen erschweren somit das Finden einer optimalen Lösung, da bei der Bestimmung von D_1^{opt} zusätzlich noch die Aufteilung von D_1^{opt} auf die Arbitrageure berücksichtigt werden muss. In den nachfolgend aufgeführten Entscheidungsmodellen wird daher vorausgesetzt, dass nur genau ein Arbitrageur in dem speziellen Marktsegment agiert, welcher von genau einem Investor Mittel zur Verfügung gestellt bekommt.[7] Die genaue Anzahl der Noise trader ist dabei unerheblich, da die Noise trader shocks im Modell exogen vorgegeben sind und somit insbesondere auch keine Abhängigkeit von den Entscheidungsvariablen besteht. Damit der Arbitrageur im Sinne der jeweiligen Zielfunktion eine optimale Entscheidung treffen kann, müssen noch weitere Annahmen getroffen werden:

Neben dem Grundwert V des Vermögensgegenstandes sind dem Arbitrageur sowohl der Noise trader shock S_1 im Zeitpunkt $t = 1$ als auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $\widetilde{S}_2$ im Zeitpunkt $t = 2$ bekannt. Zusätzlich besitzt der Arbitrageur Kenntnis von der Gestalt sämtlicher Nachfragefunktionen der Noise trader, wodurch ihm auch die Preisgleichungen in allen drei Zeitpunkten ersichtlich sind. Die Update-Funktion G des Investors ist dem Arbitrageur ebenfalls bekannt. Ausgehend von dem Betrag F_1, welcher dem Arbitrageur seitens des Investors im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellt wird, kann der Arbitrageur nun unter Berücksichtigung der Update-Funktion G des Investors eine optimale Entscheidung treffen.

Shleifer/Vishny (1997) entscheiden sich bei ihren Beispielen für eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 und somit für den Fall $G''(x) = 0$. Im nachfolgenden Abschnitt 4.1 erfolgt daher zunächst eine ausführliche Besprechung des Modells mit einer Entscheidungsvariable unter Berücksichtigung einer linearen Update-Funktion. In Abschnitt 4.2 wird anhand eines Beispiels untersucht, welchen Einfluss nicht-lineare

[7] Entscheidungsmodelle mit mehr als einem Arbitrageur und mit mehreren Investoren werden in dieser Arbeit nicht mehr konkret behandelt, sondern nur im Rahmen von Kapitel 5 als Erweiterungsmöglichkeit kurz aufgezeigt.

Update-Funktionen auf die optimale Entscheidung besitzen. Der letzte Abschnitt 4.3 befasst sich mit dem Modell mit zwei Entscheidungsvariablen unter Verwendung einer linearen Update-Funktion.

4.1 Eine Entscheidungsvariable und lineare Update-Funktionen

Dem Entscheidungsmodell in diesem Abschnitt liegt die Zielfunktion nach (2.40) zugrunde und es wird eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 verwendet. Mit der linearen Update-Funktion, welche somit die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ besitzt, berechnet sich $G(x)$ mit $x = x_{Z_1}$ nach Gleichung (2.41) wie folgt:

$$G(x_{Z_1}) = a \cdot \left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right) + 1 - a = 1 + \frac{aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}. \tag{4.1}$$

Der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellte Betrag F_{21} nach Gleichung (2.24) ergibt sich dann im Fall $G(x_{Z_1}) > 0$ und unter Verwendung von Gleichung (4.1) als

$$F_{21} = F_1 \cdot G(x_{Z_1}) = F_1 \cdot \left(1 + \frac{aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right) = F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right). \tag{4.2}$$

Gilt $G(x_{Z_1}) \leq 0$, dann trifft nach Gleichung (2.24) in Verbindung mit $F_1 > 0$ nach (2.2) entsprechend $F_{21} = 0$ zu. Gleichung (4.2) verdeutlicht, dass ein Betrag $F_{21} > F_1$ nur zur Verfügung gestellt wird, wenn ein Betrag $D_1 > 0$ seitens des Arbitrageurs investiert wird und $p_{21} > p_1$ zutrifft. Analog zum Zustand Z_1 bzw. zu Gleichung (4.1) berechnet sich $G(x)$ mit $x = x_{Z_2}$ nach Gleichung (2.42) wie folgt:[8]

$$G(x_{Z_2}) = a \cdot \left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right) + 1 - a = 1 + \frac{aD_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)}{F_1}. \tag{4.3}$$

[8]Für den Preis $p_{22} = V - S_{22} + D_{22}$ nach (2.15) im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_2 trifft mit $S_{22} = 0$ und $D_{22} = 0$ immer $p_{22} = V$ zu. Zustand Z_2 bedeutet praktisch eine Vorverlagerung des Zeitpunktes $t = 3$. Vgl. dazu insbesondere Abschnitt 2.4.2 und Abschnitt 2.4.3.

Der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_2 zur Verfügung gestellte Betrag F_{22} nach Gleichung (2.24) ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (4.3) somit als

$$F_{22} = F_1 \cdot G(x_{Z_2}) = F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right). \tag{4.4}$$

Wird ein Betrag $D_1 > 0$ seitens des Arbitrageurs investiert, dann trifft $F_{22} > F_1$ zu, da $p_1 < V$ nach (2.10) gilt. Der Parameter $a > 1$ kann sowohl in Gleichung (4.2) als auch in Gleichung (4.4) als Hebel aufgefasst werden und bei beiden Gleichungen gilt für $D_1 = 0$ entsprechend $F_{21} = F_1$ bzw. $F_{22} = F_1$. Durch Einsetzen von $F_1 \cdot G(x_{Z_1})$ nach Gleichung (4.2) und von $F_1 \cdot G(x_{Z_2})$ nach Gleichung (4.4) in Gleichung (2.43) ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) nun die folgende Gleichung:

$$\mu = q \cdot \max\left[F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right), 0\right] \cdot \frac{V}{p_{21}} + (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)\right). \tag{4.5}$$

Gleichung (4.5) bildet die Grundlage der nachfolgenden Untersuchungen. Der Preis $p_1 = V - S_1 + D_1$ nach (2.5) im Zeitpunkt $t = 1$ ist dabei unkritisch, da durch $F_1 < S_1$ nach (2.7) und durch $S_1 < V$ nach (2.8) gewährleistet ist, dass für den Preis p_1 die Relation $0 < p_1 < V$ nach (2.10) zutrifft.[9] Im Fall $D_1 = 0$ ergibt sich $p_1 = V - S_1$, so dass als untere Grenze für den Preis hier entsprechend $p_1 \geq V - S_1 > 0$ nach (2.11) greift.

Die Analyse des Preises p_{21} gestaltet sich jedoch etwas schwieriger, da der Preis p_{21} nach Gleichung (2.48) einerseits von sich selbst abhängt und andererseits, bedingt durch die Maximum-Funktion in (2.48), immer die Bedingung $p_{21} \geq V - S_{21}$ erfüllen muss. Für eine lineare Update-Funktion G stimmt die Maximum-Funktion in (2.48) mit der Maximum-Funktion in (4.5) überein. Die Maximum-Funktion repräsentiert in beiden Fällen jedoch nichts anderes als den Betrag F_{21} nach Gleichung (2.24). Das bedeutet, erfüllt der Preis p_{21} für jedes Investment D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ die Bedingung $p_{21} > V - S_{21}$, dann folgt daraus gleichzeitig auch $F_{21} > 0$ und der vollständige Mittelabzug ist ausgeschlossen.[10] Entsprechend ist ein Preis $p_{21} = V - S_{21}$ gleichbedeutend mit $F_{21} = 0$.

[9] Für die Entscheidungsvariable D_1 gilt $0 \leq D_1 \leq F_1$.

[10] In diesem Fall kann die Maximum-Funktion in (4.5) vernachlässigt werden, denn es trifft auch $G(x_{Z_1}) > 0$ zu.

Anhand des Preises p_{21} kann somit festgestellt werden, ob ein vollständiger Mittelabzug für D_1 im zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ auftreten kann. Im ersten Unterabschnitt 4.1.1 werden zunächst Parameterkonstellationen betrachtet, bei denen ein vollständiger Mittelabzug ausgeschlossen ist. In Abschnitt 4.1.2 erfolgt dann der Einbezug der Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs. Die optimale Lösung D_1^{opt} wird in Abschnitt 4.1.3 durch eine zustandsbezogene Betrachtungsweise näher erörtert, bevor abschließend in Abschnitt 4.1.4 ausführlich konkrete Zahlenbeispiele zum Modell mit einer Entscheidungsvariable in Verbindung mit einer linearen Update-Funktion G nach Satz 20 behandelt werden.

4.1.1 Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs

Damit im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist, muss $G(x_{Z_1}) > 0$ für jedes Investment D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ zutreffen. Daraus folgt dann unmittelbar $F_{21} > 0$ und für den Preis p_{21} nach (2.47) gilt somit $p_{21} = V - S_{21} + F_{21} > V - S_{21}$. Gleichung (4.2) eingesetzt in Gleichung (2.47) ergibt

$$\begin{aligned} p_{21} &= V - S_{21} + F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \quad p_{21} &= \frac{p_1 \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)}{p_1 - aD_1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Der Preis p_{21} hängt von sich selbst ab.[11] Unter Verwendung einer linearen Update-Funktion lässt sich die Gleichung für den Preis p_{21} jedoch so umstellen, dass p_{21} nur noch auf der linken Seite der Gleichung steht. Da D_1 die einzige Entscheidungsvariable ist und alle anderen Parameter auf der rechten Seite von Gleichung (4.6) feststehen, variiert der Preis p_{21} nur noch mit der Wahl von D_1. Allerdings hat D_1 auch einen Einfluss auf den Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$, da $p_1 = V - S_1 + D_1$ nach (2.5) gilt. Daher muss bei der Analyse von Gleichung (4.6) auch die Veränderung von p_1 berücksichtigt werden. Mit $p_1 = V - S_1 + D_1$ lässt sich Gleichung (4.6) auch schreiben als

$$p_{21} = (V - S_1 + D_1) \cdot \frac{V - S_{21} + F_1 - aD_1}{V - S_1 + D_1 - aD_1}. \tag{4.7}$$

[11] Dies resultiert insbesondere daraus, dass der Betrag F_{21} nach (4.2) im Fall $G(x_{Z_1}) > 0$ vom Preis p_{21} abhängt und F_{21} wiederum in den Preis p_{21} einfließt. Vgl. auch Gleichung (2.48) und die sich daran anschließenden Ausführungen.

Bei einem höheren Investment D_1 seitens des Arbitrageurs nimmt einerseits der Preis $p_1 = V - S_1 + D_1$ zu, andererseits erhöht sich aber auch das sowohl im Zähler als auch im Nenner subtrahierte Produkt aD_1. Da $a > 1$ gilt, wächst das Produkt aD_1 mit steigendem D_1 schneller an als der Preis p_1. Die Differenz $p_1 - aD_1$ im Nenner wird demnach umso kleiner, je höher D_1 gewählt wird und somit minimal für $D_1 = F_1$. Um einen negativen Nenner zu vermeiden, ist es daher sinnvoll, $aF_1 < p_1$ bzw. genauer $aF_1 < V - S_1 + F_1$ zu fordern. Aufgelöst nach dem Parameter a ergibt sich dadurch die Bedingung

$$a < 1 + \frac{V - S_1}{F_1}. \tag{4.8}$$

Shleifer/Vishny (1997) bezeichnen diese Bedingung in ihrem Artikel als „einfache Stabilitätsbedingung“.[12] Diese Bedingung soll nach Shleifer/Vishny (1997) den vollständigen Mittelabzug seitens der Investoren bzw. seitens des Investors verhindern. Das bedeutet, ist Bedingung (4.8) erfüllt, dann sollte es modelltechnisch nicht möglich sein, dass sämtliche Mittel im Zeitpunkt $t = 2$ abgezogen werden; der Fall $F_{21} = 0$ dürfte somit für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ nicht auftreten.

Dem ist jedoch nicht so: Auch bei Gültigkeit von Bedingung (4.8) kann der vollständige Mittelabzug nicht in allen Fällen verhindert werden.[13] Die von Shleifer/Vishny (1997) postulierte Stabilitätsbedingung ist demnach hier nicht ausreichend. Dies kann wie folgt begründet werden:

Mit der Bedingung (4.8) wollten Shleifer/Vishny (1997) offensichtlich erreichen, dass sich im Zustand Z_1 ein positiver Preis p_{21} ergibt. Trifft $aF_1 > p_1$ zu, dann bekommt der Nenner ein negatives Vorzeichen. Weiterhin wird durch die strikte Ungleichung die Definitionslücke $aF_1 = p_1$ ausgeschlossen. Allerdings haben Shleifer/Vishny (1997) dabei die folgenden zwei Umstände außer Acht gelassen, welche im Folgenden kurz erläutert werden. Gleichung (4.7) lässt sich für $D_1 = F_1$ schreiben als

$$p_{21} = (V - S_1 + F_1) \cdot \frac{V - S_{21} + F_1 - aF_1}{V - S_1 + F_1 - aF_1}. \tag{4.9}$$

[12] Engl. „simple stability condition“. Shleifer/Vishny (1997) schreiben diese Bedingung als $aF_1 < p_1$. Um jedoch noch deutlicher auf $D_1 = F_1$ bzw. $p_1 = V - S_1 + F_1$ hinzuweisen, wurde in (4.8) die ausführlichere Form von p_1 verwendet. Wird im Nenner von Gleichung (4.6) der Preis p_1 ausgeklammert und gekürzt, dann ergibt sich für $D_1 = F_1$ Gleichung (9) in Shleifer/Vishny (1997), S. 46.

[13] Vgl. dazu die nachfolgenden Ausführungen. Ein Gegenbeispiel findet sich in Abschnitt 4.1.4.2.

Der Zähler und der Nenner unterscheiden sich beim zweiten Faktor von Gleichung (4.9) nur durch den Noise trader shock S_{21} bzw. S_1. Beide Größen werden jeweils subtrahiert. Nach (2.38) gilt jedoch $S_{21} > S_1$ im Zustand Z_1. Das bedeutet, der Zähler ist in diesem Fall kleiner als der Nenner.[14] Demnach ist es im Fall $D_1 = F_1$ möglich, dass der Zähler bereits negativ ist, obwohl der Nenner noch positiv und Bedingung (4.8) somit erfüllt ist.[15] Entscheidend ist hierbei, wie groß S_{21} im Vergleich zu S_1 ausfällt. Je größer die Differenz $S_{21} - S_1$ ist, umso wahrscheinlicher ist ein negativer Zähler. Ist der Zähler negativ, dann ist auch der Preis p_{21} trotz erfüllter Bedingung (4.8) negativ.

Weiterhin wollten Shleifer/Vishny (1997) mit ihrer Bedingung lediglich absichern, dass $p_{21} > 0$ zutrifft. Diese einfache Einschränkung des Preises p_{21} auf positive Werte reicht jedoch nicht aus. Nach (2.21) besitzt der Preis p_{21} ein Infimum in Höhe von $V - S_{21}$.[16] Das bedeutet, ein Preis p_{21} im Bereich $0 < p_{21} < V - S_{21}$ ist zwar allgemein nach Gleichung (4.6) möglich und wird auch nicht durch Bedingung (4.8) verhindert, dürfte aber im Rahmen des Modells nicht auftreten, denn aus $p_{21} < V - S_{21}$ folgt direkt $D_{21} < 0$.[17] Entsprechend gilt mit $D_{21} = F_{21}$ dann auch $F_{21} < 0$. Ein negativer zur Verfügung gestellter Betrag ist jedoch nach Gleichung (2.24) ausgeschlossen.

Um für alle zulässigen Werte von D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ zunächst einen Preis $p_{21} \leq 0$ zu vermeiden, ist es notwendig, Bedingung (4.8) entsprechend anzupassen. Durch $S_{21} > S_1$ nach (2.38) ist der Zähler beim zweiten Faktor von Gleichung (4.7) im Fall $D_1 = F_1$ letztendlich kleiner als der Nenner.[18] Daher muss die Bedingung hier auf den Zähler abzielen und nicht auf den Nenner. Nach Gleichung (4.9) ist der Zähler minimal für $D_1 = F_1$. Dementsprechend muss $V - S_{21} + F_1 - aF_1 > 0$ gefordert werden. Daraus resultiert dann die folgende angepasste Stabilitätsbedingung:

$$a < 1 + \frac{V - S_{21}}{F_1}. \tag{4.10}$$

Mit $S_{21} > S_1$ folgt direkt, dass Bedingung (4.10) den Parameter a stärker einschränkt als dies durch Bedingung (4.8) der Fall ist.[19] Bedingung (4.10) verhindert jedoch immer

[14]Es muss gelten: $V - S_{21} + F_1 - aF_1 < V - S_1 + F_1 - aF_1 \Leftrightarrow -S_{21} < -S_1 \Leftrightarrow S_{21} > S_1$.

[15]Vgl. dazu auch Abschnitt 4.1.2.1, insbesondere die Abbildungen 4.1, 4.3 und 4.5.

[16]Shleifer/Vishny (1997) nennen dieses Infimum auch im Zusammenhang mit ihrer Stabilitätsbedingung, implementieren dieses aber letztendlich nicht richtig in ihrer Bedingung (vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 46).

[17]Es gilt $p_{21} = V - S_{21} + D_{21}$ nach Gleichung (2.15). Damit folgt $V - S_{21} + D_{21} < V - S_{21} \Leftrightarrow D_{21} < 0$.

[18]Vgl. auch Gleichung (4.9). Für das Größenverhältnis zwischen Zähler und Nenner für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < F_1$ vgl. insbesondere Abschnitt 4.1.2.

[19]Es gilt $1 + \frac{V - S_{21}}{F_1} < 1 + \frac{V - S_1}{F_1} \Leftrightarrow -S_{21} < -S_1 \Leftrightarrow S_{21} > S_1$.

noch nicht unzulässige Preise p_{21} im Bereich $0 < p_{21} < V - S_{21}$. Um immer einen Preis $p_{21} > V - S_{21}$ zu erzielen, ist eine weitere Einschränkung des Parameters a nötig.[20] Für p_{21} in Gleichung (4.6) muss entsprechend gelten:[21]

$$\begin{aligned}
\frac{p_1 \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)}{p_1 - aD_1} &> V - S_{21} && (4.11)\\
\Leftrightarrow \quad p_1V - p_1S_{21} + p_1F_1 - p_1aD_1 &> p_1V - aD_1V - p_1S_{21} + aD_1S_{21}\\
\Leftrightarrow \quad aD_1S_{21} - aD_1V + p_1aD_1 &< p_1F_1\\
\Leftrightarrow \quad aD_1 \cdot (S_{21} - S_1 + D_1) &< p_1F_1. && (4.12)
\end{aligned}$$

Bei der ersten Äquivalenzumformung wird durch $p_1 - aD_1 > 0$ ein positiver Nenner bzw. die Gültigkeit von Bedingung (4.8) vorausgesetzt. Ist der Nenner in (4.11) positiv, dann muss auch der Zähler positiv sein, da sonst wegen $S_{21} < V$ nach (2.18) die Bedingung (4.11) nicht erfüllt sein kann. Folglich muss auch Bedingung (4.10) hier Gültigkeit besitzen. In der letzten Umformung wird der Preis p_1 auf der linken Seite durch $V - S_1 + D_1$ ersetzt und im letzten Schritt aD_1 ausgeklammert. Mit $S_{21} > S_1$ nach (2.38) folgt, dass der Ausdruck $S_{21} - S_1 + D_1$ positiv ist und eine Division durch denselben das Relationszeichen nicht umkehrt. Eine Division durch D_1 ist nur für $D_1 > 0$ zulässig.[22] Aufgelöst nach dem Parameter a ergibt sich somit die folgende Bedingung:

$$a < \frac{p_1F_1}{D_1 \cdot (S_{21} - S_1 + D_1)} = \frac{F_1D_1 + F_1 \cdot (V - S_1)}{D_1^2 + D_1 \cdot (S_{21} - S_1)}. \tag{4.13}$$

Bei Betrachtung des ganz rechten Terms von Bedingung (4.13) fällt auf, dass dieser für $D_1 > 0$ ausschließlich aus positiven Faktoren und Summanden besteht. Das bedeutet, sowohl Zähler als auch Nenner nehmen mit steigendem $D_1 > 0$ betragsmäßig zu. Ob

[20] Der Gleichheitsfall $p_{21} = V - S_{21}$ wird hier nicht eingeschlossen, da in diesem $F_{21} = 0$ gilt und somit ein vollständiger Mittelabzug erfolgt.

[21] Nach Gleichung (2.47) gilt $p_{21} = V - S_{21} + F_{21}$. Die Bedingung $p_{21} > V - S_{21}$ ist demnach äquivalent zu $F_{21} > 0$. Entsprechend kann hier auch $F_{21} > 0$ mit F_{21} nach Gleichung (4.2) benutzt werden, wobei p_{21} in Gleichung (4.2) durch Gleichung (4.6) zu ersetzen ist. Ebenso ist bei einer linearen Update-Funktion ein Auflösen der Bedingung $x_{Z_1} > 1 - \frac{1}{a}$ nach (3.3) in Verbindung mit x_{Z_1} nach (2.41) möglich.

[22] Im Fall $D_1 = 0$ muss nach (4.12) entsprechend $0 < p_1F_1$ gelten. Nach Satz 12 ist p_1 positiv, so dass die Bedingung für $D_1 = 0$ immer erfüllt ist. Nach Satz 15 gilt in diesem Fall $x = 1$ und mit $G(1) = 1$ nach (3.1) folgt $F_{21} = F_1 > 0$. Der Zähler und der Nenner in (4.11) sind im Fall $D_1 = 0$ immer positiv, so dass auch hier kein Widerspruch hinsichtlich der Voraussetzungen vorliegt. Der Fall $D_1 = 0$ kann daher im Rahmen der weiteren Analyse vernachlässigt werden.

der Term insgesamt auch mit steigendem D_1 betragsmäßig kleiner wird, lässt sich mit Hilfe der Ableitung nach D_1 überprüfen. Es gilt:

$$\frac{d\left(\frac{F_1 D_1+F_1\cdot(V-S_1)}{D_1^2+D_1\cdot(S_{21}-S_1)}\right)}{d\,D_1}=-F_1\cdot\frac{D_1^2+2D_1\cdot(V-S_1)+(S_{21}-S_1)\cdot(V-S_1)}{D_1^2\cdot(S_{21}-S_1+D_1)^2}. \tag{4.14}$$

Sämtliche Faktoren und Summanden des Zählers und des Nenners von (4.14) sind für $D_1>0$ positiv. Da der gesamte Bruch jedoch mit dem Faktor $-F_1$ multipliziert wird, ist die Ableitung für alle $D_1>0$ negativ. Das bedeutet, mit steigendem $D_1>0$ nimmt der Ausdruck rechts vom Relationszeichen in (4.13) kontinuierlich ab. Somit wird dieser Ausdruck für D_1 im Bereich $0<D_1\le F_1$ minimal für $D_1=F_1$. Wird D_1 durch F_1 in (4.13) ersetzt und der Ausdruck entsprechend umgeformt, ergibt sich als Stabilitätsbedingung letztendlich:[23]

$$a<1+\frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}. \tag{4.15}$$

Mit $S_{21}>S_1$ nach (2.38) folgt auch hier direkt, dass die Stabilitätsbedingung (4.15) den Parameter a noch stärker einschränkt als die Bedingung (4.10) und somit auch stärker als die Bedingung (4.8), denn es gilt $1+\frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}<1+\frac{V-S_{21}}{F_1}\Leftrightarrow F_1<S_{21}-S_1+F_1\Leftrightarrow 0<S_{21}-S_1$.[24] Unter Berücksichtigung der Stabilitätsbedingung (4.15) kann nun die folgende Aussage bezüglich des vollständigen Mittelabzugs getroffen werden:

SATZ 69 *Es sei $G(x)=ax+1-a$ mit $a>1$ nach Satz 20 und $S_{21}>S_1$ nach (2.38). Erfüllt der Parameter a hier zusätzlich die Bedingung (4.15), dann kommt es im Zeitpunkt $t=2$ nie zu einem vollständigen Mittelabzug seitens des Investors. Für den im Zeitpunkt $t=2$ zur Verfügung gestellten Betrag gilt $F_{21}>0$ bzw. $F_{22}\ge F_1$, und zwar unabhängig von dem zuvor im Zeitpunkt $t=1$ gewählten Investment D_1 des Arbitrageurs.*

BEWEIS: Ist Bedingung (4.15) erfüllt, dann ergibt sich im Fall $D_1>0$ bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Preis $p_{21}>V-S_{21}$. Da der Preis nach Gleichung (2.47) definiert ist als $p_{21}=V-S_{21}+F_{21}$, muss folglich hier $F_{21}>0$ gelten. Tritt Zustand Z_2 ein,

[23] Es gilt $\frac{F_1^2+F_1\cdot(V-S_1)}{F_1^2+F_1\cdot(S_{21}-S_1)}=\frac{F_1\cdot(F_1+V-S_1)}{F_1\cdot(F_1+S_{21}-S_1)}=\frac{V-S_1+F_1}{S_{21}-S_1+F_1}=\frac{S_{21}-S_1+F_1+V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}=1+\frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$.

[24] Zum Vergleich der Bedingungen (4.8) und (4.10) vgl. Fußnote 19, Kapitel 4, S. 144.

dann ergibt sich F_{22} gemäß Gleichung (4.4). Da nach Gleichung (2.10) entsprechend $p_1 < V$ zutrifft, ergibt sich im Zustand Z_2 nach Gleichung (4.4) mit $D_1 > 0$ ein Betrag $F_{22} > F_1$. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) ist der von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag F_{22} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_2 positiv. Im Fall $D_1 = 0$ ergibt sich sowohl im Zustand Z_1 nach Gleichung (4.2) als auch im Zustand Z_2 nach Gleichung (4.4) ein Betrag $F_{21} = F_1$ bzw. $F_{22} = F_1$. □

Trifft somit Bedingung (4.15) und gleichzeitig $S_{21} > S_1$ im Zustand Z_1 bei Verwendung einer linearen Update-Funktion G für eine Parameterkonstellation im Rahmen des Modells zu, dann ist der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag stets positiv. In diesem Fall kann die Maximum-Funktion in Gleichung (4.5) bei der Bestimmung des optimalen Betrages D_1 vernachlässigt werden.

Im Folgenden werden nun auch die Fälle $S_{21} = S_1$ und $S_{21} < S_1$ in Verbindung mit den Stabilitätsbedingungen erörtert. Letztendlich ist dazu die Überprüfung aller drei Stabilitätsbedingungen nötig: In der Preisgleichung (4.6) für den Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 gewährleistet Bedingung (4.8) einen positiven Nenner und Bedingung (4.10) einen positiven Zähler. Die dritte Stabilitätsbedingung (4.15) sichert für den Preis p_{21} ab, dass gemäß (2.21) entsprechend $p_{21} > V - S_{21}$ gilt.[25] Auf die Überprüfung der Bedingung (4.10) kann allerdings unter Umständen verzichtet werden.[26] Eine sicherheitshalbe Überprüfung in komplexen Fällen bietet sich jedoch an. Ausgangspunkt im Rahmen der Beweisführung ist sowohl im Fall $S_{21} = S_1$ als auch im Fall $S_{21} < S_1$ zunächst die Bedingung (4.12). Im Fall $S_{21} = S_1$ kann die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 70 *Es sei $G(x) = ax+1-a$ mit $a > 1$ nach Satz 20 und es gelte $S_{21} = S_1$. Erfüllt der Parameter a hier zusätzlich die angepasste Stabilitätsbedingung (4.10), dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ nie zu einem vollständigen Mittelabzug seitens des Investors. Für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag gilt $F_{21} > 0$ bzw. $F_{22} \geq F_1$, und zwar unabhängig von dem zuvor im Zeitpunkt $t = 1$ gewählten Investment D_1 des Arbitrageurs.*

[25] Der in (2.21) enthaltene Gleichheitsfall $p_{21} = V - S_{21}$ wird hier ausgeschlossen, da in diesem $F_{21} = 0$ gilt und somit ein nicht gewünschter vollständiger Mittelabzug erfolgt.

[26] Eine explizite Überprüfung von Bedingung (4.10) ist hier nicht nötig, wenn der Nenner in (4.11) positiv ist und die Gültigkeit von (4.12) nachgewiesen werden kann, da in diesem Fall dann auch der Zähler in (4.11) positiv sein muss. Der Bruch in (4.11) entspricht dem Preis p_{21} nach Gleichung (4.6).

BEWEIS: Für den Zustand Z_2 insgesamt sowie den Fall $D_1 = 0$ im Zustand Z_1 vgl. Beweis zu Satz 69. Folglich muss hier nur noch der Zustand Z_1 und der Fall $D_1 > 0$ betrachtet werden: Voraussetzung für die Gültigkeit von Bedingung (4.12) ist die Gültigkeit der Bedingung (4.8). Daher wird Bedingung (4.8) zunächst als zutreffend vorausgesetzt. Da für die Umformung von Bedingung (4.12) auch $D_1 > 0$ gelten muss, ist der Ausdruck $S_{21} - S_1 + D_1$ auch im Fall $S_{21} = S_1$ positiv. Die erste Ableitung nach (4.14) vereinfacht sich entsprechend zu $-F_1 \cdot \left(D_1^2 + 2D_1 \cdot (V - S_1)\right) / D_1^4$ und ist für alle $D_1 > 0$ negativ. Das bedeutet, mit steigendem $D_1 > 0$ nimmt der Ausdruck rechts vom Relationszeichen in (4.13) auch im Fall $S_{21} = S_1$ kontinuierlich ab und wird minimal für $D_1 = F_1$. Die Stabilitätsbedingung (4.15) vereinfacht sich hier entsprechend zu $a < 1 + (V - S_{21}) / F_1$ und ist demnach identisch mit Bedingung (4.10). Mit $S_1 = S_{21}$ ist auch Bedingung (4.8) erfüllt. □

Demnach sind im Fall $S_{21} = S_1$ alle drei Stabilitätsbedingungen identisch. Da sich Bedingung (4.15) zu Bedingung (4.10) vereinfacht, wurde letztere repräsentativ als entscheidende Bedingung für Satz 70 ausgewählt. Nach Gleichung (4.9) sind im Fall $D_1 = F_1$ der Preis p_1 im Zeitpunkt $t = 1$ und der Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 identisch, wenn $S_{21} = S_1$ gilt. Für $D_1 < F_1$ trifft $p_{21} > p_1$ zu.[27] Der Fall $S_{21} < S_1$ gestaltet sich hinsichtlich der Beweisführung etwas komplizierter:

SATZ 71 *Es sei $G(x) = ax+1-a$ mit $a > 1$ nach Satz 20 und es gelte $S_{21} < S_1$. Erfüllt der Parameter a hier zusätzlich die einfache Stabilitätsbedingung (4.8), dann kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ nie zu einem vollständigen Mittelabzug seitens des Investors. Für den im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrag gilt $F_{21} > 0$ bzw. $F_{22} \geq F_1$, und zwar unabhängig von dem zuvor im Zeitpunkt $t = 1$ gewählten Investment D_1 des Arbitrageurs.*

BEWEIS: Für den Zustand Z_2 insgesamt sowie den Fall $D_1 = 0$ im Zustand Z_1 vgl. Beweis zu Satz 69. Somit muss auch hier nur noch der Zustand Z_1 und der Fall $D_1 > 0$ betrachtet werden: Voraussetzung für die Gültigkeit von Bedingung (4.12) ist die Gültigkeit der Bedingung (4.8). Daher wird Bedingung (4.8) auch hier zunächst als zutreffend vorausgesetzt. Wegen der Komplexität bietet sich hier jedoch auch eine Überprüfung von Bedingung (4.10) an. Bedingt durch $S_{21} < S_1$ muss zwischen

[27] Vgl. dazu Gleichung (4.7) sowie auch Abschnitt 4.1.2.1 und dabei insbesondere den Fall (4).

$D_1 \leq S_1 - S_{21}$ und $D_1 > S_1 - S_{21}$ unterschieden werden: Gilt $D_1 \leq S_1 - S_{21}$, dann ist Bedingung (4.12) immer erfüllt, da das Produkt p_1F_1 immer positiv ist und der Ausdruck $S_{21} - S_1 + D_1$ links vom Relationszeichen für $D_1 < S_1 - S_{21}$ negativ bzw. für $D_1 = S_1 - S_{21}$ entsprechend null ist. Trifft im Fall $S_{21} < S_1$ auch $F_1 \leq S_1 - S_{21}$ zu, dann ist Bedingung (4.12) für alle D_1 mit $0 \leq D_1 \leq F_1$ erfüllt und es gilt $p_{21} > V - S_{21}$ bzw. entsprechend $F_{21} > 0$, wenn zusätzlich die Bedingung (4.8) Gültigkeit besitzt.[28]

Gilt $F_1 > S_1 - S_{21}$ im Fall $S_{21} < S_1$, dann trifft auch $D_1 > S_1 - S_{21}$ für alle D_1 mit $S_1 - S_{21} < D_1 \leq F_1$ zu. Für diese Werte von D_1 ist der Ausdruck $S_{21} - S_1 + D_1$ positiv und Bedingung (4.12) kann zur Bedingung (4.13) umgeformt werden bzw. auch die erste Ableitung nach (4.14) besitzt in diesem Fall Gültigkeit: Für $D_1 > S_1 - S_{21}$ ist sowohl der Zähler $D_1^2 + (2D_1 + S_{21} - S_1) \cdot (V - S_1)$ als auch der Nenner $D_1^2 \cdot (S_{21} - S_1 + D_1)^2$ der ersten Ableitung positiv und somit die erste Ableitung durch den Faktor $-F_1$ insgesamt negativ.[29] Somit nimmt der Ausdruck rechts vom Relationszeichen in (4.13) auch hier mit steigendem $D_1 > S_1 - S_{21}$ kontinuierlich ab und wird minimal für $D_1 = F_1$. Daher ist für $F_1 > S_1 - S_{21}$ im Fall $S_{21} < S_1$ die Stabilitätsbedingung (4.15) hier entsprechend anwendbar. Zu überprüfen ist nun noch die Bedingung (4.8). Im Sinne der Beweisführung ist es vorteilhaft, dazu erst Bedingung (4.10) zu betrachten.

Nach Bedingung (4.10) muss $a < 1 + \frac{V - S_{21}}{F_1}$ gelten. Dadurch wird der Parameter a jedoch im Fall $S_{21} < S_1$ stärker eingeschränkt als durch die Bedingung (4.15), denn mit $F_1 > S_1 - S_{21}$ gilt $1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1} > 1 + \frac{V - S_{21}}{F_1} \Leftrightarrow F_1 > S_{21} - S_1 + F_1 \Leftrightarrow S_1 > S_{21}$. Nach Bedingung (4.8) muss $a < 1 + \frac{V - S_1}{F_1}$ gelten. Dadurch wird der Parameter a im Fall $S_{21} < S_1$ noch stärker eingeschränkt als durch die Bedingung (4.10), denn es folgt $1 + \frac{V - S_{21}}{F_1} > 1 + \frac{V - S_1}{F_1} \Leftrightarrow -S_{21} > -S_1 \Leftrightarrow S_{21} < S_1$. □

Demnach erfolgt nach Satz 71 im Fall $S_{21} < S_1$ hinsichtlich des Parameters a die stärkste Einschränkung durch Bedingung (4.8). Die Relation zwischen S_{21} und S_1 ist folglich ausschlaggebend, welche der drei Bedingungen erfüllt sein muss. Tabelle 4.1 fasst die für den Parameter a erforderlichen Einschränkungen zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs für die drei Fälle $S_{21} > S_1$, $S_{21} = S_1$ und $S_{21} < S_1$ noch einmal zusammen.

[28] Die Stabilitätsbedingung (4.15) ist jedoch nicht anwendbar, da sie für $F_1 = S_1 - S_{21}$ nicht definiert ist. Sie ist im Fall $F_1 < S_1 - S_{21}$ in der vorliegenden Form aber auch nicht gültig, da sich dann durch $S_{21} - S_1 + D_1 < 0$ das Relationszeichen umdrehen müsste. Mit umgekehrten Relationszeichen wäre die Bedingung dann durch $a > 1$ immer erfüllt.

[29] Im Fall $D_1 = S_1 - S_{21}$ ergibt sich für den Zähler $(S_1 - S_{21})^2 + (S_1 - S_{21}) \cdot (V - S_1)$ ein positiver Betrag. Mit $D_1 > S_1 - S_{21}$ wächst der Zähler weiter an und bleibt positiv.

Fall	erforderliche Einschränkung von a	
$S_{21} > S_1$	$a < 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$	Bedingung (4.15)
$S_{21} = S_1$	$a < 1 + \frac{V-S_{21}}{F_1}$	Bedingung (4.10)
$S_{21} < S_1$	$a < 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$	Bedingung (4.8)

Tabelle 4.1: Einschränkung des Parameters a zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs

Das bedeutet, die von Shleifer/Vishny (1997) genannte einfache Stabilitätsbedingung (4.8) greift hier nur im Fall $S_{21} < S_1$, welcher jedoch von Shleifer/Vishny (1997) durch die Nebenbedingung (2.38) von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen wurde.[30] Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen, dann ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) unter Verwendung einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 nun die folgende Gleichung:[31]

$$\begin{aligned} \mu &= q \cdot \frac{\left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)\right) \cdot V}{p_{21}} + (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)\right) && (4.16) \\ &= \frac{qF_1V}{p_{21}} + \frac{qaD_1V}{p_1} - \frac{qaD_1V}{p_{21}} + F_1 + \frac{aD_1V}{p_1} - aD_1 - qF_1 - \frac{qaD_1V}{p_1} + qaD_1 \\ &= q \cdot \frac{(F_1 - aD_1) \cdot V}{p_{21}} + \frac{aD_1V}{p_1} + (1-q) \cdot (F_1 - aD_1)\,. && (4.17) \end{aligned}$$

Bei Betrachtung von Gleichung (4.17) fällt auf, dass der mittlere Summand sowohl unabhängig von der Eintrittswahrscheinlichkeit q als auch unabhängig von der Eintrittswahrscheinlichkeit $1-q$ ist. Weiterhin taucht in den beiden äußeren Summanden in (4.17) jeweils der Faktor $(F_1 - aD_1)$ auf. Dementsprechend kann für ein Investment in Höhe von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ seitens des Arbitrageurs hier die folgende Aussage getroffen werden:

[30] Da im Fall $S_{21} = S_1$ alle drei Bedingungen identisch sind, greift die Bedingung (4.8) streng genommen auch dort. Allerdings wurde von Shleifer/Vishny (1997) auch der Fall $S_{21} = S_1$ nicht weiter betrachtet.

[31] Entspricht Gleichung (4.5), wenn das Ergebnis der Maximum-Funktion in (4.5) positiv ist.

SATZ 72 *Es sei $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20 und der vollständige Mittelabzug sei ausgeschlossen. Investiert der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 1$ den Betrag $D_1 = \frac{F_1}{a}$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 3$ ein sicheres Endvermögen in Höhe von*

$$EV = \frac{F_1 V}{p_1}, \tag{4.18}$$

und zwar unabhängig von den konkret zugrunde gelegten Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1 - q$. Das sichere Endvermögen nach Gleichung (4.18) ist dabei größer als der ursprünglich im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1.

BEWEIS: Da der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist, gilt $F_{21} > 0$ und entsprechend ist Gleichung (4.17) hier anwendbar. Durch Einsetzen von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ in Gleichung (4.17) ergibt sich direkt Gleichung (4.18): Die jeweils im ersten und dritten Summanden von Gleichung (4.17) als Faktor auftretende Differenz $(F_1 - aD_1)$ beträgt mit $D_1 = \frac{F_1}{a}$ genau null. Daher bleibt lediglich der mittlere Summand übrig, welcher durch die Ersetzung von D_1 genau Gleichung (4.18) ergibt. Nach Satz 3 trifft $p_1 < V$ zu. Für das sichere Endvermögen in Gleichung (4.18) gilt somit $EV = F_1 \cdot \frac{V}{p_1} > F_1$. □

Nach Satz 72 kann der Arbitrageur demnach im Rahmen dieses Modells durch die Wahl eines Investments in Höhe von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ ein sicheres Endvermögen erzielen, und zwar unabhängig davon, welcher von den beiden Zuständen im Zeitpunkt $t = 2$ eintritt. Voraussetzung für das sichere Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ ist allerdings, dass der vollständige Mittelabzug hier ausgeschlossen ist, da sonst die Maximum-Funktion in Gleichung (4.5) greift und somit die in Satz 72 zugrunde gelegte Gleichung (4.17) nicht angewendet werden kann.[32] Für $D_1 = \frac{F_1}{a}$ muss nach (4.2) entsprechend hier die Bedingung $F_1 + F_1 \cdot (\frac{p_{21}}{p_1} - 1) > 0 \Leftrightarrow F_1 \cdot \frac{p_{21}}{p_1} > 0$ erfüllt sein.[33] Entscheidend ist demnach, ob zur Bestimmung des Preises p_{21} im Fall $D_1 = \frac{F_1}{a}$ die Maximum-Funktion in (2.48) bzw. in (4.5) greift. Da $D_1 = \frac{F_1}{a} < F_1$ gilt und somit nur ein bestimmter Teil des Definitionsbereiches von D_1 betrachtet wird, ist eine Gültigkeit der Bedingungen

[32] Mit $G(x_{Z_1}) \leq 0$ gilt $F_{21} = 0$ nach (2.24). Folglich ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 nach Gleichung (2.37) ein Endvermögen in Höhe von $EV = 0$. Tritt Zustand Z_2 ein, dann beträgt das Endvermögen in Verbindung mit Gleichung (4.4) und mit $D_1 = \frac{F_1}{a}$ weiterhin $EV = F_{22} = \frac{F_1 V}{p_1}$. Die Höhe des Endvermögens ist damit abhängig vom eintretenden Zustand im Zeitpunkt $t = 2$.

[33] Neben F_1 nach (2.2) ist auch p_1 nach Satz 12 positiv. Mit $p_{21} \geq V - S_{21}$ nach (2.48) ist diese Bedingung immer erfüllt.

in Tabelle 4.1 hier nicht direkt auch für $D_1 = F_1$ erforderlich.[34] Folgende Aussage kann dazu getroffen werden:

SATZ 73 *Es sei $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20. Investiert der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 1$ den Betrag $D_1 = \frac{F_1}{a}$, dann ergibt sich im Zeitpunkt $t = 3$ ein sicheres Endvermögen in Höhe von $EV = \frac{F_1 V}{p_1}$ nach Gleichung (4.18) genau dann, wenn die Bedingung $F_1 + S_1 \leq V$ erfüllt ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann wird dennoch ein sicheres Endvermögen erzielt, wenn der Parameter a der Bedingung $a < \frac{F_1}{F_1-(V-S_1)}$ genügt.*

BEWEIS: Durch Einsetzen von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ und $p_1 = V - S_1 + \frac{F_1}{a}$ in Bedingung (4.12) ergibt sich: $F_1 \cdot \left(S_{21} - S_1 + \frac{F_1}{a}\right) < F_1 \cdot \left(V - S_1 + \frac{F_1}{a}\right) \Leftrightarrow S_{21} < V$. Nach (2.18) ist diese Bedingung immer erfüllt. Bei den Äquivalenzumformungen zu Bedingung (4.12) wird allerdings $p_1 - aD_1 > 0$ vorausgesetzt. Demnach muss hier $V - S_1 + \frac{F_1}{a} - a \cdot \frac{F_1}{a} > 0 \Leftrightarrow V - (F_1 + S_1) + \frac{F_1}{a} > 0$ gelten. Für $F_1 + S_1 \leq V$ ist diese Bedingung immer erfüllt. Gilt jedoch $F_1 + S_1 > V$, dann ist diese Bedingung nur erfüllt, wenn hier $a < \frac{F_1}{F_1-(V-S_1)}$ zutrifft. Eine Überprüfung des Zählers in (4.11) ist hier nicht mehr nötig, da durch den positiven Nenner und die Gültigkeit von Bedingung (4.12) auch ein positiver Zähler vorliegen muss.[35] □

Das bedeutet, bei der Wahl eines Investments in Höhe von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ seitens des Arbitrageurs im Zeitpunkt $t = 1$ kommt es im Fall $F_1 + S_1 \leq V$ nie zu einem vollständigen Mittelabzug seitens des Investors im Zeitpunkt $t = 2$, und zwar unabhängig von der konkreten Höhe des Parameters $a > 1$.[36] Der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag ist in diesem Fall stets positiv und das sichere Endvermögen EV im Zeitpunkt $t = 3$ stets größer als F_1. Die Bedingung $F_1 + S_1 \leq V$ ist beispielsweise dann erfüllt, wenn der Noise trader shock S_1 maximal halb so groß wie der Grundwert V des Vermögensgegenstandes ist.[37] Das bedeutet, nur für relativ große Werte S_1 trifft diese Bedingung unter Umständen nicht zu. Eine Kompensation eines

[34] Zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse muss der Parameter a jedoch auch unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs gewissen Einschränkungen genügen. Vgl. dazu Abschnitt 4.1.2 sowie insbesondere Tabelle 4.4, S. 177.

[35] Für den Zähler in (4.11) gilt: $p_1 \cdot \left(V - S_{21} + F_1 - a \cdot \frac{F_1}{a}\right) = p_1 \cdot (V - S_{21}) > 0$.

[36] Der Parameter a muss allerdings zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse den Einschränkungen gemäß Tabelle 4.4, S. 177 genügen.

[37] Mit $S_1 = \frac{V}{2}$ folgt $F_1 + \frac{V}{2} \leq V \Leftrightarrow F_1 \leq \frac{V}{2}$. Mit $F_1 < S_1$ nach (2.7) ist diese Bedingung immer erfüllt.

relativ hohen Noise trader shocks S_1 kann jedoch immer noch über einen relativ geringen, im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellten Betrag F_1 erfolgen, so dass die Bedingung $F_1 + S_1 \leq V$ dann auch für $S_1 > \frac{V}{2}$ noch erfüllt sein kann. Gilt dennoch $F_1 + S_1 > V$, dann wird dieses sichere Endvermögen auch erzielt, wenn der Parameter a der Bedingung $a < \frac{F_1}{F_1-(V-S_1)}$ genügt. Da $S_1 < V$ nach (2.8) gilt, ist der positive Nenner $F_1 - (V - S_1)$ kleiner als der Zähler F_1. Demnach existieren Parameter $a > 1$, die dieser Bedingung genügen. Wegen der sonst nicht zulässigen Anwendbarkeit von Gleichung (4.17) ist diese Einschränkung für den Parameter a hier entsprechend erforderlich.

Satz 72 und Satz 73 gelten hier unabhängig vom Größenverhältnis der beiden Noise trader shocks S_1 und S_{21} zueinander. Auch wenn die Lösung $D_1 = \frac{F_1}{a}$ hier zu einem zustandsunabhängigen und somit risikolosen Endvermögen führt, so ist diese Lösung in der Regel jedoch nicht die optimale Lösung im Sinne von (2.40).[38]

Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen, dann ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) unter Verwendung einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 nun die folgende Gleichung, wenn in Gleichung (4.17) in einem ersten Schritt der Preis p_{21} durch den Ausdruck in (4.6) und in einem zweiten Schritt der Preis p_1 nach Gleichung (2.5) durch den Ausdruck $V - S_1 + D_1$ ersetzt wird:

$$
\begin{aligned}
\mu &= q \cdot \frac{(F_1 - aD_1) \cdot V}{\frac{p_1 \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)}{p_1 - aD_1}} + \frac{aD_1 V}{p_1} + (1-q) \cdot (F_1 - aD_1) \\
&= q \cdot \frac{(F_1 - aD_1) \cdot V \cdot (p_1 - aD_1)}{p_1 \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)} + \frac{aD_1 V}{p_1} + (1-q) \cdot (F_1 - aD_1) \\
&= q \cdot \left(\frac{(F_1 - aD_1) \cdot V}{V - S_{21} + F_1 - aD_1} - \frac{aD_1 \cdot (F_1 - aD_1) \cdot V}{(V - S_1 + D_1) \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)} \right) \\
&+ \frac{aD_1 V}{V - S_1 + D_1} + (1-q) \cdot (F_1 - aD_1) \,. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Die Nullstelle des Nenners von p_{21} stellt durch die entsprechenden Umformungen in (4.19) kein Problem mehr dar.[39] Streng genommen ist jedoch der Erwartungswert μ an dieser Stelle nicht definiert.[40] Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen, dann ist der Erwartungswert μ nach (4.19) über D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ zu maximieren.

[38] Vgl. dazu beispielsweise Abschnitt 4.1.4.1 und Abbildung 4.11, S. 197.

[39] Es gilt $p_1 - aD_1 = 0 \Leftrightarrow V - S_1 + (1-a) \cdot D_1 = 0 \Leftrightarrow D_1 = \frac{S_1 - V}{1-a} = \frac{V - S_1}{a-1}$.

[40] Die Definitionslücke liegt jedoch außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches. Vgl. Anhang C.2.

Der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.19) abgeleitet nach D_1 ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= q\cdot\frac{aVD_1\cdot(F_1-aD_1)\cdot(V-S_{21}+F_1-aD_1-a\cdot(V-S_1+D_1))}{(V-S_1+D_1)^2\cdot(V-S_{21}+F_1-aD_1)^2}\\ &- q\cdot\left(\frac{aV\cdot(F_1-2aD_1)}{(V-S_1+D_1)\cdot(V-S_{21}+F_1-aD_1)}+\frac{aV\cdot(V-S_{21})}{(V-S_{21}+F_1-aD_1)^2}\right)\\ &+ \frac{aV\cdot(V-S_1)}{(V-S_1+D_1)^2}-(1-q)\cdot a. \qquad (4.20)\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der optimalen Lösung im Sinne der Zielfunktion (2.40) muss die Ableitung (4.20) gleich null gesetzt und entsprechend nach D_1 aufgelöst werden. Liegt dabei nur genau eine Nullstelle im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$, dann handelt es sich hierbei um die optimale Lösung D_1^{opt}.[41] Ergeben sich nur Nullstellen mit $D_1 < 0$ und $D_1 > F_1$, dann trifft entweder $D_1^{opt} = 0$ oder $D_1^{opt} = F_1$ zu, je nachdem, ob sich mit $D_1 = 0$ ein höherer Erwartungswert μ ergibt oder mit $D_1 = F_1$.[42] Der zu D_1^{opt} zugehörige Erwartungswert wird im Folgenden entsprechend mit μ^{opt} bezeichnet.

Die obige Gleichung (4.19) für den Erwartungswert μ besitzt hier allerdings nur Gültigkeit, wenn der vollständige Mittelabzug durch $F_{21} > 0$ ausgeschlossen ist. Bevor die optimale Lösung D_1^{opt} im Sinne der Zielfunktion (2.40) weiter analysiert wird, erfolgt daher im nächsten Abschnitt zunächst die Betrachtung von Fällen, in denen der vollständige Mittelabzug möglich ist.

4.1.2 Einbezug des vollständigen Mittelabzugs

Auch wenn Shleifer/Vishny (1997) im Rahmen ihrer Analyse durch die entsprechende Wahl des Parameters a den vollständigen Mittelabzug vermeiden wollten, so erscheint die Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs im Zustand Z_1 im Rahmen des Entscheidungsmodells jedoch sehr interessant. Daher stellt sich die Frage, inwieweit das Modell noch funktioniert bzw. definiert ist, wenn die entsprechend dem Verhältnis von S_1 zu S_{21} erforderliche Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist.[43] In diesem Zusammenhang spielt der Preis p_{21} eine wichtige Rolle. Die Funktionsweise des Modells hängt

[41] Wie bereits zu Beginn des Kapitels aufgeführt, bezeichnet D_1^{opt} die optimale Lösung im Sinne der Zielfunktion (2.40). Bei nur einer Nullstelle im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegt an der Stelle D_1^{opt} ein lokales Maximum vor. Bei zwei Nullstellen existiert noch ein lokales Minimum und unter Umständen eine zweite optimale Lösung an der Stelle F_1. Vgl. Abschnitt 4.1.3 sowie Abschnitt 4.1.4.4.

[42] Eine Übereinstimmung der beiden Erwartungswerte ist nicht möglich. Vgl. Abschnitt 4.1.3.

[43] Rein mathematisch scheint die Gültigkeit von Bedingung (4.8) wegen einer sonst im Nenner auftretenden Nullstelle unabhängig vom Verhältnis von S_1 zu S_{21} hier unvermeidbar zu sein.

letztendlich davon ab, inwieweit sich für ein Investment D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ ein gültiger Preis $p_{21} \geq V - S_{21}$ nach (4.6) ergibt. Im Folgenden wird daher Gleichung (4.6) bzw. die etwas ausführlichere Gleichung (4.7) noch einmal näher betrachtet.[44]

Der Preis p_{21} nach Gleichung (4.7) ergibt sich letztendlich im Zustand Z_1 als Produkt aus dem Preis p_1 und einem noch näher zu betrachtenden Faktor. Dieser zweite Faktor in Gleichung (4.7) ist nun Gegenstand der weiteren Analyse. Dazu stellt im Folgenden die Funktion

$$\Gamma_{p_{21}}(D_1) = V - S_{21} + F_1 - aD_1 \tag{4.21}$$

den Zähler des Bruchs aus Gleichung (4.7) in Abhängigkeit von der Entscheidungsvariable D_1 dar. Die Funktion $\Gamma_{p_{21}}$ ist linear in D_1 und besitzt mit $-a$ eine negative Steigung. Das bedeutet, je höher das Investment D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ seitens des Arbitrageurs gewählt wird, umso kleiner wird dieser Zähler. Wird der Ausdruck $\Gamma_{p_{21}}(F_1) > 0$ nach a aufgelöst, dann ergibt sich die angepasste Stabilitätsbedingung nach (4.10). Entsprechend stellt die Funktion

$$\Psi_{p_{21}}(D_1) = V - S_1 + (1 - a) \cdot D_1 \tag{4.22}$$

den Nenner des Bruchs aus Gleichung (4.7) in Abhängigkeit von der Entscheidungsvariable D_1 dar. Die Funktion $\Psi_{p_{21}}$ ist linear in D_1 und besitzt durch $a > 1$ mit $(1 - a)$ ebenfalls eine negative Steigung, welche jedoch betragsmäßig geringer ausfällt als die Steigung der Funktion $\Gamma_{p_{21}}$. Durch die negative Steigung wird der Nenner somit auch umso kleiner, je größer das Investment D_1 des Arbitrageurs ausfällt. Wird hier der Ausdruck $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0$ nach a aufgelöst, dann ergibt sich die einfache Stabilitätsbedingung nach (4.8).

Ist für einen bestimmten Betrag D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1) > 0$ betragsmäßig größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1) > 0$, dann ergibt sich ein Preis $p_{21} > p_1$.[45] Gilt umgekehrt $\Psi_{p_{21}}(D_1) > \Gamma_{p_{21}}(D_1) > 0$, dann ergibt sich ein Preis $p_{21} < p_1$. Im Gleichheitsfall $\Gamma_{p_{21}}(D_1) = \Psi_{p_{21}}(D_1) > 0$ stimmen letztendlich die beiden Preise p_1 und

[44] Eine umfangreiche Kurvendiskussion des Preises p_{21} nach Gleichung (4.6) bzw. nach Gleichung (4.7) erfolgt zudem im Anhang C.

[45] Der Bruch aus Gleichung (4.7) ist in diesem Fall größer als eins. Multipliziert mit p_1 ergibt sich entsprechend $p_{21} > p_1$. Die Begründung der Fälle $p_{21} = p_1$ und $p_{21} < p_1$ erfolgt analog.

p_{21} überein. Dieses Verhältnis der beiden Preise zueinander ist letztendlich ausschlaggebend für die relative Wertentwicklung x_{Z_1} und somit für den von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellten Betrag F_{21}.

Den Ausgangspunkt der Analyse bildet der Fall $D_1 = 0$. Es gilt $\Gamma_{p_{21}}(0) = V - S_{21} + F_1$ nach (4.21) und $\Psi_{p_{21}}(0) = V - S_1$ nach (4.22). Diese beiden Funktionswerte sind unabhängig vom Parameter $a > 1$ und außerdem positiv.[46] Trifft im Fall $D_1 = 0$ hinsichtlich der beiden Preise die Relation $p_{21} > p_1$ zu, dann ist dies hier logisch äquivalent mit $V - S_{21} + F_1 > V - S_1 \Leftrightarrow F_1 > S_{21} - S_1$. Entsprechend folgt $p_{21} = p_1 \Leftrightarrow F_1 = S_{21} - S_1$ und $p_{21} < p_1 \Leftrightarrow F_1 < S_{21} - S_1$. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit diese drei Fälle im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 in Verbindung mit den Größenverhältnissen $S_{21} > S_1$, $S_{21} = S_1$ und $S_{21} < S_1$ der beiden Noise trader shocks zueinander überhaupt möglich sind bzw. auftreten können, da im Modell $F_1 > 0$ gelten muss. Tabelle 4.2 gibt dazu eine Übersicht über diese neun Kombinationsmöglichkeiten.

Fall	$p_{21} > p_1$ $\Leftrightarrow F_1 > S_{21} - S_1$	$p_{21} = p_1$ $\Leftrightarrow F_1 = S_{21} - S_1$	$p_{21} < p_1$ $\Leftrightarrow F_1 < S_{21} - S_1$
$S_{21} > S_1$	(1) ✓	(2) ✓	(3) ✓
$S_{21} = S_1$	(4) ✓	–	–
$S_{21} < S_1$	(5) ✓	–	–

Tabelle 4.2: Kombinationsmöglichkeiten Preisrelationen und Noise trader shocks im Fall $D_1 = 0$

Demnach können vier der neun Fälle wegen der Bedingung $F_1 > 0$ nach (2.2) nicht auftreten: Die Kombination $S_{21} = S_1$ und $F_1 = S_{21} - S_1$ kann nicht vorkommen, da mit $S_{21} = S_1$ hier $F_1 = 0$ möglich sein müsste. Ebenso die Kombination $S_{21} = S_1$ und $F_1 < S_{21} - S_1$, welche nur für $F_1 < 0$ möglich wäre. Auch bei den Kombinationen $S_{21} < S_1$ und $F_1 = S_{21} - S_1$ bzw. $S_{21} < S_1$ und $F_1 < S_{21} - S_1$ müsste die Bedingung $F_1 < 0$ erfüllbar sein. Daher sind diese beiden Kombinationen hier ebenfalls nicht möglich. Die restlichen Kombinationen (1) bis (5) können jedoch auftreten.

[46] Nach (2.8) gilt $S_1 < V$, nach (2.18) trifft $S_{21} < V$ zu und mit (2.2) folgt $F_1 > 0$.

Zur weiteren Analyse des Verhaltens des Preises p_{21} werden diese fünf Kombinationsmöglichkeiten im nachfolgenden Abschnitt 4.1.2.1 eingehend erläutert. Die Zielfunktion unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs wird dann in Abschnitt 4.1.2.2 behandelt und der letzte Unterabschnitt 4.1.2.3 widmet sich ausführlich der Bestimmung der Grenze $\overline{D}_1$, ab welcher für $D_1 \geq \overline{D}_1$ der vollständige Mittelabzug erfolgt.

4.1.2.1 Kombinationsmöglichkeiten Preisrelationen und Noise trader shocks

Es stellt sich zunächst die Frage, inwieweit für die fünf möglichen Kombinationen in Tabelle 4.2 der Fall $p_{21} = p_1$ für ein $\widehat{D_1}$ im Bereich $0 \leq \widehat{D_1} \leq F_1$ auftreten kann.[47] Für den Fall $p_{21} = p_1$ müssen die Funktionswerte von (4.21) und (4.22) an der Stelle $\widehat{D_1}$ übereinstimmen.[48] Da die Funktionen $\Gamma_{p_{21}}$ und $\Psi_{p_{21}}$ zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung repräsentieren, ist der Schnittpunkt eindeutig. Das bedeutet, es gibt nur genau eine Stelle, an der $p_{21} = p_1$ zutreffen kann. Für die Übereinstimmung muss gelten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p_{21}}(\widehat{D_1}) &= \Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) \\ \Leftrightarrow \quad V - S_{21} + F_1 - a\widehat{D_1} &= V - S_1 + \widehat{D_1} - a\widehat{D_1} \\ \Leftrightarrow \quad \widehat{D_1} &= S_1 - S_{21} + F_1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Da die negative Steigung der Funktion $\Gamma_{p_{21}}$ betragsmäßig größer ist als die negative Steigung der Funktion $\Psi_{p_{21}}$, ist links vom Schnittpunkt der Zähler $\Gamma_{p_{21}}$ größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}$ und rechts vom Schnittpunkt der Zähler $\Gamma_{p_{21}}$ entsprechend kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}$. Folglich gilt für $D_1 < \widehat{D_1}$ hinsichtlich der Preise $p_{21} > p_1$ und für $D_1 > \widehat{D_1}$ entsprechend $p_{21} < p_1$.[49] Ein Mittelzufluss kann somit nur für $D_1 < \widehat{D_1}$ und ein Mittelabfluss nur für $D_1 > \widehat{D_1}$ erfolgen.[50]

Nach (4.23) ist die Stelle $\widehat{D_1}$, an der sich die beiden Geraden schneiden, unabhängig vom Parameter a.[51] Da $\widehat{D_1}$ nur im Bereich $0 \leq \widehat{D_1} \leq F_1$ liegen darf, muss hier einerseits

[47] $\widehat{D_1}$ bezeichnet im Folgenden den im Zeitpunkt $t = 1$ investierten Betrag, für welchen sich im Entscheidungsmodell mit einer Entscheidungsvariable genau $p_{21} = p_1$ ergibt.

[48] Dadurch nimmt der Bruch in (4.7) den Wert eins an und es gilt $p_{21} = p_1$.

[49] Vorausgesetzt, D_1 liegt im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ und die Preisfunktion p_{21} ist in dem Bereich entsprechend definiert.

[50] Nach (2.41) gilt $x_{Z_1} \geq 1$ für $p_{21} > p_1$ und $x_{Z_1} \leq 1$ für $p_{21} < p_1$. In Verbindung mit Satz 22 folgt dann die Aussage hinsichtlich des Mittelzuflusses bzw. des Mittelabflusses.

[51] Unabhängig in dem Sinne, dass der Parameter a keinen direkten Einfluss auf die Berechnung der Stelle $\widehat{D_1}$ hat. Der Parameter a unterliegt hier jedoch auch weiterhin gewissen Restriktionen hinsichtlich seines Definitionsbereiches.

die Bedingung $S_1 - S_{21} + F_1 \geq 0 \Leftrightarrow F_1 \geq S_{21} - S_1$ erfüllt sein. Diese trifft, bezogen auf die möglichen Kombinationen in Tabelle 4.2, in den Fällen (1), (2), (4) und (5) zu. Andererseits muss gleichzeitig auch die Bedingung $S_1 - S_{21} + F_1 \leq F_1 \Leftrightarrow S_{21} \geq S_1$ zutreffen, welche wiederum nur in den Fällen (1), (2), (3) und (4) erfüllt ist. Eine Übereinstimmung der Preise p_{21} und p_1 im für $\widehat{D_1}$ zulässigen Bereich $0 \leq \widehat{D_1} \leq F_1$ tritt somit nur in den Fällen (1), (2), und (4) auf. Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht hinsichtlich der Möglichkeit von $p_{21} = p_1$ mit $\widehat{D_1}$ im zulässigen Bereich $0 \leq \widehat{D_1} \leq F_1$.

Fall	$p_{21} = p_1$	Schnittpunkt
(1)	✓	$\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1$
(2)	✓	$\widehat{D_1} = 0$
(3)	–	$p_{21} < p_1$
(4)	✓	$\widehat{D_1} = F_1$
(5)	–	$p_{21} > p_1$

Tabelle 4.3: Möglichkeit von $p_{21} = p_1$ mit $\widehat{D_1}$ im Bereich $0 \leq \widehat{D_1} \leq F_1$

Im Fall (1) ist durch $S_{21} > S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$ gewährleistet, dass $p_{21} = p_1$ für $\widehat{D_1}$ im inneren Bereich $0 < \widehat{D_1} < F_1$ des Definitionsbereiches auftritt.[52] An der Randstelle $D_1 = 0$ des Definitionsbereiches gilt $p_{21} > p_1$ und an der Randstelle $D_1 = F_1$ entsprechend $p_{21} < p_1$. Der Fall (2) ist so konzipiert, dass $p_{21} = p_1$ bereits für $D_1 = 0$ zutrifft. Wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunktes folgt somit $\widehat{D_1} = 0$. Mit $F_1 < S_{21} - S_1$ im Fall (3) ist $\widehat{D_1} < 0$ nicht im zulässigen Bereich. Da $p_{21} < p_1$ bereits für $D_1 = 0$ zutrifft, gilt $p_{21} < p_1$ für alle D_1 im zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$. Im Fall (4) gilt $S_{21} = S_1$, woraus sich in Verbindung mit (4.23) direkt $\widehat{D_1} = F_1$ ergibt. Mit $S_{21} < S_1$ im Fall (5) liegt $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1 > F_1$ nicht im zulässigen Bereich. Da $p_{21} > p_1$ für $D_1 = 0$ zutrifft, gilt $p_{21} > p_1$ für alle D_1 im zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$.

Zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs im Fall $S_{21} > S_1$ muss die Bedingung $a < 1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1}$ nach (4.15) erfüllt sein.[53] Für die weitere Analyse der Fälle (1), (2) und (3) aus Tabelle 4.2 bzw. in Tabelle 4.3 wird aber nun zunächst davon ausgegangen,

[52] Aus $S_{21} > S_1$ folgt $\widehat{D_1} < F_1$ und aus $F_1 > S_{21} - S_1$ folgt $\widehat{D_1} > 0$.
[53] Vgl. dazu Satz 69 und Tabelle 4.1, S. 150.

dass $a = 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$ zutrifft und in dieser Weise Bedingung (4.15) verletzt ist. Gleichzeitig sind jedoch in diesem Fall die Bedingungen (4.8) und (4.10) noch erfüllt.[54] Entsprechend kann dann die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 74 *Es sei $G(x) = ax + 1 - a$ nach Satz 20. Gilt sowohl $a = 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$ als auch $S_{21} > S_1$, dann ergibt sich mit einem Investment in Höhe von $D_1 = F_1$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug.*

BEWEIS: Der Beweis erfolgt analog zur Herleitung von Bedingung (4.15). Es gilt $p_{21} = V - S_{21} \Leftrightarrow \frac{p_1 \cdot (V-S_{21}+F_1-aD_1)}{p_1-aD_1} = V - S_{21} \Leftrightarrow a = \frac{F_1 D_1 + F_1 \cdot (V-S_1)}{D_1^2 + D_1 \cdot (S_{21}-S_1)}$.[55] Mit D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ wird dieser Ausdruck für a minimal im Fall $D_1 = F_1$, und durch Ersetzung von D_1 durch F_1 ergibt sich entsprechend $a = 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$.[56] □

Letztendlich erfolgt bei einem Parameter a nach Satz 74 der vollständige Mittelabzug nur bei einem Investment in Höhe von $D_1 = F_1$ und bei Eintritt von Zustand Z_1. Für jedes Investment $D_1 < F_1$ trifft bei Eintritt von Zustand Z_1 hingegen $F_{21} > 0$ zu.[57]

Im Folgenden werden zunächst die drei möglichen Fälle (1), (2) und (3) graphisch abgebildet und weiter analysiert. In den Abbildungen 4.1, 4.3 und 4.5 erfolgt die Darstellung der Funktionsverläufe von $\Gamma_{p_{21}}$ und $\Psi_{p_{21}}$ in Abhängigkeit von D_1 in drei unterschiedlichen Situationen: Durch die beiden durchgezogenen Geraden wird jeweils die Situation repräsentiert, in welcher der Parameter a gemäß Satz 74 gewählt wurde. Das bedeutet, für $D_1 = F_1$ erfolgt in dieser Situation der vollständige Mittelabzug in Form von $F_{21} = 0$. Durch die gestrichelten Geraden werden in den drei Abbildungen jeweils zwei Situationen dargestellt, in denen noch größere Parameter a als nach Satz 74 herangezogen wurden.[58] Der größte Parameter a in der jeweiligen Abbildung wird dabei durch die zwei grob gestrichelten Geraden repräsentiert. Er wurde so gewählt, dass er mit $\Psi_{p_{21}}(F_1) < 0$ sowohl die Bedingung (4.8) als auch die Bedingung (4.10) verletzt.[59]

[54] Vgl. Anmerkungen im Anschluss an Bedingung (4.15): Mit $S_{21} > S_1$ gilt für den Parameter a hier die Relation $a = 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1} < 1 + \frac{V-S_{21}}{F_1} < 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$.

[55] Vgl. dazu (4.6) und (4.11) sowie (4.13).

[56] Vgl. (4.14) sowie (4.15). Für einen alternativen, etwas formaleren Beweis vgl. Anhang B.6.

[57] Dies wird im Rahmen der weiteren Analyse deutlich.

[58] Auf die graphische Darstellung eines Falls mit einem kleineren Parameter a als nach Satz 74 wurde hier verzichtet, da für einen kleineren Parameter die Stabilitätsbedingung (4.15) erfüllt ist und somit der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist.

[59] Der mittlere Parameter a, jeweils verkörpert durch die zwei fein gestrichelten Geraden, erfüllt hingegen diese beiden Bedingungen und verletzt nur Bedingung (4.15).

In den folgenden drei Analysen werden zunächst die beiden durchgezogenen Geraden näher betrachtet. Es erfolgt jeweils eine technische Analyse gefolgt von einer darauf aufbauenden ökonomischen Interpretation. Im Anschluss daran werden in den Analysen die beiden Fälle besprochen, die durch die gestrichelten Geraden dargestellt werden. Den Abschluss der drei Analysen bildet jeweils die graphische Darstellung des Preises p_{21}, wobei in jeder Abbildung wiederum drei unterschiedliche Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1 dargestellt werden. Der jeweiligen Darstellung des Preises p_{21} liegen hier wiederum dieselben Daten wie zur Darstellung der Funktionsverläufe von $\Gamma_{p_{21}}$ und $\Psi_{p_{21}}$ zugrunde.

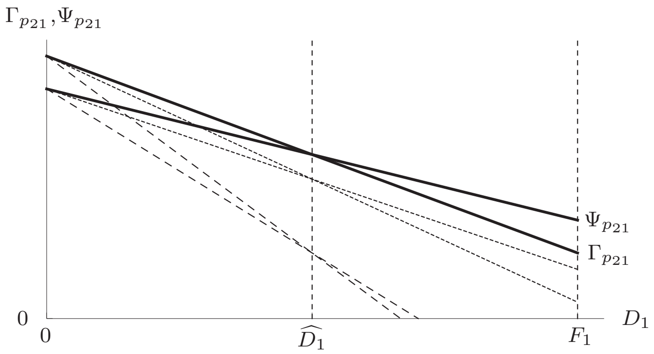


Abbildung 4.1: Fall (1): $S_{21} > S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$

In Abbildung 4.1 bzw. im Fall (1) ist für D_1 mit $0 \leq D_1 < \widehat{D_1}$ der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ immer größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch auch der Preis p_{21} in diesem Bereich größer als der Preis p_1 ist.[60] Für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ bedeutet dies eine positive relative Wertentwicklung $x_{Z_1} > 1$ und folglich einen Mittelzufluss, da $a > 1$ gilt.[61] Beide Geraden weisen zudem eine negative Steigung auf, wobei die Steigung der Geraden $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$, welche den Zähler repräsentiert, betragsmäßig größer ist als die Steigung der Geraden $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, welche den Nenner repräsentiert. Bedingt durch $\Gamma_{p_{21}}(0) > \Psi_{p_{21}}(0)$ im Fall (1) und durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt somit mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden bis zum Schnittpunkt an der Stelle $\widehat{D_1}$ betragsmäßig ab. Mit steigendem Investment D_1 seitens des Arbitrageurs nähern sich somit der Zähler und der Nenner immer mehr an, bis letztendlich $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ und $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ für $D_1 = \widehat{D_1}$ übereinstimmen. An der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ stimmen dann auch

[60] Abbildung 4.1 liegen die folgenden Daten zugrunde: $V = 1$, $F_1 = 0,2$, $S_1 = 0,3$ und $S_{21} = 0,4$. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 3$, $a = 3,75$ und $a = 6$ verwendet.

[61] Im Fall $D_1 = 0$ gilt $x_{Z_1} = 1$.

der Preis p_1 und der Preis p_{21} überein. Für D_1 mit $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ ist der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ immer kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch $p_{21} < p_1$ folgt und entsprechend durch $x_{Z_1} < 1$ ein Mittelabfluss stattfindet. Für $D_1 = F_1$ erfolgt dann letztendlich im Fall der durchgezogenen Geraden der vollständige Mittelabzug in Form von $F_{21} = 0$. Durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden ab dem Schnittpunkt an der Stelle $\widehat{D_1}$ wieder betragsmäßig zu.

Es stellt sich nun die Frage, wie mit Hilfe dieser Charakteristika der Funktionsverläufe der beiden Geraden ein Rückschluss auf die Entwicklung des Preises p_{21} im Fall (1) gezogen werden kann. Nach Satz 1 ist eine Veränderung von D_1 um ΔD_1 gleichbedeutend mit einer Veränderung des Preises p_1 um ΔD_1. Die Veränderung des Preises p_{21} gestaltet sich jedoch etwas komplizierter, da dieser bis auf einen Spezialfall nicht linear in D_1 ist.[62] Um weitere Aussagen hinsichtlich des Preises p_{21} treffen zu können, ist hier ein Umweg über die relative Wertentwicklung x_{Z_1} nötig:

Nach Satz 15 ergibt sich eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x_{Z_1} = 1$ genau dann, wenn $D_1 = 0$ oder $p_{21} = p_1$ zutrifft. Letzteres trifft hier entsprechend zu, wenn $D_1 = \widehat{D_1}$ gewählt wird. Nach Abbildung 4.1 gilt $x_{Z_1} > 1$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ und $x_{Z_1} < 1$ für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$. Demnach liegt das Maximum der relativen Wertentwicklung x_{Z_1} im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$. Im Zusammenhang mit dem Preis p_{21} kann hier die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 75 *Es sei $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20. Für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ gilt im Fall (1) und im Fall (4) nach Tabelle 4.2 zwischen der relativen Wertentwicklung x_{Z_1} und dem Preis p_{21} der folgende Zusammenhang:*

$$\max_{D_1} x_{Z_1} \Leftrightarrow \max_{D_1} p_{21}. \tag{4.24}$$

BEWEIS: Im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ ist sowohl im Fall (1) als auch im Fall (4) der Preis p_{21} größer als der Preis p_1, woraus $x_{Z_1} > 1$ und somit auch $G(x_{Z_1}) > 1$ durch $G'(x) > 1$ für alle $x > 0$ in diesem Bereich folgt. Es gilt somit $\max\ x_{Z_1} \Leftrightarrow \max\ G(x_{Z_1})$. Mit $F_{21} = F_1 \cdot G(x_{Z_1})$ ist somit $\max\ G(x_{Z_1}) \Leftrightarrow \max\ F_{21}$ und mit $p_{21} = V - S_{21} + F_{21}$ folgt letztendlich $\max\ F_{21} \Leftrightarrow \max\ p_{21}$. □

[62] Vgl. Gleichung (4.7). Der Spezialfall kann im Fall (5) vorliegen. Vgl. dazu auch Anhang C.1.

Das bedeutet, nach Satz 75 besitzt neben der relativen Wertentwicklung x_{Z_1} auch der Preis p_{21} sein Maximum an der gleichen Stelle im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$. Investiert der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 1$ nicht in den Vermögensgegenstand und wählt $D_1 = 0$, dann bekommt er im Zeitpunkt $t = 2$ wiederum den Betrag F_1 zur Verfügung gestellt. Unter der Annahme, dass dieser Betrag dann im Zustand Z_1 vollständig investiert und somit $D_{21} = F_{21} = F_1$ gewählt wird, trifft $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ für $D_1 = 0$ zu.[63] Für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ ergibt sich im Fall (1) eine positive relative Wertentwicklung $x_{Z_1} > 1$, da der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ hier immer größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ ist. Eine positive relative Wertentwicklung $x_{Z_1} > 1$ bewirkt, dass der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_{21} größer ist als F_1. Unter der Annahme $D_{21} = F_{21}$ folgt somit für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ entsprechend $p_{21} > V - S_{21} + F_1$. Für $D_1 = \widehat{D_1}$ gilt im Fall (1) wiederum $x_{Z_1} = 1$ und somit auch $F_{21} = F_1$, woraus direkt $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ folgt.

Somit ergibt sich sowohl für $D_1 = 0$ als auch für $D_1 = \widehat{D_1}$ im Fall (1) ein Preis p_{21} in Höhe von $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ und es gilt $F_{21} = F_1$. Da $p_{21} > V - S_{21} + F_1$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ zutrifft, muss in diesem Bereich mindestens ein lokales Maximum existieren. Der Preis p_{21} weist jedoch in Abhängigkeit von D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ keine Wendestellen auf und besitzt zudem einen streng konkaven Funktionsverlauf. Daher kann nur genau ein lokales Maximum in diesem Bereich vorliegen.[64] Ausgehend von $D_1 = 0$ im Fall (1) nimmt der Preis p_{21} bzw. die relative Wertentwicklung x_{Z_1} mit steigendem D_1 somit zunächst zu und dem Arbitrageur wird ein Betrag $F_{21} > F_1$ seitens des Investors zur Verfügung gestellt. Ein höheres Investment D_1 seitens des Arbitrageurs wirkt sich jedoch auch erhöhend auf den Preis p_1 aus. Da eine Erhöhung von p_1 wiederum einen negativen Einfluss auf die relative Wertentwicklung x_{Z_1} hat, gibt es hier im Fall (1) offensichtlich eine Stelle D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$, ab welcher eine weitere Erhöhung von D_1 zu einem Rückgang der relativen Wertentwicklung x_{Z_1} und somit zu einem Rückgang des Preises p_{21} führt. Für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ nimmt der Preis p_{21} mit steigendem D_1 zunächst noch weiter ab, bis letztendlich die Untergrenze $p_{21} = V - S_{21}$ erreicht wird und der vollständige Mittelabzug erfolgt. Im Fall der durchgezogenen Geraden wird diese Untergrenze erst für $D_1 = F_1$ erreicht.

Durch die gestrichelten Geraden wird in Abbildung 4.1 jeweils eine Situation dargestellt, in welcher ein noch größerer Parameter a als nach Satz 74 herangezogen wurde.

[63] Mit $D_1 = 0$ folgt auch direkt aus Gleichung (4.6) ein Preis $p_{21} = V - S_{21} + F_1$.
[64] Vgl. Anhang C.3 und dabei insbesondere Unterabschnitt C.3.1.

Dadurch erhalten beide Geraden eine betragsmäßig größere Steigung. Diese veränderte Steigung hat jedoch keinen Einfluss auf die Stelle $\widehat{D_1}$ des Schnittpunktes der beiden Geraden, da $\widehat{D_1}$ nach Gleichung (4.23) unabhängig vom Parameter a ist. Auch die Differenz zwischen den beiden Geraden ändert sich an keiner Stelle, da sowohl $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ als auch $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ bei einem höherem Parameter a um den gleichen Betrag abnehmen, wodurch die Differenz in unveränderter Höhe erhalten bleibt.[65] In der Gleichung für den Preis p_{21} nach (4.7) ist jedoch nicht direkt die Differenz von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ und $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ entscheidend, sondern der Quotient aus diesen beiden Größen. Dadurch, dass der Zähler und der Nenner bei einem größeren Parameter a um den gleichen Betrag abnehmen, wird der Quotient aus den beiden Größen für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ entsprechend größer, da der Zähler in diesem Bereich größer als der Nenner ist.[66] Dies hat zur Folge, dass sich für jedes Investment D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ nun auch ein höherer Preis p_{21} ergibt. Analog bedeutet dies, dass der Quotient aus den beiden Größen für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ entsprechend kleiner wird, da hier der Zähler kleiner als der Nenner ist.[67] Folglich ergibt sich für jedes Investment D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ nun ein kleinerer bzw. maximal gleich hoher Preis p_{21}.[68] Das bedeutet, je höher der Parameter a gewählt wird, umso stärker schwankt tendenziell der Preis p_{21} im für D_1 zulässigen Bereich.

Bei einem Parameter a nach Satz 74 erfolgt für ein Investment $D_1 = F_1$ der vollständige Mittelabzug. Bei einem größeren Parameter a ergibt sich für jedes Investment D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 < F_1$ nun ein kleinerer Preis p_{21}. Somit muss bei diesem größeren Parameter a der vollständige Mittelabzug bereits für ein Investment $\overline{D}_1 < F_1$ erfolgen.[69] Für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ gilt dann $F_{21} = 0$ bzw. $p_{21} = V - S_{21}$. In der Zielfunktion nach (4.5) muss daher zwischen den Fällen D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ und D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ unterschieden werden.[70]

[65] Anhand von Abbildung 4.1 kann dies auch mit Hilfe des Strahlensatzes erklärt werden. Zum Strahlensatz vgl. Agricola/Friedrich (2009), S. 7 ff.

[66] Vorausgesetzt, es trifft an der entsprechenden Stelle D_1 auch mit dem größeren Parameter a für den Nenner noch $\Psi_{p_{21}}(D_1) > 0$ zu.

[67] Auch hier muss an der entsprechenden Stelle D_1 mit dem größeren Parameter a zumindest für den Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1) > 0$ gelten.

[68] Ein gleich hoher Preis p_{21} für ein bestimmtes Investment D_1 tritt genau dann auf, wenn bereits mit dem kleineren Parameter a für dieses Investment ein vollständiger Mittelabzug erfolgte.

[69] $\overline{D}_1$ bezeichnet im Folgenden das Investment D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ seitens des Arbitrageurs, ab welchem im Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug seitens des Investors erfolgt.

[70] Die Zielfunktion wird in Abschnitt 4.1.2.2 behandelt und die genaue Bestimmung von $\overline{D}_1$ erfolgt in Abschnitt 4.1.2.3.

Für den Fall (1) bleibt abschließend noch zu klären, wie groß der Parameter a maximal sein darf, damit das Modell im Fall (1) noch sinnvolle Ergebnisse liefert. Dazu ist es hilfreich, Abbildung 4.1 noch einmal genauer zu betrachten.

Für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ gilt immer $\Gamma_{p_{21}}(D_1) < \Psi_{p_{21}}(D_1)$; der Zähler ist kleiner als der Nenner. Angenommen, der Parameter a wird so gewählt, dass $\Gamma_{p_{21}}(F_1) = 0$ gilt. In diesem Fall gilt dann immer noch $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0$. Für $D_1 = F_1$ würde sich dann rein rechnerisch ein Preis $p_{21} = 0$ ergeben. Da jedoch $p_{21} \geq V - S_{21} > 0$ gelten muss, trifft hier offensichtlich $\overline{D}_1 < F_1$ zu, so dass Gleichung (4.7) für $D_1 = F_1$ keine Gültigkeit mehr besitzt. Wichtig ist in diesem Zusammenhang jedoch, dass der Zähler kleiner als der Nenner ist. Dadurch wird gewährleistet, dass sich der Preis p_{21} dem Wert null annähert. Wird nun ein noch größerer Parameter a dergestalt gewählt, dass der Nenner früher gegen null strebt als der Zähler, dann strebt der Preis p_{21} mit steigendem D_1 gegen unendlich. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Parameter a so groß gewählt wird, dass die Nullstelle von $\Psi_{p_{21}}$ zwischen null und $\widehat{D_1}$ liegt. Für die Nullstelle selbst wäre der Preis p_{21} dann nicht definiert und für Investments D_1 größer als diese Nullstelle würden sich solange Preise $p_{21} < 0$ ergeben, bis auch der Zähler negativ wird. In diesem Fall die Nullstelle als $\overline{D}_1$ zu setzen und somit $p_{21} = V - S_{21}$ für $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ zu sichern, führt hier auch nicht zu einer zufriedenstellenden Lösung: Es müsste immer noch ökonomisch begründet werden, warum für Investments D_1 mit $D_1 < \overline{D}_1$ der Preis p_{21} mit steigendem D_1 letztendlich gegen unendlich strebt und dann für $D_1 = \overline{D}_1$ abrupt auf $p_{21} = V - S_{21}$ abfällt. Für sinnvolle Ergebnisse im Fall (1) muss daher $\Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) > 0$ gefordert werden. Für den Parameter a muss somit gelten:

$$a < 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}. \tag{4.25}$$

Bedingung (4.25) ergibt sich direkt durch Auflösen der Bedingung $\Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) > 0$ nach dem Parameter a.[71] Für sinnvolle und ökonomisch noch begründbare Ergebnisse ist daher die Bedingung (4.25) für den Parameter a unbedingt einzuhalten.[72] Wird ein Parameter a nahe dieser Grenze gewählt, dann kommt es bei Überschreitung von $\widehat{D_1}$ relativ schnell zu einer Abnahme des Preises p_{21}. Graphisch gesehen bedeutet die Einhaltung von Bedingung (4.25), dass der Schnittpunkt der Funktionen $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ und $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ in Abbildung 4.1 oberhalb der Abszisse liegt. Ökonomisch gesehen sorgt die

[71] Alternativ kann auch die Bedingung $\Gamma_{p_{21}}(\widehat{D_1}) > 0$ nach a aufgelöst werden. Dies führt ebenfalls zur Bedingung (4.25), da beide Funktionen an der Stelle $\widehat{D_1}$ übereinstimmen.

[72] Es gilt $\Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) = 0 \Leftrightarrow a = 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}$. Nach Anhang C.1 ist p_{21} dann linear in D_1. Da p_{21} nach (4.7) dann an der Stelle $\widehat{D_1} < F_1$ nicht definiert ist, wird dieser Fall hier auch ausgeschlossen.

Bedingung dafür, dass bei der Ermittlung des Preises p_{21} mit steigendem D_1 letztendlich der Effekt eines höheren Preises p_1 irgendwann überwiegt und somit die relative Wertentwicklung x_{Z_1} bzw. der Preis p_{21} mit steigendem D_1 wieder abnimmt. Bedingung (4.25) schränkt den Parameter a nicht so stark ein wie Bedingung (4.15).[73] Folglich ist durch das Einhalten von Bedingung (4.25) der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen. Abbildung 4.2 veranschaulicht die drei zu Abbildung 4.1 zugehörigen Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1.[74]

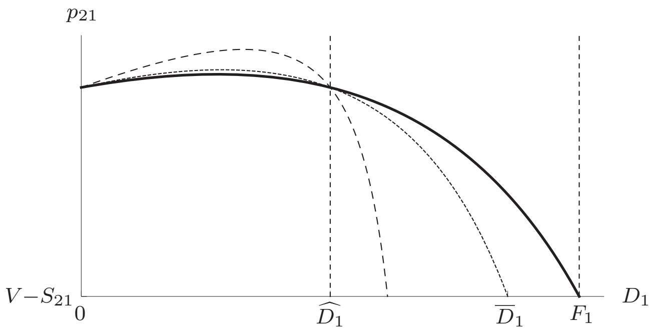


Abbildung 4.2: Preisverläufe im Fall (1)

Die Abszisse stellt hier die Untergrenze des Preises $p_{21} = V - S_{21}$ dar. Für die Grenze $\overline{D}_1$, ab welcher der vollständige Mittelabzug erfolgt, gilt im Fall der durchgezogenen Geraden $\overline{D}_1 = F_1$. Mit steigendem Parameter a wird diese Grenze $\overline{D}_1$ immer kleiner und für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ trifft $p_{21} = V - S_{21}$ zu.[75] Dabei gilt jedoch stets $\overline{D}_1 > \widehat{D}_1$.[76] Abbildung 4.2 veranschaulicht hier insbesondere auch die Höhe des von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 zur Verfügung gestellten Betrages F_{21}, denn es gilt entsprechend $p_{21} = V - S_{21} + F_{21} \Leftrightarrow F_{21} = p_{21} - (V - S_{21})$. Der Verlauf von F_{21} entspricht somit genau dem Verlauf des Preises p_{21} in Abhängigkeit von D_1, nur parallel verschoben um den Betrag $V - S_{21}$.[77]

[73] Mit $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} > S_1$ ist der Nenner in (4.25) bzw. in (4.15) positiv und es gilt: $1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1} > 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1} \Leftrightarrow (V - S_1) \cdot (S_{21} - S_1 + F_1) > (V - S_{21}) \cdot (S_1 - S_{21} + F_1)$. Mit $V - S_1 > V - S_{21} \Leftrightarrow S_{21} > S_1$ und $S_{21} - S_1 + F_1 > S_1 - S_{21} + F_1 \Leftrightarrow S_{21} > S_1$ ist die Ungleichung erfüllt.

[74] Der Abbildung 4.2 liegen dieselben Daten wie der Abbildung 4.1 zugrunde. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 3$, $a = 3,75$ und $a = 6$ verwendet. Vgl. Fußnote 60, Kapitel 4, S. 160.

[75] Der Übersicht halber wurde $\overline{D}_1$ nur für den mittleren Parameter $a = 3,75$ in der Grafik gekennzeichnet. Ebenso wurde für die beiden größeren Parameter der Verlauf für $D_1 > \overline{D}_1$ nicht dargestellt.

[76] Dies wird insbesondere durch das Einhalten von Bedingung (4.25) gewährleistet, welche dafür sorgt, dass der Preis p_{21} mit steigendem D_1 irgendwann wieder abnimmt.

[77] Der Betrag $V - S_{21}$ muss von jedem Funktionswert subtrahiert werden bzw. in Abbildung 4.2 muss $V - S_{21}$ durch null ersetzt werden.

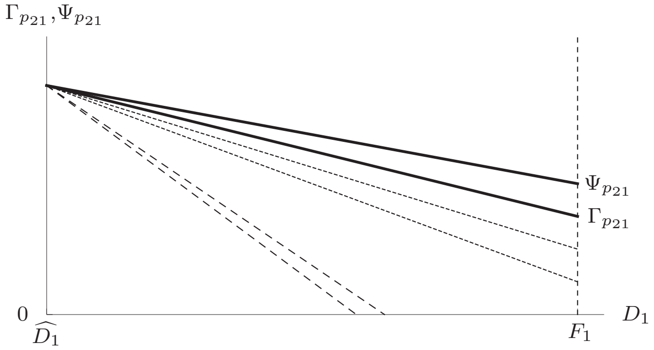


Abbildung 4.3: Fall (2): $S_{21} > S_1$ und $F_1 = S_{21} - S_1$

In Abbildung 4.3 bzw. im Fall (2) stimmen die beiden Geraden jeweils an der Stelle $D_1 = 0$ überein.[78] Nur in diesem Punkt gilt folglich $p_1 = p_{21}$ und $x_{Z_1} = 1$.[79] Für D_1 mit $0 < D_1 \leq F_1$ ist der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ immer kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch der Preis p_{21} in diesem Bereich kleiner als der Preis p_1 ist. Für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ bedeutet dies eine negative relative Wertentwicklung $x_{Z_1} < 1$ und folglich einen Mittelabfluss. Bedingt durch $\Gamma_{p_{21}}(0) = \Psi_{p_{21}}(0)$ im Fall (2) und durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden betragsmäßig zu. Für $D_1 = F_1$ erfolgt letztendlich im Fall der durchgezogenen Geraden der vollständige Mittelabzug in Form von $F_{21} = 0$.

Für $D_1 = 0$ gilt $p_1 = V - S_1$ und $p_{21} = V - S_{21} + F_1$. Mit $F_1 = S_{21} - S_1$ im Fall (2) folgt $p_{21} = V - S_{21} + S_{21} - S_1 = V - S_1$ und es gilt $p_1 = p_{21}$. Das bedeutet, investiert der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 den Betrag $D_{21} = F_{21} = F_1$, dann kann gerade so eben ein Preis p_{21} in Höhe des Preises p_1 erzielt werden. Wählt der Arbitrageur ein Investment $D_1 > 0$, dann wird ein Preis $p_{21} < p_1$ erzielt, da nach Abbildung 4.3 für $D_1 > 0$ der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ ist. Daraus folgt unmittelbar auch $x_{Z_1} < 1$, wodurch dem Arbitrageur dann auch nur noch ein Betrag $F_{21} < F_1$ zur Verfügung gestellt wird. Das bedeutet, im Gegensatz zum Fall (1) besteht im Fall (2) mit keinem Investment D_1 die Möglichkeit, einen Betrag $F_{21} > F_1$ zur Verfügung gestellt zu bekommen. Der negative Einfluss der Erhöhung des Preises p_1 auf die relative Wertentwicklung x_{Z_1} überwiegt hier und führt sofort

[78] Abbildung 4.3 liegen die folgenden Daten zugrunde: $V = 1$, $F_1 = 0,1$, $S_1 = 0,3$ und $S_{21} = 0,4$. Im Vergleich zum Fall (1) wurde der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 entsprechend vermindert. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 4$, $a = 6$ und $a = 12$ verwendet.

[79] Es gilt somit $\widehat{D_1} = 0$. Vgl. dazu auch Tabelle 4.3, S. 158.

zu einem Rückgang des Preises p_{21}. Im Fall der durchgezogenen Geraden nimmt p_{21} letztendlich auch so weit ab, dass für $D_1 = F_1$ der vollständige Mittelabzug erfolgt.

Durch die gestrichelten Geraden wird in Abbildung 4.3 wiederum jeweils eine Situation dargestellt, in welcher ein noch größerer Parameter a als nach Satz 74 herangezogen wurde. Auch hier hat die betragsmäßig größere Steigung keinen Einfluss auf die Differenz zwischen den beiden Geraden. Dadurch, dass sowohl $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ als auch $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ bei einem höherem Parameter a um den gleichen Betrag abnehmen, wird der Quotient aus den beiden Größen für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ entsprechend kleiner, da in diesem Bereich der Zähler kleiner als der Nenner ist. Somit ergibt sich auch im Fall (2) mit einem größeren Parameter a für jedes Investment D_1 im Bereich $0 = \widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ ein kleinerer bzw. maximal gleich hoher Preis p_{21}. Je höher der Parameter a gewählt wird, umso schneller bzw. stärker nimmt der Preis p_{21} mit steigendem D_1 ab.

Bei einem Parameter a nach Satz 74 erfolgt im Fall (2) für ein Investment $D_1 = F_1$ der vollständige Mittelabzug. Auch hier ergibt sich für jedes Investment D_1 im Bereich $0 = \widehat{D_1} < D_1 < F_1$ bei einem größeren Parameter a nun ein entsprechend kleinerer Preis p_{21}. Analog muss daher bei einem größeren Parameter a der vollständige Mittelabzug bereits für ein Investment $\overline{D}_1 < F_1$ erfolgen. Nach Abbildung 4.3 ist für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ der Zähler immer kleiner als der Nenner. Dadurch ist gesichert, dass sich der Preis p_{21} mit steigendem Investment D_1 dem Wert null annähert. Ist Bedingung (4.15) verletzt, dann erfolgt ab der Grenze $\overline{D}_1$ der vollständige Mittelabzug und es gilt $p_{21} = V - S_{21}$ für alle Investments D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$. Ein größerer Parameter a bewirkt nur, dass der vollständige Mittelabzug noch früher erfolgt bzw. dass $\overline{D}_1$ hier entsprechend kleiner ist im Vergleich zu einem Fall mit einem kleineren Parameter a. Es muss somit keine Einschränkung des Parameters a erfolgen, damit das Modell hier im Fall (2) noch sinnvolle Ergebnisse liefert.

Bedingung (4.25) kann nicht angewendet werden, da sie für $F_1 = S_{21} - S_1$ nicht definiert ist. Allerdings kann in Verbindung mit Bedingung (4.25) der Fall (2) als Grenzfall von Fall (1) interpretiert werden: Je kleiner F_1 im Fall (1) mit $F_1 > S_{21} - S_1$ ist, umso größer darf der Parameter a nach Bedingung (4.25) letztendlich sein. Für F_1 gegen $S_{21} - S_1$ strebt die rechte Seite der Bedingung (4.25) gegen unendlich. Der Fall (2) ist somit relativ unproblematisch zu handhaben. Abbildung 4.4 veranschaulicht die drei zu Abbildung 4.3 zugehörigen Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1.[80]

[80] Der Abbildung 4.4 liegen dieselben Daten wie der Abbildung 4.3 zugrunde. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 4$, $a = 6$ und $a = 12$ verwendet. Vgl. Fußnote 78, Kapitel 4, S. 166.

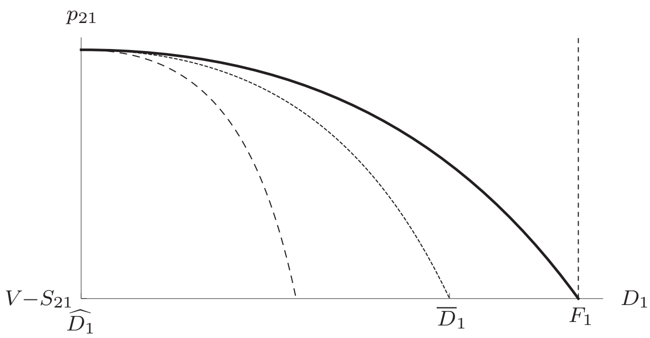


Abbildung 4.4: Preisverläufe im Fall (2)

Die Preisverläufe ähneln hier den Verläufen im Fall (1) in Abbildung 4.2 bezogen auf D_1 im Bereich $\widehat{D_1} \leq D_1 \leq F_1$. Die Abszisse stellt hier wiederum die Untergrenze des Preises $p_{21} = V - S_{21}$ dar und im Fall der durchgezogenen Kurve erfolgt der vollständige Mittelabzug erst für $\overline{D}_1 = F_1$. Mit steigendem Parameter a wird diese Grenze $\overline{D}_1$ immer kleiner und für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ trifft $p_{21} = V - S_{21}$ zu.[81] Allerdings besitzt der Preis p_{21} unabhängig von der konkreten Höhe des Parameters $a > 1$ im Fall (2) sein lokales Maximum immer an der Stelle $D_1 = 0$ mit $p_{21} = p_1$.[82] Für $D_1 = 0$ trifft $F_{21} = F_1$ zu, woraus $p_{21} > V - S_{21}$ und somit auch $\overline{D}_1 > \widehat{D_1} = 0$ folgt.

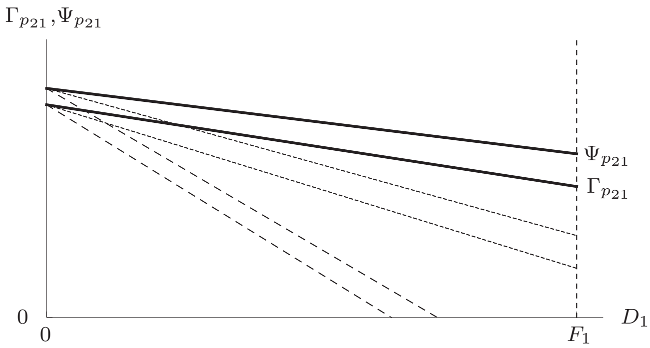


Abbildung 4.5: Fall (3): $S_{21} > S_1$ und $F_1 < S_{21} - S_1$

[81]Der Übersicht halber wurde $\overline{D}_1$ auch hier nur für den mittleren Parameter $a = 6$ in der Grafik gekennzeichnet. Der Verlauf für $D_1 > \overline{D}_1$ wurde bei den beiden größeren Parametern ebenfalls aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.

[82]Es handelt sich hierbei um ein echtes lokales Extremum und nicht nur um die Randstelle des Definitionsbereiches. Vgl. Anhang C.3.

In Abbildung 4.5 bzw. im Fall (3) schneiden sich die beiden Geraden nie im Bereich zwischen null und F_1.[83] Folglich stimmen hier für kein Investment D_1 mit $0 \leq D_1 \leq F_1$ die Preise p_1 und p_{21} überein. Der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ ist hier im gesamten Definitionsbereich von D_1 immer kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch auch der Preis p_{21} immer kleiner als der Preis p_1 ist. Bedingt durch $\Gamma_{p_{21}}(0) < \Psi_{p_{21}}(0)$ und durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden betragsmäßig zu. Für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ bedeutet dies eine negative relative Wertentwicklung $x_{Z_1} < 1$ und folglich einen Mittelabfluss. Mit $D_1 = 0$ ist es hier jedoch analog zum Fall (2) trotz $p_{21} < p_1$ möglich, im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 wiederum einen Betrag $F_{21} = F_1$ zur Verfügung gestellt zu bekommen, da $D_1 = 0$ immer zu einer relativen Wertentwicklung in Höhe von $x_{Z_1} = 1$ führt.[84] Für $D_1 = F_1$ erfolgt letztendlich auch hier im Fall der durchgezogenen Geraden der vollständige Mittelabzug in Form von $F_{21} = 0$.

Investiert der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 1$ nicht in den Vermögensgegenstand und wählt entsprechend $D_1 = 0$, dann bekommt er zwar im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 wiederum den Betrag F_1 zur Verfügung gestellt. Jedoch selbst unter der Annahme, dass der Arbitrageur diesen Betrag dann vollständig investiert und somit $D_{21} = F_{21} = F_1$ wählt, ergibt sich nur ein Preis $p_{21} < p_1$, da mit $F_1 < S_{21} - S_1$ hier $p_{21} = V - S_{21} + F_1 < V - S_{21} + S_{21} - S_1 = V - S_1 = p_1$ folgt. Der negative Einfluss der Erhöhung des Preises p_1 auf die relative Wertentwicklung x_{Z_1} überwiegt auch hier und führt sofort zu einem Rückgang des Preises p_{21}. Dies liegt daran, dass im Fall (3) die Zunahme des Noise trader shocks um $S_{21} - S_1$ durch den relativ kleinen zur Verfügung gestellten Betrag $F_1 < S_{21} - S_1$ selbst im Fall $D_1 = 0$ nicht kompensiert werden kann. Wählt der Arbitrageur ein Investment $D_1 > 0$, dann bekommt er analog zum Fall (2) nur noch einen Betrag $F_{21} < F_1$ zur Verfügung gestellt.

Durch die gestrichelten Geraden wird in Abbildung 4.5 auch hier jeweils eine Situation dargestellt, in welcher ein noch größerer Parameter a als nach Satz 74 herangezogen wurde. Da im Fall (3) analog zum Fall (2) der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ immer kleiner als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ ist, können die Ausführungen zum Parameter a im Fall (2) direkt auf den Fall (3) übertragen werden.[85] Demzufolge muss auch hier keine Einschränkung des Parameters a erfolgen.

[83] Abbildung 4.5 liegen die folgenden Daten zugrunde: $V = 1$, $F_1 = 0,05$, $S_1 = 0,3$ und $S_{21} = 0,4$. Im Vergleich zu den vorangegangenen Fällen wurde der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 nochmals vermindert. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 5$, $a = 10$ und $a = 20$ verwendet.

[84] Vgl. Satz 15. Die Übereinstimmung der Preise p_1 und p_{21} ist dafür nicht zwingend erforderlich.

[85] Im Fall (3) gilt zusätzlich $\Gamma_{p_{21}}(0) < \Psi_{p_{21}}(0)$.

Bedingung (4.25) besitzt hier keine Gültigkeit, da im Fall (3) kein Schnittpunkt $\widehat{D_1}$ im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ existiert.[86] Der Fall (3) ist somit noch unproblematischer zu handhaben als der Fall (2). Abbildung 4.6 veranschaulicht die drei zu Abbildung 4.5 zugehörigen Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1.[87]

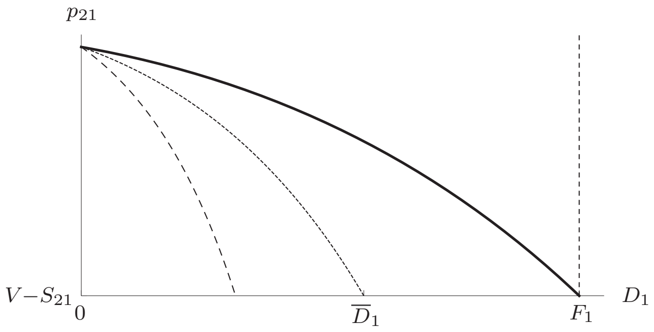


Abbildung 4.6: Preisverläufe im Fall (3)

Die Preisverläufe ähneln hier sehr den Verläufen im Fall (2) in Abbildung 4.4. Mit steigendem Parameter a wird die Grenze $\overline{D}_1$ immer kleiner und für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ trifft $p_{21} = V - S_{21}$ zu. Auch hier besitzt der Preis p_{21} unabhängig von der konkreten Höhe des Parameters $a > 1$ sein Maximum stets an der Stelle $D_1 = 0$. Allerdings handelt es sich bei diesem Maximum nur um die Randstelle des Definitionsbereiches.[88] Für $D_1 = 0$ folgt wiederum $p_{21} > V - S_{21}$ und somit $\overline{D}_1 > 0$.

In den Fällen (4) und (5) bezieht sich die Stabilitätsbedingung zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs jeweils auf den Nenner in (4.7).[89] Daher kann hier nicht der Parameter $a = 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ zur Darstellung der durchgezogenen Geraden herangezogen werden, da dann für $D_1 = F_1$ Gleichung (4.7) für den Preis p_{21} nicht definiert wäre.[90] Somit stellen sowohl die durchgezogenen als auch die gestrichelten Geraden eine Situation dar, in welcher der vollständige Mittelabzug durch $a < 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ ausgeschlossen ist. Die gestrichelten Geraden repräsentieren allerdings jeweils eine Situation, in welcher ein größerer Parameter a gewählt wurde als bei den durchgezogenen Geraden.

[86] Vgl. Anhang C.3, insbesondere Gleichung (C.6) und die sich daran anschließenden Ausführungen.

[87] Der Abbildung 4.6 liegen dieselben Daten wie der Abbildung 4.5 zugrunde. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 5$, $a = 10$ und $a = 20$ verwendet. Vgl. Fußnote 83, Kapitel 4, S. 169.

[88] Vgl. Anhang C.3. Das lokale Maximum liegt an einer Stelle $D_1 < 0$.

[89] In beiden Fällen muss letztendlich Bedingung (4.8) erfüllt sein: Im Fall (4) mit $S_{21} = S_1$ sind die drei Stabilitätsbedingungen (4.8), (4.10) und (4.15) identisch.

[90] Für $D_1 = F_1$ gilt mit $a = 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ für den Nenner in (4.7): $\Psi_{p_{21}}(F_1) = V - S_1 + (1-a) \cdot F_1 = V - S_1 + (1 - (1 + \frac{V-S_1}{F_1})) \cdot F_1 = 0$.

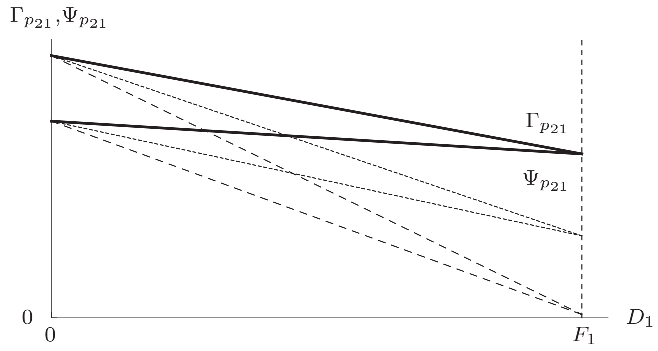


Abbildung 4.7: Fall (4): $S_{21} = S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$

In Abbildung 4.7 bzw. im Fall (4) stimmen die beiden Noise trader shocks mit $S_{21} = S_1$ in der Höhe ihrer Ausprägung überein.[91] Für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < F_1$ ist der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ immer größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch auch der Preis p_{21} in diesem Bereich größer als der Preis p_1 ist und somit durch $x_{Z_1} > 1$ im Bereich $0 < D_1 < F_1$ ein Mittelzufluss erfolgt.[92] Bedingt durch $\Gamma_{p_{21}}(0) > \Psi_{p_{21}}(0)$ und durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden bis zum Schnittpunkt an der Stelle $\widehat{D_1} = F_1$ betragsmäßig ab.[93] Im Fall (4) stimmen folglich für $D_1 = F_1$ der Preis p_1 und der Preis p_{21} immer überein.

Sowohl für $D_1 = 0$ als auch für $D_1 = \widehat{D_1} = F_1$ trifft hier $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ zu.[94] Für D_1 im Bereich $0 < D_1 < F_1$ gilt mit $x_{Z_1} > 1$ entsprechend $p_{21} > V - S_{21} + F_1$.[95] Zudem besitzt der Preis p_{21} in diesem Bereich genau ein lokales Maximum.[96] Ausgehend von $D_1 = 0$ im Fall (4) nimmt der Preis p_{21} mit steigendem D_1 somit zunächst zu. Wegen des negativen Einflusses des Preises p_1 auf die relative Wertentwicklung nimmt der Preis p_{21} dann jedoch ab einer bestimmten Stelle D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ wieder ab, bis letztendlich für $D_1 = F_1$ wiederum $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ zutrifft. Demnach liegt für den gesamten Definitionsbereich von D_1 eine nicht negative relative Wertentwicklung $x_{Z_1} \geq 1$ vor und somit ein Preis $p_{21} \geq p_1$. Folglich ist im Fall (4) der vollständige

[91] Abbildung 4.7 liegen die folgenden Daten zugrunde: $V = 1$, $F_1 = 0,2$, $S_1 = 0,4$ und $S_{21} = 0,4$. Bis auf den Noise trader shock S_1 im Zeitpunkt $t = 1$ entsprechen die Werte hier den Werten aus dem Fall (1). Um $S_{21} = S_1$ zu erreichen, wurde S_1 erhöht. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 1,5$, $a = 2,75$ und $a = 3,95$ verwendet.

[92] Für $D_1 = 0$ gilt $x_{Z_1} = 1$.

[93] Nach (4.23) gilt $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1$. Mit $S_{21} = S_1$ folgt $\widehat{D_1} = F_1$.

[94] Nach Satz 15 ergibt sich in beiden Fällen $x_{Z_1} = 1$, woraus unmittelbar $D_{21} = F_{21} = F_1$ folgt.

[95] Satz 75 mit Gleichung (4.24) trifft hier ebenfalls zu.

[96] Vgl. Anhang C.3.1.

Mittelabzug nicht nur ausgeschlossen, sondern es wird dem Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 auch mindestens der Betrag F_1 zur Verfügung gestellt, woraus mit $D_{21} = F_{21} \geq F_1$ entsprechend $p_{21} \geq V - S_{21} + F_1$ resultiert.

Durch die gestrichelten Geraden wird in Abbildung 4.7 jeweils wiederum eine Situation dargestellt, in welcher ein noch größerer Parameter a als bei den durchgezogenen Geraden herangezogen wurde. Dadurch, dass der Zähler und der Nenner bei einem größeren Parameter a um den gleichen Betrag abnehmen, wird der Quotient aus den beiden Größen für D_1 im Bereich $0 < D_1 < F_1$ entsprechend größer, da der Zähler in diesem Bereich größer als der Nenner ist. Dies hat zur Folge, dass sich für jedes Investment D_1 im Bereich $0 < D_1 < F_1$ nun auch ein höherer Preis p_{21} ergibt. Das bedeutet, je höher der Parameter a gewählt wird, umso größer ist auch das Maximum des Preises p_{21} in diesem Bereich. Das Investment D_1, für welches der Preis p_{21} maximal wird, hängt dabei jedoch vom Parameter a ab.[97]

Damit der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ nicht schneller gegen null strebt als der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$, muss der Schnittpunkt der beiden Geraden in Abbildung 4.7 oberhalb der Abszisse liegen. Analog zum Fall (1) muss hier folglich $\Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) > 0$ gefordert werden. Mit $\widehat{D_1} = F_1$ ergibt sich durch Auflösen der Bedingung $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0$ nach a letztendlich die Stabilitätsbedingung (4.10).[98] Das bedeutet, durch die Bedingung (4.10) wird hier zum einen gesichert, dass das Modell im Fall (4) sinnvolle Ergebnisse liefert und zum anderen verhindert, dass ein vollständiger Mittelabzug erfolgt.[99]

Mit $S_{21} = S_1$ erfüllt der Parameter a hier auch die Bedingung (4.25), welche sich zu $a < 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ vereinfacht und durch $S_1 = S_{21}$ mit Bedingung (4.10) identisch ist. Ein Einhalten der Bedingung (4.25) bzw. der Bedingung (4.10) sorgt auch hier dafür, dass bei der Ermittlung des Preises p_{21} mit steigendem D_1 der Effekt eines höheren Preises p_1 letztendlich irgendwann überwiegt und somit die relative Wertentwicklung x_{Z_1} bzw. der Preis p_{21} mit steigendem D_1 wieder abnimmt. Abbildung 4.8 veranschaulicht die drei zu Abbildung 4.7 zugehörigen Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1.[100]

Nach Abbildung 4.8 liegt das lokale Maximum des Preises p_{21} mit $a > 1$ immer an einer Stelle D_1 im Bereich $\frac{F_1}{2} < D_1 < F_1$.[101] Mit steigendem Parameter a ergeben

[97] Vgl. Gleichung (C.6).

[98] Es gilt: $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0 \Leftrightarrow V - S_1 + (1-a) \cdot F_1 > 0 \Leftrightarrow a < 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$. Dies entspricht genau Bedingung (4.8). Mit $S_1 = S_{21}$ ist Bedingung (4.8) jedoch mit Bedingung (4.10) identisch.

[99] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150.

[100] Der Abbildung 4.8 liegen dieselben Daten wie der Abbildung 4.7 zugrunde. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 1,5$, $a = 2,75$ und $a = 3,95$ verwendet. Vgl. Fußnote 91, Kapitel 4, S. 171.

[101] Für $a = 1$ liegt das Maximum an der Stelle $D_1 = \frac{F_1}{2}$ (vgl. Anhang C.4).

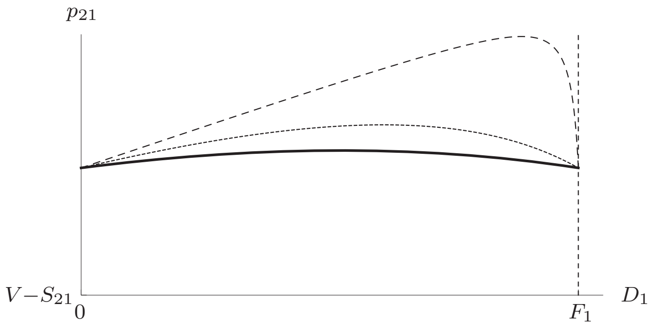


Abbildung 4.8: Preisverläufe im Fall (4)

sich in diesem Bereich stets höhere Werte für den Preis p_{21}. Das lokale Maximum liegt allerdings nicht an einer festen Stelle, sondern verlagert sich mit steigendem Parameter a immer weiter nach rechts bzw. nähert sich der Stelle $D_1 = F_1$ an. Die Einschränkung des Parameters a durch Bedingung (4.10) verhindert letztendlich beliebig hohe Werte für den Preis p_{21}. Dennoch ist es auch unter der Einhaltung von Bedingung (4.10) prinzipiell möglich, dass der Preis p_{21} für sehr hohe Parameter a Werte größer als V annimmt.[102]

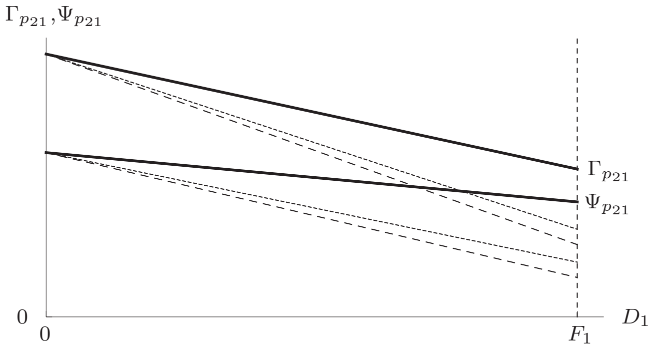


Abbildung 4.9: Fall (5): $S_{21} < S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$

In Abbildung 4.9 bzw. im letzten Fall (5) ist der Noise trader shock S_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 hier nun entsprechend kleiner als der Noise trader shock S_1 im

[102]Bei den Daten, welche den Abbildungen 4.7 und 4.8 zugrunde liegen, ist dies beispielsweise für $a = 3,95$ der Fall (vgl. Fußnote 91, Kapitel 4, S. 171): Mit $a = 3,95 < 4$ ist Bedingung (4.10) erfüllt. Nach Gleichung (C.6) wird der Preis p_{21} an der Stelle $D_1 = 0,177132$ maximal, woraus nach (4.7) ein Preis $p_{21} = 1,006558 > V$ folgt. Für Parameter a im Bereich $3,95 < a < 4$ wird der Preis p_{21} an einer Stelle D_1 mit $0,177132 < D_1 < F_1$ maximal mit einem Maximum größer als $1,006558$.

Zeitpunkt $t = 1$.[103] Für D_1 mit $0 \leq D_1 \leq F_1$ ist der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ immer größer als der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$, wodurch auch der Preis p_{21} in diesem Bereich größer als der Preis p_1 ist und somit durch $x_{Z_1} > 1$ im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ ein Mittelzufluss erfolgt.[104] Bedingt durch $\Gamma_{p_{21}}(0) > \Psi_{p_{21}}(0)$ und durch die betragsmäßig größere Steigung von $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ nimmt mit steigendem D_1 die Differenz zwischen den beiden Geraden betragsmäßig ab. Mit $S_{21} < S_1$ gilt jedoch $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1 > F_1$. Das bedeutet, die Stelle des Schnittpunktes der beiden Geraden ist im Fall (5) immer größer als F_1. Folglich stimmen der Preis p_1 und der Preis p_{21} an keiner Stelle in dem für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ überein, so dass hier selbst im Fall $D_1 = F_1$ immer noch $p_{21} > p_1$ zutrifft.

Im Fall (5) bekommt der Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 somit immer einen Betrag $F_{21} > F_1$ von dem Investor zur Verfügung gestellt, wenn im Zeitpunkt $t = 1$ ein Investment $D_1 > 0$ getätigt wird. Nur wenn der Arbitrageur nicht investiert und $D_1 = 0$ wählt, erhält er lediglich den Minimalbetrag $F_{21} = F_1$. Analog zum Fall (4) ist im Fall (5) der vollständige Mittelabzug nicht nur ausgeschlossen, sondern es wird dem Arbitrageur im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 auch mindestens der Betrag F_1 zur Verfügung gestellt. Der Preis p_{21} ist hier allerdings nur für $D_1 = 0$ minimal mit $p_{21} = V - S_{21} + F_1$. Für alle anderen D_1 mit $0 < D_1 \leq F_1$ gilt $p_{21} > V - S_{21} + F_1$.

Durch die gestrichelten Geraden in Abbildung 4.9 wird wiederum jeweils eine Situation dargestellt, in welcher ein noch größerer Parameter a als bei den durchgezogenen Geraden herangezogen wurde. Ein größerer Parameter a besitzt hier den gleichen Einfluss auf den Quotienten aus $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$ und $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ wie im vorangegangenen Fall (4). Je höher der Parameter a gewählt wird, umso größer wird letztendlich der Preis p_{21} für jedes Investment D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$.[105]

Problematisch ist im Fall (5), dass der Nenner $\Psi_{p_{21}}(D_1)$ schneller gegen null strebt als der Zähler $\Gamma_{p_{21}}(D_1)$, da für den Schnittpunkt der beiden Geraden $\widehat{D_1} > F_1$ zutrifft und $\Gamma_{p_{21}}(D_1) > \Psi_{p_{21}}(D_1)$ für alle D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ gilt. Um sinnvolle Ergebnisse im Rahmen des Modells zu erhalten, muss hier mindestens die Bedingung $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0$ erfüllt sein, da die Funktion $\Psi_{p_{21}}$ im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ für $D_1 = F_1$ minimal wird. Durch Auflösen der Bedingung $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0$ nach a ergibt sich die

[103] Abbildung 4.9 liegen die folgenden Daten zugrunde: $V = 1$, $F_1 = 0,2$, $S_1 = 0,5$ und $S_{21} = 0,4$. Bis auf den Noise trader shock S_1 im Zeitpunkt $t = 1$ entsprechen die Werte hier den Werten aus dem Fall (1) bzw. aus dem Fall (4). Um $S_{21} < S_1$ zu erreichen, wurde S_1 nochmals erhöht. Für den Parameter a wurden die Werte $a = 1,75$, $a = \frac{8}{3}$ und $a = 2,9$ verwendet.

[104] Für $D_1 = 0$ gilt wiederum $x_{Z_1} = 1$.

[105] Anders als im Fall (4) trifft dies hier im Fall (5) allerdings auch für $D_1 = F_1$ zu.

einfache Stabilitätsbedingung (4.8).[106] Die Wahl eines Parameters a nahe dieser Grenze in Bedingung (4.8) hat allerdings zur Folge, dass sich im Fall $D_1 = F_1$ sehr hohe Preise p_{21} ergeben. Dies liegt daran, dass der Nenner $\Psi_{p_{21}}(F_1)$ in diesem Fall fast null ist und der immer noch deutlich positive Zähler $\Gamma_{p_{21}}(F_1)$ ein Vielfaches des Nenners beträgt. In diesem Fall wird dann p_{21} maximal für $D_1 = F_1$.

Derart hohe Preise p_{21} werden somit genau dann erzielt, wenn der Parameter a zwar gerade eben noch die Bedingung (4.8) erfüllt, der Schnittpunkt der beiden Geraden $\widehat{D_1} > F_1$ aber graphisch gesehen schon deutlich unterhalb der Abszisse liegt. Ist dies der Fall, dann strebt der Preis p_{21} rein rechnerisch gegen unendlich, wenn sich D_1 der Nullstelle der Funktion $\Psi_{p_{21}}$ nähert. Zwar ist durch das Einhalten der Bedingung (4.8) diese Nullstelle größer als F_1. Dennoch können sich in diesem Fall sehr hohe Werte für p_{21} ergeben. Der negative Einfluss des Preises p_1 auf die relative Wertentwicklung tritt somit nicht in Erscheinung, wenn der Schnittpunkt unterhalb der Abszisse liegt.

Auch wenn sich der Schnittpunkt mit $\widehat{D_1} > F_1$ außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches befindet, so ist es aus den dargelegten Gründen sinnvoll, den Parameter a derart zu beschränken, dass der Schnittpunkt an der Stelle $\widehat{D_1}$ oberhalb der Abszisse liegt. Nur dann ist gewährleistet, dass der Preis p_{21} für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ nicht allzu große Werte annimmt und an der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ rein funktional den Wert $p_{21} = V - S_{21} + \widehat{D_1}$ annimmt. Formal gewährleistet ist dies, wenn die Bedingung $\Psi_{p_{21}}(\widehat{D_1}) > 0$ erfüllt ist. Aufgelöst nach dem Parameter a ergibt sich Bedingung (4.25), welche auch schon im Fall (1) Gültigkeit besitzen muss. Diese Bedingung schränkt den Parameter a durch $S_{21} < S_1$ noch stärker ein als die Bedingung (4.8).[107]

Die Beschränkung des Parameters a durch Bedingung (4.25) gewährleistet weiterhin, dass der Preis p_{21} für D_1 im Bereich $\frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2} < D_1 < \widehat{D_1}$ ein lokales Maximum annimmt.[108] Mit $\widehat{D_1} > F_1$ liegt dieses lokale Maximum jedoch nicht zwangsläufig im für D_1 zulässigen Bereich. Dazu muss der Parameter a noch die folgende Bedingung erfüllen:[109]

$$a \leq 1 + \frac{V - S_1}{F_1} - \frac{(S_1 - S_{21}) \cdot (V - S_1)}{F_1^2}. \tag{4.26}$$

[106] Es gilt: $\Psi_{p_{21}}(F_1) > 0 \Leftrightarrow V - S_1 + (1 - a) \cdot F_1 > 0 \Leftrightarrow a < 1 + \frac{V - S_1}{F_1}$.
[107] Mit $S_{21} < S_1$ folgt $1 + \frac{V - S_1}{F_1} > 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}$.
[108] Für $a = 1$ liegt das Maximum an der Stelle $D_1 = \frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2}$ (vgl. Anhang C.4).
[109] Vgl. Anhang C.3.2.

Trifft der Gleichheitsfall in (4.26) zu, dann liegt das Maximum von p_{21} genau an der Stelle $D_1 = F_1$. Bedingung (4.26) schränkt den Parameter a wiederum noch stärker ein als Bedingung (4.25).[110] Ein Einhalten der Ungleichung in (4.26) sorgt dafür, dass bei der Ermittlung des Preises p_{21} mit steigendem D_1 letztendlich der Effekt eines höheren Preises p_1 irgendwann überwiegt und somit der Preis p_{21} mit steigendem D_1 wieder abnimmt. Ein vollständiger Mittelabzug ist jedoch bereits durch das Einhalten der Bedingung (4.8) ausgeschlossen. Für $F_1 = S_1 - S_{21}$ ergibt sich nach (4.26) die Bedingung $a \leq 1$, welche somit durch keinen zulässigen Parameter $a > 1$ erfüllt werden kann.[111] Folglich ist es in diesem Fall dann nicht möglich, durch einen entsprechend kleinen Parameter a ein echtes lokales Maximum an einer Stelle $D_1 \leq F_1$ zu erzeugen.[112] Abbildung 4.10 veranschaulicht die drei zu Abbildung 4.9 zugehörigen Preisverläufe in Abhängigkeit von D_1.[113]

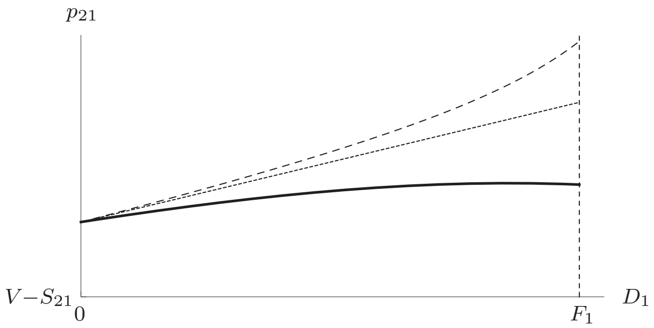


Abbildung 4.10: Preisverläufe im Fall (5)

Der Parameter $a = 1,75$ im Fall des durchgezogenen Preisverlaufes in Abbildung 4.10 genügt hier der Bedingung (4.26) und das lokale Maximum befindet sich somit an einer Stelle $D_1 < F_1$.[114] Für $a = \frac{8}{3}$ ergibt sich in Abbildung 4.10 der Spezialfall, in welchem der Preis p_{21} linear in D_1 ist.[115] Aufgrund der Linearität und der positiven Steigung wird der Preis p_{21} hier maximal für $D_1 = F_1$. Im dritten hier dargestellten

[110] Es gilt: $1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1} > 1 + \frac{V-S_1}{F_1} - \frac{(S_1-S_{21})\cdot(V-S_1)}{F_1^2} \Leftrightarrow \frac{1}{F_1+(S_1-S_{21})} > \frac{F_1-(S_1-S_{21})}{F_1^2}$. Mit $S_{21} < S_1$ folgt hier: $F_1^2 > F_1^2 - (S_1 - S_{21})^2 \Leftrightarrow 0 > -(S_1 - S_{21})^2$.

[111] Für $F_1 < S_1 - S_{21}$ existiert ebenfalls kein zulässiger Parameter a, welcher (4.26) erfüllt.

[112] Für $F_1 < S_1 - S_{21}$ und $a = 1$ liegt das Maximum bei $D_1 = \frac{S_1-S_{21}+F_1}{2} > F_1$ (vgl. Anhang C.4).

[113] Der Abbildung 4.10 liegen dieselben Daten wie der Abbildung 4.9 zugrunde. Es wurden die Werte $a = 1,75$, $a = \frac{8}{3}$ und $a = 2,9$ für den Parameter a verwendet. Vgl. Fußnote 103, Kapitel 4, S. 174.

[114] Nach (4.26) muss gelten $a \leq 1 + \frac{1-0,5}{0,2} - \frac{(0,5-0,4)\cdot(1-0,5)}{0,2^2} = 1 + 2,5 - 1,25 = 2,25$. Das lokale Maximum befindet nach Gleichung (C.6) an der Stelle $D_1 = 0,172253 < 0,2 = F_1$.

[115] Vgl. Anhang C.1. Es gilt $S_{21} < S_1$ und $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1} = 1 + \frac{1-0,5}{0,5-0,4+0,2} = \frac{8}{3}$.

Fall $a = 2,9$ ist der Preisverlauf konvex. Auch hier wird der Preis p_{21} entsprechend maximal für $D_1 = F_1$. Alle drei Parameter a erfüllen jedoch Bedingung (4.8), wodurch hier sinnvolle Ergebnisse für alle zulässigen Werte von D_1 gewährleistet werden.[116] Analog zum Fall (4) ist es hier auch möglich, dass für entsprechend hohe Parameter a der Preis p_{21} Werte größer als V annimmt.[117]

Je nach vorliegendem Fall gestaltet sich somit die Entwicklung des Preises p_{21} recht unterschiedlich. In den vorangegangenen fünf Analysen ist in erster Linie untersucht worden, wie groß der Parameter a maximal sein darf, damit das Modell noch sinnvolle Ergebnisse liefert. Dadurch sollen insbesondere derartige Parameter a vermieden werden, welche dazu führen, dass der Preis p_{21} mit steigendem Investment D_1 gegen unendlich strebt. Tabelle 4.4 fasst die Anforderungen an den Parameter a hinsichtlich sinnvoller Ergebnisse im Rahmen des Modells noch einmal zusammen.

Fall	erforderliche Einschränkung von a	
(1): $S_{21} > S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$	$a < 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}$	Bedingung (4.25)
(2): $S_{21} > S_1$ und $F_1 = S_{21} - S_1$	–	
(3): $S_{21} > S_1$ und $F_1 < S_{21} - S_1$	–	
(4): $S_{21} = S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$	$a < 1 + \frac{V - S_{21}}{F_1}$	Bedingung (4.10)
(5): $S_{21} < S_1$ und $F_1 > S_{21} - S_1$	$a < 1 + \frac{V - S_1}{F_1}$	Bedingung (4.8)

Tabelle 4.4: Einschränkung des Parameters a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse

Im Fall (1) ist eine Einschränkung des Parameters a durch Bedingung (4.25) erforderlich. Ist die Bedingung für den Parameter a nicht erfüllt, dann ist für ein D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ der Preis p_{21} nach (4.7) nicht definiert. Nähert sich im Fall $a > 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}$ das Investment D_1 dieser Definitionslücke, dann strebt der Preis p_{21} gegen unendlich. Um ein derartiges Verhalten auszuschließen, muss Bedingung (4.25) eingehalten werden. Bedingung (4.25) verhindert allerdings nicht den vollständigen

[116] Nach (4.8) muss gelten $a < 1 + \frac{1-0,5}{0,2} = 3,5$.

[117] Vgl. dazu auch das Beispiel in Abschnitt 4.1.4.4.

Mittelabzug, da sie den Parameter a nicht so stark einschränkt wie Bedingung (4.15).[118] Unter Einhaltung von (4.25) liegt im Fall (1) das lokale Maximum des Preises p_{21} immer an einer Stelle D_1 im Bereich $\frac{S_1-S_{21}+F_1}{2} < D_1 < \widehat{D_1}$.[119] In diesem Bereich ergeben sich mit steigendem Parameter a stets höhere Werte für den Preis p_{21}. Analog zum Fall (4) liegt das lokale Maximum nicht an einer festen Stelle, sondern verlagert sich mit steigendem Parameter a immer weiter nach rechts bzw. nähert sich hier der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ an. Auch unter der Einhaltung von Bedingung (4.25) ist es prinzipiell möglich, dass der Preis p_{21} für sehr hohe Parameter a Werte größer als V annimmt.[120]

In den Fällen (2) und (3) sind keine Einschränkungen des Parameters a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse nötig. Wird Bedingung (4.15) durch den Parameter a verletzt, dann erfolgt für $D_1 \geq \overline{D}_1$ ein vollständiger Mittelabzug seitens des Investors, wenn der Zustand Z_1 eintritt. Je höher der Parameter a im Falle der Verletzung von Bedingung (4.15) ist, umso kleiner fällt $\overline{D}_1$ aus.

Im Fall (4) muss der Parameter a die Bedingung (4.10) erfüllen und im Fall (5) die Bedingung (4.8), da bei Verletzung der jeweiligen Bedingung keine sinnvollen Ergebnisse mit dem Modell mehr erzielt werden. Dies verhindert jedoch auch gleichzeitig für $S_{21} \leq S_1$ den vollständigen Mittelabzug. Im Fall (4) gilt für den im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 seitens des Investors zur Verfügung gestellten Betrag $F_{21} \geq F_1$ und im Fall (5) sogar $F_{21} > F_1$ für alle D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$. Um im Fall (5) zusätzlich relativ hohe Werte für p_{21} verhindern zu können, ist eine weitere Beschränkung des Parameters a durch Bedingung (4.25) zu empfehlen. Eine noch weitere Einschränkung des Parameters a gemäß (4.26) sichert zudem im Fall (5) ein Maximum des Preises p_{21} an einer Stelle D_1 im Bereich $\frac{S_1-S_{21}+F_1}{2} < D_1 \leq F_1$. Im Zustand Z_1 ist es indes nur im Fall (5) möglich, dass der Preis p_{21} sein Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$ annimmt.[121]

Der nachfolgende Abschnitt widmet sich nun der Zielfunktion unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs. Von den zuvor besprochenen fünf Fällen sind dabei nur die Fälle (1), (2) und (3) von Bedeutung, da der vollständige Mittelabzug nur in diesen drei Fällen auftreten kann.

[118] Vgl. Fußnote 73, Kapitel 4, S. 165.

[119] Für $a = 1$ liegt das Maximum an der Stelle $D_1 = \frac{S_1-S_{21}+F_1}{2}$ (vgl. Anhang C.4).

[120] Bei den Daten, welche den Abbildungen 4.1 und 4.2 zugrunde liegen, trifft dies beispielsweise für $a = 5,65$ zu, wenn $F_1 = 0,25$ anstelle von $F_1 = 0,2$ gewählt wird (vgl. Fußnote 60, Kapitel 4, S. 160): Mit $a = 5,65 < 5,\overline{6}$ ist Bedingung (4.25) erfüllt. Nach Gleichung (C.6) wird der Preis p_{21} an der Stelle $D_1 = 0,141541$ maximal, woraus sich dann nach Gleichung (4.7) ein Preis $p_{21} = 1,011703 > V$ ergibt. Für Parameter a im Bereich $5,65 < a < 5,\overline{6}$ wird der Preis p_{21} an einer Stelle D_1 mit $0,141541 < D_1 < \widehat{D_1} = 0,15$ maximal mit einem Maximum größer als $1,011703$.

[121] Vgl. dazu auch Anhang C.3.2.

4.1.2.2 Die Zielfunktion unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs

Für $S_{21} = S_1$ und für $S_{21} < S_1$ bzw. im Fall (4) und im Fall (5) ist ein vollständiger Mittelabzug ausgeschlossen. Dementsprechend kann in diesen beiden Fällen der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.19) für D_1 im gesamten Definitionsbereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ zugrunde gelegt werden.

Für $S_{21} > S_1$ bzw. in den Fällen (1) bis (3) ist der vollständige Mittelabzug bei der Wahl eines entsprechend hohen Parameters a nicht ausgeschlossen. Ist die Bedingung (4.15) verletzt, dann gestaltet sich der Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) etwas komplizierter und der Definitionsbereich von D_1 muss in zwei Teilbereiche aufgeteilt werden:

Für D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ kann weiterhin Gleichung (4.19) für den Erwartungswert μ verwendet werden. Für D_1 im zweiten Teilbereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ resultiert jedoch bei Eintritt von Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug und folglich ein Endvermögen in Höhe von null. Gleichung (4.19) unterstellt aber $F_{21} > 0$ bzw. $p_{21} > V - S_{21}$ und besitzt somit für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ keine Gültigkeit mehr.[122] Für D_1 im zweiten Teilbereich nimmt die Maximum-Funktion in der Zielfunktion nach (4.5) den Wert null an, so dass sich für den ersten Summanden in (4.5) insgesamt der Wert null ergibt. Für D_1 mit $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ gilt dann nach (4.5) für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) unter Verwendung einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 die folgende Gleichung, wenn p_1 nach Gleichung (2.5) noch durch den Ausdruck $V - S_1 + D_1$ ersetzt wird:

$$\mu \;=\; (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{V - S_1 + D_1} - 1 \right) \right). \tag{4.27}$$

Mit D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ ist weiterhin der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.19) über D_1 zu maximieren. Die zugehörige Ableitung (4.20) muss gleich null gesetzt und entsprechend nach D_1 aufgelöst werden. Liegt dabei eine Nullstelle im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$, dann handelt es sich hierbei um die optimale Lösung für den ersten Teilbereich, welche im Folgenden mit D_1^{opt1} bezeichnet wird.[123] Ergeben sich nur Nullstellen mit $D_1 < 0$ und $D_1 \geq \overline{D}_1$, dann trifft entweder $D_1^{opt1} = 0$ oder $D_1^{opt1} = \overline{D}_1$

[122] Streng genommen ist Gleichung (4.19) auch noch gültig für $D_1 = \overline{D}_1$ bzw. für $p_{21} = V - S_{21}$. Da in diesem Fall jedoch auch $F_{21} = 0$ gilt und somit ein vollständiger Mittelabzug erfolgt, wird der Gleichheitsfall hier nicht mehr Gleichung (4.19) zugeordnet.

[123] Existiert im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ eine Nullstelle, dann liegt an dieser Stelle D_1^{opt1} ein lokales Maximum vor. Vgl. Abschnitt 4.1.3.

zu, je nachdem, ob sich mit $D_1 = 0$ ein höherer Erwartungswert μ ergibt oder mit $D_1 = \overline{D}_1$.[124] Der zu D_1^{opt1} zugehörige Erwartungswert wird im Folgenden mit μ^{opt1} bezeichnet.

Für D_1 im zweiten Teilbereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ ist nun der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.27) über D_1 zu maximieren. Der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.27) abgeleitet nach D_1 ergibt:

$$\frac{d\,\mu}{d\,D_1} = -(1-q) \cdot a \cdot \frac{D_1^2 + (2D_1 - S_1) \cdot (V - S_1)}{(V - S_1 + D_1)^2}. \tag{4.28}$$

Zur Bestimmung der optimalen Lösung im zweiten Teilbereich muss die Ableitung nach (4.28) gleich null gesetzt und entsprechend nach D_1 aufgelöst werden. Ergibt sich dabei eine Nullstelle im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$, dann handelt es sich hierbei um die optimale Lösung für den zweiten Teilbereich, welche im Folgenden mit D_1^{opt2} bezeichnet wird.[125] Ergeben sich hier nur Nullstellen mit $D_1 < \overline{D}_1$ und $D_1 > F_1$, dann trifft entweder $D_1^{opt2} = \overline{D}_1$ oder $D_1^{opt2} = F_1$ zu, je nachdem, ob sich mit $D_1 = \overline{D}_1$ ein höherer Erwartungswert μ ergibt oder mit $D_1 = F_1$.[126] Der zu D_1^{opt2} zugehörige Erwartungswert wird im Folgenden entsprechend mit μ^{opt2} bezeichnet.

Als optimale Lösung ergibt sich entweder $D_1^{opt} = D_1^{opt1}$ oder $D_1^{opt} = D_1^{opt2}$, je nachdem, ob der zu D_1^{opt1} zugehörige Erwartungswert μ^{opt1} am größten ist oder der zu D_1^{opt2} zugehörige Erwartungswert μ^{opt2}. Die optimale Lösung D_1^{opt} resultiert somit aus

$$\mu^{opt} = \max\left[\mu^{opt1}, \mu^{opt2}\right]. \tag{4.29}$$

Gilt $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ und gleichzeitig $D_1^{opt1} \neq D_1^{opt2}$, dann existieren zwei optimale Lösungen.[127] Vor der zustandsbezogenen Betrachtungsweise der optimalen Lösung erfolgt im nachfolgenden Abschnitt zunächst noch die Bestimmung der Grenze $\overline{D}_1$.

[124] Streng genommen gehört $D_1 = \overline{D}_1$ nicht mehr zum Definitionsbereich von Gleichung (4.19). Gleichung (4.19) und Gleichung (4.27) stimmen jedoch an der Stelle $D_1 = \overline{D}_1$ überein. Da letztendlich das Maximum über den gesamten Definitionsbereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ gesucht ist, wird $D_1 = \overline{D}_1$ bzw. der sich an dieser Stelle ergebende Erwartungswert spätestens bei Betrachtung des zweiten Teilbereichs berücksichtigt. Dass der Erwartungswert für $D_1 = 0$ und für $D_1 = \overline{D}_1$ übereinstimmt, gleichzeitig aber kein Maximum für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ vorliegt, ist hier nicht möglich. Vgl. dazu auch Abschnitt 4.1.3.

[125] Da μ nach (4.27) in Abhängigkeit von D_1 im zweiten Teilbereich streng konkav ist, liegt in diesem Fall ein lokales Maximum an der Stelle D_1^{opt2} vor. Vgl. Abschnitt 4.1.3, insbesondere Gleichung (4.46).

[126] Dass der Erwartungswert für $D_1 = \overline{D}_1$ und für $D_1 = F_1$ übereinstimmt, gleichzeitig aber kein Maximum für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ vorliegt, ist wegen der strengen Konkavität nicht möglich.

[127] Ein Beispiel mit zwei optimalen Lösungen findet sich in Abschnitt 4.1.4.3.

4.1.2.3 Die Bestimmung der Grenze $\overline{D}_1$

Die Bestimmung von $\overline{D}_1$ ist notwendig, wenn durch einen entsprechend hohen Parameter a der vollständige Mittelabzug in den Fällen (1) bis (3) bzw. für $S_{21} > S_1$ nicht ausgeschlossen ist. In diesem Fall muss die Maximum-Funktion in der Zielfunktion nach (4.5) berücksichtigt werden. Dazu ist eine Unterteilung des Definitionsbereiches von D_1 in die zwei Teilbereiche $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ und $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ erforderlich.

Grundvoraussetzung dafür, dass die Stelle $\overline{D}_1$ im Bereich $0 < \overline{D}_1 \leq F_1$ liegt, ist die Verletzung der Bedingung (4.15) durch den Parameter a.[128] Erfüllt der Parameter a die Bedingung (4.15), dann gilt für alle D_1 mit $0 \leq D_1 \leq F_1$ entsprechend $F_{21} > 0$ bzw. $p_{21} > V - S_{21}$ und der vollständige Mittelabzug ist ausgeschlossen. $\overline{D}_1$ kann zwar auch in diesem Fall berechnet werden; allerdings gilt dann $\overline{D}_1 > F_1$ und die Bestimmung von $\overline{D}_1$ ist damit obsolet.

Im Fall (1) wird davon ausgegangen, dass der Parameter a zusätzlich die Bedingung (4.25) erfüllt, um mit steigendem Investment D_1 ein Streben des Preises p_{21} gegen unendlich zu verhindern.[129] Damit $\overline{D}_1$ im Fall (1) zwischen $\widehat{D_1}$ und F_1 liegt, muss der Parameter a somit insgesamt die folgende Bedingung erfüllen:

$$\text{Fall (1)}: \; 1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1} \; \leq \; a \; < \; 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}. \tag{4.30}$$

In den Fällen (2) und (3) ist das Einhalten der oberen Grenze in (4.30) nicht erforderlich.[130] Entsprechend muss in diesen beiden Fällen nur gelten:

$$\text{Fall (2) und Fall (3)}: \; a \; \geq \; 1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1}. \tag{4.31}$$

Entspricht der Parameter a in den Fällen (1) bis (3) bzw. für $S_{21} > S_1$ genau der unteren Grenze, dann gilt $\overline{D}_1 = F_1$.[131] Für alle anderen Parameter a nach (4.30) bzw. nach (4.31) gilt $\overline{D}_1 < F_1$. Die Bedingungen (4.30) und (4.31) gewährleisten somit eine Verletzung der Bedingung (4.15), welche den vollständigen Mittelabzug verhindert. Erfüllt der Parameter a im Fall (1) die Bedingung (4.30), dann liegt $\overline{D}_1$ im Bereich $\widehat{D_1} < \overline{D}_1 \leq F_1$. Genügt der Parameter a in den Fällen (2) und (3) der Bedingung

[128] Im Fall (1) liegt $\overline{D}_1$ genauer im Bereich $0 < \widehat{D_1} < \overline{D}_1 \leq F_1$.
[129] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[130] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[131] Vgl. dazu Satz 74.

(4.31), dann liegt $\overline{D}_1$ im Bereich $0 < \overline{D}_1 \leq F_1$.[132] Das Investment $\overline{D}_1$ entspricht genau dem Investment D_1, für welches $p_{21} = V - S_{21}$ zutrifft. Unter der Berücksichtigung von Gleichung (4.7) muss $\overline{D}_1$ somit der folgenden Gleichung genügen:

$$\left(V - S_1 + \overline{D}_1\right) \cdot \frac{V - S_{21} + F_1 - a\overline{D}_1}{V - S_1 + \overline{D}_1 - a\overline{D}_1} = V - S_{21}. \tag{4.32}$$

Zur Bestimmung von $\overline{D}_1$ muss Gleichung (4.32) entsprechend umgeformt werden. Es ergibt sich die Bedingung:

$$a\overline{D}_1^2 + \overline{D}_1 \cdot (aS_{21} - aS_1 - F_1) - F_1 \cdot (V - S_1) = 0. \tag{4.33}$$

Demnach existieren zwei Lösungen für $\overline{D}_1$, welche hier die Gleichung (4.33) erfüllen. Für die nachfolgende Analyse der linken Seite von Gleichung (4.33) ist es sinnvoll, die Funktion Φ zu definieren. Es sei

$$\Phi(\overline{D}_1) = a\overline{D}_1^2 + \overline{D}_1 \cdot (aS_{21} - aS_1 - F_1) - F_1 \cdot (V - S_1)\,. \tag{4.34}$$

Die Nullstellen von (4.34) stellen dementsprechend eine Lösung von Gleichung (4.33) dar. Im Fall $\overline{D}_1 = 0$ ergibt sich $\Phi(0) = -F_1 \cdot (V - S_1)$. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) und $S_1 < V$ nach (2.8) ist dieser Funktionswert unabhängig vom Parameter a immer negativ.[133] Für $\overline{D}_1 \to \pm\infty$ strebt der Funktionswert $\Phi(\overline{D}_1)$ mit $a > 1$ jeweils gegen $+\infty$.[134] Durch $\Phi(0) < 0$ besitzt die Funktion Φ für $a > 1$ folglich zwei reelle Nullstellen, eine negative und eine positive Nullstelle.[135] Mit $\Phi(\overline{D}_1) = 0$ ergeben sich die beiden Nullstellen als

$$\overline{D}_1 = -\frac{aS_{21} - aS_1 - F_1}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{aS_{21} - aS_1 - F_1}{2a}\right)^2 + \frac{F_1 \cdot (V - S_1)}{a}}. \tag{4.35}$$

[132] Für $D_1 = 0$ ergibt sich im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 immer ein Preis p_{21} in Höhe von $p_{21} = V - S_{21} + F_1$. Mit $F_1 > 0$ nach (2.2) ist demnach $\overline{D}_1 = 0$ nicht möglich und es gilt $\overline{D}_1 > 0$.

[133] Dies belegt noch einmal, dass $\overline{D}_1 = 0$ als Lösung von (4.33) nicht möglich ist.

[134] Entscheidend ist, dass $a > 0$ zutrifft. Die Aussage besitzt somit auch Gültigkeit im Fall $a = 1$.

[135] Die Funktion Φ stellt ein Polynom zweiten Grades dar und besitzt somit zwei Nullstellen. Bedingt durch $\Phi(0) < 0$ und den jeweiligen Grenzwert $+\infty$ schneidet die Funktion die Abszisse genau einmal für $\overline{D}_1 < 0$ und genau einmal für $\overline{D}_1 > 0$.

Mit einem positiven Parameter a ist der Ausdruck unter der Wurzel stets positiv und daher immer definiert. Mit $\overline{D}_1$ im Bereich $0 < \overline{D}_1 \leq F_1$ ist hier nur die positive Nullstelle von Bedeutung. Da immer auch eine Lösung $\overline{D}_1 < 0$ existiert, muss zur Bestimmung der positiven Lösung die Wurzel immer hinzuaddiert werden. Letztendlich ergibt sich somit für $\overline{D}_1$ im Rahmen des Modells der Ausdruck

$$\overline{D}_1 = -\frac{aS_{21} - aS_1 - F_1}{2a} + \sqrt{\left(-\frac{aS_{21} - aS_1 - F_1}{2a}\right)^2 + \frac{F_1 \cdot (V - S_1)}{a}}. \tag{4.36}$$

Eine Überprüfung, ob $\overline{D}_1$ nach (4.36) im Bereich $0 < \overline{D}_1 \leq F_1$ liegt, ist hier nicht erforderlich, da dies im Fall (1) durch (4.30) bzw. im Fall (2) und im Fall (3) durch (4.31) gewährleistet ist.[136]

Vor der Besprechung konkreter Beispiele erfolgt nun noch eine zustandsbezogene Betrachtung der optimalen Lösung D_1^{opt} im Rahmen des Modells mit einer Entscheidungsvariable unter Berücksichtigung von linearen Update-Funktionen nach Satz 20.

4.1.3 Die optimale Entscheidung

In diesem Abschnitt wird die optimale Entscheidung genauer betrachtet. Dazu wird zunächst analysiert, welches Investment D_1 aus Sicht des jeweiligen Zustandes optimal ist. Es ist modelltechnisch zwar nicht möglich, D_1 in Abhängigkeit vom eintretenden Zustand im Zeitpunkt $t = 2$ zu wählen, da die Entscheidung hinsichtlich des Investments D_1 bereits im Zeitpunkt $t = 1$ getroffen werden muss. Dennoch kann durch die zustandsbezogene Betrachtungsweise die optimale Lösung D_1^{opt} letztendlich besser eingeordnet werden.

Bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ resultiert nach Satz 18 bzw. nach Gleichung (2.37) im Zeitpunkt $t = 3$ ein Endvermögen in Höhe von

$$EV_{Z_1} = V \cdot \frac{F_{21}}{p_{21}}. \tag{4.37}$$

Da $D_{21} = F_{21}$ angenommen wird, ergibt sich nach Gleichung (2.47) der Preis im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 als $p_{21} = V - S_{21} + F_{21}$. Aufgelöst nach F_{21} gilt für den vom Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellten Betrag

[136] Im Fall (1) liegt $\overline{D}_1$ sogar im Bereich $0 < \widehat{D}_1 < \overline{D}_1 \leq F_1$.

$$F_{21} = p_{21} - V + S_{21}. \tag{4.38}$$

Durch $p_{21} \geq V - S_{21}$ nach (2.21) ist abgesichert, dass $F_{21} \geq 0$ gilt und somit kein Widerspruch zu (2.24) erfolgt. Gleichung (4.38) eingesetzt in (4.37) ergibt

$$EV_{Z_1} = V \cdot \frac{p_{21} - V + S_{21}}{p_{21}}. \tag{4.39}$$

Mit $p_{21} \geq V - S_{21} > 0$ nach (2.21) ist der Nenner in (4.39) immer positiv. Aus $F_{21} = 0$, dem vollständigen Mittelabzug, folgt $p_{21} = V - S_{21}$ nach (2.47) und somit $EV_{Z_1} = 0$. Für $F_{21} > 0$ folgt $p_{21} > V - S_{21}$ nach (2.47), wodurch auch der Zähler in (4.39) positiv ist und direkt $EV_{Z_1} > 0$ folgt. Gleichung (4.39) abgeleitet nach p_{21} ergibt

$$\frac{d\,EV_{Z_1}}{d\,p_{21}} = V \cdot \frac{V - S_{21}}{(p_{21})^2}. \tag{4.40}$$

Nach (2.18) gilt $S_{21} < V$. Somit ist diese Ableitung immer positiv, da nach (2.21) auch der Preis p_{21} immer positiv ist. Das bedeutet, je höher im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 der Preis p_{21} ausfällt, umso höher fällt auch das Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ aus. Da D_1 hier die einzige Entscheidungsvariable ist, gilt folglich zwischen dem Endvermögen EV_{Z_1} und dem Preis p_{21} der Zusammenhang

$$\max_{D_1} \; EV_{Z_1} \Leftrightarrow \max_{D_1} \; p_{21}. \tag{4.41}$$

Bezogen auf den Zustand Z_1 steht somit die Maximierung des Endvermögens EV_{Z_1} im Einklang mit der Maximierung des Preises p_{21}. Je höher dieser Preis ausfällt, umso höher ist das Endvermögen und umso höher ist entsprechend auch die Entlohnung des Arbitrageurs bei Eintritt von Zustand Z_1. Zur Bestimmung von $D_1^{optZ_1}$ muss somit der Preis p_{21} über D_1 maximiert werden.[137] Für $D_1 = 0$ ergibt sich im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 immer ein Preis $p_{21} = V - S_{21} + F_1 > V - S_{21}$. Daher kann unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs ein Investment $D_1 \geq \overline{D}_1$ bezogen auf den Zustand Z_1 nie optimal sein, da für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ immer $p_{21} = V - S_{21}$ gilt. Folglich liegt $D_1^{optZ_1}$ im Bereich $0 \leq D_1^{optZ_1} < \overline{D}_1$ und der Preis p_{21} muss konkret nach Gleichung (4.6) bzw. nach Gleichung (4.7) über D_1 in diesem Bereich maximiert werden. Die aufgezeigten Zusammenhänge bezogen auf den Zustand Z_1 gelten bisher

[137] $D_1^{optZ_1}$ bezeichne im Folgenden das optimale Investment D_1 bezogen auf den Zustand Z_1.

unabhängig von der zugrunde gelegten Update-Funktion und somit insbesondere auch für nicht-lineare Update-Funktionen.

Bei linearen Update-Funktionen mit $a > 1$ kann der Bereich, in welchem die optimale Lösung $D_1^{optZ_1}$ bezogen auf den Zustand Z_1 liegt, in Abhängigkeit vom vorliegenden Fall weiter eingeschränkt werden. Im Fall (1) liegt die optimale Lösung $D_1^{optZ_1}$ im Bereich $\frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2} < D_1^{optZ_1} < \widehat{D_1}$ und sowohl im Fall (2) als auch im Fall (3) trifft $D_1^{optZ_1} = 0$ zu. Im Fall (4) und im Fall (5) ist der vollständige Mittelabzug immer ausgeschlossen. Im Fall (4) befindet sich $D_1^{optZ_1}$ im Bereich $\frac{F_1}{2} < D_1^{optZ_1} < F_1$ und im Fall (5) im Bereich $\frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2} < D_1^{optZ_1} \leq F_1$. Somit ist $D_1^{optZ_1} = F_1$ nur im Fall (5) möglich.

Im Zustand Z_2 gilt für den Preis $p_{22} = V$. Der Arbitrageur zieht sich komplett aus dem speziellen Marktsegment zurück und wählt $D_{22} = 0$. Folglich gilt $EV_{Z_2} = F_{22}$ für das Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ bei Eintritt von Zustand Z_2 im Zeitpunkt $t = 2$. Für EV_{Z_2} ergibt sich mit (4.4) die folgende Gleichung, wenn p_1 nach Gleichung (2.5) noch durch den Ausdruck $V - S_1 + D_1$ ersetzt wird:

$$EV_{Z_2} = F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{V - S_1 + D_1} - 1 \right). \tag{4.42}$$

Für $D_1 = 0$ gilt $EV_{Z_2} = F_1$. Nach Satz 3 trifft $p_1 < V$ zu. Somit ist der Ausdruck in der Klammer in (4.42) positiv, woraus für $D_1 > 0$ immer $EV_{Z_2} > F_1$ folgt. Bezogen auf den Zustand Z_2 besteht demnach seitens des Arbitrageurs ein Anreiz, ein Investment $D_1 > 0$ zu wählen, da für D_1 im Bereich $0 < D_1 \leq F_1$ das Endvermögen EV_{Z_2} immer größer ist als im Fall $D_1 = 0$. Aus Sicht von Zustand Z_2 kann somit ein Investment in Höhe von $D_1 = 0$ niemals optimal sein. Gleichung (4.42) abgeleitet nach D_1 ergibt

$$\frac{d\,EV_{Z_2}}{d\,D_1} = -a \cdot \frac{D_1^2 + (2D_1 - S_1) \cdot (V - S_1)}{(V - S_1 + D_1)^2}. \tag{4.43}$$

Der Nenner in (4.43) ist bedingt durch einen Preis $p_1 > 0$ immer positiv. Zur Bestimmung des maximal möglichen Endvermögens EV_{Z_2} muss der Zähler in (4.43) gleich null gesetzt werden. Die beiden Nullstellen ergeben sich dann als

$$D_1 = -(V - S_1) \pm \sqrt{(-(V - S_1))^2 + S_1 \cdot (V - S_1)}. \tag{4.44}$$

Mit $S_1 > 0$ und $S_1 < V$ nach (2.8) ist der Ausdruck unter der Wurzel stets größer als null und somit ist (4.44) immer definiert. Da der Ausdruck $S_1 \cdot (V - S_1)$ unter der Wurzel positiv ist und hinzuaddiert wird, ist die Wurzel in (4.44) betragsmäßig größer als die positive Differenz $V - S_1$. Mit $D_1 \geq 0$ ist hier nur die positive Nullstelle von Bedeutung, zu deren Bestimmung die Wurzel hinzuaddiert werden muss. Wird der Ausdruck unter der Wurzel noch entsprechend vereinfacht, dann ergibt sich

$$D_1 = -(V - S_1) + \sqrt{V \cdot (V - S_1)}. \tag{4.45}$$

Insbesondere auch wegen $V > V - S_1 > 0$ muss sich nach (4.45) immer eine positive Nullstelle ergeben.[138] Dass das Endvermögen EV_{Z_2} an der Stelle D_1 nach (4.45) maximal wird, lässt sich mit Hilfe der zweiten Ableitung zeigen. EV_{Z_2} nach (4.42) zweimal abgeleitet nach D_1 ergibt

$$\frac{d^2\, EV_{Z_2}}{d\, D_1^2} = -a \cdot \frac{2V \cdot (V - S_1)}{(V - S_1 + D_1)^3}. \tag{4.46}$$

Für $D_1 \geq 0$ ist die zweite Ableitung nach (4.46) immer negativ. Folglich besitzt das Endvermögen EV_{Z_2} nach (4.42) an der Stelle D_1 nach (4.45) ein lokales Maximum. Ob dieses Maximum noch im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegt, hängt von dem konkreten Größenverhältnis der Werte S_1 und V zueinander ab. Da $S_1 > 0$ ist und $S_1 < V$ nach (2.8) gilt, bietet es sich zur Analyse dieses Maximums an, den Noise trader shock S_1 anteilig vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes zu definieren. Im Folgenden sei $S_1 = \alpha V$ mit $0 < \alpha < 1$. Eingesetzt in Gleichung (4.45) ergibt sich

$$D_1 = -(V - \alpha V) + \sqrt{V \cdot (V - \alpha V)} = V \cdot \left(\sqrt{1 - \alpha} - 1 + \alpha\right). \tag{4.47}$$

Um zu bestimmen, für welchen Wert von α der Ausdruck für D_1 in (4.47) maximal wird, muss der Ausdruck entsprechend nach α abgeleitet und gleich null gesetzt werden. Nach α aufgelöst ergibt sich als Lösung $\alpha = 0,75$.[139] Das bedeutet, D_1 nach (4.47) wird maximal für $\alpha = 0,75$ und es ergibt sich $S_1 = 0,75 \cdot V$ sowie $D_1 = 0,25 \cdot V$.[140] Bezogen auf den Zustand Z_2 hat dies nun die folgenden Auswirkungen:

Gilt $F_1 > 0,25 \cdot V$, dann liegt das lokale Maximum nach Gleichung (4.45) im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$, und zwar unabhängig davon, wie groß der Noise

[138] Dies belegt noch einmal, dass $D_1 = 0$ aus Sicht von Zustand Z_2 niemals optimal sein kann.
[139] Es gilt $\frac{d\,D_1}{d\,\alpha} = V \cdot (\frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1-\alpha}} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0,75$.
[140] Mit $\frac{d^2\,D_1}{d\,\alpha^2} = -\frac{1}{4} V \cdot (1-\alpha)^{-\frac{3}{2}}$ ist die zweite Ableitung für $\alpha < 1$ immer negativ.

trader shock S_1 mit $F_1 < S_1 < V$ konkret ausfällt. Die optimale Lösung $D_1^{optZ_2}$ liegt somit im Bereich $0 < D_1^{optZ_2} \leq 0{,}25 \cdot V < F_1$.[141] Bezogen auf den Zustand Z_2 ist es bei einem derart hohen Betrag F_1 somit nie optimal, hier $D_1 = F_1$ zu wählen. Wie groß der vom Investor zur Verfügung gestellte Betrag F_1 mit $0{,}25 \cdot V < F_1 < S_1$ konkret ausfällt, hat dabei keinen Einfluss auf das optimale Investment $D_1^{optZ_2}$.

Trifft $F_1 = 0{,}25 \cdot V$ zu, dann liegt das lokale Maximum nach Gleichung (4.45) ebenfalls im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$, und zwar unabhängig davon, wie groß der Noise trader shock S_1 mit $0{,}25 \cdot V < S_1 < V$ konkret ausfällt. Für $S_1 = 0{,}75 \cdot V$ ergibt sich $D_1^{optZ_2} = F_1$ und für $S_1 \neq 0{,}75 \cdot V$ gilt entsprechend $D_1^{optZ_2} < F_1$. Bezogen auf den Zustand Z_2 ist es hier somit nur im Fall $S_1 = 0{,}75 \cdot V$ optimal, $D_1 = F_1$ zu wählen.

Für $F_1 < 0{,}25 \cdot V$ ist es je nach konkretem Größenverhältnis der Werte S_1 und V zueinander möglich, dass sich das lokale Maximum nach Gleichung (4.45) rein rechnerisch an einer Stelle $D_1 > F_1$ ergibt und somit nicht im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegt. In so einem Fall gilt dann $D_1^{optZ_2} = F_1$. Je nach konkretem Größenverhältnis der Werte S_1 und V zueinander ist aber auch der Fall $D_1^{optZ_2} < F_1$ durchaus möglich.

Zusammenfassend ist es aus Sicht von Zustand Z_2 offensichtlich nur bei relativ niedrigen zur Verfügung gestellten Beträgen F_1 und nur unter gewissen Umständen optimal, $D_1 = F_1$ zu wählen. Gilt $F_1 > 0{,}25 \cdot V$, dann kann bezogen auf den Zustand Z_2 nur ein Investment $D_1 < F_1$ optimal sein. Dies liegt daran, das mit steigendem Investment D_1 auch der Preis p_1 steigt, zu dem der Vermögensgegenstand erworben wird. Dieser negative Effekt eines höheren Preises p_1 macht sich im Fall $F_1 > 0{,}25 \cdot V$ spätestens für $D_1 > 0{,}25 \cdot V$ bemerkbar, und je nach konkretem Größenverhältnis der Werte S_1 und V zueinander auch schon bei einem kleineren Investment D_1. Ein Investment in Höhe von $D_1 = 0$ ist jedoch aus Sicht von Zustand Z_2 niemals optimal.

Da zur Bestimmung von $D_1^{optZ_2}$ nach (4.45) nur die Größen S_1 und V relevant sind, muss bezüglich des Zustandes Z_2 nicht zwischen den fünf Fällen nach Tabelle 4.2 unterschieden werden. Insbesondere ist $D_1^{optZ_2}$ und somit die Stelle, an welcher EV_{Z_2} maximal wird, unabhängig vom konkreten Parameter $a > 1$.[142]

Mit den gewonnenen Erkenntnissen der zustandsbezogenen Betrachtungsweise kann nun die optimale Lösung D_1^{opt} besser interpretiert werden. Durch die Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ nach Tabelle 2.1 erfolgt letztendlich eine Art Gewichtung der beiden Zustände. Trifft $q = 1$ zu, dann ist nur Zustand Z_1 relevant und es gilt

[141] Im Folgenden bezeichne $D_1^{optZ_2}$ das optimale Investment D_1 bezogen auf den Zustand Z_2.

[142] Eine Variation von a besitzt somit keinen Einfluss auf $D_1^{optZ_2}$.

$D_1^{opt} = D_1^{optZ_1}$. Analog ist für $q = 0$ nur Zustand Z_2 relevant und es gilt $D_1^{opt} = D_1^{optZ_2}$. Für q im Bereich $0 < q < 1$ liegt die optimale Lösung D_1^{opt} dann zwischen den beiden Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$, wobei jedoch sowohl $D_1^{opt} = D_1^{optZ_1}$ als auch $D_1^{opt} = D_1^{optZ_2}$ weiterhin zutreffen kann. Zusammengefasst bedeutet dies:

$$\begin{aligned} &(1)\ \text{Für } D_1^{optZ_1} < D_1^{optZ_2} \quad \text{gilt} \quad D_1^{optZ_1} \leq D_1^{opt} \leq D_1^{optZ_2}, \\ &(2)\ \text{für } D_1^{optZ_1} = D_1^{optZ_2} \quad \text{gilt} \quad D_1^{opt} = D_1^{optZ_1} \text{ und} \\ &(3)\ \text{für } D_1^{optZ_1} > D_1^{optZ_2} \quad \text{gilt} \quad D_1^{optZ_2} \leq D_1^{opt} \leq D_1^{optZ_1}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Gilt beispielsweise $D_1^{optZ_1} < D_1^{optZ_2} < F_1$, dann trifft für alle Eintrittswahrscheinlichkeiten q mit $0 \leq q \leq 1$ immer $D_1^{opt} < F_1$ zu. Ein Vollinvestment $D_1 = F_1$ ist somit unabhängig von den konkreten Eintrittswahrscheinlichkeiten nie optimal.

Die zustandsbezogene Betrachtungsweise hilft hier insofern weiter, als das mit ihr die optimale Lösung D_1^{opt} entsprechend eingegrenzt werden kann. Die zustandsbezogenen optimalen Lösungen lassen sich relativ einfach berechnen. Zur Bestimmung von $D_1^{optZ_1}$ muss letztendlich nur der Preis p_{21} über D_1 maximiert werden.[143] Die Berechnung von $D_1^{optZ_2}$ ist mit Gleichung (4.45) möglich. Ist der mit Gleichung (4.45) bestimmte Wert nicht kleiner als F_1, dann gilt $D_1^{optZ_2} = F_1$. Eine erste Näherung von D_1^{opt} ist durch eine entsprechende Gewichtung von $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ erzielbar:

$$D_1^{opt} \approx q \cdot D_1^{optZ_1} + (1-q) \cdot D_1^{optZ_2}. \tag{4.49}$$

Für $q = 0$ und $q = 1$ ergibt sich nach (4.49) für D_1^{opt} die exakte Lösung. In allen anderen Fällen liefert (4.49) nur eine Näherung der optimalen Lösung, welche je nach Parameterkonstellation mehr oder weniger von der exakten Lösung abweicht. Insbesondere dann, wenn es sich bei $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ nicht um echte lokale Extrema, sondern nur um die Randstellen des Definitionsbereiches handelt, liefert (4.49) nur eine unzureichende Näherung.

Nach den vorangegangenen Ausführungen kann sowohl hinsichtlich des Zustandes Z_1 als auch bezüglich des Zustandes Z_2 jeweils ein eindeutiges optimales Investment in Gestalt von $D_1^{optZ_1}$ bzw. $D_1^{optZ_2}$ bestimmt werden. Dass die optimale Lösung D_1^{opt} hier

[143] Durch die Einordnung in einen der fünf Fälle aus Tabelle 4.2, S. 156 bzw. mit Gleichung (C.6) im Anhang C.3 kann $D_1^{optZ_1}$ relativ schnell bestimmt werden.

nach (4.48) immer zwischen den beiden zustandsbezogenen, optimalen Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ liegt, hängt mit der besonderen Gestalt der Zielfunktion nach (2.40) zusammen. Die Zielfunktion stellt eine Linearkombination von EV_{Z_1} und EV_{Z_2} mit den beiden Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ nach Tabelle 2.1 als Koeffizienten dar.[144] Da die Summe der beiden Koeffizienten q und $1 - q$ immer eins beträgt, liegt der Funktionswert der Linearkombination immer zwischen den Funktionswerten von EV_{Z_1} und EV_{Z_2}. Sind die Funktionsverläufe von EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 streng konkav, dann ist auch die Linearkombination der beiden Funktionsverläufe bzw. die Zielfunktion in Abhängigkeit von D_1 streng konkav.[145] Bedingt durch die strenge Konkavität ist die optimale Lösung D_1^{opt} in diesem Fall eindeutig und an der Stelle D_1^{opt} liegt ein Maximum vor.

Der Funktionsverlauf von EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 ergibt sich direkt nach (4.42). Für $D_1 \geq 0$ ist die zweite Ableitung nach (4.46) immer negativ, woraus ein streng konkaver Verlauf im gesamten für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ folgt und somit insbesondere auch keine Wendestellen in diesem Bereich vorliegen.

Für den Funktionsverlauf von EV_{Z_1} in Abhängigkeit von D_1 kann mit Hilfe des Preises p_{21} eine Aussage getroffen werden. Die erste Ableitung von EV_{Z_1} nach p_{21} ist immer positiv.[146] EV_{Z_1} nach (4.39) zweimal abgeleitet nach p_{21} ergibt

$$\frac{d^2\, EV_{Z_1}}{d\,(p_{21})^2} = -2V \cdot \frac{V - S_{21}}{(p_{21})^3}. \tag{4.50}$$

Mit $S_{21} < V$ nach (2.18) und $p_{21} > 0$ nach (2.21) ist (4.50) immer negativ und somit EV_{Z_1} in Abhängigkeit von p_{21} streng konkav.

Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen, dann weist der Preis p_{21} in Abhängigkeit von D_1 im gesamten für D_1 zulässigen Bereich im Fall $S_{21} \geq S_1$ sowie im Fall $S_{21} < S_1$ bei Gültigkeit von Bedingung (4.25) einen streng konkaven Funktionsverlauf auf.[147] In diesen Fällen ist dann auch EV_{Z_1} in Abhängigkeit von D_1 streng konkav, da die erste Ableitung von EV_{Z_1} nach p_{21} immer positiv und EV_{Z_1} in Abhängigkeit von p_{21} zudem streng konkav ist.[148] Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen und der Preis p_{21} in Abhängigkeit von D_1 streng konkav, dann ergibt sich somit im-

[144] Mit q im Bereich $0 \leq q \leq 1$ sind die beiden Koeffizienten nicht negativ.
[145] Vgl. 13.18 (1) in Sydsæter et al. (2010), S. 91.
[146] Vgl. (4.40) sowie die sich daran anschließenden Ausführungen.
[147] Vgl. dazu Anhang C.3.1.
[148] Vgl. 13.18 (2) in Sydsæter et al. (2010), S. 91.

mer ein eindeutiges Maximum an einer Stelle D_1^{opt} zwischen den beiden optimalen, zustandsbezogenen Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$.

Im Fall $S_{21} < S_1$ und $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ liegt der Spezialfall nach Anhang C.1 vor und der Preis p_{21} ist linear in D_1. Das Endvermögen EV_{Z_1} in Abhängigkeit von D_1 weist jedoch auch in diesem Fall einen streng konkaven Funktionsverlauf auf.[149] Lediglich im Fall $S_{21} < S_1$ und $a > 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ kann über den Verlauf von EV_{Z_1} in Abhängigkeit von D_1 und somit über den Verlauf der Zielfunktion in Abhängigkeit von D_1 keine einheitliche Aussage getroffen werden: Der Preis p_{21} in Abhängigkeit von D_1 ist dann streng konvex und es ist möglich, dass eine Wendestelle im für D_1 zulässigen Bereich der Zielfunktion liegt. In diesem Fall kann sich unter Umständen sowohl für das lokale Maximum als auch für die Randstelle F_1 des Definitionsbereiches derselbe maximale Erwartungswert μ^{opt} ergeben, wodurch dann zwei optimale Lösungen existieren und zusätzlich noch ein lokales Minimum im für D_1 zulässigen Bereich liegt.[150] Das echte lokale Maximum kann dabei jedoch nicht an der Stelle $D_1 = 0$ liegen.[151]

Zwei optimale Lösungen können insbesondere aber auch dann auftreten, wenn der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen ist. In den Fällen (1) bis (3) bzw. für $S_{21} > S_1$ muss zwischen den Teilbereichen $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ und $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ unterschieden werden.[152] Da für $D_1 \geq \overline{D}_1$ direkt $p_{21} = V - S_{21}$ folgt, liegt $D_1^{optZ_1}$ immer im ersten Teilbereich, wobei im Fall (1) sogar $D_1^{optZ_1} < \widehat{D_1} < \overline{D}_1$ zutrifft und in den beiden anderen Fällen $D_1^{optZ_1} = 0$ gilt. Der Preis p_{21} ist für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ streng konkav. Daher ist D_1^{opt1} im ersten Teilbereich eindeutig.

Für D_1 im zweiten Teilbereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ trifft $EV_{Z_1} = 0$ zu. Folglich besteht die Zielfunktion in diesem Bereich nur noch aus dem Endvermögen EV_{Z_2} nach (4.42) multipliziert mit dem Faktor $1 - q$.[153] Liegt $D_1^{optZ_2}$ ebenfalls im ersten Teilbereich, dann gilt $D_1^{opt2} = \overline{D}_1$ wegen der strengen Konkavität des Funktionsverlaufes von EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1. Da jedoch die optimale Lösung D_1^{opt} zwischen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ liegt, kann $D_1^{opt2} = \overline{D}_1$ nicht optimal sein und es gilt folglich immer $\mu^{opt1} > \mu^{opt2}$ bzw. $D_1^{opt} = D_1^{opt1}$. Gilt $D_1^{optZ_2} > \overline{D}_1$, dann tritt bei einer bestimmten Eintrittswahrscheinlichkeit q der Fall $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ für $D_1^{opt1} \neq D_1^{opt2}$ auf.[154] Entsprechend existieren

[149]Vgl. 13.18 (3) in Sydsæter et al. (2010), S. 91. D_1^{opt} ist hier somit ebenfalls eindeutig.

[150]Ein Beispiel dazu findet sich in Abschnitt 4.1.4.4.

[151]Im hier vorliegenden Fall (5) liegt $D_1^{optZ_1}$ im Bereich $0 < \frac{S_1-S_{21}+F_1}{2} < D_1^{optZ_1} \leq F_1$ und es gilt $D_1^{optZ_2} > 0$. Somit kann $D_1 = 0$ nicht optimal sein.

[152]Vgl. Abschnitt 4.1.2.2.

[153]Vgl. dazu auch Gleichung (4.27).

[154]Im Fall $D_1^{optZ_2} = \overline{D}_1$ trifft $D_1^{opt2} = \overline{D}_1$ zu. Wegen der strengen Konkavität ist D_1^{opt} eindeutig.

dann zwei optimale Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$, wobei die eine optimale Lösung D_1^{opt1} kleiner als $\overline{D}_1$ ist und die andere optimale Lösung $D_1^{opt2} = D_1^{optZ_2}$ größer.[155] Bei den zwei optimalen Lösungen kann es sich auch um die Randstellen des Definitionsbereiches handeln. Nichts zu investieren und $D_1 = 0$ zu wählen führt dann zum gleichen Erwartungswert wie das Vollinvestment in Höhe von $D_1 = F_1$.

Zusammengefasst können zwei optimale Lösungen auftreten, wenn im Fall $S_{21} > S_1$ der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen ist und $D_1^{optZ_2} > \overline{D}_1$ zutrifft, oder wenn im Fall (5) bzw. für $S_{21} < S_1$ zusätzlich $a > 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ gilt. Mehr als zwei optimale Lösungen sind allerdings nicht möglich, solange der Parameter a die erforderlichen Einschränkungen zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse erfüllt.[156]

In den meisten Fällen ist die optimale Lösung D_1^{opt} jedoch eindeutig. Im Fall $q = 1$ sowie im Fall $q = 0$ existiert immer genau eine optimale Lösung $D_1^{opt} = D_1^{optZ_1}$ bzw. $D_1^{opt} = D_1^{optZ_2}$. Und da allgemein die optimale Lösung D_1^{opt} immer zwischen den beiden zustandsbezogenen Lösungen liegt, existiert für alle Wahrscheinlichkeiten q immer auch mindestens eine optimale Lösung.

Im nachfolgenden Abschnitt werden nun konkrete Beispiele mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse untersucht. Dabei wird insbesondere auf die Eindeutigkeit der optimalen Lösung D_1^{opt} noch einmal näher eingegangen.

4.1.4 Beispiele

Im ersten Unterabschnitt 4.1.4.1 erfolgt eine ausführliche Besprechung des Zahlenbeispiels aus Shleifer/Vishny (1997). Der zweite Unterabschnitt 4.1.4.2 widmet sich eingehend dem ersten Beispiel aus Arnold (2009). Anhand dieses ersten Zahlenbeispiels aus Arnold (2009) wird in Unterabschnitt 4.1.4.3 demonstriert, inwieweit zwei optimale Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$ auftreten können. Der letzte Unterabschnitt 4.1.4.4 behandelt abschließend den Fall $S_{21} < S_1$.

4.1.4.1 Shleifer/Vishny (1997)

Für ihr Zahlenbeispiel nehmen Shleifer/Vishny (1997) die folgenden Werte an:[157] Der Vermögensgegenstand besitzt den Grundwert $V = 1$. Der Noise trader shock im Zeit-

[155] Ein entsprechendes Beispiel findet sich in Abschnitt 4.1.4.3.
[156] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[157] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44.

punkt $t = 1$ beträgt $S_1 = 0,3$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt ein noch größerer Noise trader shock in Höhe von $S_{21} = 0,4$. Der anfangs im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag beträgt $F_1 = 0,2$. Für den Parameter a der linearen Update-Funktion nehmen die Autoren den Wert $a = 1,2$ an. Konkrete Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ werden von den Autoren nicht angegeben, sondern Shleifer/Vishny (1997) führen eine Sensitivitätsanalyse bezüglich der Eintrittswahrscheinlichkeiten durch. Im Rahmen dieser Sensitivitätsanalyse kommt der Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,35$ eine besondere Bedeutung zu. Für die nachfolgenden Berechnungen und für die graphische Darstellung des Beispiels wird daher diese Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,35$ verwendet.

Mit $0,2 = F_1 > S_{21} - S_1 = 0,1$ und $S_{21} > S_1$ liegt hier der Fall (1) vor.[158] Zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse muss der Parameter a im Fall (1) der Bedingung (4.25) genügen.[159] Mit $a = 1,2 < 1 + \frac{1-0,3}{0,3-0,4+0,2} = 8$ ist diese Voraussetzung hier erfüllt. Bedingung (4.15) besitzt für den Parameter a ebenfalls Gültigkeit, so dass der vollständige Mittelabzug in diesem Beispiel ausgeschlossen ist.[160] Da es sich hier um das erste Zahlenbeispiel handelt, erfolgt eine etwas ausführlichere Analyse.

Für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) ergibt sich konkret nach (4.19) die Gleichung

$$\begin{aligned}
\mu &= 0,35 \cdot \left(\frac{0,2 - 1,2D_1}{0,8 - 1,2D_1} - \frac{1,2D_1 \cdot (0,2 - 1,2D_1)}{(0,7 + D_1) \cdot (0,8 - 1,2D_1)} \right) \\
&+ \frac{1,2D_1}{0,7 + D_1} + 0,65 \cdot (0,2 - 1,2D_1) \\
&= -0,78 \cdot \frac{(D_1 + 0,213868) \cdot (D_1 - 0,453120) \cdot (D_1 - 1,342800)}{(0,7 + D_1) \cdot \left(D_1 - \frac{2}{3}\right)}. \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

Wird μ in (4.51) als Funktion von D_1 aufgefasst, dann besitzt diese Funktion an der Stelle $D_1 = -0,7$ und an der Stelle $D_1 = 0,\bar{6}$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel.[161] Zwischen den beiden Polstellen strebt der Funktionswert mit Annäherung von D_1 an die jeweilige Polstelle gegen $-\infty$.[162] Da zwischen den beiden Polstellen auch die Nullstellen

[158] Vgl. Tabelle 4.2, S. 156.

[159] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.

[160] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150. Es gilt $a = 1,2 < 1 + \frac{1-0,4}{0,4-0,3+0,2} = 3$.

[161] Dies sind die Nullstellen des Nenners. Streng genommen besitzt (4.51) auch an der Stelle $D_1 = 3,5$ eine Definitionslücke, da auch p_{21} in die Berechnung von μ einfließt (vgl. (4.52)).

[162] Das Verhalten im Bereich der Polstellen kann mit Hilfe der Vorzeichen der einzelnen Faktoren in (4.51) gezeigt werden.

$D_1 = -0,213868$ und $D_1 = 0,453120$ liegen, muss die Funktion zwischen diesen beiden Nullstellen ein lokales Maximum besitzen.[163] Es gilt nun noch herauszufinden, ob dieses lokale Maximum im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1 = 0,2$ liegt. Zur besseren Eingrenzung der optimalen Lösung erfolgt jedoch zunächst eine zustandsbezogene Betrachtung des Beispiels.

Nach Gleichung (4.7) bzw. mit Gleichung (C.2) im Anhang ergibt sich für den Preis p_{21} in Abhängigkeit von D_1 hier im Beispiel die folgende Gleichung:

$$p_{21} = (0,7 + D_1) \cdot \frac{0,8 - 1,2D_1}{0,7 + D_1 - 1,2D_1} = 6 \cdot \frac{(D_1 + 0,7) \cdot \left(D_1 - \frac{2}{3}\right)}{D_1 - 3,5}. \tag{4.52}$$

Da der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist, besitzt Gleichung (4.52) Gültigkeit im gesamten für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$. Der Preis p_{21} und der Preis p_1 stimmen an der Stelle $\widehat{D_1} = 0,1$ überein.[164] Der Funktionsverlauf von p_{21} ähnelt hier dem Funktionsverlauf von p_{21} in Abbildung 4.2 im Fall der durchgezogenen Kurve.[165] Sein lokales Maximum erreicht der Preis p_{21} nach Gleichung (C.6) an der Stelle

$$D_1 = \frac{0,7}{0,2} - \sqrt{\left(\frac{0,7}{0,2}\right)^2 + \frac{-0,1 \cdot 0,7}{0,2}} = 3,5 - \sqrt{11,9} = 0,050362. \tag{4.53}$$

Nach (4.41) steht im Zustand Z_1 die Maximierung des Endvermögens EV_{Z_1} im Einklang mit der Maximierung des Preises p_{21}. Aus Sicht von Zustand Z_1 ist es daher optimal, den Betrag $D_1^{optZ_1} = 0,050362$ zu investieren. Nach Gleichung (4.52) ergibt sich in diesem Fall $p_{21} = 0,804348$ und entsprechend der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellte Betrag als $F_{21} = 0,204348$.[166] Nach (4.39) ergibt sich in Verbindung mit (4.52) das Endvermögen im Zustand Z_1 als

$$EV_{Z_1} = \frac{p_{21} - 0,6}{p_{21}} = 1 - \frac{0,1 \cdot (D_1 - 3,5)}{(D_1 + 0,7) \cdot \left(D_1 - \frac{2}{3}\right)}. \tag{4.54}$$

[163] Die Nullstellen sind hier die Nullstellen des Zählers. Die dritte Nullstelle des Zählers ist hier irrelevant, da sie mit $D_1 = 1,342800$ größer als die positive Polstelle ist.
[164] Vgl. Tabelle 4.3, S. 158. Das lokale Maximum des Preises p_{21} befindet sich demnach an einer Stelle kleiner als $\widehat{D_1} = 0,1$. Vgl. auch Anmerkungen zu Satz 75.
[165] Vgl. Abbildung 4.2, S. 165. Die Werte stimmen bis auf den Parameter a überein. In der Grafik wurde bei der durchgezogenen Kurve als kleinster Parameter $a = 3$ verwendet. Der Funktionsverlauf mit $a = 1,2$ ist demnach noch flacher und der Funktionswert an der Stelle $D_1 = F_1$ entsprechend größer als $V - S_{21}$.
[166] Zur Berechnung von F_{21} vgl. Gleichung (4.38).

Bei Eintritt von Zustand Z_1 wird dann mit $D_1^{optZ_1} = 0,050362$ und $p_{21} = 0,804348$ ein maximales Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,254054$ erzielt. Für jedes andere zulässige Investment $D_1 \neq 0,050362$ ergibt sich folglich bei Eintritt von Zustand Z_1 ein niedrigeres Endvermögen als $0,254054$.

Für $D_1 = 0,050362$ ergibt sich mit $p_{21} = 0,804348 > p_1 = 0,750362$ im Zustand Z_1 ein Mittelzufluss.[167] Nach (2.41) beträgt die relative Wertentwicklung in diesem Fall $x_{Z_1} = 1,018117$ und mit (4.1) folgt $G(x_{Z_1}) = 1,021740$. Somit ergibt sich nach (2.25) ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = F_{21} - F_1 \cdot x_{Z_1} = 0,000725$ bzw. nach (2.28) gilt $F_{21} = F_1 \cdot x_{Z_1} + \Delta F = 0,203623 + 0,000725$.[168] Demnach besteht F_{21} hauptsächlich aus der Wertentwicklung von F_1 und wird nur geringfügig von dem Investor korrigiert. Dass der Mittelzufluss sehr moderat ausfällt, liegt hauptsächlich an dem relativ geringen Parameter a der linearen Update-Funktion G, welcher hier nur eine sehr schwache Reaktion des Investors hervorruft.

Bei Eintritt von Zustand Z_2 zieht sich der Arbitrageur komplett aus dem speziellen Marktsegment zurück. Neben $p_{22} = V$ gilt $D_{22} = 0$ sowie $EV_{Z_2} = F_{22}$. Für den von dem Investor zur Verfügung gestellten Betrag bzw. für das Endvermögen ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_2 im Zeitpunkt $t = 2$ nach (4.42) konkret

$$EV_{Z_2} = 0,2 + 1,2 D_1 \cdot \left(\frac{1}{0,7 + D_1} - 1 \right). \tag{4.55}$$

Mit $D_1 < F_1 = 0,2$ ist der Ausdruck in der Klammer in (4.55) immer positiv. Für $D_1 = 0$ gilt $EV_{Z_2} = F_1$ und für $D_1 > 0$ folgt $EV_{Z_2} > F_1$. Daher kann das Maximum von EV_{Z_2} niemals an der Stelle $D_1 = 0$ liegen und aus Sicht von Zustand Z_2 besteht somit immer ein Anreiz, ein Investment $D_1 > 0$ zu wählen. Das Endvermögen EV_{Z_2} wird nach (4.45) maximal an der Stelle

$$D_1 = -\,0,7 \;+ \sqrt{0,7} = 0,136660. \tag{4.56}$$

Obwohl hier $F_1 = 0,2 < 0,25 \cdot V = 0,25$ zutrifft, liegt das Maximum nach (4.56) im für D_1 zulässigen Bereich. Dies liegt hier hauptsächlich an dem im Vergleich zu V relativ kleinen Noise trader shock S_1. Bezogen auf den Zustand Z_2 ist es somit optimal, im Zeitpunkt $t = 1$ einen Betrag in Höhe von $D_1^{optZ_2} = 0,136660$ zu investieren. Damit wird

[167] Vgl. Satz 16 in Verbindung mit Satz 22. Nach (2.5) gilt $p_1 = V - S_1 + D_1$.
[168] Nach (3.4) ergibt sich der Mittelzufluss hier auch direkt mit x_{Z_1} als $\Delta F = 0,04 \cdot (x_{Z_1} - 1)$.

dann bei Eintritt von Zustand Z_2 nach Gleichung (4.55) ein maximales Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = F_{22} = 0,232016$ erzielt und für jedes andere zulässige Investment $D_1 \neq 0,136660$ ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_2 ein niedrigeres Endvermögen als $0,232016$.

Für $D_1 = 0,136660$ ergibt sich mit $p_{22} = 1 > p_1 = 0,836660$ auch im Zustand Z_2 ein Mittelzufluss, denn nach (2.42) beträgt die relative Wertentwicklung in diesem Fall $x_{Z_2} = 1,133400$. Mit (4.3) folgt $G(x_{Z_2}) = 1,160080$ und nach (3.4) ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = 0,04 \cdot (x_{Z_2} - 1) = 0,005336$. Nach (2.28) besteht der zur Verfügung gestellte Betrag mit $F_{22} = F_1 \cdot x_{Z_2} + \Delta F = 0,226680 + 0,005336$ zwar immer noch zu einem sehr großen Teil aus der Wertentwicklung von F_1, der Mittelzufluss beträgt hier jedoch im Vergleich zum Maximum im Zustand Z_1 mehr als das Siebenfache.

Trotzdem ist es im Rahmen dieses Beispiels aus Sicht des Arbitrageurs vorteilhaft, wenn Zustand Z_1 eine hohe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt bzw. bestenfalls mit Wahrscheinlichkeit $q = 1$ eintritt. Dann ist mit $D_1 = 0,050362$ das maximal mögliche Endvermögen in Höhe von $EV = 0,254054$ erzielbar. Dies liegt hauptsächlich daran, dass im Zustand Z_1 mit $D_1 = 0,050362$ bei der vorliegenden Datenkonstellation eine positive relative Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$ erzeugt werden kann, wodurch ein Betrag $F_{21} > F_1$ zur Verfügung gestellt wird.[169] Dieser Betrag kann dann vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ noch einmal vollständig zu einem Preis $p_{21} = 0,804348$ investiert werden. Aus Sicht von Zustand Z_2 ist es optimal, im Zeitpunkt $t = 1$ einen höheren Betrag $D_1 = 0,136660$ zu investieren. Dadurch wird dann im Zustand Z_2 ein im Vergleich zum Zustand Z_1 höherer Betrag $F_{22} > F_{21}$ zur Verfügung gestellt. Da allerdings F_{22} wegen $p_{22} = 1$ nicht mehr investiert wird, wurde letztendlich nur ein Betrag $D_1 < F_{21}$ zu einem Preis $p_1 > p_{21}$ investiert.[170] Daraus resultiert dann das geringere, im Zustand Z_2 maximal erzielbare Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,232016$. Im vorliegenden Beispiel ist somit die langfristige Arbitragemöglichkeit attraktiver als die kurzfristige Arbitragemöglichkeit, wenn die Zustände separat betrachtet werden.

Nach (4.48) liegt die optimale Lösung D_1^{opt} in Abhängigkeit von den konkreten Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1-q$ im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) zwischen $D_1^{optZ_1} = 0,050362$ und $D_1^{optZ_2} = 0,136660$. Mit $q = 0,35$ ergibt sich nach (4.49) als

[169] Ein Preis $p_{21} > p_1$ und somit $x_{Z_1} > 1$ ist im Fall (1) insbesondere durch $F_1 > S_{21} - S_1$ möglich.

[170] Zur Bestimmung von F_{22} muss zu diesem Investment neben dem von F_1 nicht investierten Betrag in Höhe von $F_1 - D_1 = 0,063340$ noch der Mittelzufluss ΔF hinzuaddiert werden. Es gilt somit auch: $F_{22} = D_1 \cdot \frac{1}{p_1} + F_1 - D_1 + \Delta F = 0,163340 + 0,063340 + 0,005336 = 0,232016$.

erste Näherung $D_1^{opt} \approx 0,106456$.[171] Um D_1^{opt} im Fall $q = 0,35$ exakt bestimmen zu können, muss der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.51) über D_1 maximiert werden. Nach (4.20) ergibt sich konkret für die erste Ableitung nach D_1

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= 0,35 \cdot \frac{1,2D_1 \cdot (0,2-1,2D_1)\cdot(0,8-1,2D_1-1,2\cdot(0,7+D_1))}{(0,7+D_1)^2\cdot(0,8-1,2D_1)^2}\\ &- 0,35 \cdot \left(\frac{1,2\cdot(0,2-2,4D_1)}{(0,7+D_1)\cdot(0,8-1,2D_1)} + \frac{0,72}{(0,8-1,2D_1)^2}\right)\\ &+ \frac{0,84}{(0,7+D_1)^2} - 0,65\cdot 1,2\\ &= -0,78\cdot\left(D_1^2 - 1,436018D_1 + 0,648839\right)\\ &\cdot \frac{(D_1+1,607243)\cdot(D_1-0,104559)}{(0,7+D_1)^2\cdot\left(D_1-\frac{2}{3}\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Die Nullstellen des Nenners in (4.57) liegen außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches. Der Zähler besitzt zwei reelle Nullstellen, $D_1 = -1,607243$ und $D_1 = 0,104559$.[172] Die negative Nullstelle liegt dabei ebenfalls außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches, wodurch hier nur noch $D_1 = 0,104559$ relevant ist. Die erste Ableitung nach (4.57) ist in unmittelbarer Nähe der Stelle $D_1 = 0,104559$ für $D_1 < 0,104559$ positiv und für $D_1 > 0,104559$ negativ. Folglich liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum vor und es gilt $D_1^{opt} = 0,104559$ mit $\mu^{opt} = 0,237035$ nach (4.51).[173] Die Näherungslösung nach (4.49) ist hier nur wenig größer als die exakte Lösung und somit als erste Einschätzung gut geeignet. Mit $D_1^{opt} = 0,104559$ wird bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,249209 < 0,254054$ und bei Eintritt von Zustand Z_2 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,230479 < 0,232016$ erzielt.[174] Die Funktionsverläufe für μ sowie EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 werden in Abbildung 4.11 veranschaulicht.

Jeweils in Abhängigkeit von D_1 wird in Abbildung 4.11 durch die durchgezogene Kurve der Erwartungswert μ, durch die fein gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_1} im Zustand Z_1 und durch die grob gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_2} im Zustand Z_2 dargestellt. Anhand der graphischen Veranschaulichung ist gut zu erkennen, dass sich D_1^{opt} in Abhängigkeit von q zwischen den beiden Werten $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ bewegt.

[171] Es gilt: $D_1^{opt} \approx q \cdot D_1^{optZ_1} + (1-q)\cdot D_1^{optZ_2} = 0,35\cdot 0,050362 + 0,65\cdot 0,136660 = 0,106456$.

[172] Der Ausdruck $D_1^2 - 1,436018D_1 + 0,648839 = 0$ besitzt keine reelle Nullstelle.

[173] Vgl. dazu auch die Ausführungen im Anschluss an die Gleichung (4.51).

[174] Vgl. (4.54) und (4.55).

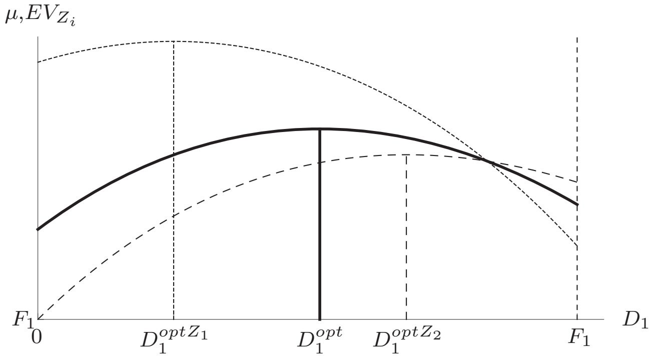


Abbildung 4.11: Beispiel Shleifer/Vishny (1997)

Die optimale Lösung D_1^{opt} liegt hier auch graphisch näher an $D_1^{optZ_2}$, wodurch die im Vergleich zu Zustand Z_1 höhere Eintrittswahrscheinlichkeit von Zustand Z_2 zum Ausdruck kommt.[175] Bedingt durch $D_1^{opt} > \widehat{D_1} = 0,1$ erfolgt bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Mittelabfluss, da in diesem Fall durch $p_{21} < p_1$ eine negative relative Wertentwicklung $x_{Z_1} < 1$ vorliegt.[176] Mit $D_1^{opt} < F_{21} = 0,199158$ ist der Arbitrageur jedoch nicht dazu gezwungen, seine Position zu liquidieren, sondern er kann im Zeitpunkt $t = 2$ noch weitere Mittel investieren.[177]

Die drei Kurven in Abbildung 4.11 schneiden sich an der Stelle $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$. Da der vollständige Mittelabzug im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) ausgeschlossen ist, ergibt sich nach Satz 72 an dieser Stelle ein zustandsunabhängiges, sicheres Endvermögen in Höhe von $EV = 0,230769 > F_1$. Unabhängig von den konkreten Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1-q$ ist hier jedoch ein Investment in Höhe von $D_1 = 0,1\bar{6}$ niemals optimal: Mit $D_1 = D_1^{optZ_2} = 0,136660$ ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 nach (4.54) ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,241526$ und bei Eintritt von Zustand Z_2 nach (4.55) ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,232016$. Demnach wird mit $D_1 = D_1^{optZ_2} = 0,136660$ sowohl bei Eintritt von Zustand Z_1 als auch bei Eintritt von Zustand Z_2 ein höheres Endvermögen als im Fall $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$ erzielt. Folglich ist auch der Erwartungswert, welcher sich für $q = 0,35$ und $D_1 = D_1^{optZ_2} = 0,136660$ ergibt, mit $\mu = 0,235345$ nach (4.51) höher als das sichere Endvermögen im Fall $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$. Ein Investment in Höhe von $D_1 = \frac{F_1}{a}$ kann überhaupt nur dann

[175] Zustand Z_2 besitzt die Eintrittswahrscheinlichkeit $1 - q = 1 - 0,35 = 0,65$.

[176] Mit $D_1^{opt} = 0,104559$ ergibt sich im Zustand Z_1 konkret $p_{21} = 0,799158 < p_1 = 0,804559$ und $x_{Z_1} = 0,996490$ mit $G(x_{Z_1}) = 0,995788$.

[177] Der Mittelabzug fällt mit $\Delta F = -0,000140$ auch sehr gering aus. Dies ist hauptsächlich auf die noch relativ eng beieinander liegenden Preise p_1 und p_{21} zurückzuführen.

optimal sein, wenn $D_1 = \frac{F_1}{a}$ zwischen den im jeweiligen Zustand optimalen Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ liegt. Dies ist im aufgeführten Beispiel nicht der Fall. Insbesondere ist nach Abbildung 4.11 ein Investment $D_1 > \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$, und somit auch ein Investment in Höhe von $D_1 = F_1 = 0,2$, unabhängig von den konkreten Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1-q$, hier niemals optimal, da sich für derartige Investments D_1 sowohl bei Eintritt von Zustand Z_1 als auch bei Eintritt von Zustand Z_2 ein niedrigeres Endvermögen als im Fall $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$ ergibt.

Hinsichtlich des Endvermögens ist es im vorliegenden Beispiel für den Arbitrageur attraktiver, wenn der Zustand Z_1 eintritt, da nach Abbildung 4.11 für $D_1 < \frac{F_1}{a} = 0,1\bar{6}$ und somit auch für $D_1 \leq D_1^{optZ_2} = 0,136660$ bei Eintritt von Zustand Z_1 immer ein höheres Endvermögen erzielt wird als bei Eintritt von Zustand Z_2. Je wahrscheinlicher der Zustand Z_1 mit der Eintrittswahrscheinlichkeit q ist, umso mehr verlagert sich im Beispiel die optimale Lösung D_1^{opt} ausgehend von $D_1^{optZ_2} = 0,136660$ in Richtung $D_1^{optZ_1} = 0,050362$.

Umso überraschender ist nun, dass Shleifer/Vishny (1997) im Rahmen dieses Beispiels für $q < 0,35$ eine optimale Lösung in Höhe von $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$ ermitteln.[178] Diese kommt wie folgt zustande:

Die Gleichung für den Erwartungswert, welche Shleifer/Vishny (1997) zugrunde legen, lässt sich aus Gleichung (4.16) ableiten.[179] Es gilt

$$\begin{aligned} \mu &= q \cdot \frac{\left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)\right) \cdot V}{p_{21}} + (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1 \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right)\right) \\ &= (1-q) \cdot \left(a \cdot \left(\frac{D_1 V}{p_1} + F_1 - D_1\right) + (1-a) \cdot F_1\right) \\ &+ q \cdot \frac{V}{p_{21}} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{D_1 p_{21}}{p_1} + F_1 - D_1\right) + (1-a) \cdot F_1\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Mit ihrer Gleichung für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) unter Verwendung einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 unterstellen Shleifer/Vishny (1997), dass der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist: Eine

[178] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44. Da Shleifer/Vishny (1997) eine andere optimale Lösung ermitteln, wird diese zur Abgrenzung von D_1^{opt} im Folgenden mit D_1^{optSV} bezeichnet.

[179] Gleichung (4.58) ergibt sich, indem in (4.16) die Reihenfolge der Summanden vertauscht, jeweils aF_1 innerhalb der Klammern nach F_1 addiert und subtrahiert und dann a bzw. $1-a$ entsprechend ausgeklammert wird. Für die Gleichung für den Erwartungswert vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 43.

Maximum-Funktion wie in (4.5) kommt in ihrem Artikel nicht vor. Den vollständigen Mittelabzug soll im Prinzip Bedingung (4.8) verhindern, welche jedoch nicht ausreicht.[180] Um zu bestimmen, für welches Investment D_1 der Erwartungswert μ maximal wird, leiten Shleifer/Vishny (1997) Gleichung (4.58) nach D_1 ab und erhalten ihre Bedingung erster Ordnung:

$$(1-q) \cdot \left(\frac{V}{p_1} - 1\right) + q \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right) \cdot \frac{V}{p_{21}} \geq 0. \tag{4.59}$$

Streng genommen müsste bei der ersten Ableitung noch der Parameter a vor beiden Summanden in (4.59) stehen. Da der Parameter a dadurch jedoch ausgeklammert werden kann, kommt ihm als Vorfaktor bei der Bedingung erster Ordnung keine besondere Bedeutung mehr zu und er kann daher vernachlässigt werden. Shleifer/Vishny (1997) geben weiter an, dass in (4.59) die Ungleichung dann und nur dann zutrifft, wenn $D_1 = F_1$ gewählt wird und der Gleichheitsfall, wenn $D_1 < F_1$ gilt.[181] Dies lässt sich wie folgt erklären: Würde ein $D_1^{optSV} < F_1$ gewählt, für welches gleichzeitig in (4.59) die Ungleichung gilt, dann bedeutet dies, dass an dieser Stelle $D_1^{optSV} < F_1$ die Gleichung für den Erwartungswert μ nach (4.58) noch eine positive Steigung besitzt. Folglich kann mit einem Investment $D_1 > D_1^{optSV}$ ein noch höherer Erwartungswert erzielt werden und das zuvor gewählte $D_1^{optSV} < F_1$ kann somit nicht optimal gewesen sein. Das Investment D_1 muss daher solange erhöht werden, bis letztendlich der Gleichheitsfall in (4.59) zutrifft oder die Grenze $D_1 = F_1$ des Definitionsbereiches erreicht wird. Die Formulierung von Shleifer/Vishny (1997) ist hier allerdings etwas unsauber, da auch für $D_1 = F_1$ der Gleichheitsfall in (4.59) auftreten kann.[182] Die Ungleichung kann aber aus den gerade beschriebenen Gründen nur für $D_1^{optSV} = F_1$ vorkommen.

Mit ihrer Proposition 1 treffen Shleifer/Vishny (1997) die Aussage, dass für jede Parameterkonstellation V, S_1, S_{21}, F_1 und a eine Eintrittswahrscheinlichkeit q^* dergestalt existiert, dass $D_1^{optSV} < F_1$ für $q > q^*$ und $D_1^{optSV} = F_1$ für $q < q^*$ zutrifft.[183] Anhand des im Rahmen dieses Abschnitts bereits sehr ausführlich behandelten Beispiels bestimmen sie die Eintrittswahrscheinlichkeit $q^* = 0,35$. Demnach trifft ihrer Meinung nach für $q < q^* = 0,35$ hier $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$ zu. Diese optimale Lösung von Shleifer/Vishny (1997) wird nun im Folgenden genauer analysiert.

[180] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150 sowie die Ausführungen im Anschluss an Bedingung (4.8).
[181] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 43.
[182] Vgl. dazu (4.60) und die sich daran anschließenden Ausführungen.
[183] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44.

Mit $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$ gilt $p_1 = 0,9$ nach (2.5) für den Preis im Zeitpunkt $t = 1$. Im Zeitpunkt $t = 2$ ergibt sich im Zustand Z_1 ein Preis $p_{21} = 0,7\overline{63}$ nach (4.52) sowie $F_{21} = 0,1\overline{63}$ nach (4.38). Im Zustand Z_2 gilt $p_{22} = V = 1$, woraus ein von dem Investor zur Verfügung gestellter Betrag in Höhe von $F_{22} = EV_{Z_2} = 0,22\overline{6}$ nach (4.55) resultiert. Diese Werte stimmen auch mit den Ergebnissen in Shleifer/Vishny (1997) überein.[184] Den Grundwert V sowie die beiden Preise p_1 und p_{21} in die Bedingung erster Ordnung nach (4.59) eingesetzt ergibt:

$$(1-q)\cdot\left(\frac{1}{0,9}-1\right)+q\cdot\left(\frac{0,7\overline{63}}{0,9}-1\right)\cdot\frac{1}{0,7\overline{63}}\geq 0. \tag{4.60}$$

In (4.60) gilt für $q = 0$ die Ungleichung $0,\overline{1} > 0$ und für $q = q^* = 0,358974$ trifft der Gleichheitsfall zu.[185] Für $q = q^*$ tritt somit in (4.60) auch für $D_1 = F_1$ der Gleichheitsfall auf. Für $q < q^*$ gilt die Ungleichung. Trifft $q > q^*$ zu, dann ergibt sich nach (4.60) ein Widerspruch, da sich dann mit $D_1 = F_1$ links vom Relationszeichen ein negativer Wert ergibt. Das Investment ist zu hoch und muss entsprechend reduziert werden. Als Beispiel für diesen Fall geben Shleifer/Vishny (1997) hier $q = 0,5$ an:[186]

Für $q = 0,5$ ergibt sich nach (4.60) der Widerspruch $-0,043651 \geq 0$. Das Investment in Höhe von $D_1 = F_1$ ist zu hoch und muss demnach reduziert werden. Durch die Reduzierung verändern sich jedoch die Preise p_1 und p_{21}, so dass Bedingung (4.60) keine Gültigkeit mehr besitzt und wieder die allgemeinere Form nach (4.59) herangezogen werden muss. Mit $p_1 = 0,7 + D_1$ nach (2.5) und p_{21} nach (4.52) sowie $V = 1$ und $q = 0,5$ ergibt sich aus (4.59) der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{D_1^2-1,8D_1+\frac{17}{60}}{(D_1+0,7)\cdot\left(D_1-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(D_1-0,174282)\cdot(D_1-1,625718)}{(D_1+0,7)\cdot\left(D_1-\frac{2}{3}\right)}\geq 0. \tag{4.61}$$

Da D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegen muss, ist die einzige relevante Nullstelle und somit die optimale Investitionsentscheidung $D_1^{optSV} = 0,174282$. Für $D_1 < 0,174282$ gilt zwar die Ungleichung in (4.61). Da jedoch für $D_1 < F_1$ der Gleichheitsfall zutreffen muss, kann ein Investment $D_1 < 0,174282$ nicht optimal sein. Für $D_1 > 0,174282$ ergibt sich analog zu $D_1 = F_1$ ein Widerspruch. Mit $D_1^{optSV} = 0,174282$ als Investment

[184] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44.

[185] Nach (4.60) gilt $0,\overline{1}\cdot(1-q) - 0,198413\,q \geq 0 \Leftrightarrow 0,\overline{1} - 0,309524\,q \geq 0 \Leftrightarrow 0,358974 \geq q$. In Shleifer/Vishny (1997) wurde $q^* = 0,35$ wahrscheinlich deshalb angegeben, weil für den gerundeten Wert $q = 0,36$ nach (4.60) der Widerspruch $-0,000317 \geq 0$ auftritt.

[186] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S.44.

gilt $p_1 = 0,874282$ für den Preis im Zeitpunkt $t = 1$. Im Zeitpunkt $t = 2$ ergibt sich im Zustand Z_1 der Preis $p_{21} = 0,776644$ sowie $F_{21} = 0,176644$. Im Zustand Z_2 gilt $p_{22} = V = 1$, woraus ein von dem Investor zur Verfügung gestellter Betrag in Höhe von $F_{22} = EV_{Z_2} = 0,230073$ resultiert.

Es stellt sich nun die Frage, warum Shleifer/Vishny (1997) hier andere optimale Lösungen herausbekommen. Für $q = 0,35$ muss nach Shleifer/Vishny (1997) ein Investment in Höhe von $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$ gewählt werden.[187] Dies führt dazu, dass bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,214286$ und bei Eintritt von Zustand Z_2 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,22\bar{6}$ erzielt wird, woraus dann letztendlich ein Erwartungswert $\mu = 0,222333$ resultiert.[188] Mit der zuvor ermittelten Lösung $D_1^{opt} = 0,104559$ wird jedoch bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,249209$ und bei Eintritt von Zustand Z_2 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,230479$ erzielt, woraus schließlich mit $q = 0,35$ ein Erwartungswert $\mu^{opt} = 0,237035$ resultiert. Das bedeutet, nicht nur der Erwartungswert ist für $D_1^{opt} = 0,104559$ höher, sondern auch das Endvermögen bezogen auf den jeweiligen Zustand. Dementsprechend kann es sich bei $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$ nicht um eine optimale Lösung handeln, wenn hier auch das Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) zugrunde gelegt wird.

Shleifer/Vishny (1997) wollen jedoch mit ihrer optimalen Lösung D_1^{optSV} ebenfalls den Erwartungswert μ nach (4.58) maximieren. Warum ihnen dieses nicht gelingt, liegt an ihrer Bedingung erster Ordnung nach (4.59): Diese kann zur Maximierung von (4.58) nicht herangezogen werden, da sie den Einfluss des Investments D_1 auf die Preise p_1 und p_{21} nicht berücksichtigt. Das bedeutet, die Bedingung erster Ordnung nach (4.59) ist hier zu einfach bzw. unvollständig, da sie die Ableitungen der Preise nach D_1 nicht berücksichtigt. Zwar gehen Shleifer/Vishny (1997) in ihrer Modellierung von einer großen Anzahl von Arbitrageuren aus, so dass der einzelne Arbitrageur keinen Einfluss auf die Preise besitzt.[189] Dies rechtfertigt jedoch nicht, dass der modelltechnisch gegebene Einfluss von D_1 auf die Preise p_1 und p_{21} in ihrer Bedingung erster Ordnung nach (4.59) völlig unterschlagen wird.

Eine Optimierung mit Hilfe von (4.59) ist in mehrfacher Hinsicht fraglich: Im vorliegenden Beispiel mit $q = 0,35$ wird für jedes andere Investment D_1 mit $0 \leq D_1 < D_1^{optSV}$ bei

[187] Es gilt $q = 0,35 < q^* = 0,358974$. Im Grenzfall $q = q^*$ gilt jedoch ebenfalls $D_1^{optSV} = F_1$.
[188] Diese drei Ergebnisse ergeben sich für $q = 1$, $q = 0$ und $q = 0,35$ in Verbindung mit Gleichung (4.58). Alternativ können auch die Gleichungen (4.54), (4.55) und (4.51) verwendet werden.
[189] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.

Eintritt von Zustand Z_1 ein höheres Endvermögen erzielt als im Fall $D_1 = D_1^{optSV}$.[190] Tritt Zustand Z_1 ein, dann ist der Arbitrageur durch $D_1^{optSV} = 0,2 > F_{21} = 0,1\overline{63}$ dazu gezwungen, seine Position teilweise zu liquidieren. Shleifer/Vishny (1997) ermitteln für $q = 0,5$ mit (4.59) ein Investment in Höhe von $D_1^{optSV} = 0,174282$. Dies führt zu den Werten $EV_{Z_1} = 0,227445$, $EV_{Z_2} = 0,230073$ und $\mu = 0,228759$. Alle drei Werte sind größer als im Fall $D_1^{optSV} = F_1 = 0,2$, und das, obwohl nun der aus Sicht von Shleifer/Vishny (1997) ungünstigere Zustand Z_1 durch $q = 0,5 > 0,35$ wahrscheinlicher geworden ist. Im Fall $q = 0$ ist die Bedingung erster Ordnung nach (4.59) immer positiv.[191] In diesem Fall trifft dann nach Shleifer/Vishny (1997) immer $D_1^{optSV} = F_1$ zu. Aus Sicht von Zustand Z_2, welcher durch $q = 0$ mit Sicherheit eintritt, ist hier jedoch ein Investment in Höhe von $D_1^{optZ_2} = 0,136660 < F_1$ optimal. Im Fall $q = 1$ ergibt sich nach (4.59) die Bedingung $\frac{V}{p_1} - \frac{V}{p_{21}} \geq 0$. Aus $q > q^*$ folgt $D_1^{optSV} < F_1$, weshalb dann in (4.59) der Gleichheitsfall zutreffen und daher $p_1 = p_{21}$ gelten muss. Nach (4.23) stimmen die beiden Preise immer an der Stelle $\widehat{D_1}$ überein. Im Fall $q = 1$ gilt somit im vorliegenden Beispiel $D_1^{optSV} = \widehat{D_1} = 0,1$. Aus Sicht von Zustand Z_1, welcher durch $q = 1$ mit Sicherheit eintritt, ist hier jedoch ein Investment in Höhe von $D_1^{optZ_1} = 0,050362 < \widehat{D_1}$ optimal. Da der Preis p_{21} sein Maximum im Fall (1) immer an der Stelle $D_1^{optZ_1} < \widehat{D_1}$ annimmt, kann im Fall $q = 1$ das Investment in Höhe von $D_1^{optSV} = \widehat{D_1}$ folglich nicht optimal sein. Im Fall (3) gilt nach Tabelle 4.3 stets $p_{21} < p_1$ im für D_1 zulässigen Bereich, so dass sich für derartige Parameterkonstellationen im Fall $q = 1 > q^*$ immer ein Widerspruch ergibt.

Eine Optimierung mit Hilfe der Bedingung erster Ordnung nach (4.59) führt somit in der Regel nicht zu einer optimalen Lösung. Dies wird hier bereits durch das von Shleifer/Vishny (1997) selbst angegebene Beispiel mehr als deutlich. Die auf der Grundlage von (4.59) getroffenen Aussagen in Shleifer/Vishny (1997) sind daher mit entsprechender Vorsicht zu genießen. Das Ausnutzen der Arbitragemöglichkeit gestaltet sich mitunter um einiges komplizierter, als es wohl nach Shleifer/Vishny (1997) ursprünglich der Fall sein sollte. Insbesondere ein Vollinvestment $D_1 = F_1$ ist auch für eine relativ geringe Eintrittswahrscheinlichkeit q nur unter gewissen Umständen optimal.[192] Die Aussage von Shleifer/Vishny (1997), dass $D_1^{optSV} = F_1$ für $q < q^*$ stets die optimale Lösung darstellt, ist somit im Allgemeinen falsch. Der nachfolgende Abschnitt widmet sich nun ausführlich dem ersten Zahlenbeispiel aus Arnold (2009).

[190] Vgl. Abbildung 4.11.
[191] Dies folgt direkt mit $p_1 < V$ nach Satz 3.
[192] Vgl. Abschnitt 4.1.3.

4.1.4.2 Arnold (2009)

In seinem ersten Zahlenbeispiel nimmt Arnold (2009) die folgenden Werte an:[193] Der Vermögensgegenstand besitzt hier analog zu Shleifer/Vishny (1997) den Grundwert $V = 1$. Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $S_1 = 0,2$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt ein viermal so großer Noise trader shock in Höhe von $S_{21} = 0,8$. Der anfangs im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag fällt mit $F_1 = 0,1$ relativ gering aus. Für den Parameter a der linearen Update-Funktion nimmt der Autor den Wert $a = 1,4$ an. Die Eintrittswahrscheinlichkeit für den Zustand Z_1 ist mit $q = 0,05$ relativ klein.

Mit $0,1 = F_1 < S_{21} - S_1 = 0,6$ und $S_{21} > S_1$ liegt hier der Fall (3) vor.[194] Zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse ist im Fall (3) keine Einschränkung des Parameters a erforderlich.[195] Da der Parameter $a = 1,4$ jedoch Bedingung (4.15) verletzt, ist der vollständige Mittelabzug in diesem Beispiel nicht ausgeschlossen.[196] Für D_1 im Bereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug seitens des Investors und folglich mit $F_{21} = 0$ ein Endvermögen $EV_{Z_1} = 0$.[197] Nach (4.36) ergibt sich für die Grenze $\overline{D}_1$ im Rahmen des Zahlenbeispiels der Wert

$$\overline{D}_1 = -\frac{0,74}{2,8} + \sqrt{\left(-\frac{0,74}{2,8}\right)^2 + \frac{0,08}{1,4}} = 0,092071. \tag{4.62}$$

Für D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < 0,092071$ ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) konkret nach (4.19) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mu &= 0,05 \cdot \left(\frac{0,1 - 1,4D_1}{0,3 - 1,4D_1} - \frac{1,4D_1 \cdot (0,1 - 1,4D_1)}{(0,8 + D_1) \cdot (0,3 - 1,4D_1)}\right) \\ &+ \frac{1,4D_1}{0,8 + D_1} + 0,95 \cdot (0,1 - 1,4D_1) \\ &= -1,33 \cdot \frac{(D_1 + 0,159629) \cdot (D_1 - 0,178881) \cdot (D_1 - 0,504057)}{(0,8 + D_1) \cdot \left(D_1 - \frac{3}{14}\right)}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Wird μ in (4.63) wieder als Funktion von D_1 aufgefasst, dann weist diese Funktion die gleichen Eigenschaften wie die Funktion nach (4.51) im vorangegangenen Beispiel von

[193] Vgl. Arnold (2009), S. 527.
[194] Vgl. Tabelle 4.2, S. 156.
[195] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[196] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150. Es gilt $a = 1,4 > 1 + \frac{1-0,8}{0,8-0,2+0,1} = 1,285714$.
[197] Vgl. Abschnitt 4.1.2.2.

Shleifer/Vishny (1997) auf.[198] Folglich besitzt die Funktion nach (4.63) hier zwischen den Nullstellen $D_1 = -0,159629$ und $D_1 = 0,178881$ ein lokales Maximum. Ob dieses lokale Maximum im für D_1 zulässigen Teilbereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1 = 0,092071$ liegt, ist im Folgenden noch zu klären. Die optimale Lösung für diesen ersten Teilbereich wird dann mit D_1^{opt1} bezeichnet.[199] Für D_1 im zweiten Teilbereich $0,092071 \leq D_1 \leq F_1 = 0,1$ ergibt sich für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) konkret nach (4.27) die Gleichung

$$\mu \;=\; 0,95 \cdot \left(0,1 + 1,4D_1 \cdot \left(\frac{1}{0,8 + D_1} - 1\right)\right). \qquad (4.64)$$

Der Erwartungswert μ nach (4.64) ist über D_1 mit $0,092071 \leq D_1 \leq F_1 = 0,1$ zu maximieren und die optimale Lösung für diesen zweiten Teilbereich wird dann mit D_1^{opt2} bezeichnet. Als optimale Lösung ergibt sich dann entweder $D_1^{opt} = D_1^{opt1}$ oder $D_1^{opt} = D_1^{opt2}$, je nachdem, ob der zu D_1^{opt1} zugehörige Erwartungswert μ^{opt1} am größten ist oder der zu D_1^{opt2} zugehörige Erwartungswert μ^{opt2}. Gilt $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ und gleichzeitig $D_1^{opt1} \neq D_1^{opt2}$, dann existieren zwei optimale Lösungen.[200] Vor der Bestimmung der optimalen Lösung D_1^{opt} erfolgt auch hier kurz eine zustandsbezogene Betrachtungsweise des Beispiels.

Nach (4.41) steht im Zustand Z_1 die Maximierung des Endvermögens im Einklang mit der Maximierung des Preises p_{21}. Im Fall (3) besitzt der Preis p_{21} unabhängig von der konkreten Höhe des Parameters $a > 1$ sein Maximum stets an der Stelle $D_1 = 0$.[201] Es handelt sich bei diesem Maximum um die Randstelle des Definitionsbereiches, denn das rein rechnerische, lokale Maximum liegt an einer Stelle $D_1 < 0$. Bezogen auf den Zustand Z_1 ist es daher optimal, im Zeitpunkt $t = 1$ nicht zu investieren und $D_1^{optZ_1} = 0$ zu wählen. Nach Satz 15 ergibt sich in diesem Fall eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x_{Z_1} = 1$. Es folgt $G(x_{Z_1}) = G(1) = 1$ mit (3.1) und $F_{21} = F_1 = 0,1$ mit (2.24). Im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 kommt es dann nach (2.25) weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss. Für den Preis im Zeitpunkt $t = 1$ gilt $p_1 = 0,8$ nach (2.5), und mit $D_{21} = F_{21}$ ergibt sich der Preis im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 nach (2.47) als $p_{21} = 0,3$.

[198] Vgl. dazu die Ausführungen im Anschluss an Gleichung (4.51). Neben den beiden Polstellen in (4.63) liegt auch an der Stelle $D_1 = 2$ eine Definitionslücke für μ vor, da der Preis p_{21} an dieser Stelle nicht definiert ist (vgl. Anhang C.2).
[199] Vgl. Abschnitt 4.1.2.2.
[200] Vgl. Abschnitt 4.1.4.3.
[201] Vgl. Abbildung 4.6, S. 170 und Anhang C.3.

Bei Eintritt von Zustand Z_1 wird mit $D_1^{optZ_1} = 0$ und $p_{21} = 0,3$ nach (4.39) ein maximales Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,\bar{3}$ erzielt. Für jedes andere zulässige Investment $D_1 > 0$ ergibt sich ein höherer Preis p_1 gefolgt von einer negativen relativen Wertentwicklung $x_{Z_1} < 1$ und somit einem Betrag $F_{21} < F_1$, woraus auch ein niedrigerer Preis p_{21} im Vergleich zum Fall mit $D_1^{optZ_1} = 0$ folgt. Das bedeutet, für jedes zulässige Investment $D_1 > 0$ ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 ein niedrigeres Endvermögen als das mit $D_1^{optZ_1} = 0$ erzielbare Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,\bar{3}$.

Das Endvermögen im Zustand Z_2 entspricht Gleichung (4.64) geteilt durch $0,95$ bzw. Gleichung (4.64) nur ohne den Vorfaktor $0,95$.[202] Der Erwartungswert μ und das Endvermögen EV_{Z_2} unterscheiden sich somit für D_1 im Teilbereich $0,092071 \leq D_1 \leq 0,1$ nur um den Vorfaktor $(1-q) = 0,95$. Zur Bestimmung des maximalen Endvermögens im Zustand Z_2 kann daher auch Gleichung (4.64) herangezogen und über D_1 maximiert werden. Allerdings ist das Endvermögen im Zustand Z_2 für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq 0,1$ definiert, wohingegen der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.64) nur für den Teilbereich $0,092071 \leq D_1 \leq 0,1$ definiert ist. Ergibt sich hier ein lokales Maximum für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < 0,092071$, dann wird das Endvermögen EV_{Z_2} zwar an dieser ermittelten Stelle maximal, der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.64) besitzt dann allerdings, bedingt durch den eingeschränkten Definitionsbereich, sein Maximum an der Stelle $D_1 = 0,092071$.[203] Liegt das lokale Maximum im Bereich $0,092071 \leq D_1 \leq 0,1$, dann werden sowohl der Erwartungswert μ als auch das Endvermögen EV_{Z_2} an der gleichen Stelle maximal. Ergibt sich funktional ein Maximum an einer Stelle $D_1 > 0,1$, dann werden beide maximal für $D_1 = F_1$. Das Endvermögen EV_{Z_2} wird nach (4.45) maximal an der Stelle

$$D_1 = -\,0,8\ + \sqrt{0,8} = 0,094427. \tag{4.65}$$

Somit gilt hier $D_1^{optZ_2} = D_1^{opt2} = 0,094427$. Nach Gleichung (4.42) wird bei Eintritt von Zustand Z_2 mit $D_1^{optZ_2} = 0,094427$ ein maximales Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = F_{22} = 0,115604$ erzielt. Im zweiten Teilbereich wird der Erwartungswert μ mit $D_1^{opt2} = 0,094427$ maximal und nach (4.64) gilt $\mu^{opt2} = 0,109824$.[204] Die optimale Lösung D_1^{opt} liegt somit im Bereich $0 \leq D_1^{opt} \leq 0,094427$.

[202] Vgl. dazu Gleichung (4.27) und Gleichung (4.42). Dies liegt daran, dass für D_1 im Bereich $0,092071 \leq D_1 \leq 0,1$ ein Endvermögen $EV_{Z_1} = 0$ resultiert. Damit ergibt sich der Erwartungswert in diesem Teilbereich als $\mu = q \cdot EV_{Z_1} + (1-q) \cdot EV_{Z_2} = (1-q) \cdot EV_{Z_2}$ und es gilt $EV_{Z_2} = \mu/(1-q)$.

[203] Dies folgt aus der strengen Konkavität von μ bzw. EV_{Z_2} nach (4.64). Vgl. auch (4.46).

[204] Der Erwartungswert ergibt sich in diesem Fall auch als $\mu^{opt2} = 0,95 \cdot EV_{Z_2}$.

Auch im Rahmen dieses Beispiels ist es aus Sicht des Arbitrageurs günstiger, wenn Zustand Z_1 eine relativ hohe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt. Angenommen, der Zustand Z_1 tritt mit Wahrscheinlichkeit $q = 1$ ein, dann erzielt der Arbitrageur mit $D_1^{optZ_1} = 0$ das maximal mögliche Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,\bar{3}$, wohingegen im Fall $q = 0$ mit $D_1^{optZ_2} = 0,094427$ nur ein relativ geringes Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,115604$ erzielt werden kann. Bei Eintritt von Zustand Z_1 kann vor allem deshalb ein relativ hohes Endvermögen erzielt werden, weil der Noise trader shock S_{21} im Vergleich zu V relativ hoch ausfällt und gleichzeitig S_1 bzw. F_1 im Vergleich zu S_{21} bzw. V relativ gering ausfallen. Dadurch ist im vorliegenden Beispiel auch der Preis p_{21} mit $0,2 \leq p_{21} \leq 0,3$ im Vergleich zu $V = 1$ relativ gering, so dass sich jedes bei Eintritt von Zustand Z_1 getätigte Investment D_{21} mehr als verdreifacht. Andererseits kann bei Eintritt von Zustand Z_2 nur ein relativ geringes Endvermögen erzielt werden, weil p_1 mit $0,8 \leq p_1 \leq 0,9$ im Vergleich zu $V = 1$ relativ hoch ausfällt. Auch in diesem Beispiel ist somit die langfristige Arbitragemöglichkeit attraktiver als die kurzfristige Arbitragemöglichkeit, wenn die Zustände separat betrachtet werden.

Zur Bestimmung der optimalen Lösung D_1^{opt} im Fall $q = 0,05$ muss nun noch D_1^{opt1} bzw. μ^{opt1} berechnet werden. Dazu ist der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.63) über D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < 0,092071$ zu maximieren. Nach (4.20) ergibt sich hier konkret für die erste Ableitung nach D_1

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= 0,05 \cdot \frac{1,4D_1 \cdot (0,1 - 1,4D_1) \cdot (0,3 - 1,4D_1 - 1,4 \cdot (0,8 + D_1))}{(0,8 + D_1)^2 \cdot (0,3 - 1,4D_1)^2} \\
&- 0,05 \cdot \left(\frac{1,4 \cdot (0,1 - 2,8D_1)}{(0,8 + D_1) \cdot (0,3 - 1,4D_1)} + \frac{0,28}{(0,3 - 1,4D_1)^2} \right) \\
&+ \frac{1,12}{(0,8 + D_1)^2} - 0,95 \cdot 1,4 \\
&= -1,33 \cdot \left(D_1^2 - 0,481615D_1 + 0,069254 \right) \\
&\cdot \frac{(D_1 + 1,697272) \cdot (D_1 - 0,044228)}{(0,8 + D_1)^2 \cdot \left(D_1 - \frac{3}{14} \right)^2}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Die Nullstellen des Nenners in (4.66) liegen außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches. Der Zähler besitzt zwei reelle Nullstellen, $D_1 = -1,697272$ und $D_1 = 0,044228$.[205] Die negative Nullstelle liegt außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches, wodurch als lokale Extremstelle nur noch $D_1 = 0,044228$ von Bedeutung ist. Da die erste Ableitung nach

[205] Der Ausdruck $D_1^2 - 0,481615D_1 + 0,069254 = 0$ besitzt keine reelle Nullstelle.

(4.66) in unmittelbarer Nähe von $D_1 = 0,044228$ für $D_1 < 0,044228$ positiv und für $D_1 > 0,044228$ negativ ist, liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum vor und es gilt $D_1^{opt1} = 0,044228$ mit $\mu^{opt1} = 0,116932$ nach (4.63). Da im vorliegenden Beispiel $\mu^{opt1} = 0,116932 > \mu^{opt2} = 0,109824$ zutrifft, folgt $\mu^{opt} = \mu^{opt1} = 0,116932$ nach (4.29) und somit $D_1^{opt} = D_1^{opt1} = 0,044228$.

Mit $q = 0,05$ ergibt sich als Näherungslösung $D_1^{opt} \approx 0,089706$.[206] Diese sehr schlechte Näherungslösung kann wie folgt begründet werden: Bei der Stelle $D_1^{optZ_1} = 0$ handelt es sich nicht um ein echtes lokales Maximum, sondern nur um die Randstelle des Definitionsbereiches.[207] Weiterhin schwankt das Endvermögen EV_{Z_1} sehr stark in Abhängigkeit von D_1, wohingegen das Endvermögen EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 relativ konstant bleibt.[208] Da bei Eintritt von Zustand Z_1 ein umso höheres Endvermögen erzielt werden kann, je geringer zuvor das Investment D_1 gewählt wurde, verlagert sich die optimale Lösung D_1^{opt} erst für sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeiten q in Richtung $D_1^{optZ_2}$. Für $q \geq 0,152542$ ergibt sich im vorliegenden Beispiel sogar immer eine optimale Lösung in Höhe von $D_1^{opt} = 0$.[209] Eine lineare Gewichtung von $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten q und $1 - q$ im Sinne von (4.49) ist daher im vorliegenden Beispiel zur Bestimmung einer Näherungslösung für D_1^{opt} nicht geeignet.

Mit $D_1^{opt} = 0,044228$ wird bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,221562$ erzielt, und wenn Zustand Z_2 eintritt, dann ergibt sich ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,111425$.[210] Die Funktionsverläufe für μ sowie EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 werden in Abbildung 4.12 veranschaulicht.

Analog zum vorherigen Beispiel wird in Abbildung 4.12 jeweils in Abhängigkeit von D_1 durch die durchgezogene Kurve der Erwartungswert μ, durch die fein gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_1} und durch die grob gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_2} dargestellt. Die Kurve des Endvermögens EV_{Z_1} wird hier nur für einen sehr klei-

[206] Nach (4.49) gilt: $D_1^{opt} \approx q \cdot D_1^{optZ_1} + (1 - q) \cdot D_1^{optZ_2} = 0,05 \cdot 0 + 0,95 \cdot 0,094427 = 0,089706$.

[207] Rein funktional liegt das lokale Maximum nach (C.6) an der Stelle $D_1 = -0,236068$. Wird dieser Wert anstelle von $D_1^{optZ_1} = 0$ verwendet, ergibt sich allerdings die nicht viel bessere Näherungslösung $D_1^{opt} \approx 0,077903$ nach (4.49).

[208] Je nach Wahl von D_1 liegt das Endvermögen EV_{Z_1} zwischen 0 und $0,\bar{3}$ und das Endvermögen EV_{Z_2} zwischen $0,1$ und $0,115604$.

[209] Nach (4.20) ergibt sich hier konkret für die erste Ableitung nach D_1 an der Stelle $D_1 = 0$ und in Abhängigkeit von q der Ausdruck $0,35 - 2,29\bar{4}\,q$. Es folgt $0,35 - 2,29\bar{4}\,q = 0 \Leftrightarrow q = 0,152542$. Für $q > 0,152542$ ist der Ausdruck negativ und das lokale Maximum liegt an einer Stelle $D_1 < 0$, woraus ebenfalls $D_1^{opt} = 0$ resultiert.

[210] Vgl. (4.39) in Verbindung mit (4.7) sowie (4.42).

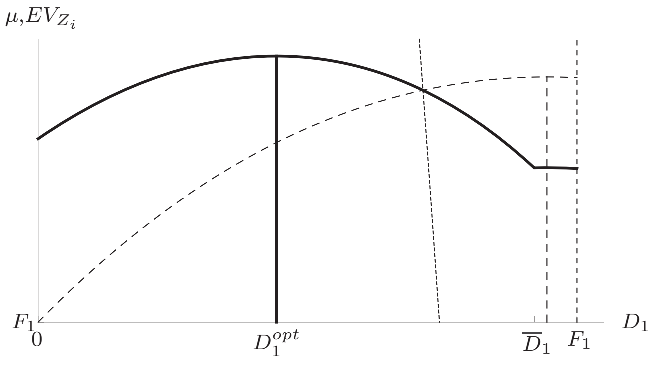


Abbildung 4.12: Beispiel Arnold (2009)

nen Teilbereich abgebildet, da EV_{Z_1} mit steigendem Investment D_1 sehr stark abnimmt und in der Abbildung nur der Wertebereich von $0,1$ bis $0,118$ veranschaulicht wird.[211] In Abbildung 4.12 wird für das vorliegende Beispiel noch einmal graphisch gut verdeutlicht, dass trotz der geringen Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,05$ von Zustand Z_1 die optimale Lösung $D_1^{opt} = D_1^{opt1} = 0,044228$ hier immer noch näher an der aus Sicht von Zustand Z_1 optimalen Lösung $D_1^{optZ_1} = 0$ als an der aus Sicht von Zustand Z_2 optimalen Lösung $D_1^{optZ_2} = D_1^{opt2} = 0,094427$ liegt.

Die drei Kurven in Abbildung 4.12 schneiden sich an der Stelle $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,071429$. Nach Satz 73 ergibt sich an dieser Stelle ein zustandsunabhängiges, sicheres Endvermögen in Höhe von $EV = 0,114754$.[212] Dieses Endvermögen ist jedoch wiederum nicht optimal, da das sich mit $D_1^{opt} = 0,044228$ ergebende, erwartete Endvermögen $\mu^{opt} = 0,116932$ größer ist. Allerdings wird mit $D_1^{opt} = 0,044228$ bei Eintritt von Zustand Z_2 nur ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_2} = 0,111425 < 0,114754$ erzielt, da der Schnittpunkt $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,071429$ hier zwischen den im jeweiligen Zustand optimalen Lösungen $D_1^{optZ_1} = 0$ und $D_1^{optZ_2} = 0,094427$ liegt. Nur im Fall $q = 0,015609$ ergibt sich im vorliegenden Beispiel als optimale Lösung $D_1^{opt} = \frac{F_1}{a} = 0,071429$ und somit ein zustandsunabhängiges, sicheres Endvermögen in Höhe von $EV = 0,114754$.[213]

Der Erwartungswert μ berechnet sich für D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < 0,092071$ nach (4.63) und für D_1 im zweiten Teilbereich $0,092071 \leq D_1 \leq F_1 = 0,1$ nach

[211] Der Graph von EV_{Z_1} startet für $D_1 = 0$ bei $EV_{Z_1} = 0,\overline{3}$ und nimmt dann kontinuierlich bis zur Stelle $D_1 = \overline{D}_1 = 0,092071$ ab, ab welcher dann $EV_{Z_1} = 0$ gilt.

[212] Insbesondere ist hier auch die Bedingung $F_1 + S_1 = 0,1 + 0,2 = 0,3 < 1 = V$ erfüllt.

[213] Nach (4.20) ergibt sich für die erste Ableitung nach D_1 an der Stelle $D_1 = \frac{F_1}{a}$ und in Abhängigkeit von q der Ausdruck $0,074872 - 4,796721\,q$. Es folgt $0,074872 - 4,796721\,q = 0 \Leftrightarrow q = 0,015609$ und somit ein lokales Maximum an der Stelle $D_1^{opt} = \frac{F_1}{a} = 0,071429$.

(4.64). An der Stelle $D_1 = \overline{D}_1 = 0,092071$ stimmen (4.63) und (4.64) überein.[214] Das lokale Maximum an der Stelle $D_1^{opt} = D_1^{opt1}$ ist in Abbildung 4.12 sehr gut zu erkennen, wohingegen das lokale Maximum an der Stelle $D_1^{optZ_2} = D_1^{opt2} = 0,094427$ in der gewählten Darstellung nicht gut auszumachen ist. Abbildung 4.13 veranschaulicht daher noch einmal explizit den Bereich zwischen $\overline{D}_1 = 0,092071$ und $F_1 = 0,1$.

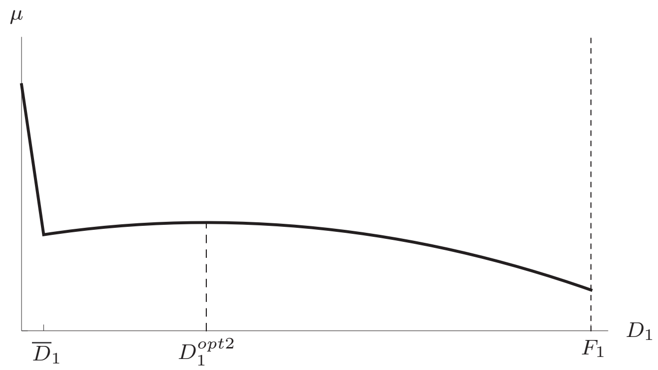


Abbildung 4.13: Der Bereich zwischen $\overline{D}_1$ und F_1

In Abbildung 4.13 ist nun gut zu erkennen, dass es sich bei D_1^{opt2} nicht um eine Randlösung $D_1 = \overline{D}_1$ oder $D_1 = F_1$ handelt, sondern um ein echtes lokales Maximum. Da jedoch $\mu^{opt1} > \mu^{opt2}$ zutrifft, liegt in diesem Beispiel eine eindeutige, optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,044228$ vor.

Nach Arnold (2009) existiert im vorliegenden Beispiel keine optimale Lösung.[215] Diese Nicht-Existenz einer optimalen Lösung kommt seiner Meinung nach wie folgt zustande:

Arnold (2009) stellt ebenfalls heraus, dass Bedingung (4.8) im Rahmen des Modells nicht ausreicht, um den vollständigen Mittelabzug zu verhindern. Um diese fehlerhafte Bedingung von Shleifer/Vishny (1997) zu demonstrieren, wählt er im vorliegenden Beispiel den Parameter a dergestalt, dass Bedingung (4.8) zwar erfüllt, ein vollständiger Mittelabzug für entsprechend hohe Investments D_1 aber dennoch möglich ist.[216] Mit $D_1 = F_1 = 0,1$ ergibt sich $p_1 = 0,9$ nach (2.5) und $p_{21} = 0,189474$ nach (4.7). Nach (4.38) folgt daraus $F_{21} = -0,010526$ und somit ein Widerspruch zu (2.24). Demnach kann $D_1 = F_1$ keine optimale Lösung sein.[217] Auch nach Shleifer/Vishny (1997) folgt,

[214] An der Stelle $D_1 = \overline{D}_1 = 0,092071$ gilt $EV_{Z_1} = 0$ und somit $\mu = (1-q) \cdot EV_{Z_2}$. Die Übereinstimmung wird deutlich, wenn für (4.63) die ursprüngliche Form nach (4.16) herangezogen wird.

[215] Vgl. Arnold (2009), S. 528.

[216] Vgl. Fußnote 196, Kapitel 4, S. 203. Bedingung (4.15) ist verletzt. Mit $a < 9$ ist Bedingung (4.8) jedoch erfüllt, auch wenn ein Einhalten von Bedingung (4.8) im Fall (3) nicht erforderlich ist.

[217] Vgl. Arnold (2009), S. 528.

dass $D_1 = F_1$ hier nicht optimal ist: Nach (4.59) ergibt sich für dieses Zahlenbeispiel der Widerspruch $-0,102\bar{7} \geq 0$, woraus $D_1^{optSV} < F_1$ resultiert.

Für eine optimale Lösung $D_1 < F_1$ muss der Gleichheitsfall in (4.59) zutreffen.[218] Mit $V = 1$, $q = 0,05$ und $p_1 = 0,8 + D_1$ nach (2.5) eingesetzt in (4.59) sowie unter Berücksichtigung des Gleichheitsfalls ergibt sich

$$0,95 \cdot \left(\frac{1}{0,8 + D_1} - 1 \right) + \frac{0,05}{p_{21}} \cdot \left(\frac{p_{21}}{0,8 + D_1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow p_{21} = \frac{0,8 + D_1}{4,8 - 19D_1}. \quad (4.67)$$

Es ist nun ein Preis p_{21} nach (4.7) zu bestimmen, welcher auch Bedingung (4.67) erfüllt. Durch Gleichsetzen von (4.67) und (4.7) ergibt sich $D_1 = 0,061658$.[219] Damit folgt unmittelbar $p_{21} = 0,237469$ nach (4.67) sowie $p_1 = 0,861658$ nach (2.5) und $F_{21} = 0,037469$ nach (4.38). Dieses Verfahren von Arnold (2009) zur Bestimmung von $D_1 < F_1$ kann auch zur Bestimmung von D_1^{optSV} in Abschnitt 4.1.4.1 verwendet werden.[220] Demnach ergibt sich nach Shleifer/Vishny (1997) hier eine optimale Lösung in Höhe von $D_1^{optSV} = 0,061658$. Um zu zeigen, dass im vorliegenden Zahlenbeispiel keine optimale Lösung existiert, geht Arnold (2009) nun wie folgt vor:

Nach (4.5) ergibt sich für den Erwartungswert μ unter Verwendung von $p_1 = 0,861658$ und $p_{21} = 0,237469$ im vorliegenden Zahlenbeispiel konkret die Gleichung

$$\mu = 0,210554 \cdot \max\left[0, 1 - 1,014166D_1, 0\right] + 0,95 \cdot (0,1 + 0,224775D_1). \quad (4.68)$$

Um den vollständigen Mittelabzug für entsprechend hohe Investments D_1 zu berücksichtigen, greift Arnold (2009) hier nicht auf die ursprüngliche Gleichung (4.58) aus Shleifer/Vishny (1997) zurück, sondern auf (4.5), welche die Maximum-Funktion beinhaltet. Für $D_1 < 0,098603$ liefert die Maximum-Funktion in (4.68) ein positives Ergebnis. Weiterhin ergibt sich für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq 0,098603$ nach (4.68) ein konstanter Erwartungswert in Höhe von $\mu = 0,116055$.[221] Für $D_1 \geq 0,098603$ nimmt die Maximum-Funktion in (4.68) den Wert null an, so dass für diesen Bereich hier letztendlich $\mu = 0,95 \cdot (0,1 + 0,224775D_1)$ folgt. Das bedeutet, der Erwartungswert μ wird für D_1 im Bereich $0,098603 < D_1 \leq F_1$ mit steigendem D_1 linear größer und

[218] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 43.

[219] Es muss gelten: $26,6\,D_1^2 - 12,02\,D_1 + 0,64 = 0 \Leftrightarrow (D_1 - 0,061658) \cdot (D_1 - 0,390222) = 0$. Mit D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1 = 0,1$ ist $D_1 = 0,061658$ die relevante Lösung.

[220] Im Prinzip erfolgt die Bestimmung von D_1^{optSV} in Abschnitt 4.1.4.1 analog: Der Preis p_{21} in (4.59) wird nur schon direkt durch (4.7) ersetzt. Vgl. beispielsweise Gleichung (4.61) im Fall $q = 0,5$.

[221] Für $D_1 < 0,098603$ gilt $\mu = 0,021055 - 0,213537D_1 + 0,095 + 0,213537D_1 = 0,116055$.

ist somit für $D_1 = F_1$ mit $\mu = 0,116354$ maximal. Da jedoch bereits gezeigt wurde, dass $D_1 = F_1$ nicht optimal sein kann, existiert hier laut Arnold (2009) keine optimale Lösung.[222]

Auch bei Arnold (2009) kann zunächst kritisiert werden, dass eine Optimierung mit Hilfe von (4.59) in der Regel nicht zu einer optimalen Lösung führt. Dies wurde jedoch bereits am Ende von Abschnitt 4.1.4.1 ausführlich diskutiert. Daher beschränkt sich die Kritik hier hauptsächlich auf Gleichung (4.68) und die damit verbundene Argumentation seitens Arnold (2009).

Meiner Meinung nach ist es hier nicht sinnvoll, in Gleichung (4.68) konstante Preise p_1 und p_{21} zu unterstellen. Je nach Höhe des Investments D_1 variieren diese Preise. Das bedeutet, Gleichung (4.68) besitzt genau genommen nur für ein Investment D_1 Gültigkeit, und zwar für $D_1^{optSV} = 0,061658$. Für alle anderen Investments D_1 ergeben sich modellbedingt auch andere Preise p_1 und p_{21}, so dass die Argumentation seitens Arnold (2009) hier nicht ganz schlüssig ist.

Fraglich ist in diesem Zusammenhang auch die von Arnold (2009) ermittelte Grenze $D_1 = 0,098603$. Nach (4.62) erfolgt der vollständige Mittelabzug bereits ab der Stelle $\overline{D}_1 = 0,092071$. Das bedeutet, für beispielsweise $D_1 = 0,095$ nimmt die Maximum-Funktion in (4.5) bereits den Wert null an und es gilt $F_{21} = 0$. Nach Gleichung (4.68) liefert die Maximum-Funktion jedoch auch für $D_1 = 0,095$ ein noch positives Ergebnis. Die Grenze $\overline{D}_1$ ist zudem unabhängig von der Eintrittswahrscheinlichkeit q, da sie sich nur auf den Zustand Z_1 bezieht. Die von Arnold (2009) angegebene Grenze weist diese Unabhängigkeit jedoch nicht auf. Dies verdeutlicht das folgende Szenario:

Die Eintrittswahrscheinlichkeit von Zustand Z_1 sei etwas höher und betrage $q = 0,06$. Dadurch verändert sich Gleichung (4.67) zu $p_{21} = (0,8 + D_1)\,/\,(4,1\bar{3} - 15,\bar{6}D_1)$. In Verbindung mit (4.7) ergibt sich hier $D_1 = 0,048800$.[223] Damit folgt $p_{21} = 0,251960$ sowie $p_1 = 0,848800$ und $F_{21} = 0,051960$. Nach (4.5) ergibt sich dann für den Erwartungswert μ unter Verwendung von $p_1 = 0,848800$ und $p_{21} = 0,251960$ sowie $q = 0,06$ konkret die Gleichung

$$\mu = 0,238133 \cdot \max\left[0, 1 - 0,984421D_1, 0\right] + 0,94 \cdot (0,1 + 0,249386D_1)\,. \qquad (4.69)$$

[222] Vgl. Arnold (2009), S. 528.

[223] Es muss gelten: $21,9\bar{3}\,D_1^2 - 10,08\bar{6}\,D_1 + 0,44 = 0 \Leftrightarrow (D_1 - 0,048800) \cdot (D_1 - 0,411078) = 0$. Mit D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1 = 0,1$ ist $D_1 = 0,048800$ die relevante Lösung.

Für $D_1 < 0,101583$, und demnach für alle D_1 im zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$, liefert die Maximum-Funktion in (4.69) ein positives Ergebnis. Daraus resultiert für alle möglichen Investments D_1 nach (4.69) ein konstanter Erwartungswert $\mu = 0,117813$. Durch eine geringe Erhöhung der Eintrittswahrscheinlichkeit q ergibt sich nun eine auch im Sinne von Shleifer/Vishny (1997) optimale Lösung $D_1^{optSV} = 0,048800$. Die Argumentation von Arnold (2009) ist somit schon für eine etwas höhere Eintrittswahrscheinlichkeit q sehr fragwürdig, da nun keine Grenze mehr im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ existiert, ab welcher die Maximum-Funktion in (4.69) den Wert null annimmt. Weiterhin handelt es sich auch bei $D_1^{optSV} = 0,048800$ nicht um eine Lösung, bei welcher der Erwartungswert μ nach (4.5) maximal wird.[224]

Mit steigender Eintrittswahrscheinlichkeit q wird die optimale Lösung D_1^{opt} im vorliegenden Beispiel immer kleiner, bis sich letztendlich für $q \geq 0,152542$ sogar immer eine optimale Lösung in Höhe von $D_1^{opt} = 0$ ergibt.[225] Auch die nach Shleifer/Vishny (1997) optimale Lösung D_1^{optSV} wird mit steigender Eintrittswahrscheinlichkeit q immer kleiner. Allerdings wird hier schon für $q = 0,107143$ nach (4.59) eine optimale Lösung $D_1^{optSV} = 0$ erzielt.[226] Für $q > 0,107143$ ergibt sich ein Widerspruch, da der Ausdruck links vom Relationszeichen in (4.59) dann immer negativ ist.

Da auch Arnold (2009) die Bedingung erster Ordnung nach (4.59) seinen Beispielen zugrunde legt, sind seine Aussagen ebenso mit entsprechender Vorsicht zu genießen wie die Aussagen von Shleifer/Vishny (1997). Arnold (2009) erkennt allerdings ebenfalls, dass die Bedingung (4.8) von Shleifer/Vishny (1997) im Fall $S_{21} > S_1$ nicht ausreicht, um den vollständigen Mittelabzug zu verhindern, und dass zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs die Bedingung (4.15) für den Parameter a eingehalten werden muss.[227] Erforderliche Einschränkungen des Parameters a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse werden jedoch nicht deutlich genug herausgestellt. Dies wird durch das zweite Zahlenbeispiel von Arnold (2009) deutlich.[228] Mit $S_{21} > S_1$ und $0,7 = F_1 > S_{21} - S_1 = 0,05$ liegt hier der Fall (1) vor, in welchem der Parameter a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse der Bedingung (4.25) genügen muss.[229] Diese Voraussetzung ist hier jedoch nicht erfüllt, da der Parameter a in diesem zweiten Zah-

[224] Der Erwartungswert μ nach (4.5) wird mit $q = 0,06$ und nicht konstanten Preisen p_1 und p_{21} maximal für $D_1^{opt} = 0,038419$. In diesem Fall gilt dann $\mu^{opt} = 0,118132$.

[225] Vgl. Fußnote 209, Kapitel 4, S. 207.

[226] Mit $D_1 = 0$ folgt $p_1 = 0,8$ und $p_{21} = 0,3$. Im Gleichheitsfall in (4.59) resultiert dann $q = 0,107143$.

[227] Vgl. Arnold (2009), S. 531.

[228] Vgl. Arnold (2009), S. 530. Es gilt $V = 1$, $F_1 = 0,7$, $S_1 = 0,8$ und $S_{21} = 0,85$ mit dem Parameter $a = 2$ und der Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,5$.

[229] Vgl. Tabelle 4.2, S. 156 sowie Tabelle 4.4, S. 177.

lenbeispiel mit $a = 2 > 1 + \frac{1-0{,}8}{0{,}8-0{,}85+0{,}7} = 1,307692$ die Bedingung (4.25) verletzt. Dadurch besitzt der Preis p_{21} einen Pol mit Vorzeichenwechsel im für D_1 zulässigen Bereich und ökonomisch sinnvolle Ergebnisse sind hier nicht mehr möglich.[230] Die Verletzung der Bedingung (4.8) von Shleifer/Vishny (1997) durch $a = 2 > 1 + \frac{1-0{,}8}{0{,}7} = 1,285714$ ist im Fall (1) letztendlich irrelevant.

Arnold (2009) trifft in seinen Ausführungen zwar einige Fallunterscheidungen hinsichtlich des Parameters a. In seinen Zahlenbeispielen finden sich jedoch keine Einschränkungen des Parameters a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse, wodurch dann Preise p_{21} mit einem Pol mit Vorzeichenwechsel im für D_1 zulässigen Bereich vorkommen können. In Kombination mit der fraglichen Bedingung erster Ordnung nach (4.59) sind dadurch nach Arnold (2009) neben der Nicht-Existenz einer optimalen Lösung auch mehrere optimale Lösungen möglich.

Unter Berücksichtigung der Einschränkungen des Parameters a nach Tabelle 4.4 zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse können jedoch in den Fällen (1) bis (3) bzw. für $S_{21} > S_1$ nur maximal zwei optimale Lösungen auftreten. Diesem Aspekt widmet sich nun ausführlich der nachfolgende Abschnitt.

4.1.4.3 Zwei optimale Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$

Ist der vollständige Mittelabzug im Fall $S_{21} > S_1$ ausgeschlossen, dann ergibt sich genau eine optimale Lösung D_1^{opt}. Wird durch den Parameter a die Bedingung (4.15) im Fall $S_{21} > S_1$ verletzt, dann ist der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen und zwei optimale Lösungen sind prinzipiell möglich, wenn $D_1^{optZ_2} > \overline{D}_1$ zutrifft.[231] Dies liegt daran, dass sich unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs der Erwartungswert μ für den ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ nach Gleichung (4.19) und für den zweiten Teilbereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ nach Gleichung (4.27) ergibt. Führt die für den ersten Teilbereich ermittelte, optimale Lösung zum gleichen Erwartungswert wie die für den zweiten Teilbereich ermittelte, optimale Lösung, dann existieren zwei optimale Lösungen. Da im ersten Zahlenbeispiel aus Arnold (2009) der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen ist und $D_1^{optZ_2} > \overline{D}_1$ zutrifft, bietet es sich an, dieses Beispiel aus Abschnitt 4.1.4.2 zur Darstellung eines derartigen Falls heranzuziehen.

Für die Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,05$ von Zustand Z_1 ergibt sich in diesem Zahlenbeispiel $D_1^{opt1} = 0,044228$ mit $\mu^{opt1} = 0,116932$ für den ersten Teilbereich und

[230] Insbesondere ist der Preis p_{21} nach (4.7) an der Polstelle $D_1 = 0,2$ nicht definiert.
[231] Vgl. Abschnitt 4.1.3.

$D_1^{opt2} = 0,094427$ mit $\mu^{opt2} = 0,109824$ für den zweiten Teilbereich.[232] Aufgrund des höheren Erwartungswertes ist in diesem Fall D_1^{opt1} die optimale Lösung.

Gilt $q = 0,06$ für die Eintrittswahrscheinlichkeit von Zustand Z_1, dann ergibt sich für ein nun niedrigeres $D_1^{opt1} = 0,038419$ im ersten Teilbereich ein noch höherer Erwartungswert $\mu^{opt1} = 0,118132$.[233] Die Stelle, an welcher die optimale Lösung im zweiten Teilbereich liegt, ist unabhängig von q und somit gilt weiterhin $D_1^{opt2} = 0,094427$.[234] Allerdings ergibt sich jetzt ein niedrigerer Erwartungswert $\mu^{opt2} = 0,108668$, da sich in Gleichung (4.64) der Vorfaktor durch $q = 0,06$ entsprechend zu $0,94$ reduziert.[235] Durch eine höhere Eintrittswahrscheinlichkeit q wird somit der erste Teilbereich noch attraktiver und D_1^{opt1} ist weiterhin die optimale Lösung.

Wird nun hingegen eine Eintrittswahrscheinlichkeit $q < 0,05$ zugrunde gelegt, dann verschiebt sich die optimale Lösung D_1^{opt1} im ersten Teilbereich in Richtung $\overline{D}_1$ bei zugleich abnehmendem Erwartungswert μ^{opt1}. Der Erwartungswert μ^{opt2} an der Stelle $D_1^{opt2} = 0,094427$ wird mit sinkender Eintrittswahrscheinlichkeit q gleichzeitig immer größer. Eine Übereinstimmung $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ wird hier für $q = 0,002308$ erzielt.[236] Dies wird im Folgenden noch einmal etwas genauer erläutert.

Für D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < 0,092071$ ergibt sich mit $q = 0,002308$ für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) im vorliegenden Zahlenbeispiel nach (4.19) die Gleichung

$$\mu = -1,396769 \cdot \frac{(D_1 + 0,140114) \cdot (D_1 - 0,211922) \cdot (D_1 - 0,415559)}{(0,8 + D_1) \cdot \left(D_1 - \frac{3}{14}\right)}. \qquad (4.70)$$

Zur Bestimmung von D_1^{opt1} muss der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.70) über D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < 0,092071$ maximiert werden. Nach (4.20) ergibt sich im vorliegenden Zahlenbeispiel mit $q = 0,002308$ für die erste Ableitung nach D_1

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= -1,396769 \cdot \left(D_1^2 - 0,433312 D_1 + 0,047654\right) \\ &\quad \cdot \frac{(D_1 + 1,694552) \cdot (D_1 - 0,089812)}{(0,8 + D_1)^2 \cdot \left(D_1 - \frac{3}{14}\right)^2}. \end{aligned} \qquad (4.71)$$

[232] Vgl. Abschnitt 4.1.4.2.
[233] Vgl. Fußnote 224, Kapitel 4, S. 212.
[234] Vgl. Gleichung (4.65).
[235] Vgl. auch Gleichung (4.27).
[236] Die Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,002308$ wurde numerisch ermittelt.

Analog zu den Ausführungen in den vorherigen Beispielen ist hier als lokale Extremstelle nur $D_1 = 0,089812$ von Bedeutung.[237] An dieser Stelle liegt ein lokales Maximum vor und es gilt $D_1^{opt1} = 0,089812$ mit $\mu^{opt1} = 0,115337$ nach (4.70).

Für D_1 im zweiten Teilbereich $0,092071 \leq D_1 \leq 0,1$ gilt weiterhin $D_1^{opt2} = 0,094427$. Zur Berechnung von μ^{opt2} muss nur der Vorfaktor in (4.64) entsprechend abgeändert werden. Der Erwartungswert μ^{opt2} lässt sich aber auch mit Hilfe des Erwartungswertes $\mu^{opt2} = 0,109824$ im Fall $q = 0,05$ bzw. mit dem bei Eintritt von Zustand Z_2 maximal möglichen Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,115604$ berechnen. In Abhängigkeit von q gilt im vorliegenden Beispiel

$$\mu^{opt2} \; = \; \frac{0,109824}{0,95} \cdot (1-q) \; = \; 0,115604 \cdot (1-q)\,. \tag{4.72}$$

Mit $q = 0,002308$ ergibt sich nach (4.72) die optimale Lösung $\mu^{opt2} = 0,115337$. Da $\mu^{opt1} = \mu^{opt2} = 0,115337$ gilt, ist die optimale Lösung D_1^{opt} im vorliegenden Beispiel im Fall $q = 0,002308$ somit nicht eindeutig, da sich sowohl mit $D_1^{opt1} = 0,089812$ als auch mit $D_1^{opt2} = 0,094427$ ein erwartetes Endvermögen in Höhe von $\mu^{opt} = 0,115337$ ergibt. In Abbildung 4.14 werden diese zwei Lösungen noch einmal graphisch dargestellt.

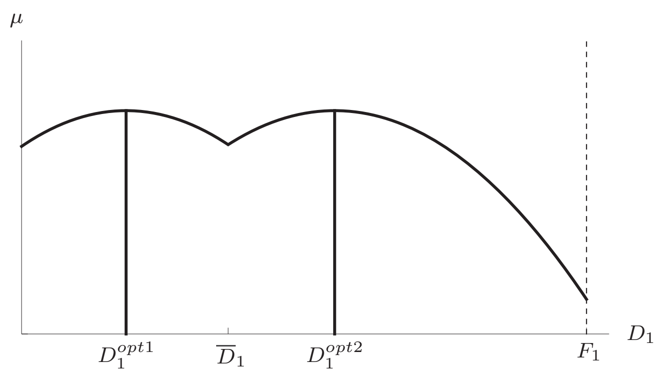


Abbildung 4.14: Zwei optimale Lösungen I

Ist der vollständige Mittelabzug nicht ausgeschlossen, dann sind zwei optimale Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$ prinzipiell möglich. Im vorliegenden Beispiel treten diese zwei optimalen Lösungen allerdings nur für eine sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,002308$ des Zustandes Z_1 auf. Außerdem schwankt der in Abbildung 4.14 dargestellte Erwartungswert nicht besonders stark für D_1 im Bereich $0,089812 \leq D_1 \leq 0,1$.

[237] Vgl. (4.57) sowie (4.66) und die sich jeweils daran anschließenden Ausführungen.

Für $D_1 = \overline{D}_1 = 0,092071$ ergibt sich $\mu = 0,115328$ und für $D_1 = F_1 = 0,1$ trifft hier $\mu = 0,115289$ zu. Wird im Fall $q = 0,002308$ allerdings als optimale Lösung $D_1^{opt1} = 0,089812$ gewählt, dann wird bei Eintritt von Zustand Z_1 ein höheres Endvermögen und bei Eintritt von Zustand Z_2 ein geringeres Endvermögen im Vergleich zur Wahl $D_1^{opt2} = 0,094427$ als optimale Lösung erzielt.

Insgesamt ist hier im vorliegenden Beispiel aus Arnold (2009) die optimale Entscheidung D_1^{opt} in Abhängigkeit von der Eintrittswahrscheinlichkeit q des Zustandes Z_1 sehr interessant: Für $q \geq 0,152542$ gilt $D_1^{opt} = 0$, für q im Bereich $0,002308 < q < 0,152542$ liegt D_1^{opt} im Bereich $0 < D_1^{opt} < 0,089812$ und für $q = 0,002308$ kann entweder $D_1^{opt1} = 0,089812$ oder $D_1^{opt2} = 0,094427$ gewählt werden. Für $q < 0,002308$ trifft dann $D_1^{opt} = 0,094427$ zu. Das bedeutet, nicht nur der Bereich $0,094427 < D_1 \leq 0,1$ ist für D_1 im vorliegenden Beispiel unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q niemals optimal, sondern auch der Bereich $0,089812 < D_1 < 0,094427$, welcher dem Bereich zwischen D_1^{opt1} und D_1^{opt2} im Fall $q = 0,002308$ entspricht. Somit ist hier insbesondere auch $D_1 = \overline{D}_1 = 0,092071$, unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q, niemals optimal.

Es können auch Fälle auftreten, in denen für eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit q die Lösungen D_1^{opt1} und D_1^{opt2} zum gleichen erwarteten Endvermögen μ^{opt} führen und in denen dann für eine höhere Eintrittswahrscheinlichkeit q genau $D_1^{opt} = D_1^{opt1}$ und für eine niedrigere Eintrittswahrscheinlichkeit q genau $D_1^{opt} = D_1^{opt2}$ zutrifft. Im vorliegenden Beispiel ist dies beispielsweise für $a = 6$ und $q = 0,167098$ der Fall:

Durch den höheren Parameter a sinkt die Grenze $\overline{D}_1$. Nach (4.36) gilt $\overline{D}_1 = 0,022026$. Mit (4.19) und (4.20) ergibt sich im vorliegenden Zahlenbeispiel mit $q = 0,167098$ und $a = 6$ für den ersten Teilbereich zunächst rein rechnerisch als vermeintlich optimale Lösung $D_1 = -0,002041$. Da es sich hierbei um eine Lösung außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$ handelt, gilt folglich $D_1^{opt1} = 0$ mit $\mu^{opt1} = 0,138989$ nach (4.19).

Für D_1 im zweiten Teilbereich $0,022026 \leq D_1 \leq 0,1$ gilt weiterhin $D_1^{opt2} = 0,094427$.[238] An dieser Stelle ergibt sich nun nach (4.27) als maximal möglicher Erwartungswert im zweiten Teilbereich $\mu^{opt2} = 0,138989$. Da auch in diesem Beispiel $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ gilt, ist die optimale Lösung D_1^{opt} wiederum nicht eindeutig, da sich sowohl mit $D_1^{opt1} = 0$ als

[238] Gleichung (4.45) zur Bestimmung von $D_1^{optZ_2}$ hängt nur von den Parametern V und S_1 ab, welche sich nicht verändert haben. Da sich der für D_1^{opt2} zulässige Bereich noch vergrößert hat und insbesondere auch der von dem Investor im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellte Betrag F_1 unverändert ist, gilt weiterhin $D_1^{opt2} = D_1^{optZ_2} = 0,094427$.

auch mit $D_1^{opt2} = 0,094427$ ein erwartetes Endvermögen in Höhe von $\mu^{opt} = 0,138989$ ergibt. In Abbildung 4.15 werden auch diese zwei Lösungen noch einmal graphisch dargestellt.

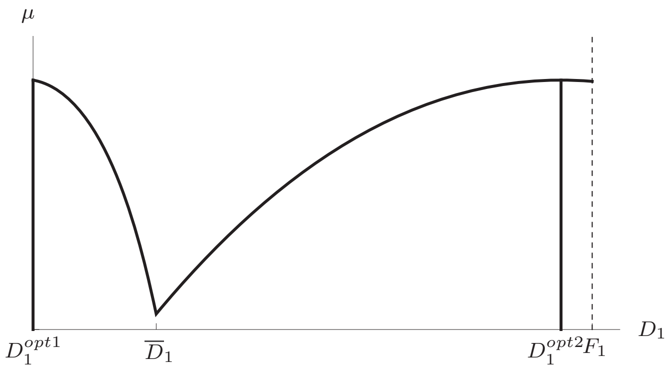


Abbildung 4.15: Zwei optimale Lösungen II

Der Erwartungswert μ in Abbildung 4.15 schwankt stärker als der in Abbildung 4.14 dargestellte Erwartungswert. An der Stelle $\overline{D}_1 = 0,022026$ ergibt sich hier beispielsweise nur ein Erwartungswert in Höhe von $\mu = 0,107121$. Auch die Eintrittswahrscheinlichkeit, bei der hier zwei optimale Lösungen auftreten, ist mit $q = 0,167098$ nicht gerade gering. Somit sind zwei optimale Lösungen auch bei relativ normalen Eingabeparametern möglich.

Wird nun eine Eintrittswahrscheinlichkeit $q > 0,167098$ zugrunde gelegt, dann nimmt der Erwartungswert μ^{opt1} an der Stelle $D_1^{opt1} = 0$ entsprechend zu.[239] Gleichzeitig verringert sich der Faktor $1 - q$, wodurch μ^{opt2} an der Stelle $D_1^{opt2} = 0,094427$ abnimmt. Folglich gilt für $q > 0,167098$ nun $D_1^{opt} = D_1^{opt1} = 0$. Wird andererseits eine Eintrittswahrscheinlichkeit $q < 0,167098$ zugrunde gelegt, dann nimmt μ^{opt2} an der Stelle $D_1^{opt2} = 0,094427$ entsprechend zu und es gilt $D_1^{opt} = D_1^{opt2} = 0,094427$.[240] Im vorliegenden Beispiel mit $a = 6$ kommen somit prinzipiell als optimale Lösungen nur $D_1 = 0$ und $D_1 = 0,094427$ in Frage.

Demnach sind im Fall $S_{21} > S_1$ auch Zahlenbeispiele denkbar, in denen $D_1^{opt2} = F_1$ zutrifft und in denen für eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit q somit entweder $D_1 = 0$ oder $D_1 = F_1$ optimal ist. Wird im vorliegenden Beispiel mit $a = 6$ noch der

[239] Für die rechnerisch vermeintlich optimale Lösung gilt dann $D_1 < -0,002041$, wodurch weiterhin $D_1^{opt1} = 0$ folgt.

[240] $D_1^{opt1} > 0$ ist nun prinzipiell zwar möglich. Der Erwartungswert μ^{opt1} an der Stelle D_1^{opt1} ist jedoch stets kleiner als μ^{opt2}.

Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ auf $S_1 = 0,3$ erhöht, dann ergibt sich ein solcher Fall für $q = 0,310345$:[241]

Es gilt $\overline{D}_1 = 0,023040$ nach (4.36). Mit (4.19) und (4.20) ergibt sich auch hier wiederum eine Stelle $D_1 < 0$, an welcher der Erwartungswert im ersten Teilbereich rein rechnerisch maximal wird. Folglich gilt $D_1^{opt1} = 0$ mit $\mu^{opt1} = 0,172414$ nach (4.19). Nach Gleichung (4.45) wird der Erwartungswert im zweiten Teilbereich rein rechnerisch an der Stelle $D_1 = 0,136660$ maximal. Da es sich hierbei um eine Lösung außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$ handelt, gilt folglich $D_1^{opt2} = F_1 = 0,1$ mit $\mu^{opt2} = 0,172414$ nach (4.27).

Bei der Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,310345$ besteht hier somit eine Indifferenz zwischen $D_1 = 0$ und $D_1 = F_1$ als optimale Lösung, da beide Lösungen zum gleichen erwarteten Endvermögen $\mu^{opt} = 0,172414$ führen. Für $q > 0,310345$ trifft $D_1^{opt} = 0$ zu und für $q < 0,310345$ gilt $D_1^{opt} = F_1 = 0,1$. Dementsprechend sind in diesem Beispiel in Abhängigkeit von q jeweils nur die Randlösungen $D_1 = 0$ und $D_1 = F_1$ optimal.

Unter Berücksichtigung der Einschränkungen des Parameters a nach Tabelle 4.4 zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse sind somit nur maximal zwei optimale Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$ möglich. Der letzte Unterabschnitt beschäftigt sich nun abschließend mit Beispielen zum Fall $S_{21} < S_1$.

4.1.4.4 Der Fall $S_{21} < S_1$

Ist der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 schwächer als der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ und gilt somit $S_{21} < S_1$, dann ist der vollständige Mittelabzug nicht nur ausgeschlossen, sondern im Zeitpunkt $t = 2$ wird dem Arbitrageur auch mindestens wieder der Betrag F_1 zur Verfügung gestellt.[242] Investiert der Arbitrageur einen positiven Betrag $D_1 > 0$ im Zeitpunkt $t = 1$, dann erfolgt durch die positive relative Wertentwicklung $x_{Z_1} > 1$ immer ein Mittelzufluss, welcher auch umso größer ausfällt, je höher der Parameter $a > 1$ der linearen Update-Funktion gewählt wird. Dadurch ist im Zustand Z_1 bei bestimmten Parameterkonstellationen im Fall $S_{21} < S_1$ bzw. im Fall (5) ein relativ hoher Mittelzufluss und dadurch ein relativ hoher zur Verfügung gestellter Betrag F_{21} möglich. Da $D_{21} = F_{21}$ gilt, kann auch ein sehr hoher Preis $p_{21} > V$ die Folge sein. Ein solches Beispiel wird nun behandelt.

[241] Diesem Fall liegen somit die folgenden Daten zugrunde: Analog zu Arnold (2009) gilt $V = 1$, $F_1 = 0,1$, und $S_{21} = 0,8$. Verändert sind $S_1 = 0,3$ und $a = 6$.

[242] Vgl. Abschnitt 4.1.2.1.

Im Rahmen des Beispiels gelten die folgenden Werte: Der Vermögensgegenstand besitzt analog zu den vorangegangenen Beispielen den Grundwert $V = 1$. Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $S_1 = 0,5$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt nur noch ein relativ geringer Noise trader shock in Höhe von $S_{21} = 0,1$. Der anfangs im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag fällt mit $F_1 = 0,2$ im Vergleich zum Noise trader shock S_1 sehr moderat aus. Es gilt $a = 3$ für den Parameter der linearen Update-Funktion und die Eintrittswahrscheinlichkeit für den Zustand Z_1 beträgt $q = 0,75$.

Mit $0,2 = F_1 > S_{21} - S_1 = -0,4$ und $S_{21} < S_1$ liegt hier der Fall (5) vor.[243] Zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse muss der Parameter a im Fall (5) der Bedingung (4.8) genügen.[244] Mit $a = 3 < 1+\frac{1-0,5}{0,2} = 3,5$ ist diese Voraussetzung hier erfüllt. Durch das notwendige Einhalten von Bedingung (4.8) im Fall $S_{21} < S_1$ ist jedoch gleichzeitig auch der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen.[245] Die Bestimmung der Grenze $\overline{D}_1$ nach Abschnitt 4.1.2.3 ist daher nicht erforderlich.

Für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) ergibt sich nach (4.19) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mu &= 0,75 \cdot \left(\frac{0,2 - 3D_1}{1,1 - 3D_1} - \frac{3D_1 \cdot (0,2 - 3D_1)}{(0,5 + D_1) \cdot (1,1 - 3D_1)} \right) \\ &+ \frac{3D_1}{0,5 + D_1} + 0,25 \cdot (0,2 - 3D_1) \\ &= -0,75 \cdot \frac{(D_1 + 0,059901) \cdot (D_1 - 0,514189) \cdot (D_1 - 1,479046)}{(0,5 + D_1) \cdot \left(D_1 - \frac{11}{30}\right)}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Wird μ in (4.73) als Funktion von D_1 aufgefasst, dann besitzt diese Funktion an der Stelle $D_1 = -0,5$ und an der Stelle $D_1 = 0,3\overline{6}$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel. Zwischen den beiden Polstellen strebt der Funktionswert mit Annäherung von D_1 an die negative Polstelle gegen $-\infty$ und mit Annäherung von D_1 an die positive Polstelle gegen $+\infty$.[246] Da zwischen den beiden Polstellen nur die Nullstelle $D_1 = -0,059901$ des Zählers liegt, ist zwar der Erwartungswert μ im für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ positiv. Ohne Kenntnis der ersten Ableitung kann jedoch noch keine Aussage über das

[243] Vgl. Tabelle 4.2, S. 156.
[244] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[245] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150.
[246] Das Verhalten im Bereich der Polstellen kann mit Hilfe der Vorzeichen der einzelnen Faktoren in (4.73) gezeigt werden. Durch den Preis p_{21} besitzt (4.73) zudem eine Definitionslücke an der Stelle $D_1 = 0,25$ (vgl. Anhang C.2).

genaue Verhalten der Funktion im für D_1 zulässigen Bereich getroffen werden.[247] Nach (4.20) ergibt sich hier konkret für die erste Ableitung nach D_1

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= 0,75\cdot\frac{3D_1\cdot(0,2-3D_1)\cdot(1,1-3D_1-3\cdot(0,5+D_1))}{(0,5+D_1)^2\cdot(1,1-3D_1)^2}\\ &- 0,75\cdot\left(\frac{3\cdot(0,2-6D_1)}{(0,5+D_1)\cdot(1,1-3D_1)}+\frac{2,7}{(1,1-3D_1)^2}\right)\\ &+ \frac{1,5}{(0,5+D_1)^2}-0,25\cdot 3\\ &= -0,75\cdot\left(D_1^2-0,442769D_1+0,100100\right)\\ &\cdot\ \frac{(D_1+1,521207)\cdot(D_1-0,811772)}{(0,5+D_1)^2\cdot\left(D_1-\frac{11}{30}\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Der Zähler in (4.74) besitzt nur die beiden reellen Nullstellen $D_1 = -1,521207$ und $D_1 = 0,811772$.[248] An diesen beiden Stellen liegen lokale Extrema vor.[249] Die beiden lokalen Extrema befinden sich jedoch außerhalb des Bereiches zwischen den beiden Polstellen und somit insbesondere auch außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches. Zwischen den beiden Polstellen ist die erste Ableitung nach (4.74) durchweg positiv, so dass sich zusammengefasst hier als optimale Lösung $D_1^{opt} = F_1 = 0,2$ mit $\mu^{opt} = 0,671429$ nach (4.73) ergibt. Dass diese optimale Lösung hier unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q ist, zeigt eine kurze zustandsbezogene Betrachtungsweise des Beispiels.

Nach (4.41) steht im Zustand Z_1 die Maximierung des Endvermögens im Einklang mit der Maximierung des Preises p_{21}. Im hier vorliegenden Fall (5) mit $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} < S_1$ ist das Vorhandensein eines lokalen Maximums im für D_1 zulässigen Bereich abhängig vom Parameter a. Da dieser mit $a = 3 > 1,8\bar{3}$ Bedingung (4.25) nicht erfüllt, liegt hier kein lokales Extremum und somit auch kein lokales Maximum im für D_1 zulässigen Bereich vor.[250] Die Funktion für den Preis p_{21} ist in diesem Bereich streng konvex und in Kombination mit der durchweg positiven Steigung ergibt sich $D_1^{optZ_1} = F_1$ als optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_1.

[247] Es ist beispielsweise möglich, dass sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum im für D_1 zulässigen Bereich vorliegt.

[248] Der Ausdruck $D_1^2 - 0,442769D_1 + 0,100100 = 0$ besitzt keine reelle Nullstelle.

[249] An der Stelle $D_1 = -1,521207$ liegt ein lokales Minimum vor und an der Stelle $D_1 = 0,811772$ ein lokales Maximum. Dies lässt sich mit Hilfe des Vorzeichens der ersten Ableitung nach (4.74) in unmittelbarer Nähe dieser beiden Stellen zeigen.

[250] Vgl. Anhang C.3.1. Es gilt $a = 3 > 1 + \frac{1-0,5}{0,5-0,1+0,2} = 1,8\bar{3}$.

Das Endvermögen EV_{Z_2} wird nach (4.45) an der Stelle $D_1 = -0,5 + \sqrt{0,5} = 0,207107$ maximal. Das lokale Maximum bezogen auf den Zustand Z_2 liegt somit außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches. Folglich gilt auch $D_1^{optZ_2} = F_1$.[251]

Die optimale Lösung D_1^{opt} liegt immer zwischen den beiden Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$. Nach (4.48) ergibt sich im Fall $D_1^{optZ_1} = D_1^{optZ_2}$ die optimale Lösung $D_1^{opt} = F_1 = 0,2$, welche unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q ist. Die Funktionsverläufe für μ sowie EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 werden in Abbildung 4.16 veranschaulicht.

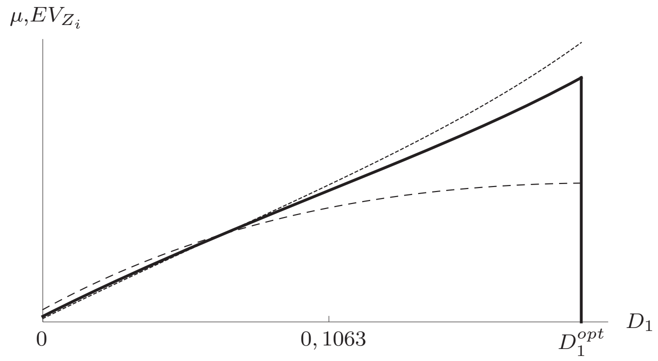


Abbildung 4.16: Beispiel $S_{21} < S_1$

Jeweils in Abhängigkeit von D_1 wird in Abbildung 4.16 durch die durchgezogene Kurve der Erwartungswert μ, durch die fein gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_1} im Zustand Z_1 und durch die grob gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_2} im Zustand Z_2 dargestellt. Die drei Kurven schneiden sich an der Stelle $D_1 = \frac{F_1}{a} = 0,0\bar{6}$. Anhand der graphischen Veranschaulichung ist zu erkennen, dass das sich an dieser Stelle ergebende, nach Satz 72 zustandsunabhängige, sichere Endvermögen hier analog zum Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) nicht optimal sein kann.[252] Die Funktion für den Erwartungswert μ besitzt an der Stelle $D_1 = 0,106261$ eine Wendestelle und weist für D_1 im Bereich $0,106261 \leq D_1 \leq F_1$ einen streng konvexen Verlauf auf.[253]

Interessant ist in diesem Beispiel der Preis p_{21} im Zustand Z_1. Für das Investment in Höhe von $D_1^{opt} = F_1 = 0,2$ ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 ein im Vergleich zum Grundwert $V = 1$ sehr hoher Preis in Höhe von $p_{21} = 3,5$ nach (4.7). Dass

[251] Vgl. Abschnitt 4.1.3.
[252] Abweichend gilt im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) allerdings $\frac{F_1}{a} > D_1^{opt}$.
[253] Dies kann mit Hilfe der zweiten Ableitung von μ nach D_1 gezeigt werden, welche hier konkret lautet: $\frac{d^2\mu}{d\,D_1^2} = -1,65 \cdot (D_1 - 0,106261) \cdot (D_1^2 - 0,802830D_1 + 0,343478)/((0,5 + D_1)^3 \cdot (D_1 - \frac{11}{30})^3)$.

der Arbitrageur dann das im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 zum Preis $p_{21} = 3,5$ getätigte Vollinvestment $D_{21} = F_{21}$ im Zeitpunkt $t = 3$ zum Preis $p_3 = V = 1$ nach (2.35) veräußert, hat für den Investor fatale Auswirkungen. Dies verdeutlicht eine zustandsbezogene Betrachtungsweise aus Sicht des Investors.

Im Zeitpunkt $t = 1$ stellt der Investor dem Arbitrageur den Betrag $F_1 = 0,2$ zur Verfügung. Da $D_1^{opt} = F_1$ zutrifft, investiert der Arbitrageur diesen Betrag vollständig im Zeitpunkt $t = 1$ zum Preis $p_1 = 0,7$ nach (2.5). Mit einem Preis $p_{21} = 3,5$ im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 wird eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x_{Z_1} = 5$ nach (2.41) erzielt. Dies veranlasst den Investor dazu, den Betrag $F_1 = 0,2$ gemäß seiner Update-Funktion G auf den Betrag $F_{21} = 2,6$ nach (4.2) aufzustocken. Nach (2.25) beträgt der Mittelzufluss $\Delta F = 2,6 - 1 = 1,6$, so dass der Investor insgesamt einen Betrag in Höhe von $I = F_1 + \Delta F = 1,8$ nach (2.29) bei Eintritt von Zustand Z_1 investiert.[254] Im Zeitpunkt $t = 3$ fällt der Preis auf $p_3 = 1$. Die im Zeitpunkt $t = 2$ investierten Mittel in Höhe von $D_{21} = F_{21} = 2,6$ haben bei Verkauf im Zeitpunkt $t = 3$ dann nur noch einen Wert in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,742857$ nach (4.37). Aus einem insgesamt in den zwei Zeitpunkten aus Sicht des Investors investierten Betrag in Höhe von $I = 1,8$ resultiert bei Eintritt von Zustand Z_1 letztendlich ein weniger als halb so großes Endvermögen EV_{Z_1} im Zeitpunkt $t = 3$.

Bei Eintritt von Zustand Z_2 im Zeitpunkt $t = 2$ gilt ein Preis $p_{22} = 1$ und es wird mit $D_1^{opt} = F_1$ eine relative Wertentwicklung in Höhe von $x_{Z_2} = 1,428571$ nach (2.42) erzielt. Dies veranlasst den Investor dazu, den Betrag $F_1 = 0,2$ gemäß seiner Update-Funktion G auf den Betrag $F_{22} = 0,457143$ nach (4.4) aufzustocken. Der Mittelzufluss beträgt $\Delta F = 0,457143 - 0,285714 = 0,171429$, so dass der Investor bei Eintritt von Zustand Z_2 insgesamt einen Betrag in Höhe von $I = F_1 + \Delta F = 0,371429$ investiert. Im Zustand Z_2 wählt der Arbitrageur $D_{21} = 0$, so dass sich nach (4.42) als Endvermögen $EV_{Z_2} = F_{22} = 0,457143$ ergibt. Aus einem insgesamt in den zwei Zeitpunkten aus Sicht des Investors investierten Betrag in Höhe von $I = 0,371429$ resultiert bei Eintritt von Zustand Z_2 letztendlich ein um fast ein Viertel größeres Endvermögen EV_{Z_2} im Zeitpunkt $t = 3$.

Die Entlohnung des Arbitrageurs erfolgt prozentual vom erzielten Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$. In diesem Beispiel ergibt sich entweder $EV_{Z_1} = 0,742857$ oder $EV_{Z_2} = 0,457143$. Aus Sicht des Arbitrageurs ist daher ein Eintritt von Zustand Z_1

[254] Die Differenz $F_{21} - I = 0,8$ entspricht dabei dem Wertzuwachs von F_1 vom Zeitpunkt $t = 1$ zum Zeitpunkt $t = 2$. Der im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellte Betrag F_{21} ist demnach abzugrenzen vom tatsächlichen Investitionsbetrag des Investors.

wünschenswert. Der Investor hingegen erleidet bei Eintritt von Zustand Z_1 einen nicht unbedeutenden Vermögensverlust. Ein Eintritt von Zustand Z_2 wäre demnach für den Investor vorteilhafter. Es stellt sich nun die Frage, wie es zu der hier vorliegenden Situation im Zustand Z_1 kommt.

Neben der Entscheidung, im Zeitpunkt $t = 1$ überhaupt einen Betrag $F_1 > 0$ zur Verfügung zu stellen, trifft der Investor im Zeitpunkt $t = 2$ noch eine weitere Entscheidung. Abhängig von der relativen Wertentwicklung x passt er seinen ursprünglich zur Verfügung gestellten Betrag F_1 im Zeitpunkt $t = 2$ an. Im vorliegenden Beispiel führt die sehr positive relative Wertentwicklung x_{Z_1} bei Eintritt von Zustand Z_1 dazu, dass der Investor den Betrag F_1 noch einmal ordentlich aufstockt. Dies geschieht in der Hoffnung, mit diesem aufgestockten Betrag bis zum letzten Zeitpunkt $t = 3$ wiederum eine ähnlich positive Wertentwicklung zu erzielen. Da der Grundwert V dem Investor im Zustand Z_1 unbekannt ist, misst er der absoluten Höhe des Preises p_{21} nur eine Bedeutung im Hinblick auf die relative Wertentwicklung x zu.

Der Arbitrageur hingegen weiß durch Kenntnis des Grundwertes V sehr genau, welche Auswirkungen ein Preis $p_{21} > V$ auf das Vermögen des Investors besitzt. Die Entlohnung des Arbitrageurs erfolgt jedoch prozentual vom erzielten Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, weshalb der Arbitrageur einen Preis $p_{21} > V$ in Kauf nimmt. Da bei Eintritt von Zustand Z_1 weder der Investor noch die Noise trader Kenntnis vom Grundwert V des Vermögensgegenstandes erhalten, sind derart hohe Preise p_{21} durchaus möglich. Preise $p_{21} \geq V$ können allerdings nur für $F_1 > S_{21} - S_1$ und somit in den Fällen (1), (4) und (5) auftreten.[255] Shleifer/Vishny (1997) versuchen, derartig hohen Preisen p_{21} durch die Bedingung $F_{21} < S_{21}$ nach (2.17) entgegenzuwirken.[256] In Verbindung mit (2.15) und $D_{21} = F_{21}$ gilt dann $p_{21} = V - S_{21} + F_{21} < V - S_{21} + S_{21} = V$. Da F_{21} jedoch innerhalb des Modells bestimmt wird, ist die Bedingung (2.17) nicht nur schwer einzuhalten, sondern auch ökonomisch nicht zu begründen.

In Abschnitt 4.1.3 wurde bereits erwähnt, dass auch im Fall (5) und bei Verletzung von Bedingung (4.25) durch $a > 1 + \frac{V - S_1}{S_1 - S_{21} + F_1}$ zwei optimale Lösungen auftreten können. Obwohl diese beiden Voraussetzungen im vorliegenden Zahlenbeispiel erfüllt sind, ergibt sich hier jedoch unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q immer eine eindeutige, optimale Lösung $D_1^{opt} = F_1 = 0,2$. Dies liegt daran, dass die rein rechnerisch optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_2 außerhalb des für D_1 zulässigen

[255] Im Fall (2) trifft $p_{21} \leq p_1$ und im Fall (3) sogar $p_{21} < p_1$ zu. Mit $p_1 < V$ nach Satz 3 gilt somit $p_{21} < V$ in beiden Fällen.

[256] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 39.

Bereiches liegt.[257] Gilt im Fall (5) neben $a > 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ zusätzlich $D_1^{optZ_2} < F_1$, dann können zwei optimale Lösungen auftreten. Im hier angegebenen Beispiel ist dies für $F_1 = 0,45$ und $a = 2$ sowie $q = 0,354335$ der Fall:[258]

Mit $0,45 = F_1 > S_{21} - S_1 = -0,4$ und $S_{21} < S_1$ liegt weiterhin der Fall (5) vor. Durch $a = 2 < 1 + \frac{1-0,5}{0,45} = 2,\bar{1}$ erfüllt der Parameter a die Bedingung (4.8) zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse und mit $a = 2 > 1 + \frac{1-0,5}{0,5-0,1+0,45} = 1,588235$ ist die Bedingung (4.25) verletzt, wodurch der Preis p_{21} in Abhängigkeit von D_1 streng konvex ist und somit wiederum $D_1^{optZ_1} = F_1$ folgt. Da sich V und S_1 im Vergleich zum vorangegangenen Beispiel nicht verändert haben, wird nach (4.45) das Endvermögen EV_{Z_2} weiterhin an der Stelle $D_1 = 0,207107$ maximal. Bedingt durch den höheren vom Investor zur Verfügung gestellten Betrag $F_1 = 0,45$ liegt das lokale Maximum bezogen auf den Zustand Z_2 nun innerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches und es gilt $D_1^{optZ_2} = 0,207107 < F_1 = 0,45$.[259]

Für den Erwartungswert μ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.40) ergibt sich konkret nach (4.19) die Gleichung

$$\mu = -1,291331 \cdot \frac{(D_1 + 0,134811) \cdot (D_1 - 0,743252) \cdot (D_1 - 1,065953)}{(0,5 + D_1) \cdot (D_1 - 0,675)}. \tag{4.75}$$

Zur Bestimmung der optimalen Lösung muss der Erwartungswert μ nach Gleichung (4.75) über D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq 0,45$ maximiert werden. Nach (4.20) ergibt sich im vorliegenden Zahlenbeispiel für die erste Ableitung nach D_1

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mu}{d\,D_1} &= -1,291331 \cdot (D_1 - 0,365100) \cdot (D_1 - 0,423199) \\ &\quad \cdot \frac{(D_1 + 1,279752) \cdot (D_1 - 0,841454)}{(0,5 + D_1)^2 \cdot (D_1 - 0,675)^2}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Mit D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq 0,45$ sind hier nur die zwei Stellen $D_1 = 0,365100$ und $D_1 = 0,423199$ von Bedeutung. An der Stelle $D_1 = 0,365100$ liegt ein lokales Maximum vor und an der Stelle $D_1 = 0,423199$ ein lokales Minimum.[260] Bei dem lokalen Maximum handelt es sich um die erste optimale Lösung. Mit $D_1^{opt1} = 0,365100$

[257] Durch $a > 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ ist p_{21} streng konvex, wodurch immer $D_1^{optZ_1} = F_1$ folgt. Da die optimale Lösung D_1^{opt} zwischen den beiden Lösungen $D_1^{optZ_1}$ und $D_1^{optZ_2}$ liegen muss, kann $D_1^{opt} < F_1$ nur dann auftreten, wenn $D_1^{optZ_2} < F_1$ zutrifft.

[258] Unverändert sind demnach $V = 1$, $S_1 = 0,5$ und $S_{21} = 0,1$.

[259] Es trifft hier (3) in (4.48) zu. Somit ist $D_1^{optZ_1} > D_1^{optZ_2}$ durchaus möglich.

[260] Dies lässt sich mit Hilfe des Vorzeichens der ersten Ableitung nach (4.76) in unmittelbarer Nähe dieser beiden Stellen zeigen.

ergibt sich nach (4.75) der Erwartungswert $\mu^{opt1} = 0,638170$.[261] Die erste Ableitung nach (4.76) besitzt für D_1 im Bereich $0,423199 < D_1 < 0,675$ ein positives Vorzeichen. Das bedeutet, ab dem lokalen Minimum an der Stelle $D_1 = 0,423199$ nimmt der Erwartungswert μ nach (4.75) wieder zu. Daher ist hier auch die obere Grenze des Definitionsbereiches zu überprüfen. Mit $D_1^{opt2} = F_1 = 0,45$ ergibt sich nach (4.75) der Erwartungswert $\mu^{opt2} = 0,638170$, so dass bedingt durch $\mu^{opt1} = \mu^{opt2}$ zwei optimale Lösungen vorliegen. In Abbildung 4.17 werden diese zwei Lösungen noch einmal graphisch dargestellt.

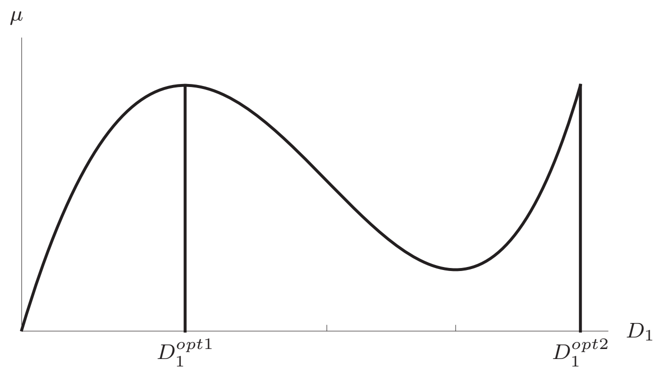


Abbildung 4.17: Zwei optimale Lösungen im Fall (5)

Die Funktion für den Erwartungswert μ besitzt an der Stelle $D_1 = 0,395529$ eine Wendestelle und weist für D_1 im Bereich $0,395529 \leq D_1 \leq F_1$ einen streng konvexen Verlauf auf.[262] An der Stelle $D_1 = 0,423199$, an welcher sich ein lokales Minimum ergibt, trifft $\mu = 0,637667$ nach (4.75) zu. Demnach schwankt der in Abbildung 4.17 dargestellte Erwartungswert nicht sehr stark für D_1 im Bereich $D_1^{opt1} \leq D_1 \leq D_1^{opt2}$. Mit $D_1^{opt1} = 0,365100$ als optimale Lösung wird jedoch bei Eintritt von Zustand Z_1 ein geringeres Endvermögen und bei Eintritt von Zustand Z_2 ein höheres Endvermögen im Vergleich zur Wahl $D_1^{opt2} = F_1 = 0,45$ als optimale Lösung erzielt.

Trifft $q \neq 0,354335$ zu, dann ist die optimale Lösung eindeutig. Für $q < 0,354335$ liegt die optimale Lösung D_1^{opt} im Bereich $D_1^{optZ_2} = 0,207107 \leq D_1^{opt} \leq D_1^{opt1} = 0,365100$. Bedingt durch $D_1^{optZ_2} < D_1^{optZ_1}$ nimmt hier mit sinkender Eintrittswahrscheinlichkeit q des Zustandes Z_1 die optimale Lösung D_1^{opt} ab und nicht zu, wie es in den zuvor

[261] Auch hier erfolgt die Kennzeichnung der zwei optimalen Lösungen mit D_1^{opt1} und D_1^{opt2}. Abweichend liegen hier jedoch keine zwei Teilbereiche für D_1 vor.

[262] Dies kann mit Hilfe der zweiten Ableitung von μ nach D_1 gezeigt werden, welche hier lautet: $\frac{d^2\,\mu}{d\,D_1^2} = -1,610232 \cdot (D_1 - 0,395529) \cdot (D_1^2 - 1,525496 D_1 + 0,745301)/((0,5 + D_1)^3 \cdot (D_1 - 0,675)^3)$.

aufgeführten Beispielen von Shleifer/Vishny (1997) und Arnold (2009) der Fall war. Für $q > 0,354335$ trifft $D_1^{opt} = F_1$ zu.[263] Bis auf den Fall $q = 0,354335$ ist die optimale Lösung im vorliegenden Beispiel somit ebenfalls eindeutig.

In den zwei hier angegebenen Beispielen ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 immer ein relativ hoher Preis $p_{21} > V$. Im ersten Beispiel mit $F_1 = 0,2$ gilt $p_{21} \geq 1,1$ und im zweiten Beispiel mit $F_1 = 0,45$ trifft sogar $p_{21} \geq 1,35$ zu.[264] Dies liegt insbesondere an der Bedingung $D_{21} = F_{21}$. Ein Preis $p_{21} < V$ wäre in den beiden Beispielen nur mit $D_{21} < F_{21}$ möglich.

Auch vor diesem Hintergrund stellt sich nun die Frage, ob die Wahl von $D_{21} = F_{21}$ immer zu dem maximal möglichen Erwartungswert führt bzw. ob letztendlich mit einem kleineren Investment im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 ein noch höherer Erwartungswert erzielt werden kann. Dieser Fragestellung wird in Abschnitt 4.3 nachgegangen. Im nächsten Abschnitt erfolgt noch kurz die Berücksichtigung nicht-linearer Update-Funktionen im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable.

4.2 Eine Entscheidungsvariable und nicht-lineare Update-Funktionen

Anstelle einer linearen Update-Funktion kann auch eine nicht-lineare Update-Funktion zur Bestimmung des von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages verwendet werden. Zur Verdeutlichung der Wirkungsweise unterschiedlicher, insbesondere nicht-linearer Update-Funktionen wird dazu in den folgenden Analysen noch einmal das Zahlenbeispiel von Shleifer/Vishny (1997) herangezogen:[265]

Der Vermögensgegenstand besitzt demnach den Grundwert $V = 1$. Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $S_1 = 0,3$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt ein noch größerer Noise trader shock in Höhe von $S_{21} = 0,4$. Der anfangs im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag beträgt $F_1 = 0,2$.[266] Analog zu Abschnitt 4.1.4.1 wird für den Zustand Z_1 als Eintrittswahrscheinlichkeit $q = 0,35$ gewählt.

[263] Unabhängig von der konkreten Eintrittswahrscheinlichkeit q kann daher im vorliegenden Beispiel D_1 im Bereich $0 < D_1 < 0,207107$ bzw. D_1 im Bereich $0,365100 < D_1 < 0,45$ niemals optimal sein.

[264] Im Fall (5) ist der Preis p_{21} minimal für $D_1 = 0$ mit $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ (vgl. Abschnitt 4.1.2.1). In den beiden Beispielen gilt somit $p_{21} \geq 0,9 + F_1$.

[265] Vgl. Shleifer/Vishny (1997), S. 44 sowie Abschnitt 4.1.4.1.

[266] Es liegt der Fall (1) vor. Vgl. Tabelle 4.2, S. 156.

Shleifer/Vishny (1997) verwenden für ihr Zahlenbeispiel eine lineare Update-Funktion mit dem Parameter $a = 1,2$. Welchen Einfluss eine Variation des Parameters a auf den Erwartungswert μ in Abhängigkeit von D_1 bei diesem Beispiel besitzt, veranschaulicht die nachfolgende Abbildung 4.18.

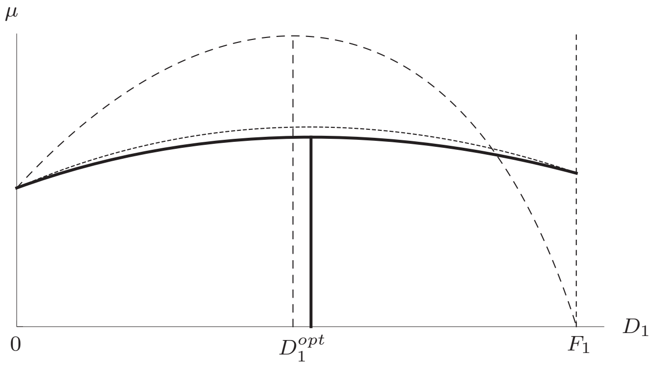


Abbildung 4.18: Verlauf μ mit linearen Update-Funktionen

Den drei Funktionsverläufen in Abbildung 4.18 liegen die folgenden linearen Update-Funktionen zugrunde: Mit dem Parameter $a = 1$ ergibt sich die durchgezogene Kurve, mit $a = 1,2$ die fein gestrichelte Kurve und mit $a = 3$ die grob gestrichelte Kurve. Je höher hier der Parameter a gewählt wird, umso stärker schwankt der Erwartungswert μ in Abhängigkeit von D_1. Mit $a = 3$ kommt es bei Eintritt von Zustand Z_1 in Verbindung mit $D_1 = F_1$ sogar zum vollständigen Mittelabzug.[267]

Für die relative Wertentwicklung x_{Z_1} nach (2.41) trifft $x_{Z_1} > 1$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ zu.[268] Durch $p_1 < V$ nach Satz 3 folgt für die relative Wertentwicklung x_{Z_2} nach (2.42) sogar $x_{Z_2} > 1$ für $D_1 > 0$. Für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ ergibt sich dadurch mit einem höheren Parameter a immer auch ein höherer Erwartungswert μ. Dies kann wie folgt begründet werden:

Im Zustand Z_1 nimmt F_{21} nach (4.2) für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ durch einen höheren Parameter a zu, womit in diesem Bereich nach (2.47) ein höherer Preis p_{21} und mit (4.40) auch ein höheres Endvermögen EV_{Z_1} nach (4.39) folgt. Im Zustand Z_2 nimmt F_{22} nach (4.4) für $D_1 > 0$ durch einen höheren Parameter a zu. Mit $D_{22} = 0$ folgt in diesem Bereich dann direkt ein höheres Endvermögen $EV_{Z_2} = F_{22}$. An der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ gilt $x_{Z_1} = 1$ bzw. $p_{21} = p_1$. Nach (4.2) folgt daraus $F_{21} = F_1$. Das

[267] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150. Es gilt $a = 1 + \frac{1-0,4}{0,4-0,3+0,2} = 3$.

[268] In diesem Bereich gilt $p_{21} > p_1$. Vgl. (4.23) und die sich daran anschließenden Ausführungen.

bedeutet, unabhängig von der konkreten Höhe des Parameters a ist das Endvermögen EV_{Z_1} an der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ immer gleich hoch. Das Endvermögen EV_{Z_2} nimmt an dieser Stelle durch einen größeren Parameter a jedoch zu. Somit ergibt sich auch an der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$ mit einem höheren Parameter a ein höherer Erwartungswert μ, sofern der Zustand Z_2 mit $q < 1$ eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt.

Ein negativer Einfluss eines höheren Parameters a ist demnach nur für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 gegeben. Je nachdem, wie hoch die Eintrittswahrscheinlichkeit q des Zustandes Z_1 ist, kann sich dies dann ab einer bestimmten Stelle D_1 auch auf den Erwartungswert μ auswirken:

Die fein gestrichelte Kurve mit Parameter $a = 1,2$ in Abbildung 4.18 entspricht dem Verlauf des Erwartungswertes μ im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) in Abschnitt 4.1.4.1.[269] Bei Eintritt von Zustand Z_1 wird mit $D_1 = F_1 > \widehat{D_1}$ und $a = 1,2$ ein Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1} = 0,214286$ erzielt. Mit $a = 1$ und $D_1 = F_1$ wird folglich ein höheres Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,\bar{2}$ erreicht. Trotzdem verläuft die durchgezogene Kurve mit $a = 1$ in Abbildung 4.18 für $D_1 > 0$ komplett unterhalb der fein gestrichelten Kurve mit $a = 1,2$. Insbesondere ergibt sich für $D_1 = F_1$ mit $a = 1,2$ ein Erwartungswert $\mu = 0,222333$ und mit $a = 1$ nur ein geringerer Erwartungswert $\mu = 0,\bar{2}$.[270] Dies liegt daran, dass für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ der negative Einfluss eines höheren Parameters a bei Eintritt von Zustand Z_1 hier durch $q = 0,35$ betragsmäßig geringer ausfällt als der positive Einfluss eines höheren Parameters a in diesem Bereich bei Eintritt von Zustand Z_2. Für $q = 0,358974$ ergibt sich an der Stelle $D_1 = F_1$ und mit Parameter $a = 1,2$ ebenfalls ein Erwartungswert in Höhe von $\mu = 0,\bar{2}$.[271] Für Eintrittswahrscheinlichkeiten $q > 0,358974$ überwiegt dann der negative Einfluss insbesondere an der Stelle $D_1 = F_1$.

Die optimale Lösung D_1^{opt} nimmt mit steigendem Parameter a ab. Mit $a = 1$ ergibt sich $D_1^{opt} = 0,105175$ mit $\mu^{opt} = 0,233786$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249270$ und $EV_{Z_2} = 0,225449$. Mit $a = 1,2$ resultiert eine geringere optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,104559$ mit einem höheren Erwartungswert $\mu^{opt} = 0,237035$. Bedingt durch $D_1^{opt} = 0,104559 > 0,1 = \widehat{D_1}$ wird hier jedoch bei Eintritt von Zustand Z_1 trotz $D_1^{opt} = 0,104559 < 0,105175$ ein etwas geringeres Endvermögen erzielt.[272] Mit $a = 3$ trifft hier $D_1^{opt} = 0,098733$ mit

[269] Vgl. auch Abbildung 4.11, S. 197.

[270] Mit $a = 1$ und $D_1 = F_1$ gilt unabhängig von q immer $\mu = EV_{Z_1} = EV_{Z_2} = F_1 \cdot \frac{V}{p_1}$ (vgl. (4.5)).

[271] Mit $D_1 = F_1$ und $a = 1,2$ gilt $EV_{Z_2} = 0,22\bar{6}$. Aus $\mu = 0,\bar{2} = q \cdot 0,214286 + (1-q) \cdot 0,22\bar{6}$ folgt $q = 0,358974$. Dieser Wert ergibt sich rein rechnerisch auch in (4.60) als q^* für den Gleichheitsfall (vgl. Fußnote 185, Kapitel 4, S. 200).

[272] Mit $a = 1,2$ und $D_1^{opt} = 0,104559$ ergibt sich $EV_{Z_1} = 0,249209$ sowie $EV_{Z_2} = 0,230479$.

$\mu^{opt} = 0,266259$ sowie $EV_{Z_1} = 0,250700$ und $EV_{Z_2} = 0,274637$ zu. Aus Sicht des Arbitrageurs ist ein derart hoher Parameter a somit von Vorteil, da mit der optimalen Lösung $D_1^{opt} = 0,098733$ hier sowohl bei Eintritt von Zustand Z_1 als auch bei Eintritt von Zustand Z_2 ein höheres Endvermögen erzielt wird als mit einem Parameter $a = 1$ bzw. mit einem Parameter $a = 1,2$.

Die vorangegangene Analyse der Auswirkungen einer Variation des Parameters a auf den Erwartungswert μ in Abhängigkeit von D_1 bildet die Vergleichsbasis für die nun folgenden Analysen der Wirkungsweise nicht-linearer Update-Funktionen. Dazu wird weiterhin das Zahlenbeispiel von Shleifer/Vishny (1997) verwendet. Zusätzlich wird in den nachfolgenden Abbildungen analog zu Abbildung 4.18 durch die durchgezogene Kurve immer der Verlauf von μ unter Verwendung der linearen Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ dargestellt, um so immer einen direkten graphischen Vergleich zu einem komplett passiven Verhalten des Investors herstellen zu können.[273]

Den Ausgangspunkt der Analysen nicht-linearer Update-Funktionen bildet hier analog zur Analyse linearer Update-Funktionen der Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1. Nach Gleichung (2.48) ergibt sich dieser als

$$p_{21} = V - S_{21} + \max\left[F_1 \cdot G\left(1 + \frac{D_1 \cdot \left(\frac{p_{21}}{p_1} - 1\right)}{F_1}\right), 0\right]. \tag{4.77}$$

Da p_{21} sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite in Gleichung (4.77) auftaucht, hängt der Preis p_{21} wiederum von sich selbst ab. Eine besondere Schwierigkeit bei der Bestimmung von p_{21} ergibt sich dadurch, dass p_{21} auf der rechten Seite der Gleichung über x_{Z_1} in die Funktion G einfließt. Bei linearen Update-Funktionen ist hier eine Auflösung nach p_{21} noch relativ einfach durchführbar.[274] Bei nicht-linearen Update-Funktionen ist jedoch eine direkte Auflösung nach p_{21} in den meisten Fällen nicht möglich. Um dennoch einen Verlauf von μ in Abhängigkeit von D_1 auch bei nicht-linearen Update-Funktionen graphisch darstellen zu können, wurde Gleichung (4.77) für hinreichend viele Investments D_1 unter Verwendung der jeweiligen Update-Funktion numerisch gelöst. Mit den berechneten Preisen p_{21} wurde dann an den entsprechenden Stellen D_1 der Erwartungswert μ nach Gleichung (2.46) bestimmt. Die nachfolgende Abbildung 4.19 veranschaulicht den Verlauf von μ mit konkaven Update-Funktionen.

[273] Mit $a = 1$ bzw. $G_B(x) = x$ kommt es im Zeitpunkt $t = 2$ weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss seitens des Investors (vgl. Satz 23).

[274] Vgl. beispielsweise Gleichung (4.6) für $G(x_{Z_1}) > 0$.

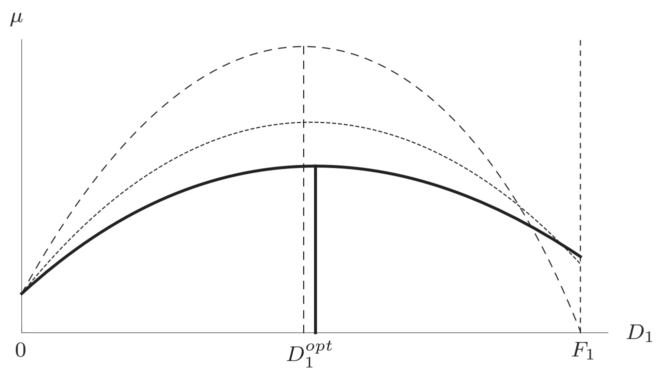


Abbildung 4.19: Verlauf μ mit konkaven Update-Funktionen

Wie bereits erwähnt, repräsentiert hier zum Vergleich die durchgezogene Kurve in der Abbildung 4.19 sowie in den folgenden Abbildungen den Verlauf von μ unter Verwendung der linearen Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$. Durch die fein gestrichelte Kurve wird der Verlauf von μ mit $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) und durch die grob gestrichelte Kurve der Verlauf von μ mit $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) dargestellt. Mit der konkaven Update-Funktion nach (3.6) ergibt sich $D_1^{opt} = 0,103399$ mit $\mu^{opt} = 0,239392$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249318$ und $EV_{Z_2} = 0,234047$. Das bedeutet, mit $D_1^{opt} = 0,103399$ wird mit dieser konkaven Update-Funktion nicht nur ein höherer Erwartungswert als mit der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ in Verbindung mit $D_1^{opt} = 0,105175$ erzielt, sondern auch ein höheres Endvermögen sowohl bei Eintritt von Zustand Z_1 als auch bei Eintritt von Zustand Z_2. Mit der anderen konkaven Update-Funktion nach (3.7) resultiert hier eine optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,100941$ mit einem noch größeren Erwartungswert $\mu^{opt} = 0,249064$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249703$ und $EV_{Z_2} = 0,248721$. Mit dieser zweiten konkaven Update-Funktion und $D_1^{opt} = 0,100941$ wird hier in beiden Zuständen somit ein noch besseres Ergebnis erzielt als mit den beiden anderen Update-Funktionen.

Die Funktionsverläufe in Abbildung 4.19 ähneln hier im Wesentlichen den Verläufen in Abbildung 4.18. Ein signifikanter Unterschied zu den linearen Update-Funktionen ist hier anhand der Funktionsverläufe von μ nicht zu erkennen. Eine zustandsbezogene Betrachtung der Funktionsverläufe verdeutlicht sogar noch weitere Gemeinsamkeiten. In der nachfolgenden Abbildung 4.20 wird jeweils der Verlauf von EV_{Z_1} in Abhängigkeit von D_1 mit den zuvor genannten konkaven Update-Funktionen unter Verwendung der gleichen Linienart dargestellt.

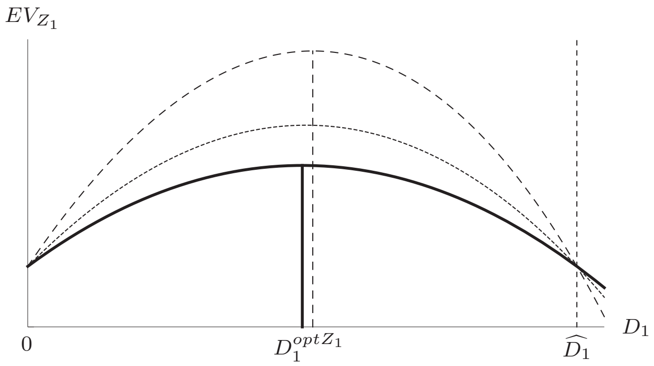


Abbildung 4.20: Verlauf EV_{Z_1} mit konkaven Update-Funktionen

Analog zu linearen Update-Funktionen stimmt bei Eintritt von Zustand Z_1 das Endvermögen EV_{Z_1} auch bei konkaven Update-Funktionen an der Stelle $\widehat{D_1}$ nach (4.23) überein. Als optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_1 ergibt sich bei Verwendung der Benchmark-Update-Funktion $D_1^{optZ_1} = 0,05$ mit $EV_{Z_1} = 0,25\bar{3}$. Bei der konkaven Update-Funktion nach (3.6) resultiert eine höhere optimale Lösung $D_1^{optZ_1} = 0,050668$ mit einem noch höheren Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,254663$. Übertroffen werden diese Werte durch die andere konkave Update-Funktion nach (3.7) mit $D_1^{optZ_1} = 0,051906$ und $EV_{Z_1} = 0,257114$. Ein ähnlicher Effekt tritt bei linearen Update-Funktionen im Zustand Z_1 durch eine Erhöhung des Parameters a auf.

Derartige Verläufe von EV_{Z_1} können mit der Dominanz im Sinne von Definition 2 begründet werden: Nach Satz 51 wird die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x)$ insbesondere auch von den beiden aufgeführten konkaven Update-Funktionen im Sinne von Definition 2 dominiert. Zusätzlich wird auch die streng konkave Update-Funktion $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) von der anderen streng konkaven Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) im Sinne von Definition 2 dominiert.[275] Bei einer positiven relativen Wertentwicklung $x_{Z_1} > 1$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ führt diese Dominanz hier durch den durchweg höheren Funktionswert zu einem höheren zur Verfügung gestellten Betrag F_{21} nach (2.24). Daraus ergibt sich nach (2.47) ein höherer Preis p_{21} und mit (4.40) auch ein höheres Endvermögen EV_{Z_1} nach (4.39).

Sowohl bei linearen als auch bei konkaven Update-Funktionen wirkt sich jedoch im Zusammenhang mit der Dominanz im Sinne von Definition 2 noch ein zweiter Effekt erhöhend auf das Endvermögen EV_{Z_1} für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ aus:

[275] Vgl. Fußnote 121, Kapitel 3, S. 116 sowie Abbildung 3.1, S. 77.

Die relative Wertentwicklung x_{Z_1} fällt an einer bestimmten Stelle D_1 in diesem Bereich mit unterschiedlichen Update-Funktionen nicht immer gleich hoch aus. Denn ein höheres Endvermögen EV_{Z_1} kann nur durch einen höheren Preis p_{21} erzielt werden, welcher wiederum erhöhend auf die relative Wertentwicklung x_{Z_1} wirkt. Beispielsweise ergibt sich mit der Benchmark-Update-Funktion und $D_1 = 0,05$ im Zustand Z_1 ein Preis $p_{21} = 0,803571$ nach (C.10). Daraus resultiert eine relative Wertentwicklung $x_{Z_1} = 1,017857$ nach (2.41). Wird nun anstelle der Benchmark-Update-Funktion eine lineare Update-Funktion mit einem Parameter $a = 3$ verwendet, ergibt sich mit $D_1 = 0,05$ im Zustand Z_1 ein Preis $p_{21} = 0,8125$ nach (4.6) und eine relative Wertentwicklung $x_{Z_1} = 1,0208\bar{3}$ nach (2.41).

Mit einer dominierenden konkaven Update-Funktion kommt es hier zum gleichen Effekt. Mit $G(x) = x - e^{-x} + e^{-1}$ nach (3.6) ergibt sich an der Stelle $D_1 = 0,05$ im Zustand Z_1 numerisch ein Preis $p_{21} = 0,805004$ nach (4.77). Daraus resultiert eine relative Wertentwicklung $x_{Z_1} = 1,018335$ nach (2.41). Für die andere konkave Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) ergibt sich mit $D_1 = 0,05$ im Zustand Z_1 numerisch $p_{21} = 0,807650$ nach (4.77) und $x_{Z_1} = 1,019217$ nach (2.41).

Ein höheres Endvermögen EV_{Z_1} an einer bestimmten Stelle D_1 im Bereich $0 < D_1 < \widehat{D_1}$ ergibt sich somit nicht nur durch die dominierende Update-Funktion, sondern gleichzeitig auch durch eine nun höhere relative Wertentwicklung x_{Z_1} als Input für die Update-Funktion an dieser Stelle D_1. Analog wirkt dieser Effekt zusätzlich erniedrigend auf das Endvermögen EV_{Z_1} für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$, wenn eine Dominanz im Sinne von Definition 2 vorliegt und solange $F_{21} > 0$ gilt bzw. der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen ist.[276] In Abbildung 4.21 wird jeweils der Verlauf von EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 mit den zuvor genannten konkaven Update-Funktionen unter Verwendung der wiederum gleichen Linienart veranschaulicht.

Unabhängig davon, ob es sich bei der Update-Funktion um eine lineare oder um eine konkave Update-Funktion handelt, ergibt sich $D_1^{optZ_2} = 0,136660$ nach (4.45) als optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_2. Bei Verwendung der Benchmark-Update-Funktion resultiert daraus an der Stelle $D_1^{optZ_2} = 0,136660$ ein Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,226680$. Mit der konkaven Update-Funktion nach (3.6) ergibt sich hier ein größeres Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,235868$ und mit der anderen konkaven Update-Funktion nach (3.7) ein noch höheres Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,251724$.

[276] Gilt $F_{21} = 0$, dann hat der Preis p_{21} bereits sein Minimum $V - S_{21}$ erreicht und es gilt $EV_{Z_1} = 0$. Eine dominierende Update-Funktion kann daher nicht mehr zu einem noch niedrigeren Preis p_{21} bzw. zu einem noch geringeren Endvermögen EV_{Z_1} führen.

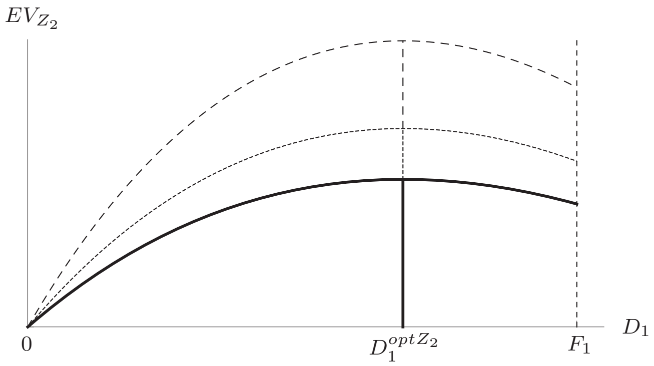


Abbildung 4.21: Verlauf EV_{Z_2} mit konkaven Update-Funktionen

Die Funktionsverläufe von EV_{Z_2} lassen sich ebenfalls mit der Dominanz im Sinne von Definition 2 begründen. Im Zustand Z_2 folgt $x_{Z_2} > 1$ für $D_1 > 0$. Mit der dominierenden Update-Funktion ergibt sich hier an jeder Stelle $D_1 > 0$ ein höherer Funktionswert und somit ein höherer zur Verfügung gestellter Betrag F_{22} nach (2.24). Wegen $p_{22} = V$ wird F_{22} nicht mehr investiert und es gilt $EV_{Z_2} = F_{22}$. Nach (2.42) fällt x_{Z_2} an einer bestimmten Stelle D_1 immer gleich hoch aus, und zwar unabhängig von der verwendeten Update-Funktion.[277] Zudem nimmt die relative Wertentwicklung x_{Z_2} immer an der Stelle $D_1^{optZ_2}$ nach (4.45) ihr Maximum an.[278] Daher ist insbesondere auch das Endvermögen EV_{Z_2} immer an dieser Stelle maximal und eine Veränderung der optimalen zustandsbezogenen Lösung in Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Update-Funktion liegt nicht vor.[279] Die nachfolgende Abbildung 4.22 veranschaulicht den Verlauf von μ mit einer konvexen Update-Funktion.

Durch die fein gestrichelte Kurve wird der Verlauf von μ mit $G(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) dargestellt. Für diese konvexe Update-Funktion ergibt sich $D_1^{opt} = 0,101909$ mit $\mu^{opt} = 0,264570$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249056$ und $EV_{Z_2} = 0,272923$. Mit der konvexen Update-Funktion und $D_1^{opt} = 0,101909$ wird somit im Vergleich zu den bisher aufgeführten Update-Funktionen das geringste Endvermögen bei Eintritt von Zustand Z_1 erzielt. Dafür fällt das Endvermögen bei Eintritt von Zustand Z_2 entsprechend hoch

[277] Ein zweiter erhöhender Effekt wie im Zustand Z_1 ist hier somit nicht vorhanden.

[278] Das Endvermögen EV_{Z_2} bzw. F_{22} wird an der Stelle $D_1^{optZ_2}$ maximal. Der Betrag F_{22} nach (2.24) ist wiederum umso größer, je höher der Funktionswert $G(x_{Z_2})$ ausfällt. Bedingt durch $G'(x) \geq 1$ nach (3.1) ist auch $G(x_{Z_2})$ umso größer, je höher x_{Z_2} ist. Unabhängig von der zugrundeliegenden Update-Funktion ergibt sich $D_1^{optZ_2}$ somit immer nach Gleichung (4.45).

[279] Für die Veränderung von $D_1^{optZ_1}$ ist somit der von der verwendeten Update-Funktion abhängige Preis p_{21} und die daraus resultierende Änderung von x_{Z_1} verantwortlich.

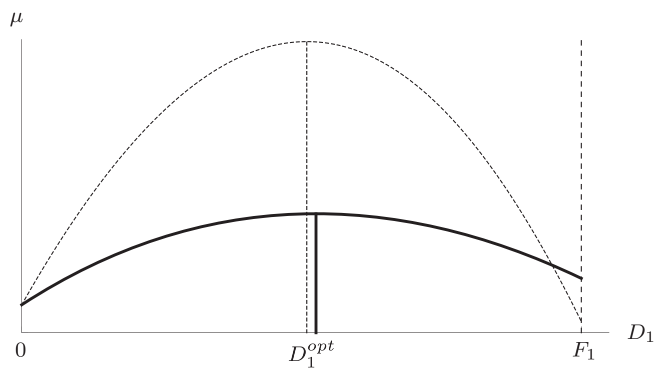


Abbildung 4.22: Verlauf μ mit konvexer Update-Funktion

aus, womit sich hier dann auch insgesamt ein relativ hoher Erwartungswert μ^{opt} ergibt. Dies liegt daran, dass bei einer konvexen Update-Funktion insbesondere die sehr hohen relativen Wertentwicklungen zu einem entsprechend großen Mittelzufluss führen. Derartige relative Wertentwicklungen treten im vorliegenden Beispiel vor allem bei Eintritt von Zustand Z_2 auf. Durch die Wahl eines entsprechend hohen Parameters a bei einer linearen Update-Funktion können hier jedoch vergleichbare Ergebnisse erzielt werden. Beispielsweise wird mit der bereits zuvor aufgeführten, linearen Update-Funktion mit Parameter $a = 3$ und $D_1^{opt} = 0,098733$ sowohl bei Eintritt von Zustand Z_1 als auch bei Eintritt von Zustand Z_2 ein höheres Endvermögen erzielt als mit der konvexen Update-Funktion nach (3.8), woraus dann auch insgesamt ein größerer Erwartungswert μ^{opt} resultiert.

Bei der zustandsbezogenen Betrachtung weist die konvexe Update-Funktion im Prinzip das gleiche Verhalten wie die beiden konkaven Update-Funktionen auf. An der Stelle $\widehat{D_1} = 0,1$ nach (4.23) ergibt sich bei Eintritt von Zustand Z_1 mit $EV_{Z_1} = 0,25$ das gleiche Endvermögen wie mit den anderen Update-Funktionen. Die optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_1 ist mit $D_1^{optZ_1} = 0,053581$ etwas größer als die entsprechende, zustandsbezogene Lösung bei der Benchmark-Update-Funktion.[280] Die optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_2 ist auch hier $D_1^{optZ_2} = 0,136660$. Bedingt durch die Konvexität fällt an dieser Stelle mit $EV_{Z_2} = 0,277583$ das zustandsbezogene Endvermögen relativ hoch aus. Die nächste Abbildung 4.23 veranschaulicht den Verlauf von μ bei stückweise definierten Update-Funktionen.

[280]Mit der konvexen Update-Funktion ergibt sich hier an der Stelle $D_1^{optZ_1} = 0,053581$ mit $EV_{Z_1} = 0,260413$ auch ein höheres Endvermögen als mit der Benchmark-Update-Funktion an der Stelle $D_1^{optZ_1} = 0,05$ mit $EV_{Z_1} = 0,25\bar{3}$.

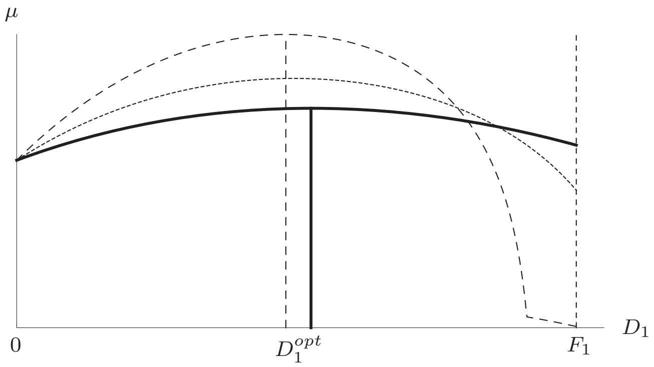


Abbildung 4.23: Verlauf μ mit stückweise definierten Update-Funktionen

Durch die fein gestrichelte Kurve wird der Verlauf von μ mit $G_{1,5}(x)$ nach (3.12) und durch die grob gestrichelte Kurve der Verlauf von μ mit $G_{1,75}(x)$ nach (3.12) dargestellt. Mit der stückweise definierten Update-Funktion $G_{1,5}(x)$ ergibt sich $D_1^{opt} = 0,098926$ mit $\mu^{opt} = 0,243147$ sowie $EV_{Z_1} = 0,250278$ und $EV_{Z_2} = 0,239308$. Mit der anderen stückweise definierten Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ folgt $D_1^{opt} = 0,096183$ mit $\mu^{opt} = 0,256919$ sowie $EV_{Z_1} = 0,251709$ und $EV_{Z_2} = 0,259725$. Mit $G_{1,75}(x)$ und $D_1^{opt} = 0,096183$ wird somit in beiden Zuständen ein höheres Endvermögen erzielt als mit $G_{1,5}(x)$ und $D_1^{opt} = 0,098926$. Dies trifft insbesondere auch deshalb zu, weil für die beiden optimalen Lösungen $D_1^{opt} < \widehat{D_1} = 0,1$ gilt und die Update-Funktion $G_{1,5}(x)$ von der Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ nach Satz 57 im Sinne von Definition 2 dominiert wird.[281] Obwohl bei der Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ für $D_1 \geq 0,182303$ der vollständige Mittelabzug auftritt, ist diese aus Sicht des Arbitrageurs hier vorteilhaft.[282] Mit Ausnahme der Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs bei der Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ bestehen hinsichtlich der zustandsbezogenen Betrachtung keine wesentlichen Unterschiede zu den zuvor besprochenen Update-Funktionen.

Eine besondere Schwierigkeit bei der Bestimmung des Preises p_{21} für zulässige Investments D_1 ist hier durch die stückweise Definition der Update-Funktion $G_{\bar{x}}$ gegeben. Bei der Ermittlung des Preises p_{21} muss jeweils unterschieden werden, ob $x_{Z_1} < \bar{x}$ oder $x_{Z_1} \geq \bar{x}$ zutrifft. Dazu kann beispielsweise zunächst angenommen werden, dass $x_{Z_1} < \bar{x}$

[281] Vgl. auch Abbildung 3.3, S. 93. Entsprechend ergibt sich auch für $G_{1,75}(x)$ mit $D_1 = 0,098926$ in beiden Zuständen ein höheres Endvermögen als mit $G_{1,5}(x)$.

[282] Die Stelle $D_1 = 0,182303$ ist in der Abbildung 4.23 durch den Knick im Funktionsverlauf der grob gestrichelten Kurve zu erkennen. Die Bezeichnung $\overline{D_1}$ wurde hier nicht verwendet, da eine Berechnung der Grenze $D_1 = 0,182303$ mit Gleichung (4.36) nicht möglich ist.

gilt. Entsprechend ist dann für die zulässigen Investments D_1 der jeweilige Preis p_{21} mit (4.77) und dem konkaven Abschnitt der Update-Funktion $G_{\bar{x}}$ zu bestimmen. Ergibt sich bei der Überprüfung an einer Stelle D_1 mit dem zugehörigen Preis p_{21} der Widerspruch $x_{Z_1} \geq \bar{x}$, dann muss p_{21} an dieser Stelle noch einmal mit dem linearen Abschnitt der Update-Funktion $G_{\bar{x}}$ bestimmt werden.

Mit der Update-Funktion $G_{1,5}(x)$ wird die relative Wertentwicklung im Zustand Z_1 an der Stelle $D_1^{optZ_1} = 0,051361$ maximal mit $x_{Z_1} = 1,018842$.[283] Für die Update-Funktion $G_{1,75}(x)$ trifft $D_1^{optZ_1} = 0,053337$ mit $x_{Z_1} = 1,020320$ zu. Mit $\bar{x} = 1,5$ bzw. $\bar{x} = 1,75$ ist somit im vorliegenden Beispiel jeweils nur der konkave Abschnitt der stückweise definierten Update-Funktion $G_{\bar{x}}$ zur Bestimmung von p_{21} im Zustand Z_1 relevant.

Im Zustand Z_2 nimmt die relative Wertentwicklung x_{Z_2} immer an der Stelle $D_1^{optZ_2}$ nach (4.45) ihr Maximum an.[284] Mit $D_1^{optZ_2} = 0,136660$ ergibt sich für $G_{1,5}(x)$ und $G_{1,75}(x)$ hier $x_{Z_2} = 1,133400$. Auch im Zustand Z_2 ist daher jeweils nur der konkave Abschnitt dieser beiden stückweise definierten Update-Funktionen von Bedeutung.

Mit der Dominanz im Sinne von Definition 2 lassen sich insbesondere die zustandsbezogenen Funktionsverläufe erklären.[285] Diese Art von Dominanz ruft in der Regel jedoch auch stärkere bzw. zumindest nicht schwächere Reaktionen auf negative relative Wertentwicklungen hervor, welche im vorliegenden Beispiel bzw. im Fall (1) für D_1 im Bereich $\widehat{D_1} < D_1 \leq F_1$ im Zustand Z_1 auftreten. Dadurch kann dann auch der Erwartungswert der dominierenden Update-Funktion an der Stelle $D_1 = F_1$ bzw. für relativ hohe Investments D_1 kleiner ausfallen als der Erwartungswert der dominierten Update-Funktion. Bis auf eine Ausnahme ist dies in Verbindung mit den bisher in diesem Abschnitt verwendeten Update-Funktionen der Fall.[286] Damit der Erwartungswert der dominierenden Update-Funktion für alle zulässigen Investments D_1 nicht kleiner ausfällt als der Erwartungswert der dominierten Update-Funktion, muss Dominanz im Sinne von Definition 3 gefordert werden. Die nachfolgende Abbildung 4.24 veranschaulicht eine Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen einer linearen und einer konkaven Update-Funktion gemäß Satz 64.

[283]Dies folgt mit Gleichung (4.41). Der Preis p_{21} nach (2.47) ist umso höher, je größer F_{21} ausfällt. F_{21} nach (2.24) ist wiederum umso größer, je höher der Funktionswert $G_{\bar{x}}(x_{Z_1})$ ist. Bedingt durch $G'_{\bar{x}}(x) \geq 1$ nach Satz 37 ist $G_{\bar{x}}(x_{Z_1})$ umso höher, je größer x_{Z_1} ausfällt.
[284]Vgl. Fußnote 278, Kapitel 4, S. 233.
[285]Vgl. dazu Abbildung 4.20, S. 231 sowie Abbildung 4.21, S. 233.
[286]Die Ausnahme ergibt sich im vorliegenden Beispiel für die linearen Update-Funktionen mit den Parametern $a = 1$ und $a = 1,2$. Vgl. dazu Abbildung 4.18, S. 227 und die sich daran anschließenden Ausführungen.

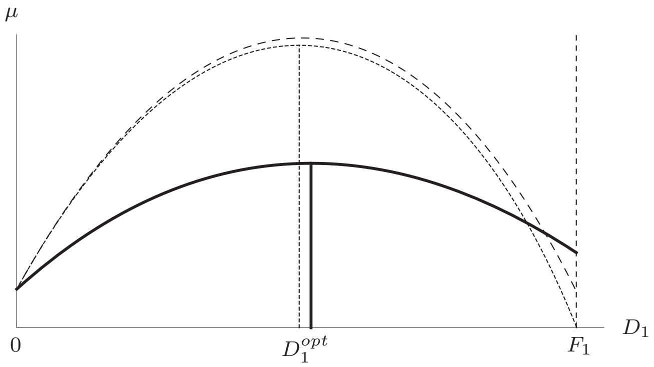


Abbildung 4.24: Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen linearen/konkaven Update-Funktionen

Durch die fein gestrichelte Kurve wird der Verlauf von μ in Verbindung mit der konkaven Update-Funktion $G(x) = x + ln(x)$ nach (3.7) und durch die grob gestrichelte Kurve der Verlauf von μ in Verbindung mit der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a} = G'(1) = 2$ dargestellt. Nach Satz 64 wird mit einem derartigen Parameter $\hat{a}$ die konkave Update-Funktion $G(x)$ von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert. Die fein gestrichelte Kurve verläuft für $D_1 > 0$ komplett unterhalb der grob gestrichelten Kurve. Bedingt durch die Dominanz im Sinne von Definition 3 trifft ein derartiger Verlauf auch für das Endvermögen EV_{Z_1} und $D_1 \neq \widehat{D_1}$ sowie für das Endvermögen EV_{Z_2} zu.[287] Mit der konkaven Update-Funktion nach (3.7) ergibt sich $D_1^{opt} = 0,100941$ mit $\mu^{opt} = 0,249064$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249703$ und $EV_{Z_2} = 0,248721$.[288] Da die konkave Update-Funktion $G(x)$ von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert wird, resultiert an dieser Stelle in Verbindung mit der linearen Update-Funktion sowohl im Zustand Z_1 als auch im Zustand Z_2 ein mindestens genauso hohes Endvermögen und folglich auch ein höherer Erwartungswert.[289] Optimal in Verbindung mit der hier angeführten linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ ist jedoch ein Investment $D_1^{opt} = 0,102015 > 0,100941$, mit welchem sich $\mu^{opt} = 0,250013$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249355$ und $EV_{Z_2} = 0,250367$ ergibt.

[287] Mit $D_1 = \widehat{D_1}$ ergibt sich im Zustand Z_1 immer ein gleich hohes Endvermögen EV_{Z_1}, und zwar unabhängig von der zugrunde gelegten Update-Funktion. Im vorliegenden Dominanzfall berühren sich folglich die beiden Kurven für das Endvermögen EV_{Z_1} an der Stelle $D_1 = \widehat{D_1}$.

[288] Vgl. auch Abbildung 4.19, S. 230 und die sich daran anschließenden Ausführungen.

[289] Mit der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a} = G'(1) = 2$ und $D_1 = 0,100941$ trifft $\mu = 0,250009$ mit $EV_{Z_1} = 0,249703$ und $EV_{Z_2} = 0,250174$ zu. Auch das Endvermögen EV_{Z_1} ist hier größer als in Verbindung mit der konkaven Update-Funktion. Die vermeintliche Gleichheit tritt hier nur durch die Rundung auf.

Durch die Dominanz im Sinne von Definition 3 wird hier zwar in beiden Zuständen in Verbindung mit der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ und $D_1^{opt} = 0,102015$ ein größeres Endvermögen erzielt als mit der konkaven Update-Funktion $G(x)$ und $D_1 = 0,102015$. Trotzdem ist das Endvermögen EV_{Z_1} im Zustand Z_1 mit $D_1^{opt} = 0,100941$ und der konkaven Update-Funktion $G(x)$ größer als mit $D_1^{opt} = 0,102015$ und der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$. Dies ist hier auf die veränderte optimale Lösung D_1^{opt} und die Maximierung des Erwartungswertes zurückzuführen. Entsprechend ist dann aber auch das Endvermögen EV_{Z_2} im Zustand Z_2 mit $D_1^{opt} = 0,100941$ und der konkaven Update-Funktion $G(x)$ kleiner als mit $D_1^{opt} = 0,102015$ und der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$. In der letzten Abbildung 4.25 in diesem Abschnitt wird noch eine Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen einer konvexen und einer linearen Update-Funktion gemäß Satz 66 dargestellt.

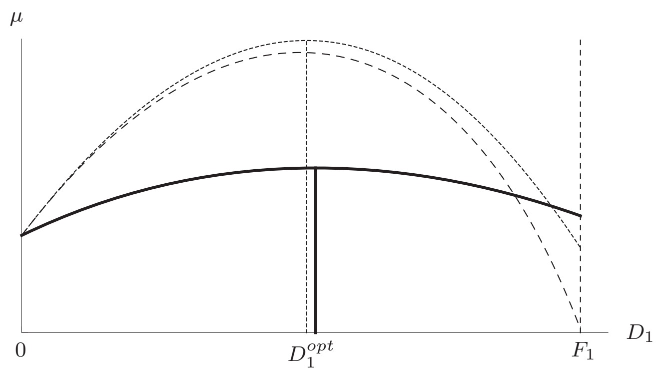


Abbildung 4.25: Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen konvexen/linearen Update-Funktionen

Durch die grob gestrichelte Kurve wird der Verlauf von μ in Verbindung mit der linearen Update-Funktion $G(x)$ mit Parameter $a = \hat{G}'(1) = e = 2,718282$ und durch die fein gestrichelte Kurve der Verlauf von μ mit $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ nach (3.8) dargestellt. Nach Satz 66 wird mit einem derartigen Parameter a die lineare Update-Funktion $G(x)$ von der konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Sinne von Definition 3 dominiert. Die fein gestrichelte Kurve verläuft für $D_1 > 0$ komplett oberhalb der grob gestrichelten Kurve. Wegen der Dominanz im Sinne von Definition 3 trifft ein derartiger Verlauf auch für das Endvermögen EV_{Z_1} und $D_1 \neq \widehat{D_1}$ sowie für das Endvermögen EV_{Z_2} zu. Mit der linearen Update-Funktion $G(x)$ mit $a = e$ ergibt sich $D_1^{opt} = 0,099661$ mit $\mu^{opt} = 0,261673$ sowie $EV_{Z_1} = 0,250163$ und $EV_{Z_2} = 0,267870$. Analog resultiert auch hier aufgrund der Dominanz im Sinne von Definition 3 mit der konvexen Update-Funktion in beiden Zuständen ein höheres Endvermögen und somit ein höherer Erwartungswert.[290] Optimal in Verbindung mit der konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ ist jedoch ein Investment $D_1^{opt} = 0,101909 > 0,099661$ mit $\mu^{opt} = 0,264570$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249056$ und $EV_{Z_2} = 0,272923$.[291] In beiden Zuständen wird in Verbindung mit der konvexen Update-Funktion und $D_1^{opt} = 0,101909$ ein höheres Endvermögen erzielt als mit der linearen Update-Funktion $G(x)$ und $D_1 = 0,101909$. Trotzdem ist das Endvermögen EV_{Z_1} im Zustand Z_1 mit $D_1^{opt} = 0,099661$ und der linearen Update-Funktion $G(x)$ größer als mit $D_1^{opt} = 0,101909$ und der konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$.[292] Die Maximierung des Erwartungswertes führt hier erneut dazu, dass sich die optimale Lösung D_1^{opt} verändert. Die nachfolgende Tabelle 4.5 gibt noch einmal einen Überblick über die optimalen Lösungen, die sich mit den verschiedenen Update-Funktionen und dem Zahlenbeispiel von Shleifer/Vishny (1997) ergeben.

Update-Funktion	D_1^{opt}	μ^{opt}	EV_{Z_1}	EV_{Z_2}
linear mit $a = 1$	$0,105175$	$0,233786$	$0,249270$	$0,225449$
linear mit $a = 1,2$	$0,104559$	$0,237035$	$0,249209$	$0,230479$
linear mit $a = 2$	$0,102015$	$0,250013$	$0,249355$	$0,250367$
linear mit $a = e$	$0,099661$	$0,261673$	$0,250163$	$0,267870$
linear mit $a = 3$	$0,098733$	$0,266259$	$0,250700$	$0,274637$
konkav nach (3.6)	$0,103399$	$0,239392$	$0,249318$	$0,234047$
konkav nach (3.7)	$0,100941$	$0,249064$	$0,249703$	$0,248721$
konvex nach (3.8)	$0,101909$	$0,264570$	$0,249056$	$0,272923$
$G_{1,5}(x)$ nach (3.12)	$0,098926$	$0,243147$	$0,250278$	$0,239308$
$G_{1,75}(x)$ nach (3.12)	$0,096183$	$0,256919$	$0,251709$	$0,259725$

Tabelle 4.5: Optimale Lösungen bei unterschiedlichen Update-Funktionen

[290] Mit der konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x) = e^x + 1 - e$ und $D_1 = 0,099661$ trifft $\mu = 0,264545$ mit $EV_{Z_1} = 0,250163$ und $EV_{Z_2} = 0,272289$ zu. Die vermeintliche Gleichheit beim Endvermögen EV_{Z_1} tritt wiederum nur durch die Rundung auf.

[291] Vgl. auch Abbildung 4.22, S. 234 und die zugehörigen Ausführungen.

[292] Das Endvermögen EV_{Z_2} mit $D_1^{opt} = 0,099661$ und der linearen Update-Funktion $G(x)$ ist dafür wiederum kleiner als mit $D_1^{opt} = 0,101909$ und der konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$.

Bei den zehn verwendeten, unterschiedlichen Update-Funktionen liegt die optimale Lösung D_1^{opt} im Bereich $0,096183 \leq D_1^{opt} \leq 0,105175$. Am größten ist die optimale Lösung im vorliegenden Beispiel bei Verwendung der Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$. Mit dem höchsten Wert $D_1^{opt} = 0,105175$ und $G_B(x) = x$ ergibt sich hier allerdings auch der geringste Erwartungswert $\mu^{opt} = 0,233786$. Das bedeutet, ein passives Verhalten des Investors ist hier im Sinne der Zielfunktion und aus Sicht des Arbitrageurs nicht vorteilhaft. Vielmehr zeigt sich insbesondere mit den hier aufgeführten linearen Update-Funktionen, dass es eine Erhöhung des Parameters a zwar zu einem Rückgang des optimalen Investments D_1^{opt} führt, gleichzeitig dadurch aber auch ein höherer Erwartungswert μ^{opt} erzielt wird. Dies kann wie folgt erklärt werden:

Mit einem höheren Parameter a ergibt sich bei positiven relativen Wertentwicklungen ein höherer zur Verfügung gestellter Betrag im Zeitpunkt $t = 2$. Im Zustand Z_2, in welchem für $D_1 > 0$ auch $x_{Z_2} > 1$ gilt, ist hier eigentlich eine Verlagerung der optimalen Lösung D_1^{opt} in Richtung $D_1^{optZ_2}$ vorteilhaft. Der Rückgang des optimalen Investments D_1^{opt} ist daher auf den Zustand Z_1 zurückzuführen. Für $D_1 > \widehat{D_1} = 0,1$ trifft $x_{Z_1} < 1$ zu. Je höher der Parameter a ist, umso geringer fallen an jeder Stelle $D_1 > \widehat{D_1}$ auch x_{Z_1} und der zur Verfügung gestellte Betrag F_{21} aus. Das bedeutet, dieser negative Effekt überwiegt im vorliegenden Beispiel und führt zu einer Verminderung der optimalen Lösung D_1^{opt}. Für $D_1 < \widehat{D_1} = 0,1$ gilt $x_{Z_1} > 1$. Das bedeutet, mit der linearen Update-Funktion und Parameter $a = e$ wird im vorliegenden Beispiel mit $D_1^{opt} = 0,099661$ in beiden Zuständen eine positive relative Wertentwicklung erzielt. Eine weitere Erhöhung des Parameters auf $a = 3$ führt zu einem erneuten Rückgang der optimalen Lösung D_1^{opt}. Offensichtlich ist eine weitere Erhöhung von x_{Z_1} hier vorteilhafter als die Verminderung von x_{Z_2}.[293]

Die konkaven Update-Funktionen nach (3.6) bzw. (3.7) besitzen ähnliche Funktionsverläufe wie die linearen Update-Funktionen. Jeweils in Verbindung mit der zugehörigen optimalen Lösung D_1^{opt} weisen die zwei konkaven Update-Funktionen im Vergleich zur konvexen Update-Funktion nach (3.8) ein höheres Endvermögen EV_{Z_1} und ein niedrigeres Endvermögen EV_{Z_2} auf. Insbesondere im Zustand Z_2 wird mit der konvexen Update-Funktion ein relativ hohes Endvermögen EV_{Z_2} erreicht. Trotzdem wird mit der linearen Update-Funktion mit Parameter $a = 3$ und $D_1^{opt} = 0,098733$ in beiden Zuständen ein höheres Endvermögen erzielt als mit der konvexen Update-Funktion

[293] Bedingt durch den höheren Parameter $a = 3 > e$ nimmt das Endvermögen EV_{Z_2} trotz Rückgang von x_{Z_2} hier auch weiter zu.

und $D_1^{opt} = 0,101909$. Die beiden stückweise definierten Update-Funktionen $G_{1,5}(x)$ und $G_{1,75}(x)$ verhalten sich wie konkave Update-Funktionen, da im vorliegenden Beispiel nur der konkave Abschnitt relevant ist.

Durch die Wahl eines entsprechenden Parameters a lässt sich mit einer linearen Update-Funktion der gleiche optimale Erwartungswert μ^{opt} erzielen wie mit einer nicht-linearen Update-Funktion. Je nach Art der nicht-linearen Update-Funktion fallen die zustandsbezogenen Endvermögen EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Verbindung mit der jeweiligen Lösung D_1^{opt} dann jedoch unterschiedlich aus. Beispielsweise ergibt sich für eine lineare Update-Funktion mit $a = 1,345204$ die optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,104106$ mit $\mu^{opt} = 0,239392$ sowie $EV_{Z_1} = 0,249187$ und $EV_{Z_2} = 0,234117$. Der Erwartungswert entspricht genau dem Erwartungswert, welcher sich im vorliegenden Beispiel auch mit der konkaven Update-Funktion nach (3.6) und der kleineren Lösung $D_1^{opt} = 0,103399$ ergibt.[294] Das Endvermögen EV_{Z_1} ist mit $D_1^{opt} = 0,103399$ und der konkaven Update-Funktion nach (3.6) jedoch größer als mit $D_1^{opt} = 0,104106$ und der linearen Update-Funktion mit $a = 1,345204$. Wegen des gleich hohen Erwartungswertes ist dann folglich das Endvermögen EV_{Z_2} mit $D_1^{opt} = 0,103399$ und der konkaven Update-Funktion nach (3.6) kleiner als mit $D_1^{opt} = 0,104106$ und der linearen Update-Funktion mit $a = 1,345204$. Auch zu den anderen nicht-linearen Update-Funktionen lässt sich jeweils eine lineare Update-Funktion bestimmen, welche einen gleich hohen Erwartungswert μ^{opt} aufweist. Die nachfolgende Tabelle 4.6 gibt eine Übersicht über die vergleichbaren linearen Update-Funktionen.

Vergleichsbasis	a	D_1^{opt}	μ^{opt}	EV_{Z_1}	EV_{Z_2}
konkav nach (3.6)	$1,345204$	$0,104106$	$0,239392$	$0,249187$	$0,234117$
konkav nach (3.7)	$1,941537$	$0,102204$	$0,249064$	$0,249320$	$0,248927$
konvex nach (3.8)	$2,896311$	$0,099074$	$0,264570$	$0,250486$	$0,272153$
$G_{1,5}(x)$ nach (3.12)	$1,576685$	$0,103375$	$0,243147$	$0,249194$	$0,239892$
$G_{1,75}(x)$ nach (3.12)	$2,425711$	$0,100624$	$0,256919$	$0,249743$	$0,260783$

Tabelle 4.6: Vergleichbare Lösungen mit linearen Update-Funktionen

[294] Vgl. Tabelle 4.5, S. 239.

Auch mit der anderen konkaven Update-Funktion nach (3.7) und $D_1^{opt} = 0,100941$ ist das Endvermögen EV_{Z_1} im Zustand Z_1 größer als mit der linearen Update-Funktion mit Parameter $a = 1,941537$ und $D_1^{opt} = 0,102204$. Mit der linearen Update-Funktion, welche zum gleichen Erwartungswert μ^{opt} führt wie die konkave Update-Funktion, ergibt sich eine größere Lösung D_1^{opt} in Verbindung mit einem geringeren Endvermögen EV_{Z_1} und einem höheren Endvermögen EV_{Z_2} im Vergleich zur konkaven Update-Funktion. Dies gilt entsprechend auch für die beiden zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{1,5}(x)$ und $G_{1,75}(x)$, da bei diesen zwei Update-Funktionen nur jeweils der konkave Abschnitt relevant ist. Bei der konvexen Update-Funktion drehen sich die Relationen hier um. Das bedeutet, mit der linearen Update-Funktion, welche zum gleichen Erwartungswert μ^{opt} führt wie die konvexe Update-Funktion, ergibt sich eine kleinere Lösung D_1^{opt} in Verbindung mit einem höheren Endvermögen EV_{Z_1} und einem geringeren Endvermögen EV_{Z_2} im Vergleich zur konvexen Update-Funktion.[295]

Durch die Wahl eines entsprechenden Parameters a kann mit einer linearen Update-Funktion somit der gleiche Erwartungswert μ^{opt} erzielt werden wie mit einer nicht-linearen Update-Funktion. Ob die Verwendung von nicht-linearen Update-Funktionen im Rahmen des Modells wirklich einen entscheidenden Vorteil mit sich bringt, ist daher fraglich. Gegen die Verwendung von nicht-linearen Update-Funktionen spricht insbesondere auch, dass sich die Bestimmung des Preises p_{21} bei derartigen Update-Funktionen entsprechend aufwendiger gestaltet. Eine allgemeine Entscheidung, ob im Rahmen des Modells eine lineare, eine konkave, eine konvexe oder eine zusammengesetzte Update-Funktion am besten geeignet ist, kann leider nicht getroffen werden. Lineare Update-Funktionen besitzen jedoch den Vorteil, dass sie am einfachsten zu handhaben sind und dass durch Variation des Parameters a letztendlich ähnliche Ergebnisse erzielt werden können wie mit nicht-linearen Update-Funktionen.

Insgesamt kann die Wirkungsweise von Update-Funktionen besser analysiert werden, wenn Dominanzen existieren. Eine Dominanz im Sinne von Definition 2 ist bei der zustandsbezogenen Betrachtung hilfreich. Der Verlauf von μ hingegen lässt sich besser erklären, wenn eine Dominanz im Sinne von Definition 3 vorliegt.

Im nachfolgenden Abschnitt 4.3 wird nun abschließend der Frage nachgegangen, ob die Entscheidung $D_{21} = F_{21}$ immer zu dem maximal möglichen Erwartungswert führt bzw. ob mit einem kleineren Investment im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 unter gewissen Umständen ein noch höherer Erwartungswert erzielt werden kann.

[295] Vgl. Tabelle 4.5, S. 239 sowie Tabelle 4.6, S. 241.

4.3 Zwei Entscheidungsvariablen und lineare Update-Funktionen

Dem Entscheidungsmodell in diesem Abschnitt liegt die Zielfunktion nach (2.53) zugrunde. Analog zu Abschnitt 4.1 wird eine lineare Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20 gewählt. Zur weiteren Analyse von $\mu^{(\beta)}$ nach (2.54) und zur Bestimmung des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ nach (2.56) muss $G(x_{Z_1}^{(\beta)})$ näher bestimmt werden. Die relative Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(\beta)}$ hat die gleiche Gestalt wie im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable.[296] Daher besitzt Gleichung (4.1) für $G(x_{Z_1}^{(\beta)})$ hier ebenso Gültigkeit wie Gleichung (4.2) für $F_{21}^{(\beta)}$ im Fall $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$. Im Zustand Z_2 unterscheiden sich die beiden Modelle nicht. Entsprechend gilt auch Gleichung (4.3) für $G(x_{Z_2}^{(\beta)})$ und Gleichung (4.4) für $F_{22}^{(\beta)}$.[297] Mit der Ersetzung von $F_1 \cdot G(x_{Z_1}^{(\beta)})$ durch (4.2) und von $F_1 \cdot G(x_{Z_2}^{(\beta)})$ durch (4.4) in Gleichung (2.54) ergibt sich für den Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.53) die Gleichung

$$\begin{aligned}\mu^{(\beta)} &= q \cdot \max\left[F_1 + aD_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{p_{21}^{(\beta)}}{p_1^{(\beta)}} - 1\right), 0\right] \cdot \left(\beta \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + 1 - \beta\right) \\ &+ (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{V}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)\right). \end{aligned} \tag{4.78}$$

In Gleichung (4.78) müssen nun noch die Preise $p_1^{(\beta)}$ und $p_{21}^{(\beta)}$ ersetzt werden. Nach Gleichung (2.57) hängt der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ im Fall $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$ wiederum von sich selbst ab. Gleichung (4.2) für $F_{21}^{(\beta)}$ im Fall $G(x_{Z_1}^{(\beta)}) > 0$ eingesetzt in Gleichung (2.56) ergibt

$$\begin{aligned} p_{21}^{(\beta)} &= V - S_{21} + \beta \cdot \left(F_1 + aD_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{p_{21}^{(\beta)}}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad p_{21}^{(\beta)} &= \frac{p_1^{(\beta)} \cdot \left(V - S_{21} + \beta F_1 - \beta a D_1^{(\beta)}\right)}{p_1^{(\beta)} - \beta a D_1^{(\beta)}}. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Für $\beta = 1$ folgt direkt $p_{21}^{(1)} = p_{21}$ nach (4.6). Mit β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ strebt der Nenner in (4.79) mit steigendem $D_1^{(\beta)}$ nicht so schnell gegen null wie im Fall $\beta = 1$.

[296] Die Entscheidungsvariable D_1 sowie die beiden Preise p_1 und p_{21} müssen in Gleichung (2.41) nur durch $D_1^{(\beta)}$ bzw. $p_1^{(\beta)}$ und $p_{21}^{(\beta)}$ ersetzt werden.

[297] Die Entscheidungsvariable D_1 und der Preis p_1 sind auch hier entsprechend durch $D_1^{(\beta)}$ und $p_1^{(\beta)}$ zu ersetzen.

Gleiches trifft für den Zähler zu. Nach (2.57) muss hier ebenfalls $p_{21}^{(\beta)} \geq V - S_{21}$ gelten. Es ist daher zu bestimmen, für welches Investment $D_1^{(\beta)}$ der Gleichheitsfall $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21}$ zutrifft. Durch Gleichsetzen von $p_{21}^{(\beta)}$ nach Gleichung (4.79) mit $V - S_{21}$ ergibt sich durch entsprechende Umformungen

$$\beta \cdot \Big(a(D_1^{(\beta)})^2 + D_1^{(\beta)} \cdot (aS_{21} - aS_1 - F_1) - F_1 \cdot (V - S_1)\Big) = 0. \tag{4.80}$$

Für $\beta = 0$ ist Gleichung (4.80) immer erfüllt und es gilt $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$ unabhängig von $D_1^{(0)}$. Gleichung (4.80) entspricht Gleichung (4.33) multipliziert mit dem Faktor β. Folglich besitzen beide Gleichungen für $\beta > 0$ dieselben Nullstellen. Das bedeutet, $p_{21}^{(\beta)}$ und p_{21} stimmen immer an der Stelle $\overline{D}_1$ nach (4.36) überein.[298] Es stellt sich nun die Frage, wie sich $p_{21}^{(\beta)}$ und p_{21} im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich größentechnisch zueinander verhalten.[299] Dazu kann zunächst die folgende Aussage getroffen werden:

SATZ 76 *Für $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} < \overline{D}_1 \leq F_1$ und β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ gilt an jeder Stelle $D_1^{(\beta)}$ die Relation $p_{21}^{(\beta)} < p_{21}$.*

BEWEIS: Mit $p_{21}^{(\beta)}$ nach (4.79) und p_{21} nach (4.6) ergibt sich aus $p_{21}^{(\beta)} < p_{21}$ nach entsprechenden Umformungen die folgende Bedingung:[300]

$$\begin{aligned} & \beta \cdot \Big(F_1 p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} S_{21} + aD_1^{(\beta)} V\Big) \\ < \quad & F_1 p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} S_{21} + aD_1^{(\beta)} V. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Die Ungleichung (4.81) ist erfüllt, wenn β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ liegt und gleichzeitig die Bedingung $F_1 p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} S_{21} + aD_1^{(\beta)} V > 0$ erfüllt ist. Den Preis $p_1^{(\beta)}$ nach (2.5) in letztere Bedingung eingesetzt und dann zusammengefasst ergibt

$$a(D_1^{(\beta)})^2 + D_1^{(\beta)} \cdot (aS_{21} - aS_1 - F_1) - F_1 \cdot (V - S_1) < 0. \tag{4.82}$$

[298] Zur Herleitung von $\overline{D}_1$ vgl. Abschnitt 4.1.2.3.

[299] Im Folgenden wird die Entscheidungsvariable im Zeitpunkt $t = 1$ mit $D_1^{(\beta)}$ bezeichnet.

[300] Nach Anhang C.2 gilt $p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} > 0$ im Definitionsbereich von Gleichung (4.6). Bedingt durch $p_1^{(\beta)} - \beta a D_1^{(\beta)} \geq p_1^{(\beta)} - aD_1^{(\beta)} \Leftrightarrow \beta \leq 1$ muss bei der Multiplikation mit dem jeweiligen Nenner hier keine zusätzliche Fallunterscheidung mehr vorgenommen werden.

Der Ausdruck links vom Relationszeichen in (4.82) entspricht dem Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in (4.33) bzw. dem Ausdruck in der Klammer in (4.80). Das bedeutet, für $D_1^{(\beta)} = \overline{D}_1$ ist die Bedingung (4.82) nicht erfüllt. Bei dem Ausdruck links vom Relationszeichen in (4.82) handelt es sich um ein Polynom zweiten Grades, welches neben der positiven Nullstelle $\overline{D}_1$ nach (4.36) noch eine weitere Nullstelle an einer Stelle $D_1^{(\beta)} < 0$ besitzt.[301] Für $D_1^{(\beta)} = 0$ ergibt sich nach (4.82) die Bedingung $-F_1 \cdot (V - S_1) < 0$, welche mit $F_1 > 0$ nach (2.2) und $S_1 < V$ nach (2.8) immer erfüllt ist. Zusammengefasst gilt somit (4.82) für $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} < \overline{D}_1 \leq F_1$. □

Aus $p_{21}^{(\beta)} > p_{21}$ resultiert die Bedingung (4.81) mit umgekehrtem Relationszeichen. Durch β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ kann der Fall $p_{21}^{(\beta)} > p_{21}$ folglich nur dann auftreten, wenn die Bedingung $a(D_1^{(\beta)})^2 + D_1^{(\beta)} \cdot (aS_{21} - aS_1 - F_1) - F_1 \cdot (V - S_1) > 0$ erfüllt ist. Dies ist der Fall für $D_1^{(\beta)} > \overline{D}_1$. Die Stelle $\overline{D}_1$ ist jedoch nur in den Fällen (1), (2) und (3) nach Tabelle 4.2 bzw. im Fall $S_{21} > S_1$ für den Preis p_{21} relevant. Nur dann kann diese Stelle im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} \leq F_1$ liegen. Gleichung (4.6) besitzt dann jedoch für p_{21} keine Gültigkeit mehr, da für $D_1^{(\beta)} \geq \overline{D}_1$ der vollständige Mittelabzug erfolgt und $p_{21} = V - S_{21}$ nach (2.49) gilt.[302] Dies lässt sich auch für den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ und Gleichung (4.79) zeigen:

SATZ 77 *Für $\overline{D}_1$ im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich und $D_1^{(\beta)} \geq \overline{D}_1$ gilt $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21}$.*

BEWEIS: Liegt $\overline{D}_1$ im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich, dann kann nach Satz 76 an einer Stelle $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} < \overline{D}_1$ kein Pol mit Vorzeichenwechsel vorliegen, da sonst $p_{21}^{(\beta)} < p_{21}$ nicht möglich wäre. Für $\beta > \frac{1}{a}$ ist die Polstelle $\frac{V-S_1}{\beta a-1}$ des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ nicht kleiner als die Polstelle $\frac{V-S_1}{a-1}$ des Preises p_{21}.[303] Nach Anhang D.2 existiert für $\beta = \frac{1}{a}$ keine Polstelle und für $\beta < \frac{1}{a}$ trifft $\frac{V-S_1}{\beta a-1} < 0$ zu. Nach Anhang C.2 ist der Pol mit Vorzeichenwechsel beim Preis p_{21} unproblematisch. Existiert ein Pol mit Vorzeichenwechsel beim Preis $p_{21}^{(\beta)}$, dann ist diese Polstelle nicht kleiner als die Polstelle des Preises p_{21} oder negativ. Somit ist die Polstelle des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ ebenfalls unproblematisch.

Für $\beta > 0$ ergibt sich nach (4.79) an der Stelle $D_1^{(\beta)} = 0$ ein Preis in Höhe von $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21} + \beta F_1 > V - S_{21}$ und nach (4.80) an der Stelle $D_1^{(\beta)} = \overline{D}_1$ sowie an einer weiteren Stelle $D_1^{(\beta)} < 0$ ein Preis in Höhe von $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21}$. Für $\beta > \frac{1}{a}$, $\overline{D}_1$ im für

[301] Vgl. (4.34) sowie die sich daran anschließenden Ausführungen.
[302] Vgl. Abschnitt 4.1.2.1.
[303] Vgl. (D.2) und (C.2). Mit β im Bereich $\frac{1}{a} < \beta \leq 1$ gilt $\frac{V-S_1}{\beta a-1} \geq \frac{V-S_1}{a-1} \Leftrightarrow a \geq \beta a$.

$D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich und $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $\overline{D}_1 < D_1^{(\beta)} < \frac{V-S_1}{\beta a-1}$ gilt nach (4.79) folglich $p_{21}^{(\beta)} < V - S_{21}$. Für β im Bereich $0 < \beta \leq \frac{1}{a}$, $\overline{D}_1$ im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich und für $D_1^{(\beta)} > \overline{D}_1$ trifft ebenfalls $p_{21}^{(\beta)} < V - S_{21}$ nach (4.79) zu. Gleichung (4.79) besitzt demnach für $p_{21}^{(\beta)}$ und $D_1^{(\beta)} > \overline{D}_1$ keine Gültigkeit mehr, da $p_{21}^{(\beta)} < V - S_{21}$ nach (2.21) bzw. (2.57) nicht zulässig ist. Offensichtlich erfolgt für $D_1^{(\beta)} > \overline{D}_1$ der vollständige Mittelabzug und es gilt $p_{21}^{(\beta)} = V - S_{21}$ im Fall $S_{21} > S_1$.

Für $\beta = 0$ ergibt sich unabhängig von $D_1^{(0)}$ immer ein Preis $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$.[304] □

Zusammengefasst gilt somit für den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ in den Fällen (1), (2) und (3) nach Tabelle 4.2 bzw. im Fall $S_{21} > S_1$ die Relation $p_{21}^{(\beta)} \leq p_{21}$. Abbildung 4.26 veranschaulicht drei typische Preisverläufe für $p_{21}^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von $D_1^{(\beta)}$ im Fall (1).

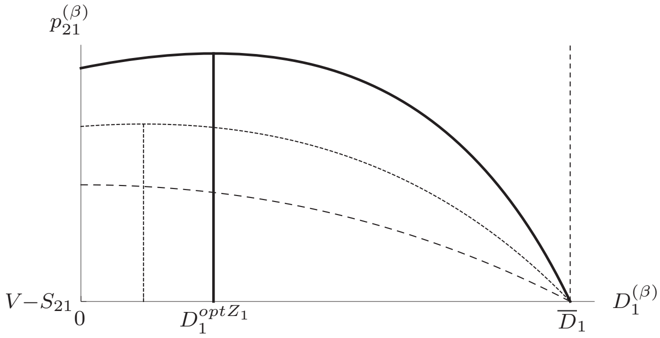


Abbildung 4.26: Preisverläufe für $p_{21}^{(\beta)}$ im Fall (1)

Die durchgezogene Kurve stellt den Preisverlauf für $p_{21}^{(1)} = p_{21}$ dar.[305] Bei der fein gestrichelten Kurve wurde $\beta = 0,75$ und bei der grob gestrichelten Kurve $\beta = 0,5$ gewählt. Der vollständige Mittelabzug erfolgt in diesem Beispiel nur für ein Investment $D_1^{(\beta)} = \overline{D}_1 = F_1$. Im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich trifft $p_{21}^{(\beta)} = p_{21}$ somit nur an der Stelle $D_1^{(\beta)} = F_1$ zu. Ansonsten ist der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ mit β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ an jeder zulässigen Stelle $D_1^{(\beta)} \neq F_1$ stets kleiner als p_{21}. Die Stelle, an welcher das Maximum des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ liegt, wird mit sinkendem β kleiner.[306]

[304] Dies folgt direkt mit Gleichung (4.79) bzw. mit Gleichung (4.80).

[305] Dieser Verlauf entspricht dem Preisverlauf der durchgezogenen Kurve in Abbildung 4.2, S. 165. Analog wurde hier zur Darstellung $V = 1$, $F_1 = 0,2$, $S_1 = 0,3$, $S_{21} = 0,4$ und $a = 3$ gewählt.

[306] Zur Berechnung des Maximums vgl. Gleichung (D.4). Das Maximum des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ liegt hier genau an der Stelle $D_1^{(\beta)} = 0$, wenn $\beta = \frac{S_{21}-S_1}{F_1}$ zutrifft. Dies ist bei der grob gestrichelten Kurve in Abbildung 4.26 mit $\beta = \frac{0,4-0,3}{0,2} = 0,5$ der Fall.

In den Fällen (4) und (5) nach Tabelle 4.2 ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen und die Stelle $\overline{D}_1$ liegt außerhalb des für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereiches $0 \leq D_1^{(\beta)} \leq F_1$. In Verbindung mit diesen beiden Fällen gilt die folgende Aussage:

Satz 78 *Für $S_{21} \leq S_1$ und β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ gilt $p_{21}^{(\beta)} < p_{21}$.*

Beweis: Für die Fälle (4) und (5) nach Tabelle 4.2 bzw. für $S_{21} \leq S_1$ muss die Gültigkeit von Bedingung (4.81) für den gesamten Definitionsbereich von $D_1^{(\beta)}$ überprüft werden. Die Ungleichung (4.81) ist erfüllt, wenn β im Bereich $0 \leq \beta < 1$ liegt und gleichzeitig Bedingung (4.82) insbesondere auch für $D_1^{(\beta)} = F_1$ erfüllt ist. Für $D_1^{(\beta)} = F_1$ ergibt sich mit (4.82) und nach entsprechenden Umformungen die Bedingung

$$a \cdot (F_1 + S_{21} - S_1) < V - S_1 + F_1. \tag{4.83}$$

Ist der Ausdruck in der Klammer in (4.83) nicht positiv, dann ist die Ungleichung erfüllt.[307] Für $F_1 + S_{21} > S_1$ ergibt sich aus (4.83) entsprechend aufgelöst nach a die Bedingung (4.15), welche im Fall $S_{21} = S_1$ genau der Bedingung (4.10) zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse entspricht und daher immer erfüllt sein muss.[308] Im Fall $S_{21} < S_1$ muss zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse die Bedingung (4.8) erfüllt sein. Diese schränkt den Parameter a jedoch stärker ein als die Bedingung (4.15), wodurch ein Einhalten der Bedingung (4.15) auch im Fall $S_{21} < S_1$ immer gewährleistet ist.[309] Folglich ist die Bedingung (4.83) im Fall $S_{21} \leq S_1$ immer erfüllt. □

Für $\beta = 0$ ergibt sich unabhängig von $D_1^{(0)}$ auch in diesen beiden Fällen ein Preis $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$. Abbildung 4.27 veranschaulicht drei typische Preisverläufe für $p_{21}^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von $D_1^{(\beta)}$ im Fall (5).

Die durchgezogene Kurve stellt wiederum den Preisverlauf für $p_{21}^{(1)} = p_{21}$ dar.[310] Bei der fein gestrichelten Kurve wurde $\beta = 0,75$ und bei der grob gestrichelten Kurve $\beta = 0,25$ gewählt. Mit $\beta = 1$ gilt im Fall (4) für $D_1^{(1)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(1)} < F_1$ und im Fall (5) sogar für alle zulässigen Investments $p_{21}^{(1)} = p_{21} > p_1$.[311] Mit einem relativ

[307] Dies folgt direkt aus dem positiven Parameter a sowie $S_1 < V$ nach (2.8) und $F_1 > 0$ nach (2.2).
[308] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[309] Mit $S_{21} < S_1$ folgt $1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1} > 1 + \frac{V-S_{21}}{F_1} > 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$.
[310] Dieser Preisverlauf entspricht dem Preisverlauf der grob gestrichelten Kurve in Abbildung 4.10, S. 176. Zur Darstellung wurde $V = 1$, $F_1 = 0,2$, $S_1 = 0,5$, $S_{21} = 0,4$ und $a = 2,9$ gewählt.
[311] Vgl. Abbildung 4.7, S. 171 sowie Abbildung 4.9, S. 173.

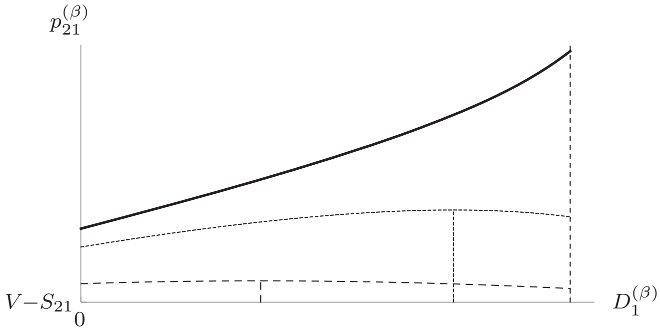


Abbildung 4.27: Preisverläufe für $p_{21}^{(\beta)}$ im Fall (5)

hohen Investment $D_1^{(\beta)}$ und mit einem entsprechend kleinen β ist für $S_{21} \leq S_1$ nun jedoch $p_{21}^{(\beta)} < p_1^{(\beta)}$ und somit eine negative relative Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(\beta)} < 1$ möglich. Im Fall (5) kann $p_{21}^{(\beta)} < p_1^{(\beta)}$ allerdings nur auftreten, wenn zusätzlich $F_1 + S_{21} > S_1$ zutrifft.[312] Der vollständige Mittelabzug ist jedoch in den Fällen (4) und (5) weiterhin ausgeschlossen.[313]

In allen fünf Fällen gilt zusammenfassend $p_{21}^{(\beta)} \leq p_{21}$ für $D_1^{(\beta)}$ im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich. Daraus kann leicht der Trugschluss entstehen, dass die Berücksichtigung einer zweiten Entscheidungsvariable in Form von β nur zu einem maximal gleich hohen Endvermögen wie im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable führen kann und somit die Einführung einer zweiten Entscheidungsvariable überflüssig ist. Ausschlaggebend ist letztendlich aber nicht die Höhe des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ oder des Preises p_{21}, sondern die Höhe des erwarteten Endvermögens $\mu^{(\beta)}$ bzw. des erwarteten Endvermögens μ. Bei bestimmten Parameterkonstellationen ist es möglich, dass an einer zulässigen Stelle $D_1^{(\beta)}$ trotz $p_{21}^{(\beta)} < p_{21}$ für die Erwartungswerte $\mu^{(\beta)} > \mu$ zutrifft. Im Folgenden stehen daher diese beiden Erwartungswerte im Vordergrund.

Bezogen auf den Zustand Z_2 unterscheiden sich die beiden Modelle bzw. der Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ nach (4.78) und der Erwartungswert μ nach (4.5) nicht.[314] Bei Eintritt von Zustand Z_2 und bei Wahl des gleichen zulässigen Investments $D_1^{(\beta)}$ trifft

[312] Der Preis $p_1^{(\beta)}$ wird maximal für $D_1^{(\beta)} = F_1$. Mit $\beta = 0$ ist $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$ minimal. Somit muss zumindest die Bedingung $V - S_1 + F_1 > V - S_{21} \Leftrightarrow F_1 + S_{21} > S_1$ erfüllt sein.

[313] Der Wert $\overline{D}_1$ liegt außerhalb des für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereiches. Zudem wird mit $F_1 + S_{21} > S_1$ und $\beta = 0$ die relative Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(0)}$ für $D_1^{(0)} = F_1$ minimal. Mit dieser minimalen relativen Wertentwicklung ergibt sich aus $G(x_{Z_1}^{(0)}) > 0$ wiederum die Bedingung (4.83), welche im Fall $S_{21} \leq S_1$ immer erfüllt ist. Demnach ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen.

[314] Voraussetzung für einen derartigen Vergleich ist natürlich hier die Übereinstimmung der Eingabeparameter V, F_1, S_1, S_{21}, a und q.

$EV_{Z_2}^{(\beta)} = EV_{Z_2}$ zu. Bezogen auf den Zustand Z_2 gilt folglich auch $D_1^{optZ_2(\beta)} = D_1^{optZ_2}$. Ein Erwartungswert $\mu^{(\beta)} > \mu$ an einer zulässigen Stelle $D_1^{(\beta)}$ kann daher nur durch ein zustandsabhängiges Endvermögen $EV_{Z_1}^{(\beta)} > EV_{Z_1}$ zustande kommen. Für $\overline{D}_1$ im für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich und $D_1^{(\beta)} \geq \overline{D}_1$ greift sowohl in (4.78) als auch in (4.5) die Maximum-Funktion und es gilt $EV_{Z_1}^{(\beta)} = EV_{Z_1} = 0$ und somit auch $\mu^{(\beta)} = \mu$. Um herauszufinden, ob $\mu^{(\beta)} > \mu$ möglich ist, müssen daher nur die zulässigen Bereiche für $D_1^{(\beta)}$ miteinander verglichen werden, in denen $F_{21}^{(\beta)} > 0$ bzw. $F_{21} > 0$ zutrifft. Die Maximum-Funktion in (4.78) bzw. in (4.5) kann somit vernachlässigt werden.

Im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable steht nach (4.41) im Zustand Z_1 die Maximierung des Endvermögens im Einklang mit der Maximierung des Preises p_{21}. Das bedeutet, das Endvermögen EV_{Z_1} wird genau an der zulässigen Stelle maximal, an welcher auch der Preis p_{21} maximal wird. Für einen konkreten Wert $\beta > 0$ trifft dieser Zusammenhang im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen auch für das Endvermögen $EV_{Z_1}^{(\beta)}$ und den Preis $p_{21}^{(\beta)}$ zu.[315] Bei Eintritt von Zustand Z_1 ergibt sich nach Satz 19 bzw. nach Gleichung (2.51) im Zeitpunkt $t = 3$ ein Endvermögen in Höhe von

$$EV_{Z_1}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)} \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + (1-\beta) \cdot F_{21}^{(\beta)}. \tag{4.84}$$

Im Fall $\beta = 0$ gilt $EV_{Z_1}^{(0)} = F_{21}^{(0)}$.[316] Für $\beta > 0$ ergibt sich $F_{21}^{(\beta)} = \frac{p_{21}^{(\beta)} - V + S_{21}}{\beta}$ aus Gleichung (2.56). Eingesetzt in (4.84) folgt

$$EV_{Z_1}^{(\beta)} = V \cdot \frac{p_{21}^{(\beta)} - V + S_{21}}{p_{21}^{(\beta)}} + (1-\beta) \cdot \frac{p_{21}^{(\beta)} - V + S_{21}}{\beta}. \tag{4.85}$$

Mit $\beta > 0$ und $F_{21}^{(\beta)} > 0$ folgt $p_{21}^{(\beta)} > V - S_{21} > 0$ nach (2.56) und somit insgesamt auch $EV_{Z_1}^{(\beta)} > 0$. Gleichung (4.85) abgeleitet nach $p_{21}^{(\beta)}$ ergibt

$$\frac{d\,EV_{Z_1}^{(\beta)}}{d\,p_{21}^{(\beta)}} = V \cdot \frac{V - S_{21}}{(p_{21}^{(\beta)})^2} + \frac{1-\beta}{\beta}. \tag{4.86}$$

Nach (2.18) gilt $S_{21} < V$. Mit β im Bereich $0 < \beta \leq 1$ und $p_{21}^{(\beta)} > 0$ ist (4.86) immer positiv. Das bedeutet, je höher der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ für einen konkreten Wert $\beta > 0$ ausfällt, umso höher ist das Endvermögen im Zustand Z_1. Folglich gilt der Zusammenhang

[315] Im Fall $\beta = 0$ folgt $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$ nach (2.57) bzw. nach (4.79). Der Preis $p_{21}^{(0)}$ ist in diesem Fall konstant und unabhängig von $D_1^{(0)}$.

[316] Nach Gleichung (4.2) gilt dann $EV_{Z_1}^{(0)} = F_{21}^{(0)} = F_1 + aD_1^{(0)} \cdot (\frac{V - S_{21}}{V - S_1 + D_1^{(0)}} - 1)$.

$$\max_{D_1^{(\beta)}} EV_{Z_1}^{(\beta)} \Leftrightarrow \max_{D_1^{(\beta)}} p_{21}^{(\beta)}. \tag{4.87}$$

Für $\beta = 1$ ergeben sich hier die entsprechenden Gleichungen aus Abschnitt 4.1.3. Die Stelle $D_1^{optZ_1(\beta)}$, an welcher der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ maximal wird, ist abhängig von β.[317] Mit Variation von β ändert sich somit in der Regel auch die optimale Lösung bezogen auf den Zustand Z_1.[318] Dies hat wiederum auch Auswirkungen auf $D_1^{opt(\beta)}$. Eine einfache Eingrenzung der optimalen Lösung durch die zustandsabhängigen, optimalen Lösungen ist daher im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen nicht gegeben.

Für den für $D_1^{(\beta)}$ zulässigen Bereich mit $F_{21}^{(\beta)} > 0$ ergibt sich für den Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ im Maximierungsproblem nach Gleichung (2.53) unter Verwendung einer linearen Update-Funktion nach Satz 20 die folgende Gleichung:[319]

$$\begin{aligned}
\mu^{(\beta)} &= q \cdot \left(F_1 + aD_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{p_{21}^{(\beta)}}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)\right) \cdot \left(\beta \cdot \frac{V}{p_{21}^{(\beta)}} + 1 - \beta\right) \\
&+ (1-q) \cdot \left(F_1 + aD_1^{(\beta)} \cdot \left(\frac{V}{p_1^{(\beta)}} - 1\right)\right) \\
&= q \cdot \frac{\left(F_1 - aD_1^{(\beta)}\right) \cdot \beta V}{p_{21}^{(\beta)}} + \frac{aD_1^{(\beta)} V}{p_1^{(\beta)}} + (1 - q\beta) \cdot \left(F_1 - aD_1^{(\beta)}\right) \\
&+ q \cdot \frac{aD_1^{(\beta)} \cdot (1-\beta) \cdot \left(p_{21}^{(\beta)} - V\right)}{p_1^{(\beta)}}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Der Übersicht halber wird in Gleichung (4.88) auf eine Ersetzung von $p_1^{(\beta)}$ durch (2.5) und von $p_{21}^{(\beta)}$ durch (4.79) verzichtet. Es gilt nun festzustellen, ob Kombinationen aus $D_1^{(\beta)}$ und β existieren, für welche $\mu^{(\beta)} > \mu^{opt}$ zutrifft. Dazu wird zunächst das folgende Zahlenbeispiel herangezogen:

Der Vermögensgegenstand besitzt weiterhin den Grundwert $V = 1$. Der Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $S_1 = 0,7$ und bei Eintritt von Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ erfolgt ein noch etwas größerer Noise trader shock $S_{21} = 0,75$. Der anfangs im Zeitpunkt $t = 1$ von dem Investor zur Verfügung gestellte Betrag beträgt

[317] Vgl. Anhang D.

[318] Die optimale Lösung $D_1^{optZ_1(\beta)}$ ändert sich nicht, wenn sich das Maximum des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ nur durch die Grenze des Definitionsbereiches ergibt.

[319] Entspricht Gleichung (4.78), wenn das Ergebnis der Maximum-Funktion in (4.78) positiv ist.

$F_1 = 0,65$. Für den Parameter a der linearen Update-Funktion wird der Wert $a = 1,35$ angenommen. Die zwei Zustände im Zeitpunkt $t = 2$ besitzen durch $q = 0,5$ eine gleich hohe Eintrittswahrscheinlichkeit.

Mit $0,65 = F_1 > S_{21} - S_1 = 0,05$ und $S_{21} > S_1$ liegt hier der Fall (1) vor.[320] Zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse muss der Parameter a der Bedingung (4.25) genügen.[321] Mit $a = 1,35 < 1 + \frac{1-0,7}{0,7-0,75+0,65} = 1,5$ ist diese Voraussetzung hier erfüllt. Der vollständige Mittelabzug ist durch $a = 1,35 < 1 + \frac{1-0,75}{0,75-0,7+0,65} = 1,357143$ ausgeschlossen.[322] Das vorliegende Beispiel ähnelt dem Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) in Abschnitt 4.1.4.1. Daher werden nur die grundlegenden Ergebnisse präsentiert. Die Funktionsverläufe für μ sowie EV_{Z_1} und EV_{Z_2} in Abhängigkeit von D_1 veranschaulicht die nachfolgende Abbildung 4.28.

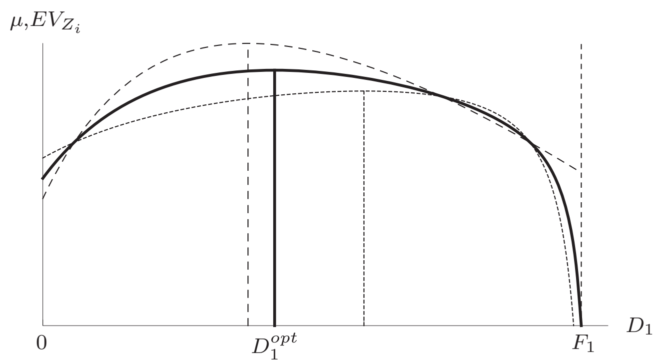


Abbildung 4.28: Beispiel Fall (1) mit $p_{21} > V$:
Verläufe μ und EV_{Z_i}

Jeweils in Abhängigkeit von D_1 wird in Abbildung 4.28 durch die durchgezogene Kurve der Erwartungswert μ, durch die fein gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_1} und durch die grob gestrichelte Kurve das Endvermögen EV_{Z_2} dargestellt.[323] Die drei Kurven stimmen hier nicht nur für $D_1 = F_1/a = 0,\overline{481}$ überein, sondern auch für $D_1 = 0,037784$ und $D_1 = 0,588142$. Dies liegt daran, dass sich für die beiden letzteren Werte jeweils ein Preis $p_{21} = V = 1$ ergibt.[324] Für D_1 zwischen diesen beiden Werten gilt folglich $p_{21} > V = 1$. Nach Abbildung 4.28 sind diese drei risikolosen Lösungen im vorliegenden Beispiel jedoch nicht optimal.

[320] Vgl. Tabelle 4.2, S. 156.
[321] Vgl. Tabelle 4.4, S. 177.
[322] Vgl. Tabelle 4.1, S. 150.
[323] Für $D_1 = F_1$ ergibt sich $\mu = 0,424115$. Die Abszisse entspricht hier somit nicht $\mu = 0$.
[324] Mit $p_{21} = V = p_{22}$ folgt entsprechend auch $EV_{Z_1} = EV_{Z_2} = \mu$.

Optimal bei Eintritt von Zustand Z_1 ist ein Investment $D_1^{optZ_1} = 0,387666$ nach (C.6) mit $EV_{Z_1} = 0,841399$ nach (4.39). Aus Sicht von Zustand Z_2 ist es hingegen optimal, ein Investment $D_1^{optZ_2} = 0,247723$ nach (4.45) zu wählen, welches zu einem Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,926149$ nach (4.42) führt. Die optimale Lösung liegt nach (4.48) zwischen diesen beiden Lösungen.[325] Mit $q = 0,5$ ergibt sich als optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,279840$ mit $\mu^{opt} = 0,878463$.[326]

Analog zu Abschnitt 4.1.4.4 resultiert in diesem Beispiel mit $D_1^{opt} = 0,279840$ bei Eintritt von Zustand Z_1 nach (4.7) ein Preis $p_{21} = 1,498603 > V = 1$, welcher zu einem Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,833178$ nach (4.39) führt. Mit $F_{21} = 1,248603$ nach (4.38) und $x_{Z_1} = 1,682169$ nach (2.41) beträgt der Mittelzufluss $\Delta F = 0,155193$ nach (2.25), so dass der Investor bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt einen Betrag in Höhe von $I = 0,805193$ nach (2.29) investiert. Zwar gilt hier $EV_{Z_1} > I$, trotzdem nimmt der Arbitrageur $p_{21} > V$ bewusst in Kauf und schädigt so durch $p_3 = 1 < p_{21}$ den Investor. Es stellt sich nun die Frage, ob durch ein Investment $D_{21}^{(\beta)}$ ein Endvermögen $EV_{Z_1}^{(\beta)} > 0,833178$ erzielt werden kann und ob daraus auch gleichzeitig eine Lösung resultiert, welche auch für den Investor von Vorteil ist.

Dazu wird zunächst angenommen, dass eine Änderung von $D_{21}^{(\beta)}$ keinen Einfluss auf die optimale Entscheidung im Zeitpunkt $t = 1$ besitzt. Den Wert $D_1^{(\beta)} = 0,279840$ sowie $p_1^{(\beta)}$ nach (2.5) und $p_{21}^{(\beta)}$ nach (4.79) zusammen mit den Parametern des Beispiels eingesetzt in (4.88) ergibt nach entsprechender Vereinfachung

$$\mu^{(\beta)} = 1,594958 \cdot \frac{(\beta + 0,430413) \cdot (\beta - 1,395072)}{(\beta + 0,918390) \cdot (\beta - 1,534844)}. \tag{4.89}$$

Der Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ nach (4.89) ist im für β zulässigen Bereich $0 \leq \beta \leq 1$ positiv. Um herauszufinden, für welchen zulässigen Wert β der Erwartungswert $\mu^{(\beta)}$ maximal wird, muss Gleichung (4.89) nach β abgeleitet werden. Es gilt

$$\frac{d\,\mu^{(\beta)}}{d\,\beta} = 0,555373 \cdot \frac{(\beta - 0,724466) \cdot (\beta - 3,922957)}{(\beta + 0,918390)^2 \cdot (\beta - 1,534844)^2}. \tag{4.90}$$

An der Stelle $\beta = 0,724466$ liegt ein lokales Maximum des Erwartungswertes nach (4.89) vor, da (4.90) im für β zulässigen Bereich für $\beta < 0,724466$ positiv und für

[325] Es trifft hier (3) in (4.48) zu. Somit ist $D_1^{optZ_1} > D_1^{optZ_2}$ auch im Fall (1) durchaus möglich.

[326] Analog zum Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) in Abschnitt 4.1.4.1 muss zur Bestimmung von D_1^{opt} der Erwartungswert μ nach (4.19) über D_1 maximiert werden.

$\beta > 0,724466$ negativ ist. Den Funktionsverlauf für $\mu^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von β veranschaulicht die nachfolgende Abbildung 4.29.

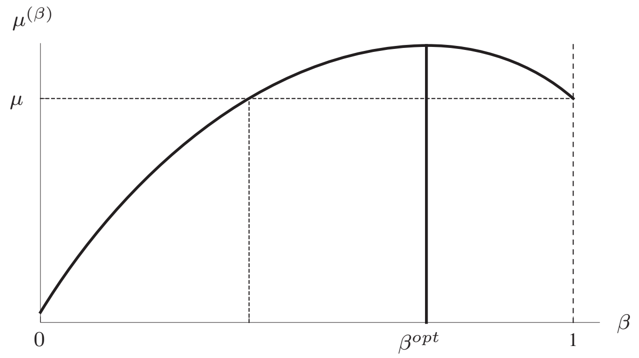


Abbildung 4.29: Beispiel Fall (1) mit $p_{21} > V$: $\mu^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von β

Mit $\beta^{opt} = 0,724466$ und $D_1^{(0,72)} = D_1^{opt} = 0,279840$ trifft hier $\mu^{(0,72)} = 0,927826$ nach (4.89) zu.[327] Hinsichtlich der Erwartungswerte gilt somit $\mu^{(0,72)} > \mu^{(1)} = \mu^{opt}$. Mit der Entscheidung, nur einen bestimmten Anteil des von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 zur Verfügung gestellten Betrages zu investieren, kann der Arbitrageur ein im Vergleich zum Fall $D_{21} = F_{21}$ höheres Endvermögen erzielen.

Mit $\beta = 0,724466$ und $D_1^{(0,72)} = 0,279840$ resultiert in diesem Beispiel bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Preis $p_{21}^{(0,72)} = 0,847010$ nach (4.79), welcher zu einem Endvermögen in Höhe von $EV_{Z_1}^{(0,72)} = 0,931904$ nach (4.85) führt. Der Preis $p_{21}^{(0,72)}$ ist demnach nicht nur kleiner als p_{21}, sondern auch kleiner als V. Seitens des Investors bedeutet dies einen deutlich geringeren zur Verfügung gestellten Betrag $F_{21}^{(0,72)} = 0,824069$ nach (2.56) im Vergleich zu F_{21}, da mit dem geringeren Preis nur noch eine relative Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(0,72)} = 1,198370$ nach (2.41) erzielt wird. Der Mittelzufluss beträgt nach (2.25) nur noch $\Delta F = 0,045129$, so dass der Investor bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt einen Betrag in Höhe von $I = 0,695129$ nach (2.29) investiert. Das bedeutet, im Vergleich zum Fall mit einer Entscheidungsvariable investiert der Investor bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt weniger und es ergibt sich dennoch ein höheres Endvermögen. Demnach ist auch aus Sicht des Investors die Entscheidung $\beta = 0,724466$ vorteilhaft. Insgesamt wird mit $D_1^{(0,72)} = 0,279840$ und β im Bereich $0,391578 < \beta < 1$ ein höheres

[327] Der Übersicht halber wird hier und im Folgenden verkürzt $\beta = 0,72$ statt $\beta = 0,724466$ angegeben, wenn β in einem Index auftaucht.

Endvermögen im Zustand Z_1 und somit auch ein höherer Erwartungswert erzielt als im Fall $D_{21} = F_{21}$.[328]

Bei der vorangegangenen Optimierung wurde davon ausgegangen, dass hier die optimale Entscheidung im Zeitpunkt $t = 1$ weiterhin $D_1^{(0,72)} = D_1^{opt} = 0,279840$ lautet. Im Fall $\beta = 0,724466$ besitzt jedoch der Preis $p_{21}^{(0,72)}$ sein Maximum nach (D.5) an der Stelle $D_1^{optZ_1(0,72)} = 0,208854$, welche nach (4.87) die optimale Lösung aus Sicht des Zustandes Z_1 darstellt. Optimal bezogen auf den Zustand Z_2 ist weiterhin $D_1^{optZ_2(0,72)} = D_1^{optZ_2} = 0,247723$, da diese optimale Lösung unabhängig von β ist. Nach (4.48) muss die optimale Lösung zwischen den beiden Lösungen $D_1^{optZ_1(0,72)}$ und $D_1^{optZ_2}$ liegen. Folglich kann hier $D_1^{(0,72)} = 0,279840$ nicht die optimale Lösung darstellen. Daher muss auch die Lösung im Zeitpunkt $t = 1$ entsprechend angepasst werden, wodurch sich jedoch wiederum auch β^{opt} verändert. Die optimalen Lösungen für $D_1^{(\beta)}$ und β müssen somit simultan bestimmt werden. Eine Übersicht über diejenigen Kombinationen von β und $D_1^{(\beta)}$, welche zu einem Erwartungswert $\mu^{(\beta)} > \mu^{opt} = 0,878463$ führen, liefert die nachfolgende Abbildung 4.30.

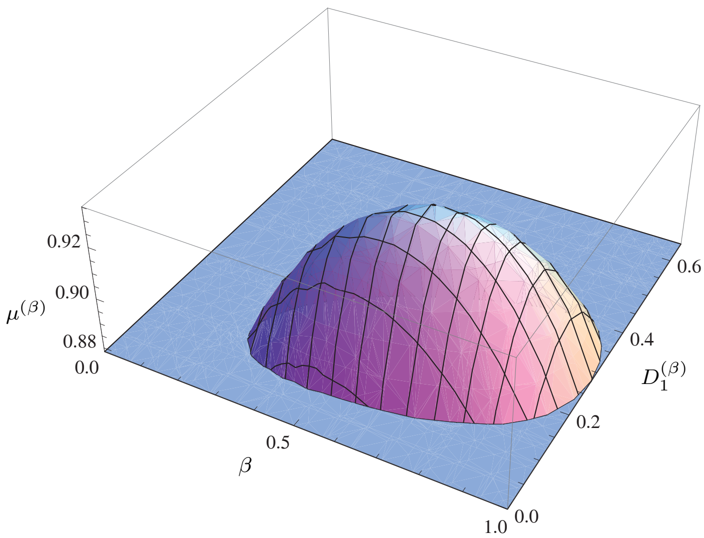


Abbildung 4.30: Beispiel Fall (1) mit $p_{21} > V$: Kombinationen von β und $D_1^{(\beta)}$ mit $\mu^{(\beta)} > \mu^{opt}$

Letztendlich muss $\mu^{(\beta)}$ nach Gleichung (4.88) nicht nur über β, sondern auch über $D_1^{(\beta)}$ maximiert werden, da im vorliegenden Beispiel offensichtlich $D_1^{opt(\beta)} \neq D_1^{opt}$ gilt. Eine

[328] Der Wert $\beta = 0,391578$ ergibt sich durch Gleichsetzen von $\mu^{(\beta)}$ nach (4.89) mit $\mu^{opt} = 0,878463$. Vgl. auch Abbildung 4.29.

analytische Lösung dieses Maximierungsproblems mit zwei Entscheidungsvariablen gestaltet sich hier relativ umfangreich.[329] Da zusätzlich für β nur der Bereich $0 \leq \beta \leq 1$ und für $D_1^{(\beta)}$ nur der Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} \leq F_1$ bzw. $0 \leq D_1^{(\beta)} < \overline{D}_1$ von Bedeutung ist, bietet es sich an, mittels geeigneter Software in den zulässigen Bereichen nach der optimalen Kombination von β und $D_1^{(\beta)}$ zu suchen.[330] Für das vorliegende Beispiel ergeben sich die Werte $\beta^{opt} = 0,642103$ und $D_1^{opt(0,64)} = 0,212958$, aus denen ein maximaler Erwartungswert in Höhe von $\mu^{opt(0,64)} = 0,936249$ nach (4.88) resultiert.

Mit diesen optimalen Werten β^{opt} und $D_1^{opt(0,64)}$ resultiert bei Eintritt von Zustand Z_1 nach (4.79) ein Preis $p_{21}^{(0,64)} = 0,754174 < p_{21}^{(0,72)}$, welcher nach (4.85) zu einem Endvermögen $EV_{Z_1}^{(0,64)} = 0,949530 > EV_{Z_1}^{(0,72)}$ führt. In Verbindung mit $D_1^{opt(0,64)} < D_1^{opt}$ folgt ein von dem Investor im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur Verfügung gestellter Betrag in Höhe von $F_{21}^{(0,64)} = 0,785193 < F_{21}^{(0,72)}$ nach (2.56). Die relative Wertentwicklung nach (2.41) beträgt $x_{Z_1}^{(0,64)} = 1,154066 < x_{Z_1}^{(0,72)}$ und der Mittelzufluss nach (2.25) nur noch $\Delta F = 0,035050$, so dass der Investor bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt nur noch einen Betrag in Höhe von $I = 0,685050$ nach (2.29) investiert. Im Vergleich zur ersten Optimierung mit $\beta = 0,724466$ und $D_1^{(0,72)} = 0,279840$ investiert der Investor bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt nochmals weniger und es ergibt sich ein noch höheres Endvermögen. Abbildung 4.31 veranschaulicht die Funktionsverläufe für $\mu^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von $D_1^{(\beta)}$ im Fall $\beta = 1$ sowie im Fall $\beta = 0,642103$.

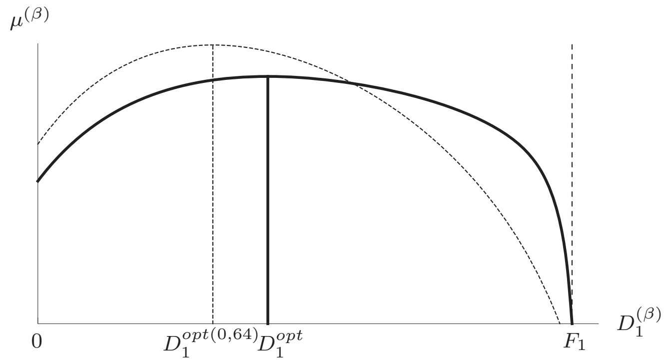


Abbildung 4.31: Beispiel Fall (1) mit $p_{21} > V$: $\mu^{(\beta)}$ in Abhängigkeit von $D_1^{(\beta)}$

[329]Wird $p_1^{(\beta)}$ durch (2.5) sowie $p_{21}^{(\beta)}$ durch (4.79) ersetzt, dann entsteht zwar aus (4.88) eine Gleichung für $\mu^{(\beta)}$, welche mit den konkreten Eingabeparametern nur noch von β und $D_1^{(\beta)}$ abhängt. Trotzdem fällt dann insbesondere die partielle Ableitung von (4.88) nach $D_1^{(\beta)}$ noch sehr komplex aus.

[330]Hierzu wurde die Software Wolfram *Mathematica*® 7 mit der Funktion Maximize verwendet.

Jeweils in Abhängigkeit von $D_1^{(\beta)}$ wird in Abbildung 4.31 mit der durchgezogenen Kurve der Erwartungswert $\mu^{(1)} = \mu$ und mit der fein gestrichelten Kurve der Erwartungswert $\mu^{(0,64)}$ dargestellt. Mit sinkendem β nimmt hier auch das optimale Investment bezogen auf den Zeitpunkt $t = 1$ ab.

Der Preis $p_{21}^{(0,64)}$ besitzt sein Maximum nach (D.5) an der Stelle $D_1^{optZ_1(0,64)} = 0,176750$. Ohne die zweite Entscheidungsvariable trifft $D_1^{optZ_1} > D_1^{optZ_2}$ zu. Mit Berücksichtigung von $\beta = 0,642103$ gilt $D_1^{optZ_1(0,64)} < D_1^{optZ_2}$. Das bedeutet, mit nur einer Entscheidungsvariable D_1 muss im vorliegenden Beispiel folglich $D_1^{opt} \geq D_1^{optZ_2} = 0,247723$ zutreffen. Mit einer zweiten Entscheidungsvariable $\beta = 0,642103$ muss hingegen $D_1^{opt} \leq 0,247723$ gelten. Durch die Hinzunahme der zweiten Entscheidungsvariable β liegt die optimale Lösung somit in einem ganz anderen Bereich.[331] Bei Eintritt von Zustand Z_2 ergibt sich hier mit $D_1^{opt(0,64)} = 0,212958$ ein Endvermögen $EV_{Z_2}^{(0,64)} = F_{22}^{(0,64)} = 0,922968$ nach (4.42). Mit $D_1^{(0,72)} = D_1^{opt} = 0,279840$ folgt ein geringfügig höheres Endvermögen $EV_{Z_2}^{(0,72)} = F_{22}^{(0,72)} = F_{22} = 0,923747$.

Die Einführung einer zweiten Entscheidungsvariable bewirkt im vorliegenden Beispiel, dass ein höherer Erwartungswert als $\mu^{opt} = 0,878463$ erzielt werden kann. Außerdem wird dadurch im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Preis größer als V vermieden. Dies kommt vor allem dem Investor zugute, da Preise größer als V letztendlich auch eine Verminderung seines Endvermögens zur Folge haben.

Es stellt sich nun die Frage, wann die Einführung einer zweiten Entscheidungsvariable im Rahmen des Modells zu einem Erwartungswert größer als μ^{opt} führt. Anhand des vorliegenden Beispiels könnte der Eindruck entstehen, dass die Einführung einer zweiten Entscheidungsvariable β nur dann sinnvoll ist, wenn μ^{opt} mit einem Preis $p_{21} > V$ zustande kommt. Dies ist jedoch ebenfalls ein Trugschluss. Um dies zu zeigen, muss das vorangegangene Beispiel nur leicht abgewandelt werden:

Für den von dem Investor im Zeitpunkt $t = 1$ zur Verfügung gestellten Betrag gilt nun $F_1 = 0,5$ und für den Parameter a der linearen Update-Funktion wird der Wert $a = 1,1$ angenommen.[332] Alle anderen Eingabeparameter bleiben unverändert.[333] Es liegt weiterhin der Fall (1) vor. Durch die Reduzierung von F_1 sind die Restriktionen für den Parameter a durch die Bedingungen (4.15) und (4.25) nicht so stark wie im vorangegangenen Beispiel. Da zusätzlich auch noch der Parameter a im Vergleich zum

[331] Eine Überschneidung der Bereiche ist nur an der Stelle $D_1^{optZ_2}$ gegeben. Für $\beta = 0,809805$ ergibt sich $D_1^{optZ_1(0,81)} = 0,247723 = D_1^{optZ_2}$ nach (D.4). Für $\beta > 0,809805$ trifft folglich $D_1^{opt} \geq D_1^{optZ_2}$ zu.

[332] Zuvor galt $F_1 = 0,65$ bzw. $a = 1,35$.

[333] Es gilt $V = 1$, $S_1 = 0,7$, $S_{21} = 0,75$ und $q = 0,5$.

vorangegangenen Beispiel vermindert wurde, sind auch in diesem Beispiel sinnvolle Ergebnisse gewährleistet und der vollständige Mittelabzug ist ausgeschlossen.

Optimal bei Eintritt von Zustand Z_1 ist in dem abgeänderten Beispiel nun ein Investment $D_1^{optZ_1} = 0,234137$ nach (C.6). Dieses Investment führt zu einem maximal möglichen Preis $p_{21} = 0,951007$ nach (4.7) und einem Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,737121$ nach (4.39). Aus Sicht von Zustand Z_2 ist nach (4.45) weiterhin ein Betrag $D_1^{optZ_2} = 0,247723$ optimal, welcher hier zu einem Endvermögen $EV_{Z_2} = 0,725010$ nach (4.42) führt.[334] Mit $q = 0,5$ lautet die optimale Lösung $D_1^{opt} = 0,242940$ mit $\mu^{opt} = 0,731000$.

In Verbindung mit der optimalen Lösung D_1^{opt} bzw. μ^{opt} ergibt sich im abgeänderten Beispiel ein Preis $p_{21} = 0,950697$ nach (4.7). Es gilt somit nicht nur $p_{21} < V = 1$, sondern sogar $p_{21} \leq 0,951007$ für alle zulässigen Investments D_1. Trotzdem kann auch hier mit der Einführung der Entscheidungsvariable β im Zustand Z_1 ein noch höheres Endvermögen als EV_{Z_1} und ein Erwartungswert größer als μ^{opt} erzielt werden:

Im abgeänderten Beispiel ergibt sich mit $\beta^{opt} = 0,728811$ und $D_1^{opt(0,73)} = 0,200253$ ein maximaler Erwartungswert $\mu^{opt(0,73)} = 0,750834$ nach (4.88).[335] Im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable stellt der Investor im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 mit $D_1^{opt} = 0,242940$ einen Betrag $F_{21} = 0,700697$ nach (4.38) zur Verfügung. Mit $x_{Z_1} = 1,364904$ nach (2.41) beträgt der Mittelzufluss $\Delta F = 0,018245$ nach (2.25), so dass seitens des Investors insgesamt ein Betrag in Höhe von $I = 0,518245$ nach (2.29) investiert wird. Bei Eintritt von Zustand Z_1 resultiert daraus ein Endvermögen $EV_{Z_1} = 0,737035$ nach (4.39).

Mit $\beta^{opt} = 0,728811$ und $D_1^{opt(0,73)} = 0,200253$ ergeben sich $p_{21}^{(0,73)} = 0,668352$ nach (4.79) und $EV_{Z_1}^{(0,73)} = 0,781613$ nach (4.85) sowie $F_{21}^{(0,73)} = 0.574020$ aus (2.56). Mit einer relativen Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(0,73)} = 1,134581$ nach (2.41) folgt nach (2.25) ein Mittelzufluss $\Delta F = 0,006729$, so dass insgesamt seitens des Investors ein Betrag in Höhe von $I = 0,506729$ nach (2.29) investiert wird. Auch hier investiert der Investor im Vergleich zum Modell mit nur einer Entscheidungsvariable bei Eintritt von Zustand Z_1 insgesamt weniger und es wird ein höheres Endvermögen erzielt.[336]

Die Einführung einer zweiten Entscheidungsvariable im Rahmen des Modells kann somit auch dann sinnvoll sein, wenn μ^{opt} mit einem Preis $p_{21} < V$ zustande kommt.

[334] Maßgeblich für $D_1^{optZ_2}$ sind nach (4.45) nur die Eingabeparameter V und S_1, welche nicht verändert wurden.

[335] Zur Bestimmung der optimalen Lösung wurde wiederum die Software Wolfram *Mathematica*® 7 mit der Funktion Maximize verwendet.

[336] Im Zustand Z_2 gilt jedoch nach (4.42) wiederum $EV_{Z_2} = 0,724964 > EV_{Z_2}^{(0,73)} = 0,720055$.

Auch die generell schwer einzuhaltende Forderung $F_{21} < S_{21}$ nach (2.17), welche im abgeänderten Beispiel sogar erfüllt ist, sorgt hier nicht dafür, dass auf eine Optimierung mit β verzichtet werden kann. Tendenziell scheint ein Preis p_{21} in der Nähe von V aber darauf hinzudeuten, dass sich eine Optimierung mit Hilfe der zweiten Entscheidungsvariable β anbietet. Letztendlich sollte jedoch immer eine Überprüfung der optimalen Lösung des Modells mit nur einer Entscheidungsvariable erfolgen.

Sowohl im Beispiel von Shleifer/Vishny (1997) in Abschnitt 4.1.4.1 als auch im Beispiel von Arnold (2009) in Abschnitt 4.1.4.2 führt die Einführung der zweiten Entscheidungsvariable β nicht zu einer Verbesserung der optimalen Lösung. Bei beiden Beispielen ergibt sich jeweils für die zweite Entscheidungsvariable die Lösung $\beta^{opt} = 1$. In den zwei Beispielen zum Fall $S_{21} < S_1$ in Abschnitt 4.1.4.4 ist die Optimierung mittels einer zweiten Entscheidungsvariable wiederum vorteilhaft. In Zusammenhang mit diesen Beispielen wird nun der Frage nachgegangen, ob im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen die optimale Lösung immer mit Preisen kleiner als V erzielt wird. Dies wäre insbesondere aus Sicht des Investors zu begrüßen. Dass es sich auch hierbei nur um einen Trugschluss handelt, zeigt die nun folgende Analyse des ersten Beispiels aus Abschnitt 4.1.4.4 unter Hinzunahme der zweiten Entscheidungsvariable β:[337]

Es ergibt sich mit $\beta^{opt} = 0,919248$ und $D_1^{opt(0,92)} = 0,2$ nach (4.88) ein maximaler Erwartungswert $\mu^{opt(0,92)} = 0,701433 > \mu^{opt} = 0,671429$. Demnach hat sich die optimale Lösung im Zeitpunkt $t = 1$ nicht verändert und es gilt $D_1^{opt(0,92)} = D_1^{opt} = F_1$.[338] Trotz der Hinzunahme der zweiten Entscheidungsvariable β trifft hier bei Eintritt von Zustand Z_1 ein Preis $p_{21}^{(0,92)} = 2,509986$ nach (4.79) zu, welcher zwar kleiner ist als $p_{21} = 3,5$ im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable. Dennoch ist dieser Preis $p_{21}^{(0,92)}$ aber immer noch deutlich größer als der Grundwert $V = 1$. Demnach wird durch die Berücksichtigung der zweiten Entscheidungsvariable β in Verbindung mit der optimalen Lösung nicht notwendig ein Preis kleiner als V im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 erzielt. Für sehr kleine Werte von β ist zwar immer ein Preis kleiner als V möglich.[339] Offensichtlich ist ein derartig kleines β aber nicht optimal.

Mit der optimalen Lösung folgt $F_{21}^{(0,92)} = 1,751416$ aus (2.56) und $EV_{Z_1}^{(0,92)} = 0,782863$ nach (4.85). Mit einer relativen Wertentwicklung $x_{Z_1}^{(0,92)} = 3,585694$ nach (2.41) ergibt sich nach (2.25) ein Mittelzufluss in Höhe von $\Delta F = 1,034277$, so dass insgesamt ein

[337]Im Beispiel aus Abschnitt 4.1.4.4 liegt der Fall (5) vor. Es gilt $V = 1$, $S_1 = 0,5$, $S_{21} = 0,1$, $F_1 = 0,2$ und $a = 3$ sowie $q = 0,75$.
[338]Vgl. Abschnitt 4.1.4.4.
[339]Dies folgt direkt aus $S_{21} > 0$ und Gleichung (2.56).

Betrag $I = 1,234277$ nach (2.29) seitens des Investors investiert wird. Zwar gilt auch hier $EV_{Z_1}^{(0,92)} < I$. Trotzdem ist die Minderung nicht so groß wie im Modell mit nur einer Entscheidungsvariable, denn bedingt durch die zweite Entscheidungsvariable wird mit weniger eingesetzten Mitteln ein größeres Endvermögen erzielt.[340] Da im Beispiel $D_1^{opt(0,92)} = D_1^{opt} = F_1$ zutrifft, gilt für das Endvermögen im Zustand Z_2 entsprechend $EV_{Z_2}^{(0,92)} = EV_{Z_2} = 0,457143$ nach (4.42).

Für das zweite Beispiel aus Abschnitt 4.1.4.4 ergibt sich mit $\beta^{opt} = 0,932992$ und der optimalen Lösung $D_1^{opt(0,93)} = 0,45 = D_1^{opt} = F_1$ nach (4.88) ein maximaler Erwartungswert $\mu^{opt(0,93)} = 0,680682 > \mu^{opt1} = \mu^{opt2} = 0,638170$.

Führt die Hinzunahme der zweiten Entscheidungsvariable β zu einer Verbesserung der optimalen Lösung, dann kommt dies nicht nur dem Arbitrageur zugute, sondern vor allem auch dem Investor. Durch $\beta < 1$ wird in den erläuterten Beispielen bei Eintritt von Zustand Z_1 stets ein höheres Endvermögen bei gleichzeitig geringerem Kapitaleinsatz erzielt. Ein teilweiser Verlust des eingesetzten Kapitals seitens des Investors kann jedoch nicht ausgeschlossen werden. Da $D_1^{opt(\beta)} \neq D_1^{opt}$ möglich ist, kann es jedoch vorkommen, dass bei Eintritt von Zustand Z_2 mit $D_1^{opt(\beta)}$ ein geringeres Endvermögen erzielt wird als mit D_1^{opt}.

[340]In Abschnitt 4.1.4.4 gilt $I = 1,8$ und $EV_{Z_1} = 0,742857$.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasst sich ausführlich mit dem Modell von Andrei Shleifer und Robert W. Vishny aus der Veröffentlichung „The Limits of Arbitrage".

In Kapitel 2 wird zunächst die Grundstruktur des diskreten Drei-Zeitpunkt-Modells vorgestellt. Die Einteilung in unterschiedliche Gruppen von Marktteilnehmern spielt im Modell eine entscheidende Rolle. Daher werden diese Gruppen zunächst eingehend erläutert und dabei insbesondere anhand ihres Informationsstandes und ihres Marktzugangs unterschieden. In den zeitpunktbezogenen Abschnitten des 2. Kapitels werden die Verhaltensweisen der einzelnen Gruppen dann formal abgebildet. Aus ökonomischer Sicht erfolgt eine detaillierte Darstellung der Eingabeparameter und der Festlegungen des Modells, wobei jeweils ein besonderer Schwerpunkt auf der Erläuterung der Nachfragefunktionen und der Preisgleichungen liegt. Von Shleifer/Vishny (1997) getroffene Einschränkungen bezüglich der Eingabeparameter werden jeweils kritisch hinterfragt. Zwingend erforderliche Einschränkungen, wie beispielsweise $S_1 < V$, werden ausführlich hergeleitet und entsprechend begründet. Schwerpunkte liegen zudem auf der Bestimmung des von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Verfügung gestellten Betrages und auf der Herleitung der Zielfunktion der Arbitrageure. Die Zielfunktion wird zunächst ausführlich für das Modell aus Shleifer/Vishny (1997) mit nur einer Entscheidungsvariable hergeleitet. Im letzten Abschnitt 2.4.3.2 erfolgt dann die Erweiterung des Modells um eine zweite Entscheidungsvariable. Diese Erweiterung führt letztendlich bei einigen Parameterkonstellationen zu einer Verbesserung der Lösung.

Kapitel 3 befasst sich ausführlich mit der Update-Funktion, welche die Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ zur Anpassung ihres ursprünglichen Investitionsbetrages F_1 heranziehen. Die drei Anforderungen nach (3.1), welche Shleifer/Vishny (1997) an eine Update-Funktion stellen, werden dabei ausführlich erläutert. Zu Beginn des Kapitels erfolgt zunächst eine eingehende Analyse linearer Update-Funktionen. Dabei wird für den Parameter a der linearen Update-Funktion die Notwendigkeit von $a \geq 1$ herausgestellt. Zudem wird der Zusammenhang zwischen Mittelzufluss bzw. Mittelabfluss, der relativen Wertentwicklung x und dem Funktionswert $G(x)$ umfassend eruiert. In Abschnitt 3.1.2 erfolgt dann eine Verallgemeinerung auf nicht-lineare Update-Funktionen. Als konkrete Beispiele werden dabei zwei konkave Update-Funktionen und eine konvexe Update-Funktion herangezogen. Um die Unterschiede im Verhalten linearer und nicht-linearer Update-Funktionen zu verdeutlichen, wird für konvexe, lineare und konkave Update-Funktionen in Abschnitt 3.1.3 die absolute Höhe des Mittelzuflusses einer positiven relativen Wertentwicklung $x > 1$ mit der absoluten Höhe des Mittelabflusses einer entsprechenden negativen relativen Wertentwicklung $x < 1$ verglichen. In einem weiteren Abschnitt erfolgt die beispielhafte Betrachtung einer stückweise definierten Update-Funktion nach (3.12), die alle drei Anforderungen nach (3.1) erfüllt. Der letzte Schwerpunkt des 3. Kapitels liegt auf der Betrachtung von zwei unterschiedlichen Formen von Dominanz. Mit Hilfe von Dominanzen ist dann beispielsweise auch die Abgrenzung zweier linearer Update-Funktionen voneinander möglich.

In Kapitel 4 wird zunächst die in Kapitel 2 hergeleitete Zielfunktion der Arbitrageure nach (2.40) für das Modell mit nur einer Entscheidungsvariable unter Verwendung einer linearen Update-Funktion zu einem konkreten Entscheidungsmodell weiterentwickelt. Als Ergänzung zu Shleifer/Vishny (1997) wird bei den Untersuchungen auch die Möglichkeit von $S_{21} \leq S_1$ in Betracht gezogen. Zu Beginn der Analyse des Modells mit einer linearen Update-Funktion werden zunächst Einschränkungen des Parameters a zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs herausgearbeitet, wobei hier die von Shleifer/Vishny (1997) angegebene Stabilitätsbedingung zur Vermeidung des vollständigen Mittelabzugs entsprechend korrigiert wird. Zusätzlich erfolgt in dieser Dissertation aber auch der Einbezug der Möglichkeit des vollständigen Mittelabzugs. In diesem Zusammenhang spielt der Preis p_{21} eine wichtige Rolle. Die Funktionsweise des Modells hängt letztendlich davon ab, inwieweit sich für ein Investment D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ ein gültiger Preis $p_{21} \geq V - S_{21}$ nach (4.6) ergibt. Anhand der Kombinationsmöglichkeiten von Preisrelationen und Noise trader shocks im Fall $D_1 = 0$ lassen sich fünf Fälle unterscheiden. Für diese fünf Fälle werden dann Einschränkungen des Parameters a zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse herausgearbeitet. Zusätzlich wird die Zielfunktion unter Einbezug des vollständigen Mittelabzugs dargestellt und formal die Grenze $\overline{D}_1$ bestimmt, ab welcher im Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug seitens des Investors erfolgt. Der allgemeine Teil für das Modell mit nur einer Entscheidungsvariable unter Verwendung einer linearen Update-Funktion schließt mit einem Abschnitt zur zustandsbezogenen Betrachtung der optimalen Entscheidung. Es wird gezeigt, dass immer mindestens eine optimale Lösung existiert, und dass höchstens zwei optimale Lösungen vorliegen können. In Abschnitt 4.1.4 werden dann konkrete Beispiele zu dieser Modellvariante genauer analysiert. Als Erstes wird die optimale Lösung des Beispiels aus Shleifer/Vishny (1997) untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass die in ihrem Beispiel angegebene Lösung nicht optimal ist. Dies liegt insbesondere an der von Shleifer/Vishny (1997) verwendeten Bedingung erster Ordnung nach (4.59), welche in der Regel nicht zu einer optimalen Lösung führt. Das Ausnutzen der Arbitragemöglichkeit gestaltet sich mitunter um einiges komplizierter, als es wohl nach Shleifer/Vishny (1997) ursprünglich der Fall sein sollte. Insbesondere ein Vollinvestment $D_1 = F_1$ ist auch für eine relativ geringe Eintrittswahrscheinlichkeit q nur unter gewissen Umständen optimal. Die Aussage von Shleifer/Vishny (1997), dass $D_1^{optSV} = F_1$ für $q < q^*$ stets die optimale Lösung darstellt, ist somit im Allgemeinen falsch. Im Anschluss wird dann das erste Zahlenbeispiel aus Arnold (2009) besprochen. Nach Arnold (2009) existiert im vorliegenden Beispiel keine optimale Lösung. Im entsprechenden Abschnitt 4.1.4.2 wird jedoch ausführlich aufgezeigt, warum auch in diesem Beispiel eine eindeutige, optimale Lösung existiert. Der nachfolgende Abschnitt widmet sich zwei optimalen Lösungen im Fall $S_{21} > S_1$ und im letzten Unterabschnitt zu dieser Modellvariante wird der Fall $S_{21} < S_1$ besprochen, in welchem ebenfalls zwei optimale Lösungen vorkommen können. Im Anschluss daran wird anhand eines Beispiels erläutert, welchen Einfluss nicht-lineare Update-Funktionen auf die optimale Entscheidung besitzen. Dabei wird insbesondere auf die Untersuchungen aus dem 3. Kapitel zurückgegriffen. Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem Modell mit zwei Entscheidungsvariablen unter Verwendung einer linearen Update-Funktion. Es kann gezeigt werden, dass die Berücksichtigung einer zweiten Entscheidungsvariable bei einigen Konstellationen von Eingabeparametern zu einer Verbesserung der Lösung führt.

Modelltechnisch kann insbesondere das „Gleichzeitigkeitsproblem“ kritisiert werden, welches hier insbesondere in Zusammenhang mit den Preisen auftritt: Der Preis p_{21} ergibt sich hier unter Berücksichtigung des im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 zur

Verfügung gestellten Betrages F_{21}. Dieser Betrag hängt jedoch wiederum von der relativen Wertentwicklung x und somit auch vom Preis p_{21} selbst ab.

Zudem ist die Modellierung der Entlohnung des Arbitrageurs im Rahmen des Modells etwas problematisch: Die relative Wertentwicklung vom Zeitpunkt $t = 2$ zum Zeitpunkt $t = 3$ wird hier nicht mehr berücksichtigt. Außerdem findet die „eigentliche" Basis der Erfolgsmessung $I = F_1 + \Delta F$ nach Gleichung (2.29) hier keine Berücksichtigung bei der Entlohnung. Dies führt dazu, dass der Arbitrageur im Sinne der Zielfunktion und seiner Entlohnung im Zeitpunkt $t = 2$ bei Eintritt von Zustand Z_1 teilweise Preise $p_{21} > V$ in Kauf nimmt, obwohl der Investor dadurch finanziell geschädigt wird.[1]

Eine Möglichkeit zur Modellerweiterung besteht somit in der Anpassung der Zielfunktion des Arbitrageurs, um eine finanzielle Schädigung des Investors zu vermeiden. Eine Begrenzung des Preises in Form von $p_{21} \leq V$ kann meiner Meinung nach modelltechnisch jedoch ebenso wenig gerechtfertigt werden wie die Forderung $F_{21} < S_{21}$ nach (2.17). Weitere Anpassungsmöglichkeiten bestehen in der Möglichkeit eines Zuflusses von Mitteln bei einer negativen Wertentwicklung und eines Abzuges von Mitteln bei einer positiven Wertentwicklung, wie es beispielsweise für einen Parameter a im Bereich $0 < a < 1$ nach Satz 24 der Fall ist. Zusätzlich könnte der Arbitrageur noch über die in Abschnitt 2.1.3 erwähnte „borrowing capacity" verfügen, welche bisher nicht konkret modelliert wurde. Ebenso könnten Kapitalkosten in Form eines risikolosen Zinssatzes größer als 0% pro Periode sowie andere Risikoeinstellungen wie Risikoaversion und Risikofreude berücksichtigt werden.

Die interessanteste Erweiterungsmöglichkeit besteht meiner Meinung nach jedoch darin, das Modell aus spieltheoretischen Gesichtspunkten zu betrachten.[2] Beispielsweise könnten zwei Arbitrageure in dem speziellen Marktsegment miteinander konkurrieren. Ebenso sind zwei Investoren mit unterschiedlichen Update-Funktionen vorstellbar. Die Spieltheorie bietet meiner Meinung nach hier die beste Möglichkeit einer Erweiterung, insbesondere auch in Bezug auf weitere ökonomische Erkenntnisse.

[1]Hierbei handelt es sich um ein klassisches „Principal-agent problem". Einen guten Überblick zur Prinzipal-Agent-Theorie liefert Pratt/Zeckhauser (1985).

[2]Einen guten Überblick zur Spieltheorie liefert Rasmusen (2007).

Anhang

Anhang A

Nebenrechnungen

Dieser Anhang enthält Nebenrechnungen des Abschnitts 3.2, welche zur besseren Lesbarkeit entsprechend ausgegliedert wurden.

A.1 Bestimmung von $x_0(\bar{x})$

Die Grundlage zur Bestimmung der Nullstelle bildet die zusammengesetzte Update-Funktion $G_{\bar{x}}(x)$ nach (3.12) mit $\bar{x} \geq 1$. Es trifft $x_0(\bar{x}) < 1$ zu.[1] Somit ist der konkave Abschnitt der zusammengesetzten Funktion mit $G_{\bar{x}}(x) = (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3$ relevant. Mit $G_{\bar{x}}(x) \stackrel{!}{=} 0$ folgt:[2]

$$\begin{aligned}
& (x-\bar{x})^3 + x - (1-\bar{x})^3 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x^3 - 3\bar{x}x^2 + 3\bar{x}^2x - \bar{x}^3) + x - (1 - 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 - \bar{x}^3) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 - 3\bar{x}x^2 + (3\bar{x}^2 + 1)\cdot x + (3\bar{x} - 3\bar{x}^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0. \qquad (A.1)
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten betragen somit $c_1 = 1$, $c_2 = -3\bar{x}$, $c_3 = 3\bar{x}^2 + 1$ und $c_4 = 3\bar{x} - 3\bar{x}^2 - 1$. Daraus lassen sich die Hilfsvariablen h_1 und h_2 berechnen. Es gilt

$$h_1 = \frac{c_3}{c_1} - \frac{{c_2}^2}{3{c_1}^2} = 3\bar{x}^2 + 1 - \frac{(-3\bar{x})^2}{3} = 3\bar{x}^2 + 1 - 3\bar{x}^2 = 1. \qquad (A.2)$$

[1] Vgl. Beweis zu Satz 39.

[2] Die Berechnung von $x_0(\bar{x})$ orientiert sich an Bronstein et al. (2008), S. 40f.

Die Hilfsvariable h_2 ergibt sich konkret als

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{2{c_2}^3}{27{c_1}^3} - \frac{c_2 c_3}{3{c_1}^2} + \frac{c_4}{c_1} \\ &= \frac{2\cdot(-3\bar{x})^3}{27} - \frac{(-3\bar{x})\cdot(3\bar{x}^2+1)}{3} + 3\bar{x} - 3\bar{x}^2 - 1 \\ &= -2\bar{x}^3 + 3\bar{x}^3 + \bar{x} + 3\bar{x} - 3\bar{x}^2 - 1 \\ &= \bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 1. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Mit h_1 und h_2 lässt sich die Diskriminante D bestimmen. Es gilt

$$D = \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 1\right)^2 + \frac{1}{27} > 0. \tag{A.4}$$

Da die Diskriminante unabhängig von der konkreten Konstanten $\bar{x}$ positiv ist, ergibt sich genau eine reelle Lösung $x_0(\bar{x})$. Diese reelle Lösung besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} x_0(\bar{x}) &= \left(-\frac{h_2}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{h_2}{2} - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{c_2}{3c_1} \\ &= \left(-\frac{h_2}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{h_2}{2} - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} + \bar{x}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Für $\bar{x} = 1$ muss die Bedingung $G_1(x) = (x-1)^3 + x = x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \overset{!}{=} 0$ zutreffen. Mit $c_1 = 1$, $c_2 = -3$, $c_3 = 4$ und $c_4 = -1$ folgt $h_2 = 1$ sowie $D = \frac{31}{108}$. Als Lösung ergibt sich

$$x_0(1) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0,317672. \tag{A.6}$$

Im Beweis von Satz 47 ist die Lösung der Gleichung $\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 3 = 0$ zu bestimmen. Mit $c_1 = 1$, $c_2 = -3$, $c_3 = 4$ und $c_4 = -3$ folgt $h_1 = 1$, $h_2 = -1$ sowie $D = \frac{31}{108}$. Als Lösung ergibt sich

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 = 1,682328. \tag{A.7}$$

A.2 Nebenrechnung zum Beweis von Satz 44

Zu zeigen: $(x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3 < (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - x) \cdot (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_* + \bar{x} - 1 - x) > 0$$

$$
\begin{aligned}
& (x - \bar{x})^3 + x - (1 - \bar{x})^3 > (x - \bar{x}_*)^3 + x - (1 - \bar{x}_*)^3 \\
\Leftrightarrow\quad & x^3 - 3\bar{x}x^2 + 3\bar{x}^2 x - \bar{x}^3 + x - (1 - 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 - \bar{x}^3) \\
>\quad & x^3 - 3\bar{x}_* x^2 + 3\bar{x}_*^2 x - \bar{x}_*^3 + x - (1 - 3\bar{x}_* + 3\bar{x}_*^2 - \bar{x}_*^3) \\
\Leftrightarrow\quad & -3\bar{x}x^2 + 3\bar{x}^2 x + 3\bar{x} - 3\bar{x}^2 > -3\bar{x}_* x^2 + 3\bar{x}_*^2 x + 3\bar{x}_* - 3\bar{x}_*^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot x^2 + (\bar{x}^2 - \bar{x}_*^2) \cdot x + \bar{x} - \bar{x}_* + \bar{x}_*^2 - \bar{x}^2 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot x^2 + (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (-1) + (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) \cdot (-x) + (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (x^2 - 1) + (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) \cdot (1 - x) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (-1) \cdot (1 - x^2) + (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) \cdot (1 - x) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (-1) \cdot (1 + x) \cdot (1 - x) + (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) \cdot (1 - x) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1 - x) \cdot [(\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (-1) \cdot (1 + x) + \bar{x}_*^2 - \bar{x}^2] > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1 - x) \cdot [(\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (-1) \cdot (1 + x) + (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_* + \bar{x})] > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1 - x) \cdot (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot [(-1) \cdot (1 + x) + \bar{x}_* + \bar{x}] > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1 - x) \cdot (\bar{x}_* - \bar{x}) \cdot (\bar{x}_* + \bar{x} - 1 - x) > 0
\end{aligned}
$$

Anhang B

Beweise

Dieser Anhang enthält Beweise des Abschnitts 3.3, welche in der Beweisführung mit bereits zuvor in diesem Abschnitt geführten Beweisen übereinstimmen. Die Abweichungen beruhen zum größten Teil auf abgeänderten Relationen. Zusätzlich findet sich in Abschnitt B.6 noch ein alternativer Beweis zu Satz 74 aus Abschnitt 4.1.2.1.

B.1 Beweis zu Satz 55

Die Argumentation verläuft zunächst analog zum Beweis von Satz 54 und dann analog zum Beweis von Satz 53. Abweichend wird hier jedoch Dominanz im Sinne von Definition 2 zwischen einer linearen und einer streng konvexen Update-Funktion und nicht zwischen einer linearen und einer streng konkaven Update-Funktion überprüft.

Bei der streng konvexen Update-Funktion $G(x)$ liegen die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = 1$ und $x = x_U > 1$ unterhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(1)$ und $G(x_U)$.[1] Für die lineare Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a} = (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$, welche mit dieser Verbindungsgeraden identisch ist, gilt für x im Bereich $1 < x < x_U$ somit die Ungleichung $\hat{G}(x) > G(x)$.[2] Die beiden Update-Funktionen schneiden sich nur an den Stellen $x = 1$ und $x = x_U$. Sowohl für $x < 1$ als auch für $x > x_U$ gilt folglich $\hat{G}(x) < G(x)$. Da mit $\hat{G}(x) < G(x)$ für $x > x_U$ die

[1] Mit der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $G(1)$ und $G(x_U)$ sind hier analog zur Verbindungsgeraden im konkaven Fall sämtliche Linearkombinationen der Funktionswerte $G(1)$ und $G(x_U)$ mit $h \cdot G(1) + (1 - h) \cdot G(x_U)$ mit $0 \leq h \leq 1$ gemeint. Da die Update-Funktion streng konvex ist, gilt im entsprechenden Bereich die Ungleichung $G(h \cdot 1 + (1 - h) \cdot x_U) < h \cdot G(1) + (1 - h) \cdot G(x_U)$ für $0 < h < 1$. Vgl. Kaballo (2000), S. 161.

[2] Mit Satz 20 und $\hat{G}(x_U) = G(x_U)$ gilt $G(x_U) = \hat{a}x_U + 1 - \hat{a} \Leftrightarrow \hat{a} = (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$.

Bedingung (2) von Definition 2 verletzt ist, wird die konvexe Update-Funktion $G(x)$ somit nur für x im Bereich $\hat{x}_0 \leq x \leq x_U$ von der linearen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit Parameter $\hat{a} = (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$ im Sinne von Definition 2 dominiert.

Analog zum Beweis von Satz 53 folgt mit Satz 52 die Dominanz nach Definition 2 für alle linearen Update-Funktionen $\hat{G}(x)$ mit $\hat{a} \geq (G(x_U) - 1) \cdot (x_U - 1)^{-1}$. □

B.2 Beweis zu Satz 56

Die Argumentation verläuft zunächst analog zum Beweis von Satz 53 und dann analog zum Beweis von Satz 54. Abweichend wird hier jedoch Dominanz im Sinne von Definition 2 zwischen einer linearen und einer streng konvexen Update-Funktion und nicht zwischen einer linearen und einer streng konkaven Update-Funktion überprüft.

Bei der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ liegen die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = \hat{x}_0$ und $x = 1$ unterhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $\hat{G}(\hat{x}_0)$ und $\hat{G}(1)$.[3] Diese Verbindungsgerade entspricht mit $\hat{x}_0 = x_0$ der linearen Update-Funktion $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$ nach Satz 20. Mit $x_0 = \hat{x}_0$ ist $G(\hat{x}_0) = 0 \Leftrightarrow a\hat{x}_0 + 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = (1 - \hat{x}_0)^{-1}$. Für x im Bereich $\hat{x}_0 = x_0 < x < 1$ trifft folglich $\hat{G}(x) < G(x)$ zu. Da sich beide Update-Funktionen an der Stelle $x = 1$ schneiden, gilt entsprechend $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x > 1$.

Analog zum Beweis von Satz 54 folgt mit Satz 52 die Dominanz nach Definition 2 für alle linearen Update-Funktionen $G(x)$ mit $a \leq (1 - \hat{x}_0)^{-1}$. □

B.3 Beweis zu Satz 61

Die Argumentation verläuft analog zum Beweis von Satz 49. Nach Definition 3 muss nun allerdings $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ gelten, so dass die Beweisführung entsprechend angepasst werden muss.

Nach (2.26) gilt im Fall $G(x) > 0$ und somit für $x > x_0$ bezüglich des Mittelzuflusses bzw. Mittelabflusses die Gleichung $\Delta F = F_1 \cdot (G(x) - x)$.[4] Für $x > 1$ ergibt sich ein Mittelzufluss und es gilt $G(x) > x$.[5] Mit $\hat{G}(x) \geq G(x)$ für $x > 1$ nach Definition 3 ist der

[3] Vgl. dazu auch Fußnote 1, Anhang B, S. 271.

[4] Analog gilt für die Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Gleichung $\Delta F = F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x)$ für $x > \hat{x}_0$.

[5] Vgl. Beweis zu Satz 28. Für $x > 1$ folgt entsprechend auch $\hat{G}(x) > x$.

Mittelzufluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mindestens genauso groß wie der Mittelzufluss in Verbindung mit $G(x)$, da $F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x) \geq F_1 \cdot (G(x) - x) > 0$ gilt. Für x im Bereich $x_0 < x < 1$ ergibt sich ein Mittelabfluss und es gilt $G(x) < x$.[6] Nach Definition 3 gilt $\hat{G}(x) \geq G(x)$ auch in diesem Bereich. Demnach ist der Mittelabfluss in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ hier betragsmäßig höchstens genauso groß wie der Mittelabfluss in Verbindung mit $G(x)$, da mit $\hat{x}_0 \leq x_0$ nach Satz 60 entsprechend $F_1 \cdot (G(x) - x) \leq F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x) < 0$ zutrifft.

Nach (2.27) tritt im Fall $G(x) \leq 0$ und somit für $x \leq x_0$ immer ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$ auf. Für $\hat{G}(x) \leq 0$ und somit für $x \leq \hat{x}_0$ ergibt sich ein vollständiger Mittelabzug in gleicher Höhe. Nach Satz 60 folgt mit $\hat{G}(x_0) \geq G(x_0) = 0$ die Relation $\hat{x}_0 \leq x_0$. Gilt $\hat{x}_0 < x_0$, dann ergibt sich im Bereich $\hat{x}_0 < x \leq x_0$ in Verbindung mit der Update-Funktion $\hat{G}(x)$ ein Mittelabfluss in Höhe von $\Delta F = F_1 \cdot (\hat{G}(x) - x) = F_1 \cdot \hat{G}(x) - F_1 x > -F_1 x$. Da für diesen Mittelabfluss $\Delta F = F_1 \cdot \hat{G}(x) - F_1 x < 0$ zutrifft, ist der vollständige Mittelabzug $\Delta F = -F_1 x < 0$ in Verbindung mit der Update-Funktion $G(x)$ im Bereich $\hat{x}_0 < x \leq x_0$ betragsmäßig größer. Gilt $\hat{x}_0 = x_0$, dann ergibt sich für $x \leq \hat{x}_0 = x_0$ ein vollständiger Mittelabzug in Höhe von $\Delta F = -F_1 x$, welcher in diesem Bereich unabhängig von der jeweils konkreten Update-Funktion und somit für beide Update-Funktionen identisch ist. □

B.4 Beweis zu Satz 66

Die Argumentation verläuft analog zum Beweis von Satz 64. Abweichend wird hier jedoch Dominanz im Sinne von Definition 3 zwischen einer linearen und einer streng konvexen Update-Funktion und nicht zwischen einer linearen und einer streng konkaven Update-Funktion überprüft.

Die Tangente in x_T an den Graphen $\hat{G}(x)$ besitzt auch hier allgemein die Gestalt $T_{x_T}(x) = \hat{G}(x_T) + \hat{G}'(x_T) \cdot (x - x_T)$.[7] Da die Tangente an den Graphen einer streng konvexen Funktion unterhalb dieses Graphen verläuft, gilt $\hat{G}(x) > T_{x_T}(x)$ für $x \neq x_T$.[8] Mit $x_T = 1$ und $\hat{G}(1) = 1$ ergibt sich $\hat{G}(x) > 1 + \hat{G}'(1) \cdot (x - 1) = \hat{G}'(1) \cdot x + 1 - \hat{G}'(1)$

[6] Vgl. Beweis zu Satz 28. ΔF ist in diesem Fall negativ. Analog gilt $\hat{G}(x) < x$ für $\hat{x}_0 < x < 1$.

[7] Vgl. Kaballo (2000), S. 145.

[8] An der Stelle $x = x_T$ trifft $T_{x_T}(x_T) = \hat{G}(x_T)$ zu. Mit $h > 0$ folgt wegen der strengen Konvexität $\hat{G}'(x_T) > (\hat{G}(x_T) - \hat{G}(x_T - h))/(x_T - (x_T - h)) \Leftrightarrow \hat{G}(x_T - h) > \hat{G}(x_T) - h \cdot \hat{G}'(x_T) = T_{x_T}(x_T - h)$ und somit $\hat{G}(x) > T_{x_T}(x)$ für $x < x_T$. Analog gilt $\hat{G}'(x_T) < (\hat{G}(x_T + h) - \hat{G}(x_T))/(x_T + h - x_T) \Leftrightarrow \hat{G}(x_T + h) > \hat{G}(x_T) + h \cdot \hat{G}'(x_T) = T_{x_T}(x_T + h)$, woraus $\hat{G}(x) > T_{x_T}(x)$ auch für $x > x_T$ resultiert.

für $x \neq 1$. Da die Tangente eine Gerade ist und die Update-Funktion $\hat{G}(x)$ mit der Tangente $T_1(x)$ an der Stelle $x = 1$ übereinstimmt, stellt diese Tangente selbst eine lineare Update-Funktion nach Satz 20 dar.[9] Mit $G(x) = T_1(x) = \hat{G}'(1) \cdot x + 1 - \hat{G}'(1)$ gilt die Ungleichung $\hat{G}(x) > G(x)$ für $x \neq 1$. Das bedeutet, die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit Parameter $a = \hat{G}'(1)$ wird von der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ im Bereich $x \geq x_0$ im Sinne von Definition 3 dominiert. □

B.5 Beweis zu Satz 67

Die Argumentation verläuft analog zum Beweis von Satz 65. Anstelle der dort dominierten streng konkaven Update-Funktion wird hier allerdings eine dominierende streng konvexe Update-Funktion herangezogen.

Für jede lineare Update-Funktion muss $G(1) = 1$ gelten. Nach Satz 66 berührt die lineare Update-Funktion $G(x)$ nach Satz 20 mit $a = \hat{G}'(1)$ die streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ nach Definition 1 an der Stelle $x = 1$. Somit schneidet jede andere lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a > \hat{G}'(1)$ die streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ an der Stelle $x = 1$ und, falls $\hat{G}'(x) > a$ für $x > 1$ möglich ist, an einer weiteren Stelle $x_U > 1$. Für x im Bereich $x_0 \leq x < 1$ und für $x > x_U$ gilt dann zwar weiterhin $\hat{G}(x) > G(x)$. Für jede positive relative Wertentwicklung x im Bereich $1 < x < x_U$ trifft nun allerdings $G(x) > \hat{G}(x)$ zu, da bei der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Funktionswerte zwischen den Stellen $x = 1$ und $x = x_U$ unterhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $\hat{G}(1)$ und $\hat{G}(x_U)$ liegen.[10] Existiert kein zweiter Schnittpunkt $x_U > 1$, dann gilt sogar $G(x) > \hat{G}(x)$ für $x > 1$. Folglich liegt für $a > \hat{G}'(1)$ im Bereich $x \geq x_0$ keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor.

Analog schneidet eine lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a < \hat{G}'(1)$ die streng konvexe Update-Funktion $\hat{G}(x)$ an der Stelle $x = 1$ und gegebenenfalls an einer weiteren Stelle $x_D < 1$. Liegt diese Stelle x_D im Bereich $\hat{x}_0 < x_D < 1$, dann gilt für x im Bereich $x_0 \leq x < x_D$ und für $x > 1$ zwar weiterhin $\hat{G}(x) > G(x)$. Für jede negative relative Wertentwicklung x im Bereich $x_D < x < 1$ trifft jedoch $G(x) > \hat{G}(x)$ zu, da bei der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ die Funktionswerte zwischen den Stellen

[9] Die lineare Update-Funktion hat nach Satz 20 die Gestalt $G(x) = ax + 1 - a$ mit $a > 1$. Mit $a = \hat{G}'(1)$ ergibt sich die rechte Seite der Ungleichung und somit genau die Tangente. Es gilt $\hat{G}'(1) > 1$, da nach Definition 1 für alle $x > 0$ die Anforderung $\hat{G}'(x) > 1$ erfüllt sein muss.

[10] Die Verbindungsgerade entspricht hier genau der linearen Update-Funktion $G(x)$. Zu Verbindungsgeraden bei streng konvexen Update-Funktionen vgl. Fußnote 1, Anhang B, S. 271.

$x = x_D$ und $x = 1$ wiederum unterhalb der Verbindungsgeraden der beiden Funktionswerte $\hat{G}(x_D)$ und $\hat{G}(1)$ liegen.[11] Im Fall $x_D = \hat{x}_0$ ergibt sich die Verbindungsgerade $G(x)$ mit $a = (1 - \hat{x}_0)^{-1}$, bei welcher für x im Bereich $x_D = \hat{x}_0 = x_0 < x < 1$ die Ungleichung $\hat{G}(x) < G(x)$ zutrifft.[12] Für $x > 1$ gilt jedoch $\hat{G}(x) > G(x)$. Somit liegt auch für $a < \hat{G}'(1)$ und x_D im Bereich $\hat{x}_0 \leq x_D < 1$ im Bereich $x \geq x_0$ keine Dominanz im Sinne von Definition 3 vor.

Gilt $x_D < \hat{x}_0$ oder liegt sogar kein weiterer Schnittpunkt $x_D < 1$ mehr vor, dann ist dies gleichbedeutend mit $a < (1 - \hat{x}_0)^{-1}$. Nach Satz 52 dominiert die lineare Update-Funktion $G(x)$ mit $a = (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ jede andere lineare Update-Funktion mit einem kleineren Parameter als a im Sinne von Definition 2. Die Funktionswerte dieser anderen linearen Update-Funktion sind für x im Bereich $x_0 < x < 1$ größer als die Funktionswerte von $G(x)$ und somit auch größer als die Funktionswerte der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$. Im Bereich $x > 1$ sind die Funktionswerte dieser anderen linearen Update-Funktion kleiner als die Funktionswerte von $G(x)$ und daher auch kleiner als die Funktionswerte von $\hat{G}(x)$.[13] Demnach besteht zwischen einer linearen Update-Funktion mit $a < (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ und der streng konvexen Update-Funktion $\hat{G}(x)$ ebenfalls keine Dominanz im Sinne von Definition 3.[14] □

B.6 Alternativer Beweis zu Satz 74

Der etwas formalere Beweis kann alternativ als Beweis zu Satz 74 verwendet werden.

Durch Einsetzen von $a = 1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1}$ in die Gleichung $\Gamma_{p_{21}}$ nach (4.21) ergibt sich der Zähler des zweiten Faktors des Preises p_{21} nach Gleichung (4.7) als

$$\begin{aligned}
\Gamma_{p_{21}}(D_1) &= V - S_{21} + F_1 - D_1 \cdot \left(1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1}\right) \\
&= \frac{(V - S_{21} + F_1 - D_1) \cdot (S_{21} - S_1 + F_1) - D_1 V + D_1 S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1} \\
&= \frac{(S_{21} - S_1) \cdot (V - S_{21}) + (V - S_1 + F_1) \cdot (F_1 - D_1)}{S_{21} - S_1 + F_1}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

[11] Die Verbindungsgerade entspricht auch hier genau der linearen Update-Funktion $G(x)$.
[12] Vgl. Beweis zu Satz 56.
[13] Vgl. Beweis zu Satz 52.
[14] Gilt $a < \hat{G}'(1)$ und existiert kein Schnittpunkt x_D im Bereich $\hat{x}_0 \leq x_D < 1$, dann ist letztendlich irrelevant, ob der Schnittpunkt noch im für x zulässigen Bereich $x > 0$ liegt, da in einem derartigen Fall immer $a < (1 - \hat{x}_0)^{-1}$ zutrifft und somit auf Satz 52 zurückgegriffen werden kann.

Durch Einsetzen von $a = 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$ in die Gleichung $\Psi_{p_{21}}$ nach (4.22) ergibt sich der Nenner des zweiten Faktors des Preises p_{21} nach Gleichung (4.7) als

$$\begin{aligned}\Psi_{p_{21}}(D_1) &= V - S_1 + D_1 \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{V - S_{21}}{S_{21} - S_1 + F_1}\right)\right) \\ &= \frac{(V - S_1) \cdot (S_{21} - S_1 + F_1) - D_1 \cdot (V - S_{21})}{S_{21} - S_1 + F_1} \\ &= \frac{(S_{21} - S_1) \cdot (V - S_1 + D_1) + (V - S_1) \cdot (F_1 - D_1)}{S_{21} - S_1 + F_1}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Unter Berücksichtigung von (B.1) und (B.2) ergibt sich für den Preis p_{21} nach Gleichung (4.7) hier

$$p_{21} = (V - S_1 + D_1) \cdot \frac{(S_{21} - S_1) \cdot (V - S_{21}) + (V - S_1 + F_1) \cdot (F_1 - D_1)}{(S_{21} - S_1) \cdot (V - S_1 + D_1) + (V - S_1) \cdot (F_1 - D_1)} \tag{B.3}$$

Mit $D_1 = F_1$ folgt direkt $p_{21} = V - S_{21}$ und somit der vollständige Mittelabzug. □

Anhang C

Der Preis p_{21} (lineare Update-Funktionen)

Nach Gleichung (4.6) bzw. Gleichung (4.7) ergibt sich der Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 als

$$p_{21} = \frac{(V - S_1 + D_1) \cdot (V - S_{21} + F_1 - aD_1)}{V - S_1 + D_1 - aD_1}. \tag{C.1}$$

D_1 ist in Gleichung (C.1) die einzige Entscheidungsvariable. Daher beziehen sich die folgenden Untersuchungen auf die Veränderungen dieser Entscheidungsvariable D_1. Der Preis p_{21} unterliegt gewissen Restriktionen. Ist der vollständige Mittelabzug ausgeschlossen, dann besitzt die obige Gleichung (C.1) Gültigkeit für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$. Erfolgt ein vollständiger Mittelabzug für D_1 mit $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$, dann besitzt Gleichung (C.1) nur Gültigkeit für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq \overline{D}_1$.[1] Im Folgenden wird $a > 1$ angenommen. Der Sonderfall $a = 1$ wird in Abschnitt C.4 behandelt. Bei der obigen Funktion für den Preis p_{21} handelt es sich für $a > 1$ um eine gebrochen rationale Funktion.[2] Daher muss bei den Nullstellen zwischen zwei Fällen unterschieden werden.

[1] Für $D_1 = \overline{D}_1$ ergibt sich nach Gleichung (C.1) ein Preis $p_{21} = V - S_{21}$. Daher ist die Grenze $D_1 = \overline{D}_1$ hier noch zulässig zur Berechnung von p_{21}.

[2] Im Fall $a = 1$ vereinfacht sich der Nenner in (C.1) zu $V - S_1$ und es handelt sich nicht mehr um eine gebrochen rationale Funktion. Vgl. dazu Abschnitt C.4.

C.1 Nullstellen und Spezialfall

Stimmt die Nullstelle des Nenners in (C.1) nicht mit einer Nullstelle des Zählers in (C.1) überein, dann besitzt die Funktion für den Preis p_{21} genau zwei Nullstellen:[3] $D_1 = S_1 - V$ und $D_1 = \frac{V-S_{21}+F_1}{a}$. Mit $S_1 < V$ nach (2.8) ist die erste Nullstelle negativ und demnach für die weitere Betrachtung irrelevant. Auch die zweite, durch $S_{21} < V$ nach (2.18) und durch $a > 1$ positive Nullstelle ist hier nur indirekt von Bedeutung, da $p_{21} \geq V - S_{21}$ nach (2.21) gelten muss. Für $a > 1$ besitzt der Preis p_{21} an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1} > 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel.[4] Folglich ist die Funktion für den Preis p_{21} an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ nicht definiert.

Stimmt die Nullstelle des Nenners in (C.1) mit einer Nullstelle des Zählers in (C.1) überein, dann besitzt die Funktion für den Preis p_{21} nur eine Nullstelle $D_1 = S_1 - V$ und an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ eine Definitionslücke. Außerdem ist die Funktion des Preises p_{21} in diesem Fall linear in D_1. Dies kann mit Hilfe der Nullstellenform des Preises p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 erklärt werden, welche lautet:

$$p_{21} = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{(D_1 - (S_1 - V)) \cdot \left(D_1 - \frac{V-S_{21}+F_1}{a}\right)}{D_1 - \frac{V-S_1}{a-1}}. \tag{C.2}$$

Die erste Nullstelle des Zählers $D_1 = S_1 - V$ stimmt nur dann mit der Nullstelle des Nenners überein, wenn $a = 0$ zutrifft.[5] Mit $a > 1$ ist dies folglich im Rahmen des Modells ausgeschlossen. Die zweite Nullstelle des Zählers $D_1 = \frac{V-S_{21}+F_1}{a}$ stimmt nur dann mit der Nullstelle des Nenners überein, wenn $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ Gültigkeit besitzt.[6] Für $S_{21} \geq S_1$ ist ein derartiger Parameter a im Rahmen des Modells durch Bedingung (4.25) ausgeschlossen.[7] Für $S_{21} < S_1$ ist so ein Parameter a zwar möglich, allerdings befindet sich die Definitionslücke dann außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$.[8] Trotzdem ist der Preis p_{21} im Fall $S_{21} < S_1$ und $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ dann linear in D_1 und für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ ergibt sich

$$p_{21} = \frac{a}{a-1} \cdot D_1 + \frac{a}{a-1} \cdot (V - S_1)\,. \tag{C.3}$$

[3] Dies sind genau die Nullstellen des Zählers in (C.1).
[4] Diese Stelle entspricht der Nullstelle des Nenners in (C.1).
[5] Es gilt: $S_1 - V = \frac{V-S_1}{a-1} \Leftrightarrow a \cdot (S_1 - V) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
[6] Es gilt: $\frac{V-S_{21}+F_1}{a} = \frac{V-S_1}{a-1} \Leftrightarrow a \cdot (S_1 - S_{21} + F_1) = V - S_{21} + F_1 \Leftrightarrow a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$.
[7] Vgl. dazu Tabelle 4.4, S. 177. Mit $S_{21} = S_1$ sind (4.25) und (4.10) identisch.
[8] Mit $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ gilt $\frac{V-S_1}{a-1} = S_1 - S_{21} + F_1 > F_1$ für $S_{21} < S_1$.

Im Spezialfall $S_{21} < S_1$ und $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ ergibt sich somit nur eine Nullstelle $D_1 = S_1 - V$ und der Preis p_{21} wird innerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches maximal für $D_1 = F_1$. In allen anderen im Rahmen des Modells zulässigen Fällen mit $a > 1$ tritt an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ ein Pol mit Vorzeichenwechsel auf.

C.2 Pol mit Vorzeichenwechsel

Der Pol mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ bzw. die Nullstelle des Nenners liegt jedoch auch bei allen anderen im Rahmen des Modells zulässigen Fällen mit $a > 1$ entweder außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$ oder außerhalb des für die Gleichung von p_{21} für D_1 gültigen Bereiches $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$: Die Gleichung für die Nullstelle des Nenners aufgelöst nach dem Parameter a ergibt $a = 1 + \frac{V-S_1}{D_1}$. Mit steigendem $D_1 > 0$ wird der Bruch kleiner, so dass sich der kleinste Parameter a für $a = 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ ergibt. Für $S_{21} \leq S_1$ ist ein derartiger Parameter a im Rahmen des Modells ausgeschlossen und die Polstelle liegt außerhalb des für D_1 zulässigen Bereiches $0 \leq D_1 \leq F_1$.[9] Für $S_{21} > S_1$ ist ein Parameter $a = 1 + \frac{V-S_1}{F_1}$ zulässig. Für diesen Parameter trifft dann aber auch $a > 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$ zu und Bedingung (4.15) ist verletzt.[10] Das bedeutet, es existiert eine Grenze $\overline{D}_1 < F_1$ und für $D_1 \geq \overline{D}_1$ erfolgt ein vollständiger Mittelabzug. Da für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ für den Preis p_{21} immer $p_{21} > V - S_{21}$ zutrifft und es sich um einen Pol mit Vorzeichenwechsel handelt, muss für die Polstelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1} > \overline{D}_1$ gelten.

Modelltechnisch bereitet der Pol mit Vorzeichenwechsel an der Stelle $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ und somit die Nullstelle des Nenners in (C.1) durch die entsprechenden Restriktionen keine Schwierigkeiten. Da jedoch bis auf den einen Spezialfall eine solche Polstelle immer existiert, stellt sich die Frage, inwieweit der Preis p_{21} für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ ein lokales Extremum annimmt.

C.3 Lokale Extrema

Zur weiteren Analyse wird nun wieder Gleichung (C.1) herangezogen. Die erste Ableitung von p_{21} nach D_1 ergibt sich als

[9] Vgl. dazu Tabelle 4.4, S. 177.

[10] Mit $S_{21} > S_1$ gilt $a = 1 + \frac{V-S_1}{F_1} > 1 + \frac{V-S_{21}}{F_1} > 1 + \frac{V-S_{21}}{S_{21}-S_1+F_1}$. Vgl. auch Anmerkungen zu Bedingung (4.15).

$$\frac{d\,p_{21}}{d\,D_1} = a \cdot \frac{(a-1)\cdot D_1^2 - 2D_1\cdot(V-S_1) - (S_{21}-S_1-F_1)\cdot(V-S_1)}{(V-S_1+D_1-aD_1)^2}. \qquad (C.4)$$

Zur Bestimmung der lokalen Extrema muss die erste Ableitung von p_{21} bzw. der Zähler in (C.4) gleich null gesetzt werden. Aufgelöst nach D_1 ergibt sich

$$D_1 = \frac{V-S_1}{a-1} \pm \sqrt{\left(\frac{V-S_1}{a-1}\right)^2 + \frac{(S_{21}-S_1-F_1)\cdot(V-S_1)}{a-1}}. \qquad (C.5)$$

Der Ausdruck vor der Wurzel in (C.5) entspricht genau der Stelle, an welcher der Pol mit Vorzeichenwechsel liegt. Da nach den obigen Ausführungen Gleichung (C.1) nur für Investments D_1 definiert ist, die kleiner als $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$ sind, ist im Rahmen des Modells nur das lokale Extremum interessant, welches kleiner als die Polstelle ist. Zu untersuchen ist demnach das lokale Extremum an der Stelle

$$D_1 = \frac{V-S_1}{a-1} - \sqrt{\left(\frac{V-S_1}{a-1}\right)^2 + \frac{(S_{21}-S_1-F_1)\cdot(V-S_1)}{a-1}}. \qquad (C.6)$$

Der zweite Summand unter der Wurzel in (C.6) ist gleich null, wenn $F_1 = S_{21} - S_1$ zutrifft.[11] Tritt dieser Fall auf, dann liegt das lokale Extremum genau an der Stelle $D_1 = 0$. Für $F_1 < S_{21} - S_1$ ist der zweite Summand positiv und das lokale Extremum liegt an einer Stelle $D_1 < 0$.[12] Das bedeutet, nur im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ ist der zweite Summand negativ und das lokale Extremum liegt im Bereich $D_1 > 0$. Kein Extremum liegt vor, wenn der gesamte Ausdruck unter der Wurzel in (C.6) negativ ist. Da der erste Summand unter der Wurzel immer positiv ist, ist der Fall der Nicht-Existenz eines Extremums nur für $F_1 > S_{21} - S_1$ möglich. Für einen positiven Ausdruck unter der Wurzel muss $(V - S_1) \cdot ((V - S_1) + (S_{21} - S_1 - F_1) \cdot (a - 1)) > 0$ gelten. Mit $S_1 < V$ nach (2.8) vereinfacht sich die Bedingung zu $a \cdot (S_{21} - S_1 - F_1) > S_{21} - S_1 - F_1 + S_1 - V$ und durch $F_1 > S_{21} - S_1$ resultiert daraus letztlich $a < 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$. Erfüllt der Parameter a diese Bedingung, dann ergibt sich im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ ein lokales Extremum. Diese Bedingung für den Parameter a entspricht hier genau der Bedingung (4.25), welche zur Gewährleistung sinnvoller

[11] Mit $S_1 < V$ nach (2.8) nimmt der zweite Summand nur dann den Wert null an, wenn gilt: $S_{21} - S_1 - F_1 = 0 \Leftrightarrow F_1 = S_{21} - S_1$.

[12] Mit $a > 1$ und $S_1 < V$ nach (2.8) sind sowohl $a - 1$ als auch $V - S_1$ immer positiv. Somit ist das Vorzeichen des zweiten Summanden abhängig vom Faktor $S_{21} - S_1 - F_1$. Es gilt $S_{21} - S_1 - F_1 > 0 \Leftrightarrow F_1 < S_{21} - S_1$.

Ergebnisse im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} \geq S_1$ immer erfüllt sein muss.[13] Im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} < S_1$ muss zur Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse Bedingung (4.8) erfüllt sein. Diese schränkt jedoch den Parameter a nicht so stark ein wie die Bedingung (4.25).[14] Folglich ist es bei dieser Kombination möglich, dass für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ kein lokales Extremum existiert. Für $a < 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ liegt auch bei dieser Kombination für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ ein lokales Extremum vor. Für $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ ergibt sich für p_{21} der Spezialfall nach Gleichung (C.3). Das bedeutet, der Preis ist linear in D_1 und wird maximal für $D_1 = F_1$. Für $a > 1+\frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ unter Einhaltung von Bedingung (4.8) liegt kein lokales Extremum vor.

C.3.1 Lokales Maximum

Inwiefern es sich bei dem lokalen Extremum nach (C.6) um ein lokales Maximum handelt, kann mit Hilfe der zweiten Ableitung von p_{21} nach D_1 überprüft werden. Diese lautet:

$$\frac{d^2\, p_{21}}{d\, D_1^2} = -\frac{2a \cdot (V - S_1) \cdot ((a-1) \cdot (S_{21} - S_1 - F_1) + V - S_1)}{(V - S_1 + D_1 - aD_1)^3}. \tag{C.7}$$

Das lokale Extremum nach (C.6) liegt an einer Stelle kleiner als $D_1 = \frac{V-S_1}{a-1}$. Folglich ist der Nenner in (C.7) für dieses Extremum positiv. Der Zähler ist unabhängig von D_1. Daher besitzt der Funktionsverlauf des Preises p_{21} insbesondere für $D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ keine Wendestellen. Da vor dem gesamten Ausdruck ein Minuszeichen steht, liegt an der Stelle D_1 nach (C.6) ein lokales Maximum vor, wenn der Zähler in (C.7) positiv ist. Mit $a > 1$ und $S_1 < V$ nach (2.8) ist das Produkt $2a \cdot (V - S_1)$ immer positiv, so dass $(a-1) \cdot (S_{21} - S_1 - F_1) + V - S_1 > 0$ überprüft werden muss. Im Fall $F_1 = S_{21} - S_1$ ergibt sich $V - S_1 > 0$ und im Fall $F_1 < S_{21} - S_1$ ist dieser Ausdruck ebenfalls positiv.[15] Somit liegt in diesen beiden Fällen ein lokales Maximum an der Stelle $D_1 = 0$ bzw. an einer Stelle $D_1 < 0$ vor. Für den Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ ergibt sich hier letztendlich wiederum Bedingung (4.25), welche für $S_{21} \geq S_1$ immer erfüllt sein muss.[16] Das bedeutet, im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ besitzt der Preis p_{21} für $S_{21} \geq S_1$ ein lokales Maximum für D_1 im Bereich $0 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$. Im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} < S_1$ liegt für $a < 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$

[13] Vgl. dazu Tabelle 4.4, S. 177. Im Fall $S_{21} = S_1$ ist Bedingung (4.25) mit Bedingung (4.10) identisch.

[14] Vgl. Fußnote 107, Kapitel 4, S. 175.

[15] Mit $a > 1$ und $S_1 < V$ nach (2.8) sind sowohl $a - 1$ als auch $V - S_1$ immer positiv.

[16] Vgl. dazu Tabelle 4.4, S. 177.

somit ebenfalls ein lokales Maximum vor. Für $a = 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ ergibt sich für p_{21} der Spezialfall nach Gleichung (C.3). Die zweite Ableitung nach (C.7) ist folglich gleich null und der Preis p_{21} wird maximal für $D_1 = F_1$.

Im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_{21} < S_1$ liegt für $a > 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ kein lokales Extremum vor. Die zweite Ableitung ist jedoch im gesamten Bereich $D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ positiv. Das bedeutet, die Funktion für den Preis p_{21} ist hier streng konvex. Für $D_1 = 0$ ergibt sich immer ein Preis p_{21} in Höhe von $p_{21} = V - S_{21} + F_1$ und die erste Ableitung an der Stelle $D_1 = 0$ beträgt $(-a \cdot (S_{21} - S_1 - F_1)) \,/\, (V - S_1)$. Im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ besitzt die Funktion für den Preis p_{21} an der Stelle $D_1 = 0$ eine positive Steigung. In Kombination mit der strengen Konvexität nimmt diese positive Steigung mit steigendem D_1 immer weiter zu und die Funktion für den Preis p_{21} strebt mit Annäherung an die Polstelle gegen $+\infty$. Folglich wird auch hier der Preis p_{21} maximal für $D_1 = F_1$.

Mit Ausnahme des Spezialfalls nach (C.3), in welchem keine Polstelle existiert, strebt die Funktion für den Preis p_{21} in allen anderen Fällen mit Annäherung an die Polstelle gegen $-\infty$. Dies liegt daran, dass in diesen Fällen die zweite Ableitung im gesamten Bereich $D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ negativ und die Funktion für den Preis p_{21} dementsprechend streng konkav ist. Da in all diesen Fällen ein lokales Maximum und eine Polstelle vorliegt, besitzt die Funktion für den Preis p_{21} zwischen Maximum und Polstelle eine negative Steigung. In Kombination mit der strengen Konkavität nimmt diese negative Steigung mit steigendem D_1 betragsmäßig immer weiter zu und mit Annäherung an die Polstelle strebt die Funktion für den Preis p_{21} gegen $-\infty$.

C.3.2 Lokales Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$

Im Fall $F_1 = S_{21} - S_1$ liegt das lokale Maximum an der Stelle $D_1 = 0$ und im Fall $F_1 < S_{21} - S_1$ an einer Stelle $D_1 < 0$. Folglich ist es in diesen beiden Fällen nicht möglich, dass das lokale Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$ vorliegt. Daher ist für D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ in diesen beiden Fällen der Preis p_{21} jeweils für $D_1 = 0$ maximal.

Ein lokales Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$ kann somit nur im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ auftreten. Dieser Fall muss nun wiederum unterteilt werden in $S_{21} > S_1$, $S_{21} = S_1$ und $S_{21} < S_1$. Für $S_{21} > S_1$ stimmt der Preis p_{21} mit dem Preis p_1 an der Stelle $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1$ überein und für $S_{21} = S_1$ folglich an der Stelle $\widehat{D_1} = F_1$.[17] Die erste Ableitung der Funktion des Preises p_{21} an der Stelle $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1$ ergibt sich als

[17] Vgl. Abschnitt 4.1.2.1.

$$\frac{d\,p_{21}}{d\,\widehat{D_1}} = \frac{a\cdot(S_{21}-S_1-F_1)}{(a-1)\cdot(S_{21}-S_1-F_1)+V-S_1}. \tag{C.8}$$

Der Nenner in (C.8) ist für $a < 1+\frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$ positiv. Dies entspricht wiederum genau der Bedingung (4.25). Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist die Steigung der Funktion des Preises p_{21} an der Stelle $\widehat{D_1}$ im Fall $F_1 > S_{21}-S_1$ negativ. Wegen der strengen Konkavität der Funktion des Preises p_{21} ist die Stelle, an der das lokale Maximum liegt, folglich kleiner als $\widehat{D_1}$.[18] Für $S_{21} > S_1$ gilt bereits $\widehat{D_1} = S_1 - S_{21} + F_1 < F_1$. Demnach liegt insbesondere auch das lokale Maximum an einer Stelle kleiner als F_1. Für $S_{21} = S_1$ gilt $\widehat{D_1} = F_1$. Somit ist auch in diesem Fall ein lokales Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$ nicht möglich.

Das bedeutet, nur für den Fall $F_1 > S_{21}-S_1$ und $S_{21} < S_1$ ist es überhaupt möglich, dass das lokale Maximum der Funktion des Preises p_{21} an der Stelle $D_1 = F_1$ liegt. Und nur bei dieser Kombination ist es möglich, dass das lokale Maximum der Funktion des Preises p_{21} an einer Stelle größer als F_1 liegt. Damit das lokale Maximum der Funktion des Preises p_{21} an einer Stelle $D_1 \leq F_1$ liegt, muss gelten:[19]

$$\begin{aligned}
F_1 &\geq \frac{V-S_1}{a-1} - \sqrt{\left(\frac{V-S_1}{a-1}\right)^2 + \frac{(S_{21}-S_1-F_1)\cdot(V-S_1)}{a-1}} \\
\Leftrightarrow \quad a &\leq \frac{F_1^2 + F_1\cdot(V-S_1) - (S_1-S_{21})\cdot(V-S_1)}{F_1^2} \\
\Leftrightarrow \quad a &\leq 1 + \frac{V-S_1}{F_1} - \frac{(S_1-S_{21})\cdot(V-S_1)}{F_1^2}.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Trifft der Gleichheitsfall in (C.9) zu, dann liegt das Maximum der Funktion des Preises p_{21} an der Stelle $D_1 = F_1$. Gilt nur die Ungleichung in (C.9), dann liegt das Maximum an einer Stelle $D_1 < F_1$. Ist hingegen Bedingung (C.9) verletzt, gleichzeitig aber noch Bedingung (4.25) erfüllt, dann liegt das Maximum der Funktion des Preises p_{21} an einer Stelle D_1 im Bereich $F_1 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$.[20] Die Bedingung (C.9) schränkt demzufolge den Parameter a stärker ein als die Bedingung (4.25).[21] Der Preis p_{21} wird bei einem derartigen Parameter a ebenfalls maximal für $D_1 = F_1$.[22]

[18] Die Funktion des Preises p_{21} ist streng konkav für $D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ und $a < 1+\frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$. Für die Stelle $\widehat{D_1}$ gilt außerdem $\widehat{D_1} < \frac{V-S_1}{a-1} \Leftrightarrow S_1 - S_{21} + F_1 < \frac{V-S_1}{a-1} \Leftrightarrow a < 1 + \frac{V-S_1}{S_1-S_{21}+F_1}$.

[19] Das lokale Maximum nach (C.6) muss sich an einer Stelle $D_1 \leq F_1$ ergeben.

[20] Bedingung (4.25) muss erfüllt sein, damit überhaupt ein lokales Maximum an einer Stelle D_1 im Bereich $F_1 < D_1 < \frac{V-S_1}{a-1}$ vorliegt. Vgl. Anhang C.3.1.

[21] Vgl. Fußnote 110, Kapitel 4, S. 176.

[22] Da D_1 im Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ liegen muss, ist $D_1 > F_1$ nicht möglich.

C.4 Der Sonderfall $a = 1$

Im Sonderfall $a = 1$ ergibt sich die Benchmark-Update-Funktion $G_B(x) = x$ und es kommt nach Satz 23 im Zeitpunkt $t = 2$ weder zu einem Mittelzufluss noch zu einem Mittelabfluss, und zwar unabhängig von der letztendlich realisierten relativen Wertentwicklung x. Die Investoren verhalten sich demnach passiv.

Der Preis p_{21} im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 ergibt sich nach Gleichung (4.6) bzw. Gleichung (4.7) im Sonderfall $a = 1$ als

$$p_{21}(a = 1) = \frac{(V - S_1 + D_1) \cdot (V - S_{21} + F_1 - D_1)}{V - S_1}. \tag{C.10}$$

Dieses Polynom 2. Grades besitzt genau zwei reele Nullstellen: $D_1 = S_1 - V$ und $D_1 = V - S_{21} + F_1$. Mit $x > 0$ nach Satz 14 steht immer ein Betrag $F_{21} > 0$ zur Verfügung, woraus $p_{21} > V - S_{21}$ folgt und die Funktion des Preises p_{21} nach (C.10) im gesamten für D_1 zulässigen Bereich $0 \leq D_1 \leq F_1$ Gültigkeit besitzt. Die erste Ableitung von $p_{21}(a = 1)$ nach D_1 ergibt sich als

$$\frac{d\, p_{21}(a = 1)}{d\, D_1} = \frac{-2D_1 + S_1 - S_{21} + F_1}{V - S_1} \tag{C.11}$$

und besitzt folglich nur ein lokales Extremum an der Stelle $D_1 = \frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2}$. Da die zweite Ableitung von $p_{21}(a = 1)$ nach D_1 unabhängig von D_1 immer negativ ist, liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum vor.[23] Im Fall $F_1 < S_{21} - S_1$ liegt auch hier das lokale Maximum an einer Stelle $D_1 < 0$.[24] Entsprechend ergibt sich im Fall $F_1 = S_{21} - S_1$ das lokale Maximum an der Stelle $D_1 = 0$ und im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ an einer Stelle $D_1 > 0$. Letzteres liegt nur dann im Bereich $0 < D_1 < F_1$, wenn $F_1 > S_1 - S_{21}$ zutrifft.[25] Ein Maximum an einer Stelle $D_1 \geq F_1$ ist folglich nur im Fall $F_1 \leq S_1 - S_{21}$ möglich und somit nur für $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_1 > S_{21}$, da $F_1 > 0$ nach (2.2) gilt. Somit ergibt sich auch hier im Sonderfall $a = 1$ nur im Fall $F_1 > S_{21} - S_1$ und $S_1 > S_{21}$ ein lokales Maximum an der Stelle $D_1 = F_1$, und zwar genau dann, wenn $F_1 = S_1 - S_{21}$ zutrifft.

[23] Es gilt: $\frac{d^2\, p_{21}(a=1)}{d\, D_1^2} = -\frac{2}{V - S_1}$.
[24] Es gilt $\frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2} < 0 \Leftrightarrow F_1 < S_{21} - S_1$.
[25] Es muss entsprechend gelten: $\frac{S_1 - S_{21} + F_1}{2} < F_1 \Leftrightarrow F_1 > S_1 - S_{21}$.

Anhang D

Der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ (lineare Update-Funktionen)

In Verbindung mit $p_1^{(\beta)} = V - S_1 + D_1^{(\beta)}$ nach (2.5) ergibt sich der Preis $p_{21}^{(\beta)}$ im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 nach Gleichung (4.79) als

$$p_{21}^{(\beta)} = \frac{\left(V - S_1 + D_1^{(\beta)}\right) \cdot \left(V - S_{21} + \beta F_1 - \beta a D_1^{(\beta)}\right)}{V - S_1 + D_1^{(\beta)} - \beta a D_1^{(\beta)}}. \tag{D.1}$$

Der Preis p_{21} im Fall $\beta = 1$ ist bereits sehr ausführlich besprochen worden. In diesem Abschnitt erfolgt daher nur eine reine Angabe der wichtigsten Gleichungen ohne Beweis. Im Fall $\beta = 0$ folgt unabhängig von $D_1^{(0)}$ direkt $p_{21}^{(0)} = V - S_{21}$ nach (D.1). Für $\beta = \frac{1}{a}$ ist der Nenner in (D.1) unabhängig von $D_1^{(\beta)}$. Daher muss hier zwischen dem Fall $\beta \neq \frac{1}{a}$ und dem Sonderfall $\beta = \frac{1}{a}$ unterschieden werden.[1]

D.1 Der Fall $\beta \neq \frac{1}{a}$

Die Nullstellenform des Preises $p_{21}^{(\beta)}$ lautet:

$$p_{21}^{(\beta)} = \frac{\beta a}{\beta a - 1} \cdot \frac{\left(D_1^{(\beta)} - (S_1 - V)\right) \cdot \left(D_1^{(\beta)} - \frac{V - S_{21} + \beta F_1}{\beta a}\right)}{D_1^{(\beta)} - \frac{V - S_1}{\beta a - 1}}. \tag{D.2}$$

Die erste Ableitung von $p_{21}^{(\beta)}$ nach $D_1^{(\beta)}$ ergibt sich als

[1] Die Gleichungen (D.4) und (D.5) sind im Fall $\beta = \frac{1}{a}$ nicht definiert.

$$\frac{d\,p_{21}^{(\beta)}}{d\,D_1^{(\beta)}} = \beta a \cdot \frac{(\beta a - 1)\cdot (D_1^{(\beta)})^2 - 2D_1^{(\beta)} \cdot (V - S_1) - (S_{21} - S_1 - \beta F_1)\cdot (V - S_1)}{\left(V - S_1 + D_1^{(\beta)} - \beta a D_1^{(\beta)}\right)^2}. \tag{D.3}$$

Falls ein lokales Maximum für $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} \leq F_1$ existiert, dann liegt dieses für $\beta > \frac{1}{a}$ an der Stelle

$$D_1^{(\beta)} = \frac{V - S_1}{\beta a - 1} - \sqrt{\left(\frac{V - S_1}{\beta a - 1}\right)^2 + \frac{(S_{21} - S_1 - \beta F_1)\cdot (V - S_1)}{\beta a - 1}}. \tag{D.4}$$

Für $\beta < \frac{1}{a}$ ist der Ausdruck vor der Wurzel in (D.4) negativ. Falls ein lokales Maximum für $D_1^{(\beta)}$ im Bereich $0 \leq D_1^{(\beta)} \leq F_1$ existiert, dann kann dieses für $\beta < \frac{1}{a}$ nur an der Stelle

$$D_1^{(\beta)} = \frac{V - S_1}{\beta a - 1} + \sqrt{\left(\frac{V - S_1}{\beta a - 1}\right)^2 + \frac{(S_{21} - S_1 - \beta F_1)\cdot (V - S_1)}{\beta a - 1}} \tag{D.5}$$

liegen. Die zweite Ableitung von $p_{21}^{(\beta)}$ nach $D_1^{(\beta)}$ lautet

$$\frac{d^2\,p_{21}^{(\beta)}}{d\,(D_1^{(\beta)})^2} = -\frac{2\beta a \cdot (V - S_1)\cdot ((\beta a - 1)\cdot (S_{21} - S_1 - \beta F_1) + V - S_1)}{\left(V - S_1 + D_1^{(\beta)} - \beta a D_1^{(\beta)}\right)^3}. \tag{D.6}$$

D.2 Der Sonderfall $\beta = \frac{1}{a}$

Für $\beta = \frac{1}{a}$ hat der Preis $p_{21}^{(\frac{1}{a})}$ nach (D.1) die Gestalt

$$p_{21}^{(\frac{1}{a})} = \frac{\left(V - S_1 + D_1^{(\frac{1}{a})}\right)\cdot \left(V - S_{21} + \frac{F_1}{a} - D_1^{(\frac{1}{a})}\right)}{V - S_1}. \tag{D.7}$$

Die Nullstellen liegen bei $D_1^{(\frac{1}{a})} = S_1 - V$ und $D_1^{(\frac{1}{a})} = V - S_{21} + \frac{F_1}{a}$. Die erste Ableitung von $p_{21}^{(\frac{1}{a})}$ nach $D_1^{(\frac{1}{a})}$ ergibt sich als

$$\frac{d\,p_{21}^{(\frac{1}{a})}}{d\,D_1^{(\frac{1}{a})}} = \frac{-2D_1^{(\frac{1}{a})} + S_1 - S_{21} + \frac{F_1}{a}}{V - S_1}. \tag{D.8}$$

Das lokale Maximum liegt an der Stelle $D_1^{(\frac{1}{a})} = \frac{aS_1 - aS_{21} + F_1}{2a}$.[2]

[2]Es gilt: $\frac{d^2\,p_{21}^{(\frac{1}{a})}}{d\,(D_1^{(\frac{1}{a})})^2} = -\frac{2}{V - S_1}$.

Symbolverzeichnis

A_t	Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt t, $t = 1, \ldots, 3$
A_{2i}	Nachfrage der Arbitrageure im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i, $i = 1, 2$
$a, \hat{a}$	Parameter
b	Konstante
c_i	Hilfsvariablen im Beweis von Satz 44, $i = 1, \ldots, 3$ und Koeffizienten zur Bestimmung von $x_0(\bar{x})$ in Anhang A.1, $i = 1, \ldots, 4$
D	Diskriminante bei der Bestimmung von $x_0(\bar{x})$ in Anhang A.1
D_t	Von den Arbitrageuren im Zeitpunkt t investierter Betrag (Entscheidungsvariablen), $t = 1, \ldots, 3$
$D_1^{(\beta)}$	Entscheidungsvariable im Zeitpunkt $t = 1$ im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen
$\overline{D}_1$	Investment D_1 im Zeitpunkt $t = 1$ seitens des Arbitrageurs, ab dem im Zustand Z_1 ein vollständiger Mittelabzug seitens des Investors erfolgt.
$\widehat{D_1}$	Im Zeitpunkt $t = 1$ investierter Betrag, für den sich im Entscheidungsmodell mit einer Entscheidungsvariable genau $p_{21} = p_1$ ergibt
D_1^{opt}	Optimale Lösung im Sinne der Zielfunktion (2.40)
$D_1^{opt(\beta)}$	Optimale Lösung im Sinne der Zielfunktion (2.53)
D_1^{opt1}	Optimale Lösung für D_1 im ersten Teilbereich $0 \leq D_1 < \overline{D}_1$ bzw. auch erste optimale Lösung im Fall (5)
D_1^{opt2}	Optimale Lösung für D_1 im zweiten Teilbereich $\overline{D}_1 \leq D_1 \leq F_1$ bzw. auch zweite optimale Lösung im Fall (5)
D_1^{optSV}	Optimale Lösung für D_1 nach Shleifer/Vishny (1997)
$D_1^{optZ_i}$	Optimales Investment D_1 bezogen auf den Zustand Z_i, $i = 1, 2$
$D_1^{optZ_i(\beta)}$	Optimales Investment D_1 bezogen auf den Zustand Z_i im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen, $i = 1, 2$
D_{2i}	Von den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i investierter Betrag, $i = 1, 2$

$D_{21}^{(\beta)}$	Von den Arbitrageuren im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 investierter Betrag im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen
$\frac{d\,f(x)}{d\,x}$, $f'(x)$	Erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach x
$\frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2}$, $f''(x)$	Zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach x
$\mathrm{E}(\cdot)$	Erwartungswert einer Zufallsvariable
EV	Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$
$\widetilde{EV}$	Stochastisches Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ unter der Berücksichtigung von $D_{21} = F_{21}$ im Zustand Z_1 und $D_{22} = 0$ im Zustand Z_2
EV_{Z_1}	Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, wenn im Zeitpunkt $t = 2$ der Zustand Z_1 eintritt und $D_{21} = F_{21}$ gewählt wird
$EV_{Z_1}^{(\beta)}$	Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, wenn im Zeitpunkt $t = 2$ der Zustand Z_1 eintritt und $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ gewählt wird
EV_{Z_2}	Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, wenn im Zeitpunkt $t = 2$ der Zustand Z_2 eintritt und $D_{22} = 0$ gewählt wird
$EV_{Z_2}^{(\beta)}$	Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$, wenn im Zeitpunkt $t = 2$ der Zustand Z_2 eintritt im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen
$\widetilde{EV}^{(\beta)}$	Stochastisches Endvermögen im Zeitpunkt $t = 3$ unter der Berücksichtigung von $D_{21}^{(\beta)} = \beta F_{21}^{(\beta)}$ im Zustand Z_1 und $D_{22} = 0$ im Zustand Z_2
F_t	Von den Investoren im Zeitpunkt t zur Verfügung gestellter Betrag, $t = 1, \ldots, 3$
F_{2i}	Von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i zur Verfügung gestellter Betrag, $i = 1, 2$
$F_{2i}^{(\beta)}$	Von den Investoren im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i zur Verfügung gestellter Betrag im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen, $i = 1, 2$
$G(x)$, G	Update-Funktion zur Beurteilung der relativen Wertentwicklung x
$\hat{G}(x)$	Eine von $G(x)$ verschiedene Update-Funktion zur Beurteilung der relativen Wertentwicklung x
$G_B(x)$	Benchmark-Update-Funktion; Update-Funktion der Gestalt $G(x) = x$
$G_{\bar{x}}(x)$	An der Stelle $\bar{x}$ zusammengesetzte, stückweise definierte Update-Funktion
GE	Geldeinheit(en)
h	Hilfsvariable
h_i	Hilfsvariablen zur Bestimmung von $x_0(\bar{x})$ in Anhang A.1, $i = 1, 2$

I	Von den Investoren insgesamt investierter Betrag
i	Index
$\lim_{x \to \bar{x}} G(x)$	Grenzwert der Funktion $G(x)$ für x gegen $\bar{x}$
$\lim_{x \to \bar{x}^-} G(x)$	Linksseitiger Grenzwert der Funktion $G(x)$ für x gegen $\bar{x}$
$\lim_{x \to \bar{x}^+} G(x)$	Rechtsseitiger Grenzwert der Funktion $G(x)$ für x gegen $\bar{x}$
m	Konstante
$\max[\cdot,\cdot]$	Maximum-Funktion
N_t	Nachfrage der Noise trader im Zeitpunkt t, $t = 1, \ldots, 3$
N_{2i}	Nachfrage der Noise trader im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i, $i = 1, 2$
n	Anzahl identischer Vermögensgegenstände mit Grundwert V
p_t	Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt t, $t = 1, \ldots, 3$
$p_1^{(\beta)}$	Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 1$ im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen
p_{2i}	Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_i, $i = 1, 2$
$p_{21}^{(\beta)}$	Preis des Vermögensgegenstandes im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand Z_1 im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen
q	Wahrscheinlichkeit, mit der Zustand Z_1 im Zeitpunkt $t = 2$ eintritt
q^*	Eintrittswahrscheinlichkeit, bis zu welcher in Shleifer/Vishny (1997) ein Vollinvestment $D_1^{optSV} = F_1$ erfolgt
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
S_1	Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 1$
S_2	Realisation stochastischer Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$
$\widetilde{S_2}$	Zufallsvariable; stochastischer Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 2$
S_{2i}	Realisation der Zufallsvariable $\widetilde{S_2}$ im Zustand Z_i, $i = 1, 2$
S_3	Noise trader shock im Zeitpunkt $t = 3$
$T_{x_T}(x)$	Tangente in x_T an den Graphen $G(x)$ der Update-Funktion
t	Zeitpunkt
V	Grundwert des Vermögensgegenstandes
$\tilde{V}$	Risikobehafteter Grundwert des Vermögensgegenstandes
x	Relative Wertentwicklung von F_1 vom Zeitpunkt $t = 1$ bis zum Zeitpunkt $t = 2$

$\bar{x}$	Konstante bei zusammengesetzten, stückweise definierten Update-Funktionen
$\bar{x}_*$	Konstante, die größer ist als $\bar{x}$
$\hat{x}$	Relative Wertentwicklungen, für die $G'(\hat{x}) = 1$ zutrifft (Satz 27)
x_0	Nullstelle nicht stückweise definierter Update-Funktionen $G(x)$
$\hat{x}_0$	Nullstelle nicht stückweise definierter Update-Funktionen $\hat{G}(x)$
$x_0(\bar{x})$	Nullstelle zusammengesetzter Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$
x_D	Schnittpunkt zweier Update-Funktionen im „down"-Bereich $x < 1$
x_T	Tangentialpunkt
x_U	Schnittpunkt zweier Update-Funktionen im „up"-Bereich $x > 1$
x_{Z_i}	Relative Wertentwicklung von F_1 bezogen auf den Zustand Z_i, $i = 1,2$
$x_{Z_i}^{(\beta)}$	Relative Wertentwicklung von F_1 bezogen auf den Zustand Z_i im Modell mit zwei Entscheidungsvariablen, $i = 1,2$
Z_1	Zustand 1 im Zeitpunkt $t = 2$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit q
Z_2	Zustand 2 im Zeitpunkt $t = 2$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $1 - q$

α	Anteil mit $\alpha \in]0,1[$
β	Anteil, welcher vom Betrag $F_{21}^{(\beta)}$ investiert wird, $\beta \in [0,1]$
β^{opt}	Optimaler Anteil im Sinne der Zielfunktion (2.53)
μ	Erwartungswert mit $\mu = \mathrm{E}(\widetilde{EV})$
$\mu^{(\beta)}$	Erwartungswert mit $\mu^{(\beta)} = \mathrm{E}(\widetilde{EV}^{(\beta)})$
μ^{opt}	Zu D_1^{opt} zugehöriger Erwartungswert
$\mu^{opt(\beta)}$	Zu $D_1^{opt(\beta)}$ zugehöriger Erwartungswert
μ^{opt1}	Zu D_1^{opt1} zugehöriger Erwartungswert
μ^{opt2}	Zu D_1^{opt2} zugehöriger Erwartungswert
$\Gamma_{p_{21}}(D_1)$	Funktion, welche den Zähler des Bruchs aus Gleichung (4.7) darstellt
ΔD_1	Betragsmäßige Veränderung der Größe D_1
ΔF	Mittelzufluss (+) bzw. Mittelabfluss (−) im Zeitpunkt $t = 2$
Δx	Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$
$\Delta x(\bar{x})$	Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$ bei zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$

Δx^*	Die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*$ betragsmäßig dem Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*$ entspricht
$\Delta x^*(\bar{x})$	Die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die bei zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ der Mittelzufluss einer relativen Wertentwicklung $x = 1 + \Delta x^*(\bar{x})$ betragsmäßig dem Mittelabfluss der entsprechenden relativen Wertentwicklung $x = 1 - \Delta x^*(\bar{x})$ entspricht
$\widehat{\Delta x}$	Die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für welche $x_0 = 1 - \widehat{\Delta x}$ zutrifft
$\widehat{\Delta x}(\bar{x})$	Die Abweichung von der relativen Wertentwicklung $x = 1$, für die $x_0(\bar{x}) = 1 - \widehat{\Delta x}(\bar{x})$ bei zusammengesetzten Update-Funktionen $G_{\bar{x}}(x)$ zutrifft
$\Phi(\overline{D}_1)$	Funktion zur Bestimmung von $\overline{D}_1$
$\Psi_{p_{21}}(D_1)$	Funktion, welche den Nenner des Bruchs aus Gleichung (4.7) darstellt

Literaturverzeichnis

Agricola, I.; Friedrich, T. (2009), *Elementargeometrie*, 2. Aufl., Wiesbaden.

Arnold, L. G. (2009), Anything is Possible: On the Existence and Uniqueness of Equilibria in the Shleifer-Vishny Model of Limits of Arbitrage, *Review of Finance* 13(3), 521–553.

Barberis, N.; Thaler, R. H. (2003), A Survey of Behavioral Finance, in: Constantinides, G. M.; Harris, M.; Stulz, R. M. (Hrsg.), *Handbook of the Economics of Finance, Volume 1B*, Amsterdam, 1051–1121.

Biais, B.; Hillion, P. (1994), Insider and Liquidity Trading in Stock and Options Markets, *The Review of Financial Studies* 7(4), 743–780.

Black, F. (1986), Noise, *The Journal of Finance* 41(3), 529–543.

Brealey, R. A.; Myers, S. C.; Allen, F. (2006), *Principles of Corporate Finance*, 8. Aufl., New York.

Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H. (2008), *Taschenbuch der Mathematik*, 7. Aufl., Frankfurt.

Brunel, J. L. P. (2003), Revisiting the Asset Allocation Challenge Through a Behavioral Finance Lens, *The Journal of Wealth Management* 6(2), 10–20.

Chan, W. S.; Frankel, R.; Kothari, S. P. (2004), Testing Behavioral Finance Theories Using Trends and Consistency in Financial Performance, *Journal of Accounting and Economics* 38(1), 3–50.

Cigler, J. (1995), *Körper – Ringe – Gleichungen*, Heidelberg u. a.

Daniel, K. D.; Hirshleifer, D. A.; Subrahmanyam, A. (1998), Investor Psychology and Security Market Under- and Overreactions, *The Journal of Finance* 53(6), 1839–1885.

De Long, J. B.; Shleifer, A.; Summers, L. H.; Waldmann, R. J. (1990), Noise Trader Risk in Financial Markets, *Journal of Political Economy* 98(4), 703–738.

Fama, E. F. (1970), Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *The Journal of Finance* 25(2), 383–417.

Fama, E. F. (1991), Efficient Capital Markets: II, *The Journal of Finance* 46(5), 1575–1617.

Fama, E. F. (1998), Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance, *Journal of Financial Economics* 49(3), 283–306.

Franke, G.; Hax, H. (2004), *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 5. Aufl., Berlin u. a.

Haugen, R. A. (1999), *The New Finance: The Case Against Efficient Markets*, 2. Aufl., Upper Saddle River.

Haugen, R. A. (2002), *The Inefficient Stock Market: What Pays Off and Why*, 2. Aufl., Upper Saddle River.

Kaballo, W. (2000), *Einführung in die Analysis I*, 2. Aufl., Heidelberg u. a.

Kahneman, D.; Tversky, A. (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica* 47(2), 263–291.

Kyle, A. S. (1985), Continuous Auctions and Insider Trading, *Econometrica* 53(6), 1315–1335.

Levy, H.; Post, T. (2005), *Investments*, Harlow.

Pratt, J. W.; Zeckhauser, R. J. (1985), *Principals and Agents: The Structure of Business*, Boston.

Rasmusen, E. (2007), *Games and Information: An Introduction to Game Theory*, 4. Aufl., Oxford u. a.

Sharpe, W. F.; Alexander, G. J.; Bailey, J. V. (1999), *Investments*, 6. Aufl., Upper Saddle River.

Shefrin, H. M.; Statman, M. (1985), The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long, *The Journal of Finance* 40(3), 777–790.

Shleifer, A. (2000), *Inefficient Markets*, New York.

Shleifer, A.; Vishny, R. W. (1990), Equilibrium Short Horizons of Investors and Firms, *The American Economic Review* 80(2), 148–153.

Shleifer, A.; Vishny, R. W. (1997), The Limits of Arbitrage, *The Journal of Finance* 52(1), 35–55.

Sydsæter, K.; Strøm, A.; Berck, P. (2010), *Economists' Mathematical Manual*, 4. Aufl., Corrected Second Printing, Berlin u. a.

Thaler, R. H. (1993), *Advances in Behavioral Finance*, New York.

Thaler, R. H. (2005), *Advances in Behavioral Finance Vol. II*, New York.