Andreas Christl

3D-CFD-Simulation der exzentrischen Taylor-Couette Strömung mit Bezug auf das hydrodynamische Gleitlager

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

3D-CFD-Simulation der exzentrischen Taylor-Couette Strömung
mit Bezug auf das hydrodynamische Gleitlager

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg

3D-CFD-Simulation der exzentrischen Taylor-Couette Strömung mit Bezug auf das hydrodynamische Gleitlager

Dissertation

vorgelegt von:	Dipl.-Phys. Andreas Christl
geboren am:	26. 06. 1979 in Berlin-Mitte
Studienbereich:	Maschinenbau
Matrikelnummer:	20 22 160
Erstgutachter:	Prof. Dr.-Ing. Christoph Egbers
Zweitgutachter:	Prof. Dr.-Ing. Adrian Rienäcker

2014

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2015
Zugl.: BTU Cottbus-Senftenberg, Univ., Diss., 2015

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2015
Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.
1. Auflage 2015
Gedruckt auf umweltfreundlichem, säurefreiem Papier aus nachhaltiger Forstwirtschaft.

ISBN 978-3-7369-9081-4
eISBN 978-3-7369-8081-5

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

0.1 Zusammenfassung

In der Praxis werden derzeit hauptsächlich zweidimensionale Löser der vereinfachten Navier-Stokes Gleichung, der sogenannten Reynolds'schen Differentialgleichung, genutzt. Die Vereinfachung besteht vornehmlich darin, wie in 2.4 ausführlicher beschrieben, aufgrund des engen Spalts im Lager, die Trägheitskräfte, Krümmung und somit auch die radiale Geschwindigkeitskomponente zu vernachlässigen. Das bedeutet, es gibt nun nur noch die zweidimensionale Beschreibung der Strömung in Umfangs- und in Breitenrichtung (axiale Komponente). Dadurch erhält man ein wesentlich einfacheres Differenzialgleichungssystem, das mit den vorgegebenen Randbedingungen numerisch und für bestimmte Fälle auch analytisch lösbar ist. Diese effizienten zweidimensionalen Löser genügen vollkommen um die Auslegung eines Gleitlagers bezüglich Tragkraft vorzunehmen. Betrachtet man allerdings die Lebensdauer und Haltbarkeit eines Gleitlagers stößt man neben Fremdkörpereinfluss, Flucht- und Formfehler, Verschleiß, Korrosion oder Dauerbruch auch auf den Faktor Kavitationsschaden. Solche Kavitationsschäden findet man beispielsweise am Öleinlauf oder am Nutauslauf. Die Erfassung dieser strömungsinduzierten Kavitation aufgrund der dreidimensionalen geometrischen Eigenschaften des Gleitlagers kann mit einer zweidimensionalen Betrachtung sowie einem Spaltfüllungsgrad als Kavitationsindikator nur bedingt korrekt und für entsprechende Geometrien auch nur fehlerhaft gelingen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Erarbeitung eines numerischen Lagermodells mit dem die Strömung in einem hydrodynamisch geschmierten Gleitlager dreidimensional berechnet werden kann. Sie entstand im Verlauf des Industrieforschungsprojektes *"CFD-Gleitlager"* (Abbildung 0.1), das durch die industrielle Gemeinschaftsforschung und -entwicklung (IGF), im Weiteren der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschung (AiF) gefördert und letztlich durch die Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen (FVV) betreut wurde. Die Arbeitspakete wurden auf 3 untereinander vernetzte Forschungsstellen verteilt. Die Projektorganisation und die Erarbeitung der instationären 3D-CFD Modellierung wurde dem Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungslehre der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Christoph Egbers übertragen. Am Institut für Energiemanagement i.G. der Westsächsischen Hochschule Zwickau mit Prof. Dr.-Ing. Peter Reinke (geb. Stücke) wurde die stationäre 3D-CFD- und Kavitationsmodellierung sowie der Aufbau eines Validierungsexperimentes durchgeführt. Das Institut für Maschinenelemente und Konstruktionstechnik der Universität Kassel mit Prof. Dr.-Ing. Adrian Rienäcker übernahm die Berechnung der Strömungsprobleme auf Basis der Elastohydrodynamik.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

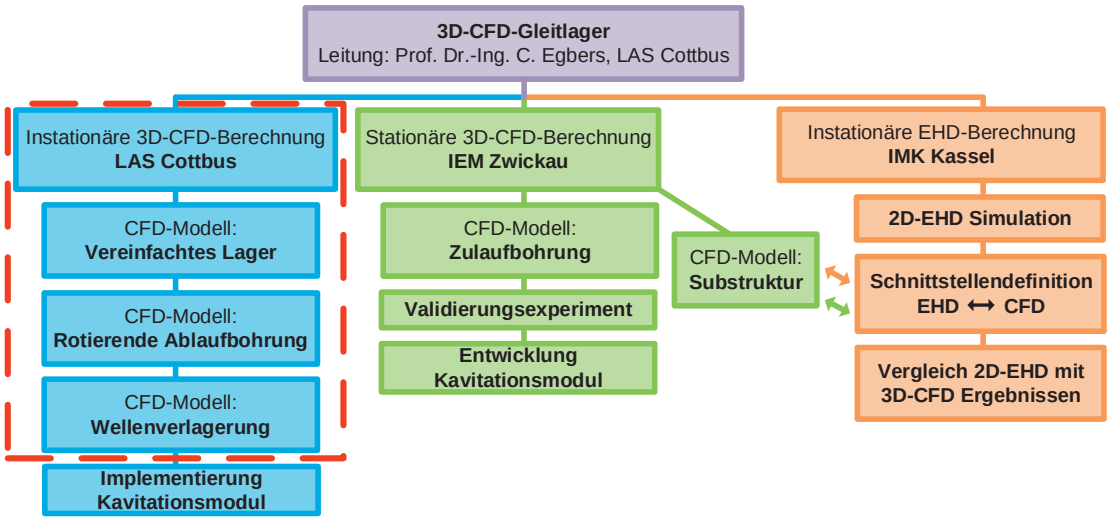


Abbildung 0.1: Projektskizze *"CFD-Gleitlager"*. Der in dieser Arbeit vorgestellte Teil ist rot umrandet.

Der hier vorgestellte Löser für dreidimensionale Strömungsprobleme in Lagergeometrien ist ein Basisströmungslöser, der im späteren Projektverlauf mit weiteren Optionen wie Kavitationsberechnung erweitert wird. Dies bedeutet, es wird zunächst eine inkompressible Strömung mit konstanter Temperatur und Viskosität angenommen um möglichst effektiv die dreidimensionale Berechnung der Strömungen in verschiedensten Zylinderspaltgeometrien vorzunehmen. Dies allein ist Forschungsgegenstand seit mehr als 100 Jahren und wird in Kapitel 1.2 vorgestellt.

Die Erarbeitung des Modells erfolgt ausgehend von einem einfachem Zylinderspalt, dem Taylor-Couette-System. Dieses vereinfachte Lagermodell wird dann mit Option einer Verlagerungsbahn des rotierenden Innenzylinders, der im Modell der Welle entspricht, erweitert. Anschließend werden geometrische Details, wie Ölversorgungsbohrungen und eine 180° Nut implementiert. Abschließend erfolgt die Anpassung der Spaltweite an lagertypischen Dimensionen.

0.2 Abstract

The current work aims to develop a three-dimensional numerical tool which provides the fully three-dimensional simulation of the flow in a hydrodynamic journal bearing. The current topic was a part of the industrial project *"CFD-Gleitlager"*.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

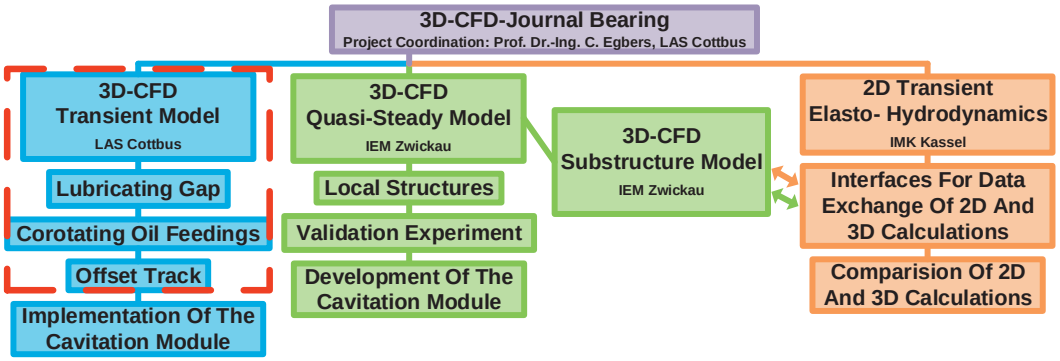


Abbildung 0.2: Project schedule of *"CFD-Gleitlager"*. The current topic is marked with a red dashed line.

In practice, efficient, fast and approved two-dimensional solvers for the Reynolds equation are very common. This Reynolds equation is a simplified Navier-Stokes equation for the very small cylindric gap and neglects the curvature of the shaft and the bearing shell. That leads to a two dimensional view of the flow. So this equation is quite capable to calculate the load for a certain bearing geometry. But if one aims to look at the durability of a specific designed bearing geometry one find factors like impurity in the lubricant, wrong shaped parts, wear, corrosion fatigue fracture and also cavitation. To understand three-dimensional flow induced effects like cavitation behind notches or oil feedings it is essential to have a three-dimensional look at the flow. If one investigates cavitation in a two-dimensional calculation and uses the the rate of change of charge as a cavitation indicator, the results will be unreliable. The above mentioned goal to develop a three-dimensional tool is divided in two major parts. The present work focuses on the three-dimensional flow in a bearing without phase transition. In a following work the implementation and modeling of cavitation will be presented. The development of the current three-dimensional bearing model starts with an cylindrical setup also known as Taylor-Couette system. This simplified bearing model will be extended by implementation of an offset track and geometric properties like oil feedings and one notch of 180°. Finally, the gap is adjusted for realistic gap widths.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

0.3 Kurzzeichenverzeichnis

Kurzzeichen	Bedeutung	Einheit
R_1	Radius Innenzylinder oder Welle	[m]
R_2	Radius Außenzylinder oder Lagerschale	[m]
η	Radienverhältnis $\eta = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\Psi+1}$	[-]
H_0	Lagerspiel $H_0 = R_2 - R_1$	[-]
Ψ	normiertes Lagerspiel $\Psi = \frac{R_2-R_1}{R_1} = \frac{1-\eta}{\eta}$	[-]
B	Lagerbreite (axiale Länge)	[m]
Γ	Aspekt- oder Streckungsverhältnis $\Gamma = \frac{B}{H_0}$	[-]
e	Versatz von konzentrischer Position $e = \varepsilon \cdot H_0$	[m]
ε	Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{H_0}$	[-]
U_1	tangentiale Geschwindigkeitskomponente am Innenzylinder	$[\frac{m}{s}]$
n	Drehzahl	$[\frac{1}{s}]$
ω	Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$	$[\frac{1}{s}]$
Ω_1	Winkelgeschwindigkeit Innenzylinder	$[\frac{1}{s}]$
Ω_2	Winkelgeschwindigkeit Außenzylinder	$[\frac{1}{s}]$
ν	kinematische Viskosität	$[\frac{m^2}{s}]$
μ	dynamische Viskosität	$[\frac{kg}{ms}]$
$\tilde{\mu}$	Rotationsverhältnis $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$	[-]
ϱ	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
Re	Reynolds-Zahl $Re = \frac{H_0 \cdot U_1}{\nu}$	[-]
Ta	Taylor-Zahl $Ta = Re^2 \cdot \Psi$	[-]
τ	viskose Zeit $\tau = \frac{H_0^2}{\nu}$	[-]
$\underline{\tau}$	Schubspannungstensor	$[\frac{N}{m^2}]$

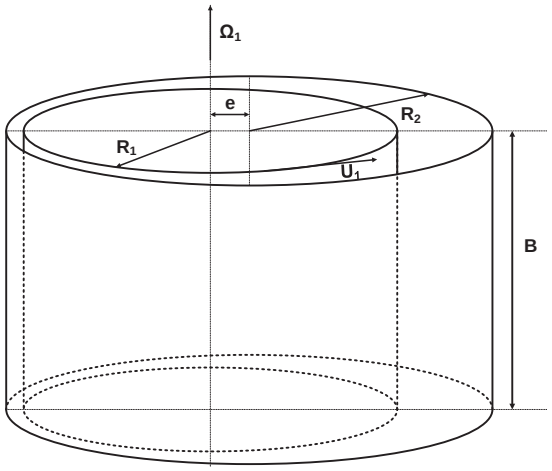


Abbildung 0.3: Geometrie des exzentrischen Zylinderspaltes mit rotierendem Innenzylinder und festem Außenzylinder.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Inhaltsverzeichnis

0.1 Zusammenfassung . . . 3
0.2 Abstract . . . 4
0.3 Kurzzeichenverzeichnis . . . 6

1 Einleitung **1**
1.1 Das Taylor-Couette-System als vereinfachtes Gleitlagermodell . . . 1
1.1.1 Das Gleitlager . . . 1
1.1.2 Das Taylor-Couette-System . . . 3
1.2 Stand der Forschung . . . 4
1.2.1 Konzentrisches Taylor-Couette-System . . . 4
1.2.2 Exzentrisches Taylor-Couette-System und hydrodynamische Schmierung 16
1.3 Ziel . . . 22

2 Theoretische Grundlagen **23**
2.1 Reynolds'sches Transporttheorem . . . 23
2.2 Massenerhaltung . . . 24
2.3 Impulserhaltung . . . 24
2.4 Reynolds'sche Differentialgleichungen . . . 26

3 Finite Volumen **28**
3.1 Diskretisierung . . . 28
3.1.1 Räumliche Diskretisierung . . . 28
3.1.2 Zeitliche Diskretisierung . . . 36
3.1.3 Randbedingungen . . . 40
3.1.4 Numerische Randbedingungen . . . 42
3.1.5 Physikalische Randbedingungen . . . 43
3.1.6 Diskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung . . . 43
3.2 Druck-Geschwindigkeits-Kopplung . . . 44

4 Gittererstellung **47**

5 Validierung und Optimierung **56**
5.1 Gitterstudie des Zylinderspalts . . . 56
5.2 Validierung mit einer analytischer Lösung . . . 61
5.3 Validierung mit einer Lösung auf Basis der Reynolds'schen Differenzialgleichungen . . . 65
5.4 Zeitskala zum Ausbilden und Zerfall von Taylor-Wirbeln . . . 67
5.4.1 Zeitskala für die Ausbildung von Taylor-Wirbeln . . . 69
5.4.2 Zeitskala für den Zerfall von Taylor-Wirbeln . . . 70

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

5.5 Verlagerungsbahn des rotierenden Innenzylinders 72
5.6 Validierung am Referenzexperiment 80

6 Simulation des Wollfarth Lagers 86
6.1 Auswahl des optimalen Lösers und Prekonditonierers 88
6.2 Abschätzung der Strömung im Wollfarth'schen Gleitlager 89
6.3 Lösung auf einem groben Gitter 92
6.4 Lösung auf einem hochaufgelösten Gitter 95

7 Diskussion und Ausblick 100

Literaturverzeichnis 102

Danksagung 109

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

1 Einleitung

1.1 Das Taylor-Couette-System als vereinfachtes Gleitlagermodell

Die Entwicklung des numerischen 3D-Lagermodells erfolgt in einem ersten Schritt anhand der Geometrie eines einfachen Zylinderspalts. Dieses Zylinderspaltsystem wird auch als Taylor-Couette-System bezeichnet 1.1.2 und steht seit mehr als 100 Jahren im Fokus intensiver Forschung 1.2. Im Anschluss werden lagertypische Spaltweiten, geometrische Erweiterungen und Randbedingungen hinzugefügt. In diesem Kapitel soll zunächst der Zusammenhang zwischen diesem sehr bekannten physikalischen Testsystem und dem des Gleitlagers vorgestellt werden.

1.1.1 Das Gleitlager

Rotierende oder bewegliche Bauteile müssen geführt oder gelagert werden. Grundsätzlich unterteilt man Lager nach dem Funktionsprinzip in zwei Gruppen, in Wälz- und Gleitlager. Wie aus den Namen ableitbar, rollen oder wälzen sich im Falle des Wälzlagers die Oberfläche des rotierenden Bauteils an der Führungsoberfläche (Lagerschale) entlang. Dementsprechend gleiten die Oberflächen beim Gleitlager relativ zueinander. Im Idealfall sind hier die Gleitflächen durch eine im Schmierfilm hydrostatisch oder hydrodynamisch (1.1) erzeugte Druckkraft getrennt.

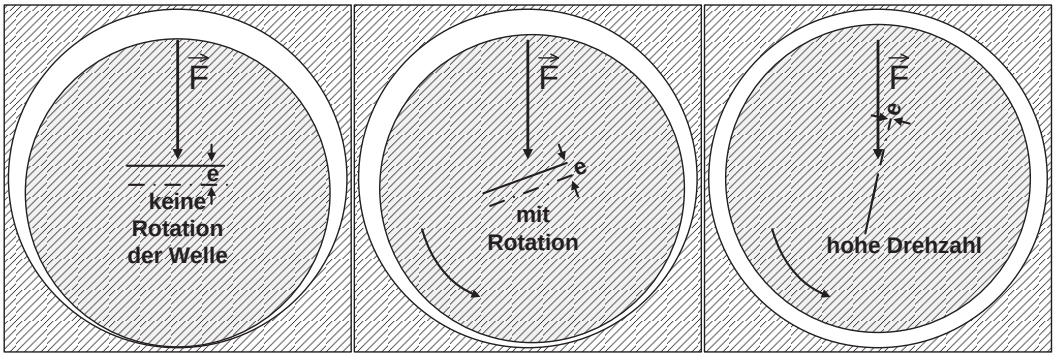


Abbildung 1.1: Durch Erhöhung der Drehzahl entsteht in der Nähe des engsten Spalts eine erhöhte Druckkraft, die die Welle in Richtung des konzentrischen Ursprunges drückt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Weiterführend werden Lager nach der Belastungsrichtung in Axial- und Radiallager unterteilt (1.2).

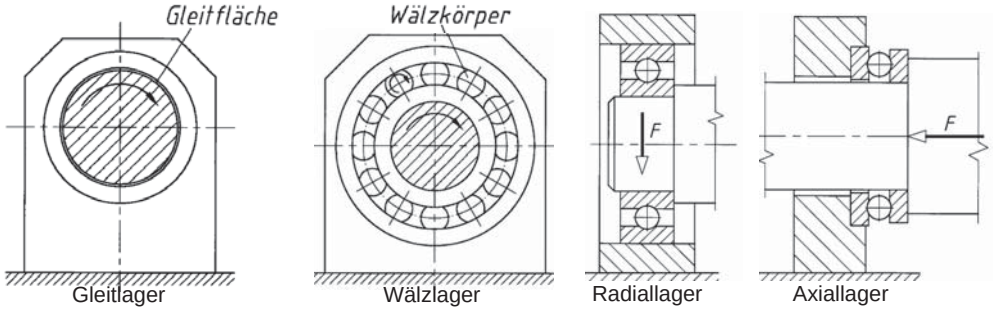


Abbildung 1.2: Einteilung der Lager nach Funktionsprinzip und Belastungsrichtung [Muhs u. a. 2007]

Die Wahl des Lagers hängt von der Anwendung ab. Bei hohen Drehzahlen und stetigem Betrieb wird häufig ein Gleitlager verwendet. Muss das Lager viele unstetige Betriebszyklen führen wird eher ein Wälzlager verwendet (1.3).

Wälzlager (WL)	**Gleitlager (GL)**
Ausbildung eines hydrodynamischen Schmierfilms	
ungünstig (weite Schmiegung, hohe Pressung)	günstig (enge Schmiegung, niedrige Pressung)
Lebensdauer/Schadensgrenze	
Grübchenbildung (Oberflächenermüdung), Verschleiß	An- und Auslauf-, evtl. Betriebsverschleiß[2)]
– weitgehend genormt, austauschbar[1)] – geringer Wartungsaufwand (z.T. wartungsfrei) – geringe Anlaufreibung ($\mu_{wL} \approx$ 0,002 … 0,01) – geringe Wärmeentwicklung – kein Ruckgleiten (stick-slip) – i. allg. kein Einlaufen nötig – geringer Schmierstoffverbrauch – geringe Lagerbreite – Beratung durch Spezialfirmen (Software, Verantwortung)[1)] – in der Regel kein Einfluß des Wellenwerkstoffs	– unempfindlich gegen Stöße und Erschütterungen – geräusch- und schwingungsdämfend (Schmierfilm) – geteilte Lager möglich (z. B. für Kurbelwelle)[3)] – besonders kostengünstig bei großen Durchmessern (z. B. Turbinenwellen) und sehr kleinen Durchmessern (z. B. Kunststofflager für Haushaltsmaschinen) – kleiner Außendurchmesser – sehr hohe Drehzahlen möglich (z. B. Turbinen) – bei vollem Schmierfilm geringe Reibung, lange Lebensdauer[4)] – hohe Steifigkeit – Gefahr des Ruckgleitens (stick-slip)

[1)] z. T. auch für Gleitlager erreichbar,
[2)] nicht bei hydro- und aerostatischen Lagern,
[3)] als Sonderausführung auch bei Wälzlagern möglich,
[4)] insbesondere bei hydro- und aerostatischen Lagern erreichbar.

Abbildung 1.3: Vor- und Nachteile von Gleit- und Wälzlagern [Muhs u. a. 2007]

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Das numerische 3D-Lagermodell, das in dieser und weiterführender Arbeit erstellt wird, orientiert sich an der Geometrie und den Randbedingungen eines Motorenhauptlagers aus der Dissertation von M. Wollfarth an der Universität Karlsruhe [Wollfarth 1995]. Hier konnten Kavitationsschäden experimentell reproduzierbar erzeugt werden. Hauptlager führen die Kurbelwelle im Motor (1.4).

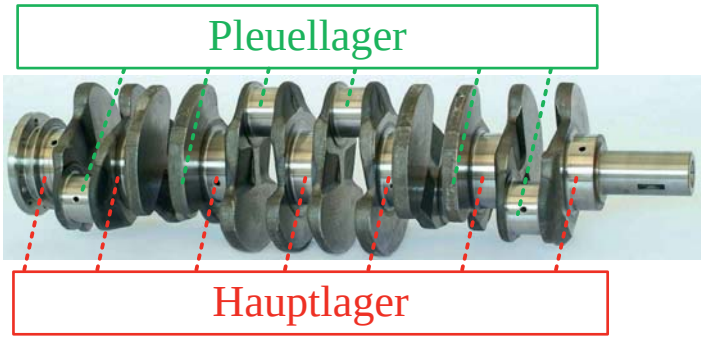


Abbildung 1.4: Haupt- und Pleuellager. Zu sehen ist hier nur die Welle ohne Lagerschalen. Bildquelle: [Formex]

Im Gegensatz zu den Pleuellagern, besitzen die Hauptlager die gleiche Rotationsachse. Die Rotationsachse der Pleuellager bewegt sich in etwa auf einer Kreisbahn um die Hauptlagerrotationsachse.

1.1.2 Das Taylor-Couette-System

Betrachtet man das Gleitlager abstrahiert und ohne geometrische Details wie Ölversorgungsbohrungen oder Nuten, erhält man einen Zylinderspalt. Zur Veranschaulichung soll erneut Abbildung 1.5 dienen.

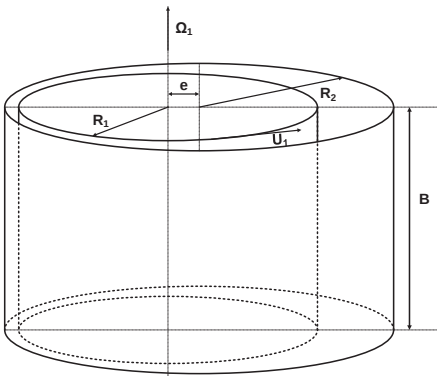


Abbildung 1.5: Geometrie eines exzentrischen Zylinderspalts mit rotierendem Innenzylinder und festem Außenzylinder.

Dieses Zylinderspaltsystem wurde letztendlich benannt nach Maurice Marie Alfred Couette und Geoffrey Ingram Taylor. Letztgenanntem gelang es die zuerst einsetzende hydrodynamische Instabilität 1.9, für die er ebenfalls namens gebend war (Taylor-Wirbelströmung,

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

engl.:Taylor vortex flow), mathematisch zu formulieren [Taylor 1923], nachdem sie von Stokes [Stokes 1845] vorhergesagt und unter anderem von Mallock [Mallock 1888] beobachtet wurde. Couette war wie Mallock ein herausragender Konstrukteur von präzisen Messaufbauten. Da Couette einer der meistzitierten Naturwissenschaftler dieser Zeit war, setzte sich diese Beschreibung durch. Obgleich die Reihenfolge der Namen regional permutiert. In Frankreich spricht man auch vom Couette-Taylor-System.

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Konzentrisches Taylor-Couette-System

Wie in Kapitel 1.1.2 angedeutet, liegt die Geburtsstunde des wissenschaftlichen Interesses an der Strömung im Zylinderspalt weit mehr als 100 Jahre zurück und ist dem späten 19. Jahrhundert zuzuordnen. Allerdings schrieb George Gabriel Stokes bereits 1845: „... if the inner [cylinder, d. Verf.] were made to revolve too fast, the fluid near it would have a tendency to fly outwards in consequence of the centrifugal force, and eddies would be produced.“ [Stokes 1845]. Er sagte also bei entsprechend hoher Innenzylinderrotation das Auftreten einer Wirbelströmung vorher ohne sie beobachtet zu haben.

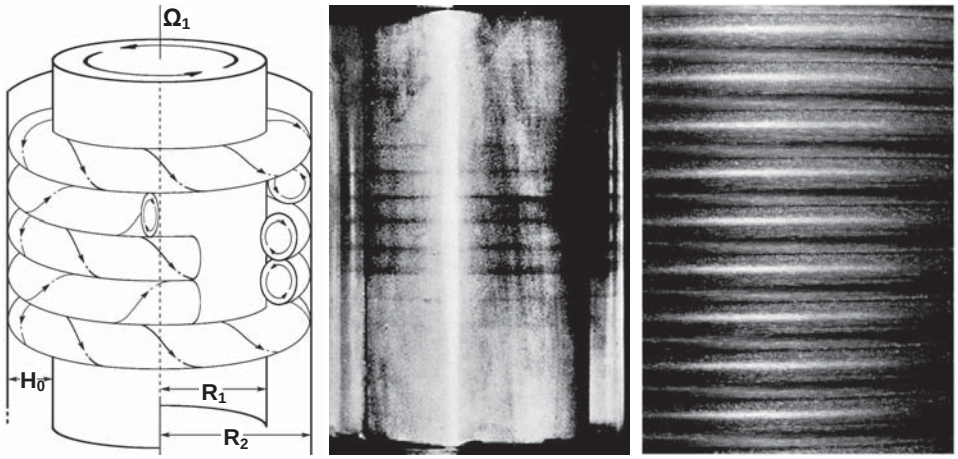


Abbildung 1.6: Die von Stokes vorhergesagte Wirbelströmung. Hierfür setzte sich später der Begriff Taylor-Wirbelströmung. Links: Strömungsskizze [Minbiole und Lueptow]. Mitte: Aufnahme von Taylor [Taylor 1923]. Rechts: Aufnahme von Tom Mullin [Mullin 1993].

Dieses Paper erscheint ebenfalls im Rahmen einer Literatursammlung der Universität Cambridge [Stokes u. a. 1880] 35 Jahre später und wird auch oft als Quelle des obigen Zitats genannt. Im Jahr 1881 stellt Max Margules die Idee einer Viskositätsmessung mit einem Zylinderspaltsystem vor [Margules 1881]. 1888 veröffentlichte der für diese Zeit herausragende Konstrukteur Henry Reginald Arnuplh Mallock eine Arbeit bezüglich seines Experimentes zur Viskositätsmessung [Mallock 1888]. Sein Experiment basierte auf einem sehr ausgefeilten Zylindersystem mit dem entweder Drehmoment am festen Innenzylinder oder am festen

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Außenzylinder, bei jeweils rotierenden anderen Zylinder, gemessen wurde. Er stellte im Fall der Innenzylinderrotation ein nicht lineares Verhalten von Innenzylindergeschwindigkeit zum gemessenem Drehmoment am Außenzylinder fest und schloss daraus, dass diese Strömung immer instabil sei. Was so nicht ganz stimmte. Im Falle der Außenzylinderrotation stellte er hingegen eine stabile Strömung fest, die nur bei sehr hoher Außenrotation instabil wurde. Etwa zeitgleich und unabhängig von Mallock, führte sein französischer Kollege Maurice Marie Alfred Couette 1890 ebenfalls Viskositätsmessungen mit einem zylindrischem Viskosimeter durch. Hierbei handelte es sich um einen Zylinderspalt mit Außenrotation und fest stehendem Innenzylinder [Couette 1890]. Da es sich bei dieser Art der Zylinderspaltströmung um die stabile konzentrische laminare Grundströmung handelte und Couette einer der meistzitierten Strömungsmechaniker seiner Zeit war, setzte sich der Begriff der „Couette-Strömung“ durch [Donnelly 1991]. Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnung der „ebenen Couette-Strömung“ für eine Scherströmung zwischen zwei relativ bewegten Platten. Russell James Donnelly erwähnt in einem sehr ausführlichem Artikel zur Historie der Taylor-Couette Strömung in Physics Today [Donnelly 1991], dass William Thomson, 1. Baron Kelvin von Mallock‘s Arbeiten sehr angetan war und seinerzeit über eine Stabilitätsanalyse zu diesem Thema nachdachte. In diesem Zusammenhang stand er in Briefkorrespondenz mit John William Strutt, 3. Baron Rayleigh, der im Jahr 1916, für die reibungsfreie Zylinderspaltströmung zeigen konnte, dass bei in radialer Richtung größer werdendem Drehimpuls eine stabile wirbelfreie Strömung vorliegt [Rayleigh 1916]. Sei $\Omega(r)$ die Winkelgeschwindigkeit an der Spaltposition $r \in [R_1; R_2]$ und $\tilde{\mu} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ das Rotationsverhältnis, dann kann Rayleigh‘s Stabilitätskriterium für eine reibungsfreie Strömung folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\Omega(r)\right) > 0 \tag{1.1}$$

oder

$$\Omega_1 {R_1}^2 < \Omega_2 {R_2}^2 \,, \tag{1.2}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\eta^2 = \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} < \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \tilde{\mu} \,. \tag{1.3}$$

Wobei

$$\eta = \frac{R_1}{R_2} \tag{1.4}$$

das Radienverhältnis des Innenzylinders zum Außenzylinder beschreibt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

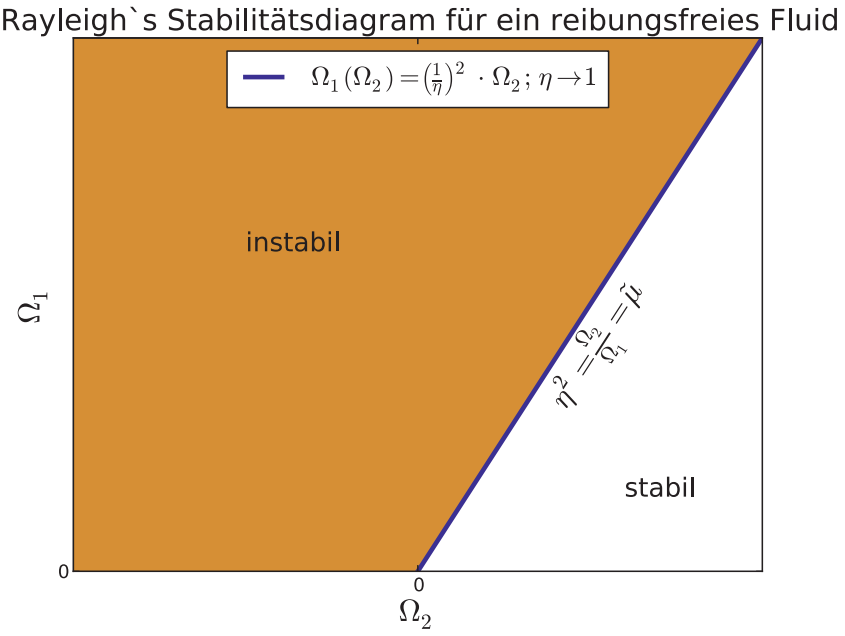


Abbildung 1.7: Rayleigh's Stabilitätskriterium für ein reibungsfreies Fluid im konzentrischen Zylinderspalt von 1916 [Rayleigh 1916]. Die blaue Linie kennzeichnet die Stabilitätsgrenze aus Gleichung (1.3).

Im Jahr 1923 gelingt Taylor mit seiner linearen Stabilitätsanalyse [Taylor 1923] der wichtigste Meilenstein dieser Epoche. Mit umfangreichen eigenen Messungen an drei verschiedenen Spaltweiten (R_1=3.00; 3.55; 3.80 cm bei R_2=4.035 cm) und außergewöhnlich hohem mathematischen Aufwand für eine Zeit ohne Computer, erstellt er drei Stabilitätsdiagramme $\frac{\Omega_1}{\nu}\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)$ (Abbildung 1.8, 1.9 und 1.10) sowie eine allgemeine mathematische Formulierung (Gleichungen (1.6) und (1.7)), welche das Einsetzen der Instabilität (Abbildung 1.6) gegenüber der stabilen Couette Strömung beschreibt. Diese ist allerdings nur für enge Spalte gültig, bei denen eine Abhängigkeit von $\frac{R_2-R_1}{R_1}$ (Gleitlagerbereich: $\sim \mathcal{O}\,(10)^{-3}$) berücksichtigt, $\left(\frac{R_2-R_1}{R_1}\right)^2$ ($\sim \mathcal{O}\,(10)^{-6}$) aber vernachlässigt wird. Der Parameter

$$\Psi = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \tag{1.5}$$

ist hierbei die normierte Spaltweite. Die Gültigkeit für kleine normierte Spaltweiten Ψ wird weiter unten in Abbildung 1.11 verdeutlicht.

Anhand der drei Messreihen validiert er seine mathematische Formulierung. Hierzu zwei originale Abbildungen aus seinem Paper.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

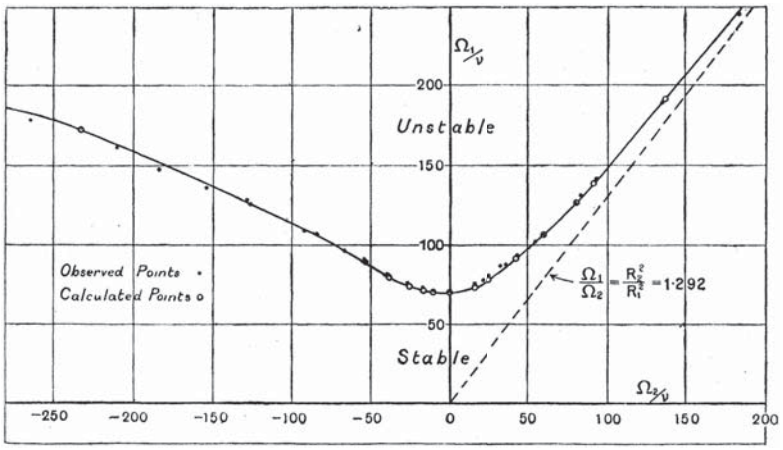


Abbildung 1.8: Taylor's rechnerische und experimentelle Ergebnisse für Ψ=0.06184 bei R_1=3.8 cm, R_2=4.035 cm [Taylor 1923]. Die gestrichelte Linie ist die Rayleigh-Grenze aus Gleichung (1.3) und Abbildung 1.7.

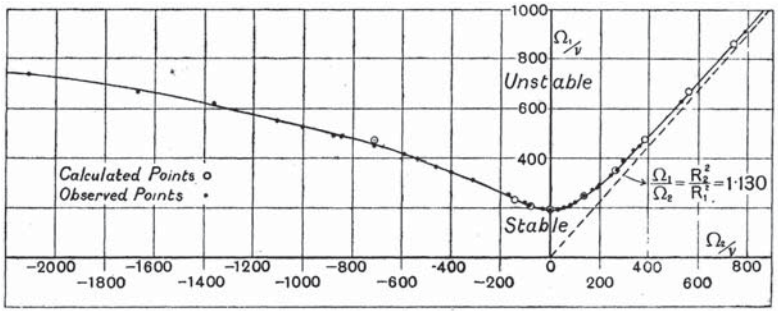


Abbildung 1.9: Taylor's rechnerische und experimentelle Ergebnisse für Ψ=0.13662 bei R_1=3.55 cm, R_2=4.035 cm [Taylor 1923] .

Gleichungen (1.6) und (1.7) beschreiben Taylor's Stabilitätskriterium. Obwohl es nur für $\tilde{\mu} \in [0; 1]$ gelten dürfte, stellte er fest, daß diese Formulierung bis $\tilde{\mu} = -0.5$ in guter Näherung mit seinen Messergebnissen übereinstimmte.

$$P = \frac{\pi^4 \nu^2 (R_1 + R_2)}{2\Omega_1^2 R_1^2 (R_2 - R_1)^3 \left(1 - \frac{\tilde{\mu} {R_2}^2}{{R_1}^2}\right)(1 - \tilde{\mu})} \tag{1.6}$$

$$P = 0.0571 \left(\frac{1 + \tilde{\mu}}{1 - \tilde{\mu}} - 0.652 \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\right) + 0.00056 \left(\frac{1 + \tilde{\mu}}{1 - \tilde{\mu}} - 0.652 \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}\right)^{-1} \tag{1.7}$$

Die Vorgehensweise zur Erstellung eines Punktes des Diagramms wie in Abbildung 1.8 ist Folgende:

- Vorgabe der Spaltgeometrie R_1, R_2 und Wählen eines Rotationsverhältnisses $\tilde{\mu}$ mit $\tilde{\mu} \in [-0.5; 1]$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

- Berechnung von P mittels Gleichung (1.7)
- Einsetzen des berechneten P in Gleichung (1.6) und Berechnen von $\frac{\Omega_1}{\nu}$
- Aus $\tilde{\mu}$ und $\frac{\Omega_1}{\nu}$ ergibt sich das entsprechende $\frac{\Omega_2}{\nu}$

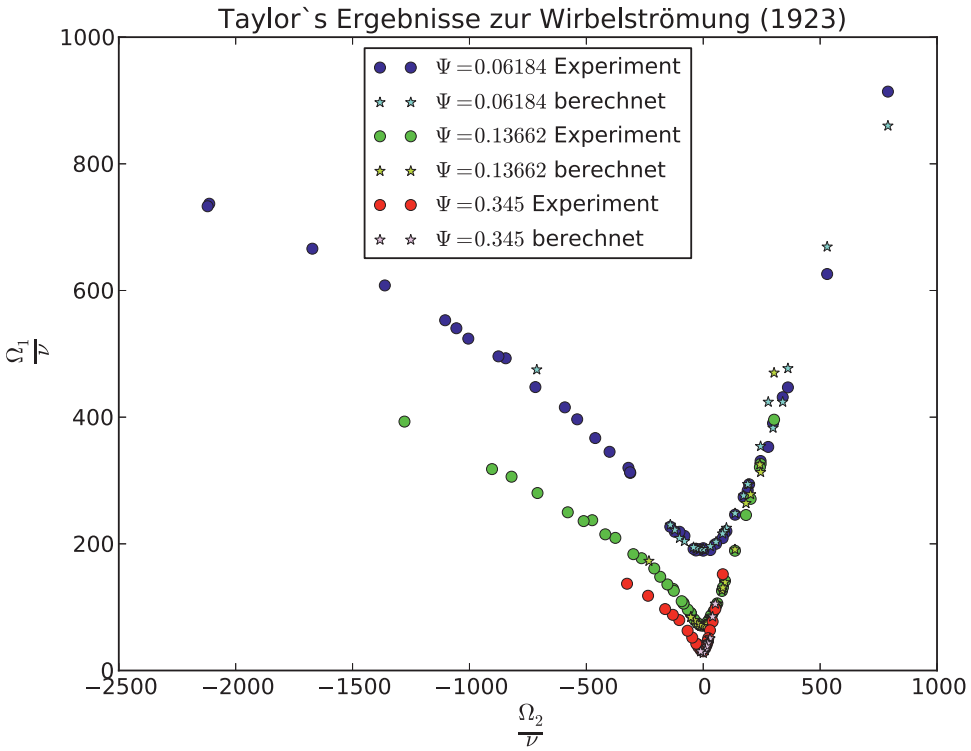


Abbildung 1.10: Taylor‘s rechnerische und experimentelle Ergebnisse zusammengefasst in einem Diagramm. Die abgebildeten berechneten Werte sind bis auf 2 Sonderrechnungen im Bereich $\tilde{\mu} \in [-0.5; 1]$.

Vergleicht man P (1.6) (1.7) mit der später definierten dimensionslosen Kennzahl Reynolds-Zahl (1.8) wird oder der Taylor zu Ehren benannten Kennzahl Taylor-Zahl (1.8),

$$Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{U \cdot L}{\nu} = \frac{\Omega_1 R_1 \left(R_2 - R_1\right)}{\nu} \tag{1.8}$$

wobei U = eine charakteristische Geschwindigkeit der Strömung und L = ein charakteristisches Längenmaß in der Strömung ist,

$$Ta = 2Re^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} = 2Re^2 \frac{1 - \eta}{1 + \eta} = 2 \left(\frac{\Omega_1}{\nu}\right)^2 {R_1}^2 \frac{\left(R_2 - R_1\right)^3}{R_1 + R_2} \tag{1.9}$$

ergeben sich folgende Abhängigkeiten:

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$Re_{krit} = \sqrt{\frac{\pi^4 \left(R_1 + R_2\right)}{2 \left(R_2 - R_1\right) P}} \tag{1.10}$$

$$Ta_{krit} = \frac{\pi^4}{P} \tag{1.11}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Reynolds-(1.8) und Taylor-Zahl(1.9) auch abweichend definiert werden. Beispielsweise findet man unter anderem auch $Ta = 4Re^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$. In dieser Arbeit werden bei selbst erbrachten Ergebnissen die in Gleichung (1.8) und (1.9) notierten Definitionen wie bei DiPrima [DiPrima u. a. 1984] verwendet. In guter Näherung gilt für Taylor's Formulierung auch:

$$\text{für } R_1 \gg (R_2 - R_1): \; Re\sqrt{\Psi} = \frac{U_1 \left(R_2 - R_1\right)}{\nu} \sqrt{\frac{\left(R_2 - R_1\right)}{R_1}} \approx 41.1 \; . \tag{1.12}$$

Da der Begriff „*viel kleiner*“ dehnbar ist, soll die folgende Tabelle qualitative Aussagen über eine angemessene Verwendung vermitteln.

Ψ	η	Re_{krit} (1.7) (1.10)	Re_{krit} (1.12)	Fehler (1.12) zu (1.10) in %
0.1	$0.\overline{90}$	137.66	129.97	5.914
0.01	$0.\overline{9900}$	413.37	411.00	0.576
0.001	$0.\overline{999000}$	1300.50	1299.70	0.062 (Gleitlagerbereich)
0.0001	$0.\overline{99990000}$	4110.43	4110.00	0.010

In diesem Zusammenhang kann man nun auch auf den Gültigkeitsbereich der eigentlichen Taylor'schen Beschreibung (Gleichung (1.7) und (1.10)) zurückzukommen. Hierzu wurde sie mit einem breitem Wertespektrum von Spaltweiten (bzw. Radienverhältnisse) von DiPrima [DiPrima u. a. 1984],[DiPrima und Swinney 1985] verglichen (Abbildung 1.11).

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

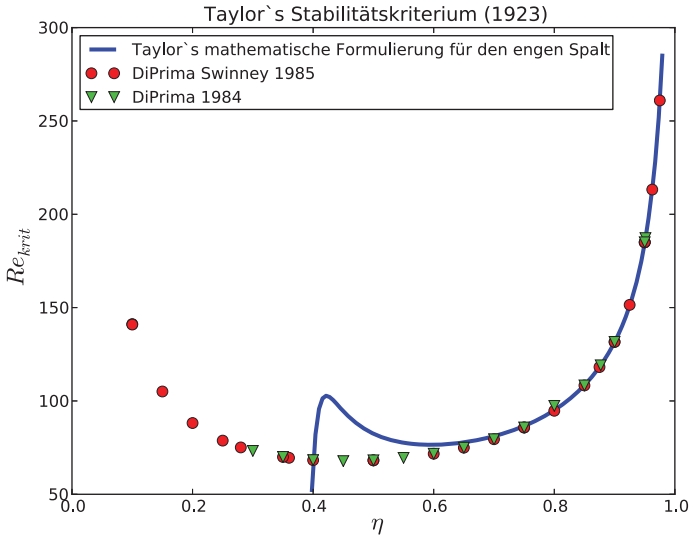


Abbildung 1.11: Taylor's Formulierung gilt nur für kleine Spalte. Etwa für $\eta > 0.75$, was einer normierten Spaltweite von $\Psi < 0.\bar{3}$ entspricht, ist keine Abweichung zu aktuellen Daten festzustellen.

1933 bestätigt Fritz Wendt in einer umfangreichen experimentellen Arbeit [Wendt 1933] unter anderem Taylor's Stabilitätsformulierung ((1.6),(1.7)).

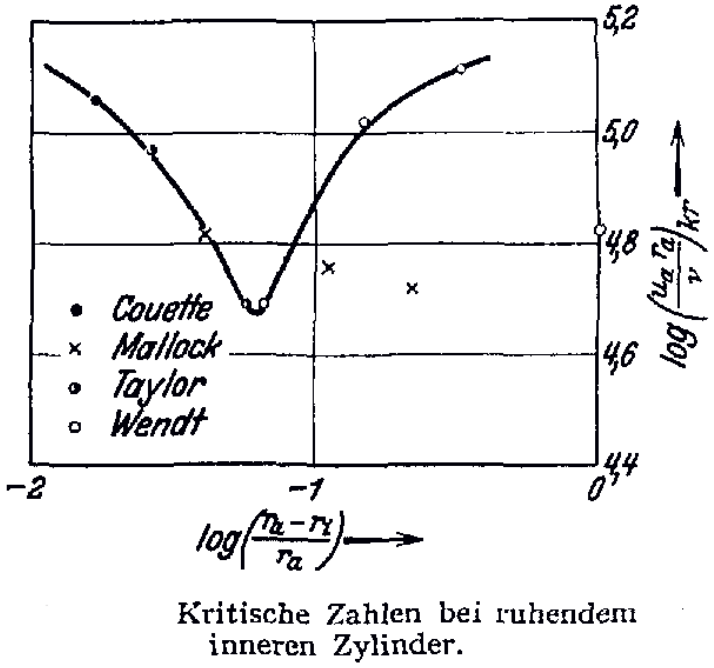


Abbildung 1.12: Wendt's Messungen zur Stabilitätsgrenze. Abbildung aus 1.12.

Im Gegensatz zu Abbildung 1.11 ist in Abbildung 1.12 eine logarithmische Darstellung auf Ordinaten- und Abszissenachse vorgenommen worden: $log\,(Re_{krit})\,(log(\psi))$. Des Weiteren benutzt er ein von Definition (1.8) abweichendes Längenmaß $L = R_2$ statt $L = R_2 - R_1$.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Somit sind die Reynolds-Zahlen in 1.12 wesentlich höher als in 1.11. Die Bestätigung von Taylor's Formulierung war allerdings nur ein Teil von Wendt's Intention. Weit eher in Erinnerung bleiben seine umfangreichen Geschwindigkeitsprofilmessungen (Abbildung 1.13) im ausgebildeten turbulenten Bereich zur Überprüfung von Prandtl's Ansatz des Mischungsweges.

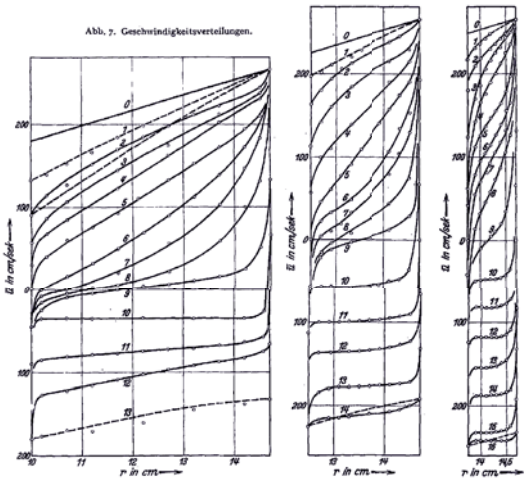


Tabelle der Drehzahlen

zu Abb. 7a $r_a - r_i = 4{,}70$ cm				zu Abb. 7b $r_a - r_i = 2{,}20$ cm				zu Abb. 7c $r_a - r_i = 0{,}95$ cm			
Nr.	n_a	n_i	$n_i:n_a$	Nr.	n_a	n_i	$n_i:n_a$	Nr.	n_a	n_i	$n_i:n_a$
0	+ 172	+ 172	+ 1,0	0	+ 172	+ 172	+ 1,0	0	+ 172	+ 172	+ 1,0
1	+ 172	+ 125	+ 0,725	1	+ 172	+ 150	+ 0,875	1	+ 172	+ 150	+ 0,875
2	+ 172	+ 86	+ 0,5	2	+ 172	+ 125	+ 0,725	2	+ 172	+ 125	+ 0,725
3	+ 172	+ 54	+ 0,312	3	+ 172	+ 86	+ 0,5	3	+ 172	+ 86	+ 0,5
4	+ 172	+ 29	+ 0,166	4	+ 172	+ 43	+ 0,25	4	+ 172	+ 43	+ 0,25
5	+ 172	+ 0	+ 0,0	5	+ 172	+ 0	+ 0,0	5	+ 172	+ 29	+ 0,166
6	+ 172	− 43	− 0,25	6	+ 172	− 43	− 0,25	6	+ 172	+ 0	+ 0,0
7	+ 172	− 86	− 0,5	7	+ 172	− 86	− 0,5	7	+ 172	− 29	− 0,166
8	+ 172	− 172	− 1,0	8	+ 172	− 172	− 1,0	8	+ 172	− 86	− 0,5
9	+ 86	− 172	− 2,0	9	+ 125	− 172	− 1,376	9	+ 172	− 172	− 1,0
10	+ 43	− 172	− 4,0	10	+ 43	− 172	− 4,0	10	+ 86	− 172	− 2,0
11	+ 0	− 172	∞	11	+ 0	− 172	∞	11	+ 43	− 172	− 4,0
12	− 43	− 172	+ 4,0	12	− 43	− 172	+ 4,0	12	+ 0	− 172	∞
13	− 86	− 172	+ 2,0	13	− 86	− 172	+ 2,0	13	− 53	− 172	+ 3,2
				14	− 125	− 172	+ 1,376	14	− 86	− 172	+ 2,0
								15	− 125	− 172	+ 1,376
								16	− 150	− 172	+ 1,147

Abbildung 1.13: Wendt's Geschwindigkeitsprofilmessungen. Abbildung aus 1.12.

1961 gelingt Chandrasekhar [Chandrasekhar 1961] eine approximierte Lösung (1.13) für den engen Spalt.

$$Ta_{krit} = \frac{3416}{1+\tilde{\mu}} \left[1 - 0.00761 \left(\frac{1-\tilde{\mu}}{1+\tilde{\mu}} \right)^2 \right] \; ; \text{ für } \eta \to 1 \wedge \tilde{\mu} > 0 \tag{1.13}$$

Ähnlich wie bei Taylor's Lösung, liefert die Formulierung (1.13) über den eigentlich definierten Bereich hinaus auch für -0.25 $< \tilde{\mu} <$ 1 sehr gute Ergebnisse. Somit erhält man für den Fall mit Innenrotation und festem Außenzylinder ($\tilde{\mu}$=0) eine kritische Taylor-Zahl von $Ta_{krit} = 3390$. Dieser Wert liegt sehr nahe an dem mit Taylor's Formel (1.7) erhaltenen Wert von Ta_{krit}=3379. Chandrasekhar's Definition der Taylor-Zahl unterscheidet sich hierbei um den Vorfaktor 2 von (1.9). Was bedeutet, daß der mit Hilfe von (1.7) und (1.9) berechnete Wert verdoppelt wurde um die Taylor-Zahlen zu vergleichen.

Für negative $\tilde{\mu}$ tritt Instabilität lediglich in Nähe des Innenzylinders auf. DiPrima [DiPrima 1955] lieferte deshalb die Idee eine neue Längenskala zu betrachten, welche sich vom Innenzylinder bis zu einem nodalen Punkt zwischen Innen und Außenzylinder erstreckt an dem die Geschwindigkeit 0 ist. Sein numerisches Resultat wurde durch Harris und Reid [Harris und Reid 1964] zu Gleichung (1.14) verbessert.

$$Ta_{krit} = 1178.6\,(1-\tilde{\mu})^4 \; ; \text{ für } \eta \to 1 \wedge \tilde{\mu} \to -\infty \tag{1.14}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

DiPrima und Swinney [DiPrima und Swinney 1985] konstatieren, dass Gleichung (1.14) von $-\infty$ mit annehmbarer Genauigkeit bis $\tilde{\mu} \to -1$ hält. Somit liegt mit (1.13) und (1.14) mit Ausnahme von $-1 < \tilde{\mu} < -0.25$ eine nahezu komplette Lösung für den engen Spalt vor.

1968 zeigten Davey, DiPrima und Stuart [Davey u. a. 1968], dass bei weiterer Erhöhung der Reynolds-Zahl eine weitere kritische Reynolds-Zahl existiert, bei der die Taylor-Wirbelströmung instabil wird und eine wellenartige Wirbelströmung (engl.:wavy vortex flow) 1.14 einsetzt. Zuvor gab es diesbezüglich umfangreiche Messungen von Coles [Coles 1965].

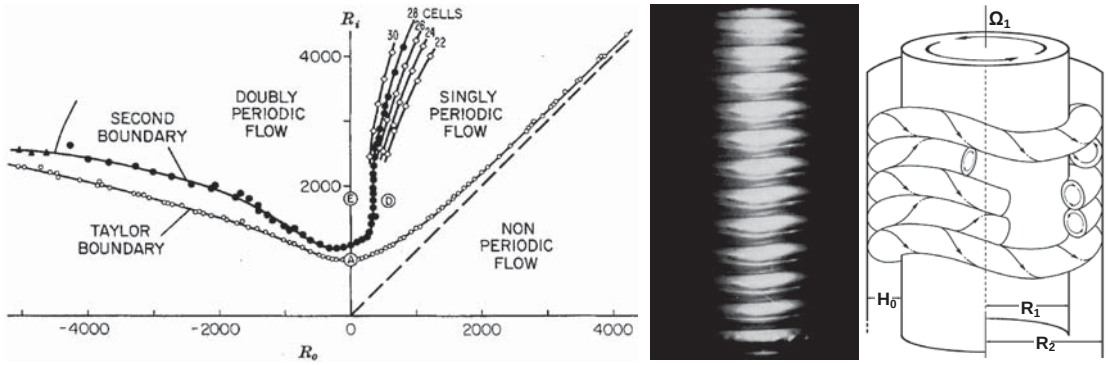


Abbildung 1.14: Messungen von D. Coles zur wellenartigen Wirbelströmung. 1. und 2. Bild von links aus [Coles 1965]. Rechte Abbildung aus [Minbiole und Lueptow]

Gollub et al.[Gollub und Swinney 1975], Fenstermacher et al. [Fenstermacher u. a. 1979] oder Walden und Donnely [Walden und Donnelly 1979] beschreiben übereinstimmend eine weitere Instabilität der wellenartigen Wirbelströmung bevor der Übergang zur Turbulenz erfolgt. Des Weiteren berichtet Coles [Coles 1965] von spiralen Wirbeln und Van Atta untersucht spirale Turbulenz [Atta 1966]. Letztlich erstellt Andereck et al. [Andereck u. a. 1986] an einem Zylinderspaltexperiment mit einem Radienverhältnis von $\eta = 0.883$ und mit einem bis dahin einmaligen Rotationsverhältnisspektrum erstmals eine Übersichtskarte der auftretenden Instabilitäten.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

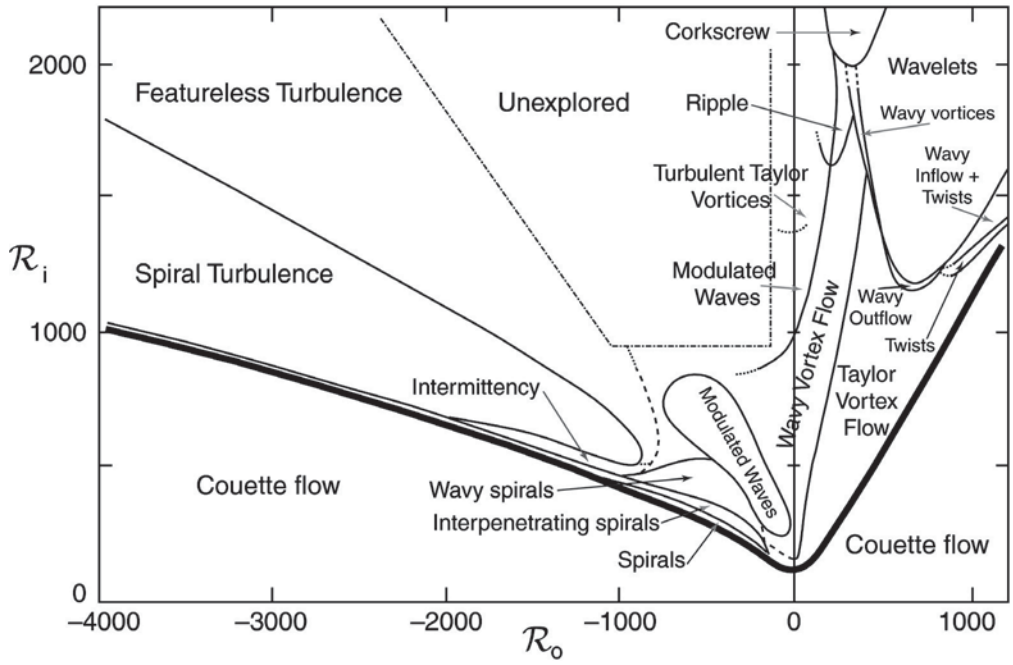


Abbildung 1.15: Instabilitäten im Taylor-Couette-System [Andereck u. a. 1986]. $\mathcal{R}_o = \frac{\Omega_2 R_2 (R_2 - R_1)}{\nu}$ bezeichnet die Reynolds-Zahl für die Außenrotation. $\mathcal{R}_i = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu}$ für die Innenrotation.

Für den Fall mit festem Außenzylinder und Rotation des Innenzylinders, befindet man sich auf der $\mathcal{R}_o = 0$- Geraden. Hier werden bei entsprechenden Rotationsgeschwindigkeit folgende Instabilitäten durchlaufen:

- Taylor-Wirbelströmung (Taylor vortex flow)
- wellenartige Wirbelströmung (wavy vortex flow)
- modulierte wellenartige Wirbelströmung (modulated wavy vortices)
- turbulente Taylor-Wirbelströmung (turbulent Taylor vortices)
- voll ausgebildete Turbulenz (featureless turbulent flow)

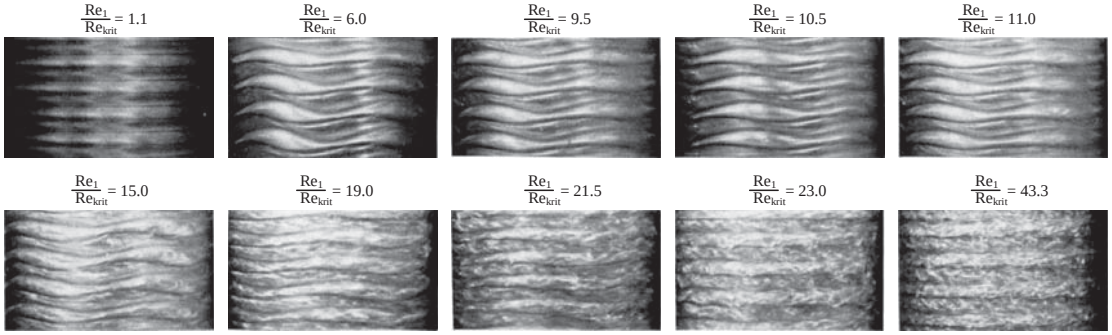


Abbildung 1.16: Fotografien einiger Strömungszustände im Zylinderspalt mit Innenrotation, festem Außenzylinder und zunehmender Reynolds-Zahl [Fenstermacher u. a. 1979].

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

1996 gelingt Esser & Grossmann [Esser und Grossmann 1996], nachdem bereits Donnely & Fultz [Donnelly und Fultz 1960], Coles [Coles 1967], Joseph [Joseph 1976] oder Eckhardt & Yao [Eckhardt und Yao 1995] Versuche unternahmen ein Stabilitätskriterium über den gesamten Parameterraum von Radienverhältnis η und Rotationsverhältnis $\tilde{\mu}$ zu finden, mit Gleichung (1.15) und den Definitionen (1.16)-(1.21) ein approximiertes Stabilitätskriterium für die Taylor-Wirbelströmung über den vollen Parameterraum.

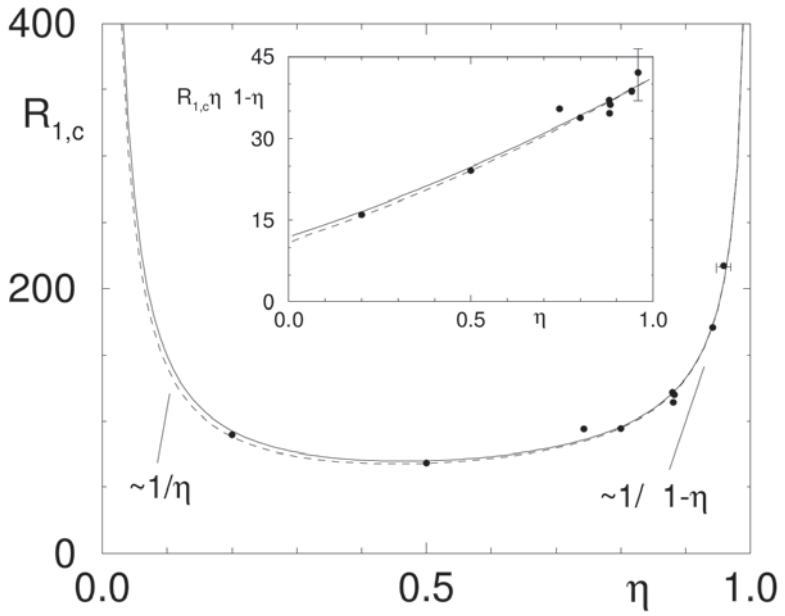


Abbildung 1.17: Kritische Reynolds-Zahl für die Instabilität der Couette-Strömung gegenüber der Taylor-Wirbelströmung in Abhängigkeit vom Radienverhältnis η [Esser und Grossmann 1996].

$$(\mathcal{Re}_1 - \mathcal{Re}_2)^2 \frac{R_n^2 - R_p^2}{R_p^2} \frac{(1+\eta)^2}{(1-\eta)(3+\eta)} = \triangle \left(a \frac{d_n}{d} \right)^{-4} \tag{1.15}$$

Es ist eine implizite Beschreibung für die Funktion der normierten Reynoldszahlen $\mathcal{Re}_1$ ($\mathcal{Re}_2$) (Stabilitätskurve). Der Hauptansatz ist ein Energiegleichgewicht (energy balance) $\delta E_{kin} \sim \delta E_{vis}$ zwischen der Transferrate der kinetischer Energie der Hauptströmung der verwendeten Störung und der Rate der viskosen Dissipation der kinetischen Energie, wie es bereits von Stuart [Stuart 1958] in seinen nichtlinearen Stabilitätsberechnungsansatz verwendet wurde. Der entscheidende Unterschied ist die Definition des Spaltbereiches ℓ (1.18), welcher für die Instabilität verantwortlich ist und die Position R_p (1.21) von der aus die Instabilität einsetzt. Einen ähnlichen Denkansatz hierzu lieferte bereits DiPrima [DiPrima 1955] der bei Gegenrotation vorschlug eine relevante Längenskala d_1 vom Innenzylinder zum nodalen Punkt ($U_{\text{tangential}} = 0$) im Geschwindigkeitsprofil zu betrachten.

Mit den Definitionen:

$$d = R_2 - R_1;\ d_n = R_n - R_1;\ \alpha = 0.1556; \tag{1.16}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$Re_{1,c} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{(1+\eta)^2}{2\eta\sqrt{(1-\eta)(3+\eta)}};\ \mathcal{Re}_1 = \frac{Re_1}{Re_{1,c}};\ \mathcal{Re}_2 = \frac{Re_2}{\eta Re_{1,c}} \tag{1.17}$$

$$\triangle(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x < 1 \\ 1, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad ;\ a(\eta) = (1-\eta)\left[\sqrt{\frac{(1+\eta)^3}{2(1+3\eta)}} - \eta\right]^{-1} \tag{1.18}$$

Des Weiteren ist ℓ der Teil des Spaltes d, der für die Instabilität verantwortlich ist.

$$\ell = \alpha d \triangle\left(a\frac{d_n}{d}\right) \text{ mit } \triangle(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x < 1 \\ 1, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \tag{1.19}$$

Im Falle von Korotation ($Re_2 > 0$) ist $\ell = \alpha d$. R_n definiert die Position des nodalen Punktes.

$$R_n = R_2\sqrt{\frac{Re_1 - \eta Re_2}{Re_1 - \frac{Re_2}{\eta}}},\ \text{für } Re_2 \leq 0 \tag{1.20}$$

R_p beschreibt die Position, von der aus die Instabilität einsetzt oder eben das Zentrum der entstehenden Wirbel. Für Innenrotation mit festem Außenzylinder ist dies die Spaltmitte.

$$R_p = R_1 + \frac{d}{2}\triangle\left(a\frac{d_n}{d}\right) \tag{1.21}$$

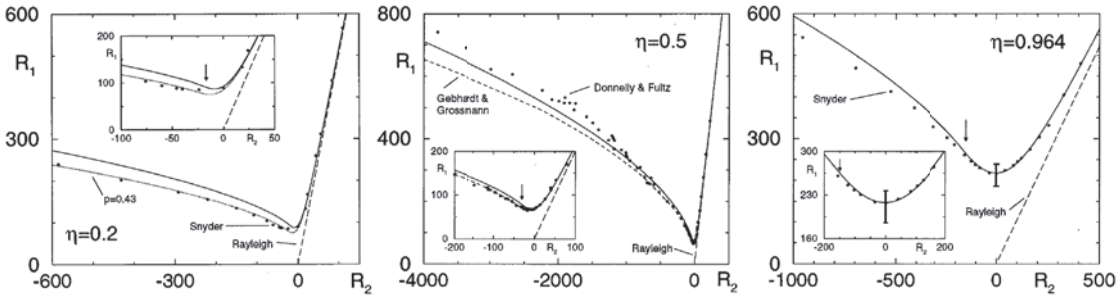


Abbildung 1.18: Stabilitätskurven $R_1(R_2)$ für weiten ($\eta = 0.2$), mittleren ($\eta = 0.5$) und engen Spalt($\eta = 0.964$) aus η [Esser und Grossmann 1996]. R_1 und R_2 beschreiben die Reynolds-Zahlen der Innen- und Außenrotation.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

1.2.2 Exzentrisches Taylor-Couette-System und hydrodynamische Schmierung

Im Jahr 1883 führt Beauchamp Tower ein Experiment zur Zapfenreibung durch. Nachdem seine Experimente nahezu abgeschlossen waren, bohrt er durch den Lastkörper B 1.19 eine Ölversorgungsbohrung. Zu seiner Überraschung stellt er fest, dass durch die Bohrung Öl in erheblichem Maße austritt. „...*The oil flowing over the top of the cap and made a mess.* ...“ [Tower 1883]. Seine Schilderungen beschreiben den Druckaufbau im Schmierfilm eines Gleitlagers.

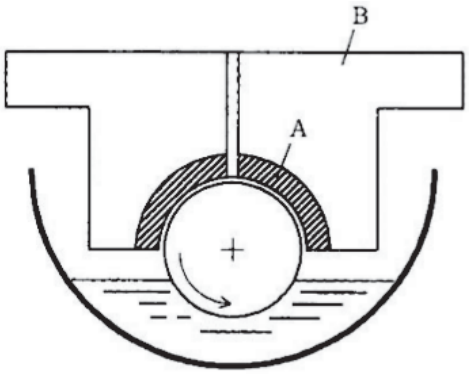


Abbildung 1.19: Tower‘s Experiment: Achse im Ölbad mit Gleitlagerschale A und Lastkörper B.

Drei Jahre später stellt Osbourne Reynolds [Reynolds 1886] einen Lösungsansatz für die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung für das Tower-Experiment vor. Mit den nach ihm benannten Differentialgleichungen (2.13) (2.14) legt er den Grundstein für die Tribologie von Gleitlagern. Sommerfeld [Sommerfeld 1904] gelingt 1904 eine analytische Lösung der Differentialgleichungen für das unendlich lange (axiale Richtung) Lager. 1918 untersucht Rayleigh [Rayleigh 1918] welche Oberflächenformen zur maximalen Lagertragkraft führen. Du Bois & Ocvirk [Bois und Ocvirk 1953] berechnen eine Lösung für das schmale Lager.

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y-h)y + U_0\frac{h-y}{h} + U_1\frac{y}{h}$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}(y-h)y$$

$$\frac{dp}{dx} = -6\mu U\frac{h-h_1}{h^3}$$

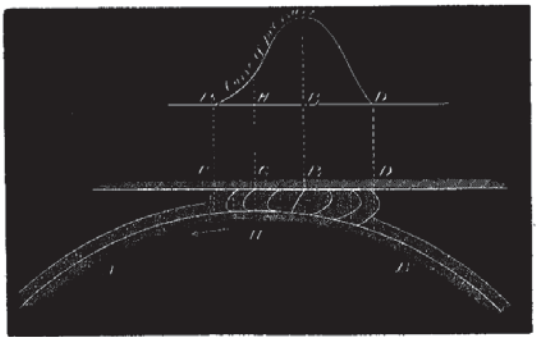


Abbildung 1.20: Reynolds‘sche Differentialgleichungen und Druckverlaufbeispiel aus [Reynolds 1886].

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

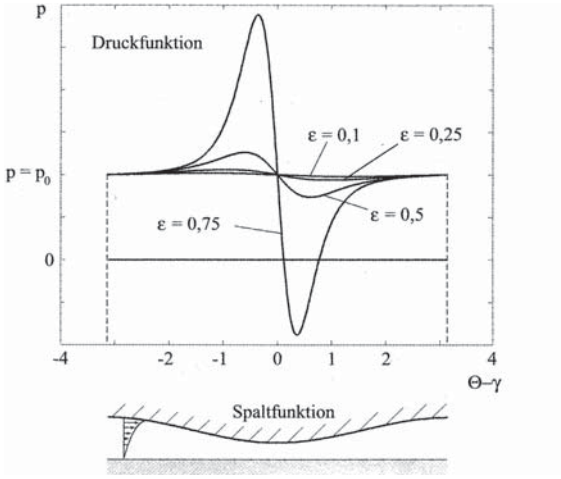


Abbildung 1.21: Typische symmetrische Druckverteilung nach Sommerfeld für verschieden Exzentrizitäten (Lasten). Abbildung aus [Gasch u. a. 2006].

Die Sommerfeld'sche Druckverteilung widerspricht aber der Realität, da Fluide keine Zugkräfte übertragen können. Aus diesem Grund schlägt Gümbel [Gümbel und Everling 1925] vor, alle negative Drücke auf 0 zu setzen, was wiederum die Massenerhaltung global nicht befriedigen kann. Dies gelang 1931 Swift [Swift 1931] und 1933 auch Stieber [Stieber 1933]. Für $\varphi \in [\varphi_1; 2\pi]$ gilt $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ (Abbildung 1.22).

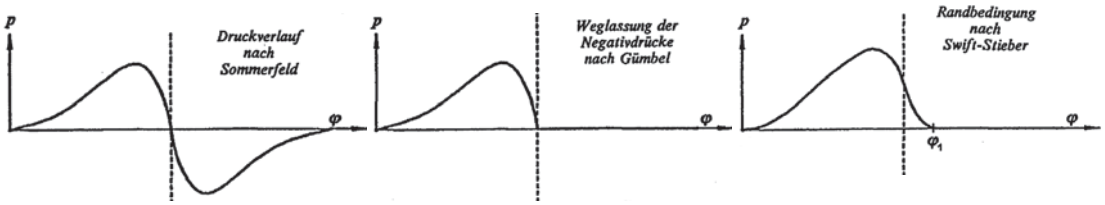


Abbildung 1.22: Randbedingungen zum Lösen der Reynolds'schen Differentialgleichungen. Swift-Stieber ist auch als Reynolds-Randbedingung bekannt, da er diese Randbedingung in seinem Paper [Reynolds 1886] bereits anregte. Abbildung modifiziert aus [Meharzi 1989].

1963 stellt DiPrima [DiPrima 1963] eine erste Theorie zur Stabilität der Couette-Strömung im engen zylindrischen Spalt vor. Zunächst wertet er experimentelle Vorarbeiten von Schultz-Grunow[Schultz-Grunow 1959] aus, der umfangreiche Messungen am kon- und exzentrischen Taylor-Couette-System durchgeführt hatte. Er schließt aus den Ergebnissen folgende Approximation für den engen konzentrischen Spalt:

- Wenn die dimensionslose Kennzahl $Re\sqrt{\Psi}$ einen Wert von mindestens 41.2 besitzt und dabei eine Reynolds-Zahl von ungefähr 2000 überschreitet, dann werden Taylor-Wirbel entstehen.
- Wenn die dimensionslose Kennzahl $Re\sqrt{\Psi}$ einen Wert von mindestens 41.2 besitzt und dabei eine Reynolds-Zahl von ungefähr 2000 überschreitet, dann werden Taylor-Wirbel entstehen. Sollte der Spalt hierbei eine kritische normierte Spaltweite von circa 1/2500

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

unterschreiten, kann ohne das Auftreten von weiteren Instabilitäten direkt Turbulenz einsetzen.

DiPrima [DiPrima 1963] verweist hierbei auf die Abschätzung (1.12) aus Taylor's Arbeit [Taylor 1923], die eigentlich mit $Re\sqrt{\Psi} = 41.1$ notiert ist. Zu dieser Zeit lag aber Chandrasekhar's leicht verbesserte Lösung (1.13) für den engen Spalt von $\sqrt{\frac{3390}{2}} \approx 41.17$ schon vor und 41.2 ist somit berechtigt.

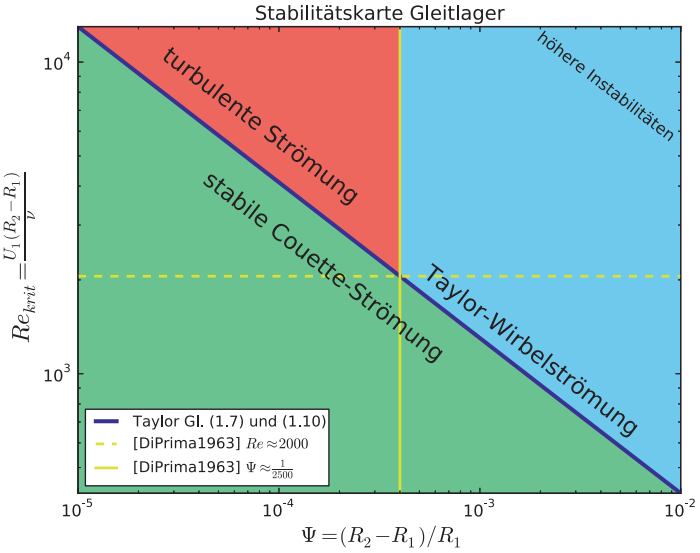


Abbildung 1.23: Stabilitätsapproximation für den engen konzentrischen Spalt nach [DiPrima 1963].

Im Anschluss an die Experimentauswertung, folgt seine lokale Theorie für den exzentrischen Spalt. Ein Grundgedanke ist hierbei, dass aufgrund der Verschiebung e (0.1) von der konzentrischen Position eine Exzentrizität ε (0.1)erreicht wird und es somit lokal am Umfangspositionswinkel (θ) verschieden große Spalte $h(\theta)$ und daher verschieden große Reynolds-Zahlen $Re(\theta)$ gibt. Des Weiteren existiert bei einer entsprechenden Exzentrizität eine entsprechende Druckverteilung in Umfangsrichtung (siehe Abbildung 1.22). Aus dieser definiert er eine weitere Reynolds-Zahl R_p (1.23) neben R_r (1.22) basierend auf dem lokalen Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial \theta}$.

$$Re_r = \frac{U_1 H_0}{\nu} \tag{1.22}$$

$$Re_p = \left(\frac{-H_0^2}{12\mu R_1}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)\frac{H_0}{\nu} = \frac{U_p H_0}{\nu} \tag{1.23}$$

Eine Superposition aus beiden lokalen Reynolds-Zahlen muss Taylor's Kriterium (1.12) erfüllen. Zur Illustration setzt er für $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ die Sommerfeldlösung 1.22 für das unendlich lange Lager

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

von [Pinkus und Sternlicht 1961] ein und erhält die in Abbildung 1.24 vom Positionswinkel und Exzentrizität abhängigen Reynolds-Zahlen.

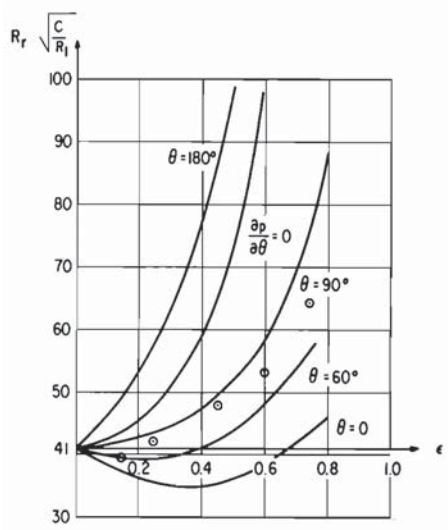


Abbildung 1.24: Lokale Stabilität im engen exzentrischen Spalt aus [DiPrima 1963]. $\theta = 0$ entspricht der Spaltumfangsposition des weitesten Spalts aufgrund der exzentrischen Position des Innenzylinders. Die mit $\odot$ markierten Punkte sind Messwerte von Cole [Cole 1957] bei $\Psi = 0.1$.

Die lokale Theorie von DiPrima traf für diverse Messungen ([Cole 1965] [Castle und Mobbs 1967] [Vohr 1968]) nicht zu. 1968 testet Ritchie [Ritchie 1968] verschiedene symmetrische und anti-symmetrische Funktionen für die Geschwindigkeit (a-e in Abbildung 1.25) mit DiPrima's Ansatz [DiPrima 1963] und spricht von einer unteren Gültigkeitsgrenze (lower bound) im Zusammenhang mit DiPrima's lokaler Theorie.

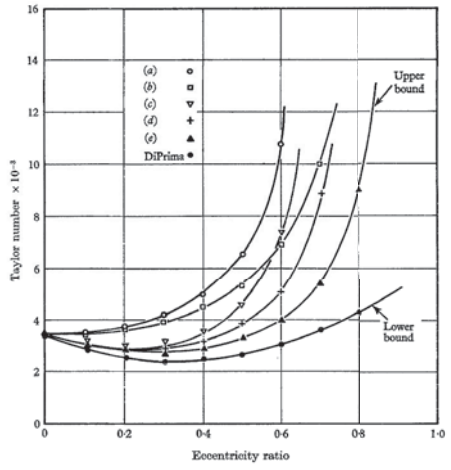


Abbildung 1.25: Ritchie's Ergebnisse [Ritchie 1968] für verschiedene funktionale Geschwindigkeitsansätze in DiPrima's lokaler Theorie [DiPrima 1963].

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

1972 [DiPrima und Stuart 1972] und in einem 1975 folgendem Paper [DiPrima und Stuart 1975] veröffentlichen DiPrima und Stuart ihre „*non-local Theory* “. Die wichtigsten Aussagen sind hierbei das Einsetzen eines Rückströmgebietes, falls eine Exzentrizität von

$$\varepsilon \geq 0.30278 + 0.03818\Psi \tag{1.24}$$

erreicht wird. Des Weiteren wird die Couette-Strömung instabil, wenn eine kritischen Taylor-Zahl Ta_a

$$Ta_a = 1695\,(1 + 1.162\Psi)\left(1 + 1.125\varepsilon^2\right) \tag{1.25}$$

überschritten wird. Somit erhält man für den konzentrischen, engen Spalt $(\Psi; \varepsilon \to 0)$ exakt Chandrasekhar‘s Wert von $Ta_{krit} = 1695$ (1.13) $= Ta_a|_{\Psi\to 0;\ \varepsilon\to 0}$ (1.25).

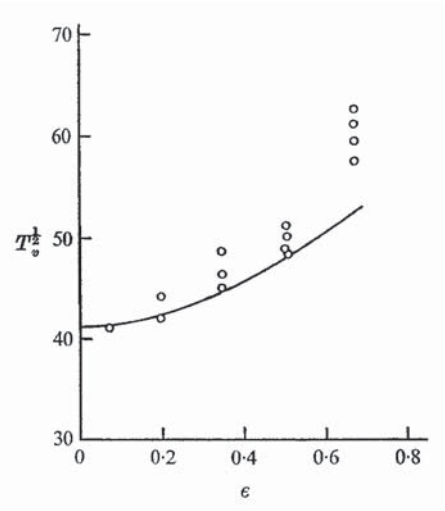


Abbildung 1.26: Vergleich der „*non-local Theory* “ – [DiPrima und Stuart 1972] und Meßergebnissen von Vohr ∘ [Vohr 1968] bei $\Psi = 0.0104$. Wobei $T_v = T_a(1 + 0.5\Psi)^{-1}$. Abbildung aus [DiPrima und Stuart 1972].

Abschließend für die lokale und globale (non-local) Theorie ist zu vermerken, dass für typische Lagerspaltbereiche, die lokale Theorie von DiPrima als untere Grenze und Ritchie‘s Modifikation als obere Grenze besser passen als die globale (*non-local Theory*). Dies unterstützt eine der wenigen Messungen für einen nahezu lagertypischen Spalt($\Psi = 0.005$) von Frêne & Godet [Frêne und Godet 1971] (Abbildung 1.27). Die globale Theorie trifft eher für die größeren der kleinen Spaltdimensionen zu.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

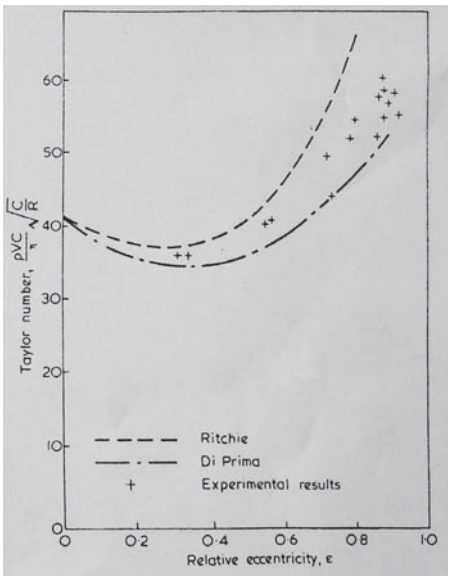


Abbildung 1.27: Vergleich einer Messung von Frêne & Godet [Frêne und Godet 1971] für $\Psi = 0.005$ mit der lokalen Theorie von DiPrima (lower bound) [DiPrima 1963] und Ritchie's Modifikation [Ritchie 1968] (upper bound).

1976 stellen Ballal & Rivlin [Ballal und Rivlin 1976] die bis heute vom Parameterraum umfangreichste Betrachtung des exzentrischen Spalts vor. Sie berechnen unter anderem die resultierenden Kräfte auf Innen- und Außenzylinder, Stromlinien und Positionen der Rückströmbereiche (Abbildung 1.28). Diese Lösung gilt allerdings nur für schleichende Strömungen.

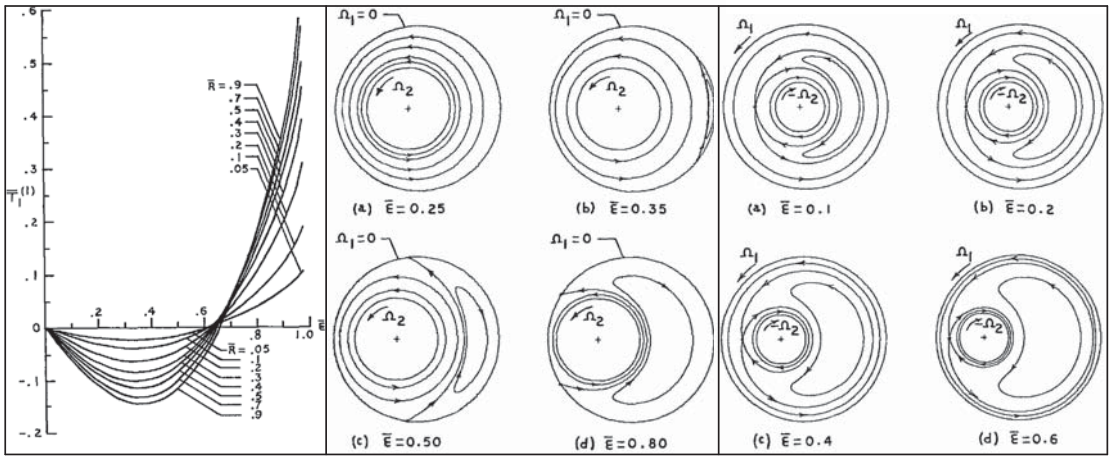


Abbildung 1.28: Links: Dimensionslose Kraft $\overline{T}_1^{(1)}$ am Innenzylinder in Abhängigkeit der Exzentrizität für verschiedene Radienverhältnisse $\eta = \overline{R}$. Eine negative Kraft drückt den Innenzylinder in Richtung des engsten Spalts näher zum Außenzylinder. Mitte: Stromlinien für Innenrotation und festem Außenzylinder bei $\eta = 0.5$. Rechts: Stromlinien bei Gegenrotation mit $\tilde{\mu} = -0.25$ bei $\eta = 0.3$. Alle Abbildungen aus [Ballal und Rivlin 1976].

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Nach [Leclercq u. a. 2013] gelingt [Oikawa u. a. 1989] und [Dai u. a. 1992] eine Stabilitätsanalyse für größere Spalte bis $\eta = 0.5$ und maximale Exzentrizitäten bis $\varepsilon < 0.7$. Eine näherungsweise korrekte theoretische Beschreibung für den gesamten Parameterraum, wie sie im konzentrischen Spalt vorliegt [Esser und Grossmann 1996], ist bisher nicht verfügbar. Darüber hinaus gibt es themenverwandte Arbeiten zu erweiterten Spaltströmungen wie Taylor-Couette-Poiseuilleströmung ([Hwang und Yang 2004], [Martinand u. a. 2009], [Altmeyer u. a. 2011], [Leclercq u. a. 2013]) bei der eine axiale Querströmung überlagert wird, Bohrungsvorgängen ([Feng und Fu 2007], [Feng u. a. 2007]) oder exzentrische Spaltströmungen von Nicht-Newton'schen Fluiden ([Chawda und Avgousti 1996], [Dris und S.G.Shaqfeh 1998], [Escudier u. a. 2002a], [Escudier u. a. 2002b]).

1.3 Ziel

Ziel dieser Arbeit ist es einen Basisströmungslöser für dreidimensionale Spaltströmungen auf Basis der finiten Volumen Software Toolbox OpenFOAM ® zu generieren. Im Anschluss soll dieser Löser für weite, mittlere und für enge Spalte validiert werden. Daher wird hier zunächst eine inkompressible Strömung ohne Phasenübergang mit konstanter Temperatur und Viskosität angenommen. Weiterhin soll die dreidimensionale Rechengittergenierung von engen Spaltsystemen sehr detailliert betrachtet werden. Als Abschluss sollen Empfehlungen für die Lagersimulation mit dem erweiterten 3D-CFD-Strömungslöser, welcher Phasenübergang berücksichtigt, gegeben werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Reynolds'sches Transporttheorem

Das Reynolds'sche Transporttheorem ist eine Erhaltungsgleichung in Kontrollvolumenform für eine beliebige extensive Eigenschaft Φ. Extensive Größen Φ sind abhängig von der Größe(Menge) des Systems. Intensive Größen ϕ hingegen sind unabhängig. Somit kann man die zur intensiven Eigenschaft ϕ entsprechende extensive Eigenschaft Φ mit

$$\Phi = \int\limits_{Kontrollmasse} \rho\phi \; dV \tag{2.1}$$

beschreiben. Die Erhaltungsgleichung einer extensiven Größe Φ für ein Kontrollvolumen lautet dann [Ferziger und Perić 2002]:

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\int\limits_{KM} \rho\phi \; dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{KV} \rho\phi \; dV + \int\limits_{S_{KV}} \rho\phi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \; d\mathbf{S} \tag{2.2}$$

Mit folgenden Notationen:

Kontrollmasse	KM
Kontrollvolumen	KV
Oberfläche des Kontrollvolumens	S_{KV}
Normaleneinheitsvektor zu S_{KV} (immer nach aussen gerichtet)	$\mathbf{n}$
Fluidgeschwindigkeit	$\mathbf{v}$
Geschwindigkeit der Oberfläche des KV	$\mathbf{v}_b$

Die Änderungsrate der extensiven Größe Φ, die zur Kontrollmasse gehört, ist gleich der Änderungsrate der Menge dieser Größe im Kontrollvolumen sowie dem Nettofluss durch die Oberfläche des Kontrollvolumens.

Zwei Spezialfälle die diese Aussage schlüssig machen:

1. $\mathbf{v}_b = 0$,	$\frac{d}{dt}\int\limits_{KV} ... \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV} ...$
KV bewegt sich nicht:	Ableitung wird zu einer partiellen Ableitung
2. $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}$,	$\int\limits_{S_{KV}} ... = 0$
KV bewegt sich mit Fluidgeschwindigkeit:	Volumen der Kontrollmasse = Kontrollvolumen

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

2.2 Massenerhaltung

Setzt man $\phi = 1$ und $\mathbf{v}_b = 0$ in Gl. (2.2) ein, erhält man die Integralform der Massenerhaltung, die Kontinuitätsgleichung.

$$\frac{d}{dt}m = \frac{d}{dt}\int\limits_{KM} \rho \; dV = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV} \rho \; dV + \underbrace{\int\limits_{S_{KV}} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; d\mathbf{S}}_{\int\limits_{KV} div(\rho\mathbf{v})dV;\; Gau\beta`scher Integralsatz}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV} \rho \; dV + \int\limits_{KV} div(\rho\mathbf{v})dV \tag{2.3}$$

Mit Übergang zu unendlich kleinem Kontrollvolumen ergibt sich die Differentialform:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\mathbf{v}) \tag{2.4}$$

In der Hydrodynamik kann oft in guter Näherung Inkompressibilität vorausgesetzt werden.

$$0 = div(\rho\mathbf{v}) \tag{2.5}$$

2.3 Impulserhaltung

Setzt man nun $\phi = \mathbf{v}$ und $\mathbf{v}_b = 0$ in Gl. (2.2), erhält man die Integralform der Impulserhaltung.

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV} \rho\mathbf{v} \; dV + \int\limits_{S_{KV}} \rho\mathbf{v}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; d\mathbf{S} \; = \sum \mathbf{f} \tag{2.6}$$

Um $\sum \mathbf{f}$ durch intensive Größen entsprechend dem Transporttheorem zu bilanzieren, teilt man diese Kräfte in Oberflächenkräfte und Volumenkräfte auf. Bei Betrachtung eines newtonschen Fluids können die Oberflächenkräfte, wie Druck und Spannungen, mit dem Spannungstensor T_{ij} (Gl. (2.7) z.B aus [Bestehorn 2006]) beschrieben werden. Volumenkräfte werden im folgenden mit $\mathbf{b}$ notiert.

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\sum l\partial_l v_l\right) + \zeta\delta_{ij}\sum_l \partial_l v_l \tag{2.7}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Damit kann Gl. (2.6) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV}\rho\mathbf{v}\;dV+\int\limits_{S_{KV}}\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\;d\mathbf{S} &= \int\limits_{S_{KV}}\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}dS+\int\limits_{KV}\rho\mathbf{b}\;dV \\ \xrightarrow{Gauß'scher Integralsatz} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV}\rho\mathbf{v}\;dV+\int\limits_{KV}\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})\;dV &= \int\limits_{KV}\nabla\cdot\mathbf{T}dV+\int\limits_{KV}\rho\mathbf{b}\;dV \end{aligned} \tag{2.8}$$

ausformuliert werden. Für $\nabla\cdot\mathbf{T}$ erhält man (z.B in [Bestehorn 2006]):

$$\sum_i \partial T_{ij} = -\partial_j p+\mu\triangle v_{ij}+\left(\zeta+\frac{1}{3}\right)\partial_j(\nabla\cdot\mathbf{v}) \tag{2.9}$$

Im Falle einer inkompressiblen Strömung (3. Term der rechten Seite in Gl. (2.9) verschwindet), bei der zusätzlichen Volumenkräfte wie die Schwerkraft vernachlässigt werden soll, ergibt sich dann zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{KV}\rho\mathbf{v}\;dV+\int\limits_{KV}\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})\;dV = \int\limits_{KV}-\nabla p+\mu\triangle\mathbf{v}\;dV\;. \tag{2.10}$$

Oder in differentieller Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p+\mu\triangle\mathbf{v}\;. \tag{2.11}$$

Um für jemanden, der mit der Navier-Stokes-Gleichung nicht vertraut ist, diese Gleichung aufzuschreiben, müsste man das Produkt $\mathbf{v}\mathbf{v}$ in $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v})$ als diadisches Produkt $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^T$ kennzeichnen. Da dies aber im Großteil der verwendeten Literatur nicht geschieht, wurde bis auf die anschließende Nebenrechnung ebenfalls darauf verzichtet. Oftmals wird der Konvektionsterm im Falle der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung als $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ notiert. Da hierzu kein Literaturbeispiel gefunden wurde, soll nun ausführlich gezeigt werden, dass sich für diesen Fall beide Terme entsprechen. Für $\mathbf{v}$ wird im Folgendem $\mathbf{U}$ verwendet um Verwechslungen mit der Geschwindigkeitskomponente v zu vermeiden.

Mit $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ ergibt sich für $\nabla\cdot(\mathbf{U}\otimes\mathbf{U}) = \nabla\cdot((\mathbf{U})\cdot(\mathbf{U})^T)$

$$= \nabla\cdot\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u&v&w\end{pmatrix}\right) = \nabla\cdot\begin{pmatrix}uu&uv&uw\\vu&vv&vw\\wu&wv&ww\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}uu&uv&uw\\vu&vv&vw\\wu&wv&ww\end{pmatrix}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uu \\ vu \\ wu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uv \\ vv \\ wv \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uw \\ vw \\ ww \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{U}u) \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{U}v) \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{U}w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} div(u\mathbf{U}) \\ div(v\mathbf{U}) \\ div(w\mathbf{U}) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \begin{pmatrix} u \cdot div(\mathbf{U}) + (grad(u)) \cdot \mathbf{U} \\ v \cdot div(\mathbf{U}) + (grad(v)) \cdot \mathbf{U} \\ w \cdot div(\mathbf{U}) + (grad(w)) \cdot \mathbf{U} \end{pmatrix} \overset{div(\mathbf{U})=0}{\underset{(2.5)}{=}} \begin{pmatrix} (grad(u)) \cdot \mathbf{U} \\ (grad(v)) \cdot \mathbf{U} \\ (grad(w)) \cdot \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \\ u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U}$$

Somit kann Gl. (2.11) im inkompressiblen Fall auch als

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v} + (\rho\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mu \triangle \mathbf{v} \tag{2.12}$$

geschrieben werden.

2.4 Reynolds'sche Differentialgleichungen

Wie später gezeigt wird, ist eine dreidimensionale numerische Lösung der Gleitlagerströmung mit einem sehr hohem Rechenaufwand verbunden. Dies liegt hauptsächlich an der Geometrie des Strömungsgebietes. Eine typische normierte Spaltweite Ψ 0.1 liegt im Bereich von $0.001 = 1$ ‰. Um diese Größe zu fassen, soll eine Veranschaulichung dienen. Betrachtet man den Spalt lokal so vergrößert, dass man die Spaltweite $R_2 - R_1$ wahrnimmt, ist es nahezu unmöglich eine Krümmung der Lagerschalen- oder Wellenoberfläche festzustellen. Oder man skaliert so, dass man die Krümmung bemerkt. In diesem Falle ist es nicht möglich den Spalt zu erfassen. Diese Veranschaulichung legitimiert folgende Annahmen zur Berechnung der Spaltströmung:

1. **kleine Reynolds-Zahl**:
   Die Trägheitseffekte sind viel kleiner als Zähigkeitseffekte.

2. **kleine radiale Geschwindigkeiten**:
   Verglichen mit der Umfangsgeschwindigkeit ist die radiale Komponente vernachlässigbar klein.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3. **Vernachlässigung der Krümmung**:
   Skaliert auf den Spalt ist ein Krümmung zu vernachlässigen. Siehe obige Veranschaulichung.

4. **geringe Neigung der Wellen- zur Schalenoberfläche radiale Geschwindigkeiten**:
   Die Änderung der Schmierspalthöhe in Umfangsrichtung ist klein.

Wendet man diese und einige weitere Annahmen auf die Navier-Stokes Gleichungen (2.11) an, erhält man die Reynolds'schen Differentialgleichungen für den Lagerspalt. Eine ausführliche Herleitung findet sich zum Beispiel in [Lang und Steinhilper 1978].

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u = \frac{\partial p}{2\mu\partial x}\left(y^2 - yh\right) + \frac{h-y}{h}U_1 + \frac{y}{h}U_2 \\ v = 0 \\ w = \frac{\partial p}{2\mu\partial z}\left(y^2 - yh\right) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3 \partial p}{\mu \partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3 \partial p}{\mu \partial z}\right) = 6\left[\left(U_1 + U_2\right)\frac{\partial\left(\rho h\right)}{\partial x} + 2\frac{\partial\left(\rho h\right)}{\partial t}\right] \tag{2.14}$$

Wobei hier x der abgerollten Umfangsrichtung, y der Spaltrichtung, z der Lagerbreitenrichtung (Lagerachsenrichtung), U_1 der Geschwindigkeit an der Welle und U_2 der Geschwindigkeit an der Lagerschale entspricht. Eine sehr ausführliche Herleitung ist ebenfalls in [Lang und Steinhilper 1978] zu finden. Es liegt also nur noch eine zweidimensionale Betrachtung des Strömungsgebietes vor dessen Lösung wesentlich schneller berechnet werden kann. Problematisch wird diese Betrachtung, wenn man eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt. Beispielsweise können Nuten und Schmiertaschen den Spalt lokal vergrößern so dass sich die lokale Reynolds-Zahl erheblich erhöht und Trägheitseffekte zum Tragen kommen. Dies kann aber durch Wahl geschickter Flussrandbedingungen abgefedert werden. Somit haben sich die Reynolds'schen Differentialgleichungen zur täglichen Anwendung in Industrie und Praxis lange bewährt und weiterentwickelt. Schlussendlich ist es jedoch so, dass lediglich jeweils 1 diskrete Information in Spaltrichtung vorliegt. Dies ist bei der Bewertung von berechneter Kavitation in Gleitlagern problematisch. So kann hier nicht vorhergesagt werden ob das Kavitationsgebiet in ungefährlicher Wellennähe oder gefährlicher Schalennähe liegt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3 Finite Volumen

Das folgende Kapitel zielt darauf ab, die nötigen Grundkenntnisse zum Verständnis des numerischen Lösers zu vermitteln und ist teilweise eine ergänzte Zusammenstellung aus dem User Guide [OpenFOAM] von OpenFOAM®, und den Dissertationen von Hrvoje Jasak [Jasak 1996], einem Mitentwickler von OpenFOAM® sowie Austin Barrett Kimbrell[Kimbrell 2012]. Daher sei dem interessiertem Leser diese Literatur empfohlen.

Ein Transportproblem für eine Größe ϕ, kann nach Gleichung 2.2 differentiell folgendermaßen notiert werden.

$$\underbrace{\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}}_{Zeitableitung} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \phi)}_{Konvektion} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)}_{Diffusion} = \underbrace{S_\phi(\phi)}_{Quellterme} \tag{3.1}$$

In der finiten Volumen Betrachtung wird Gleichung (3.1) in integraler Form betrachtet.

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} \rho\phi dV + \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \phi) dV - \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{V_p} S_\phi(\phi) dV \right) dt \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1 Diskretisierung

3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Die Diskretisierung des Rechengebietes erzeugt ein Rechengitter auf dem anschließend die phänomenologischen Gleichungen gelöst werden. Es existieren nun diskrete Punkte in Raum und Zeit auf denen die Lösung gesucht ist. Die Berechnungen der gesuchten Größen erfolgen für die Schwerpunkte (Gleichung 3.3) P (Abbildung 3.1) einer Zelle (Kontrollvolumen V_P) die durch die umliegenden Gitterpunkte definiert ist.

$$\int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P)\, dV = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

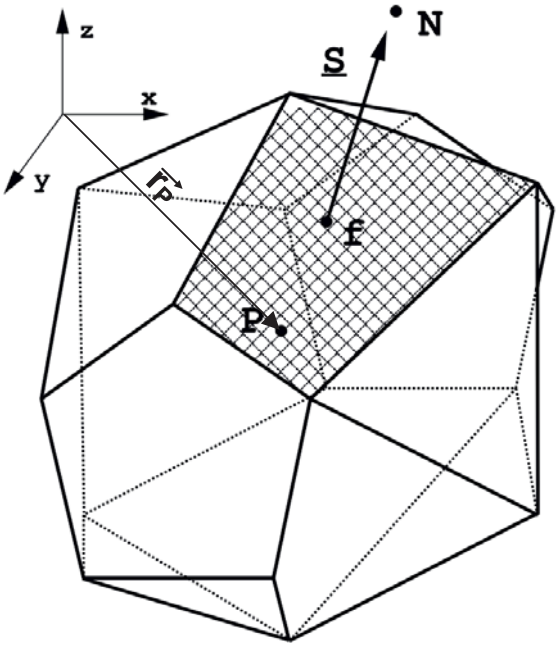


Abbildung 3.1: Rechenzelle mit linearen Kanten, Oberflächen, Oberflächennormale und Zellmittelpunkt P. Abbildung aus [Jasak 1996].

Ein Beispiel für ein diskretisiertes Rechengebiet mit hexadrischen Zellen ist in Abbildung 3.2 zu sehen. 20736 Punkte definieren 42112 Grenzflächen und 15680 Zellen.

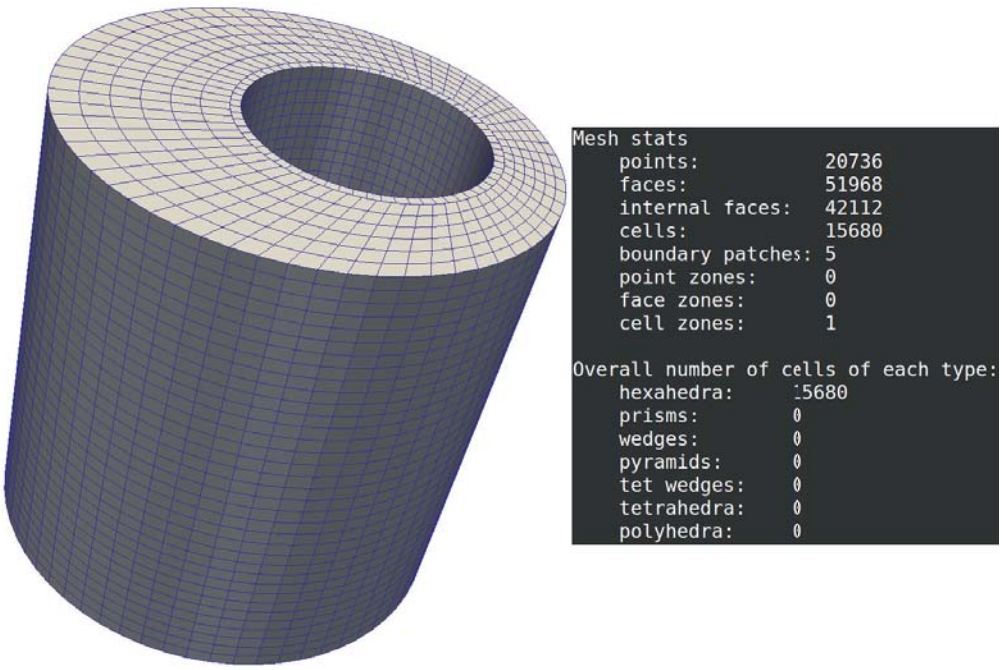


Abbildung 3.2: Rechengitter eines exzentrischen Zylinderspaltes.

Gleichung (3.1) beinhaltet im Diffusionsterm ein Differentialgleichung 2. Ordnung. Um bei der numerischen Lösung dieser Gleichung eine ansprechende Genauigkeit zu erzielen, ist es

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

notwendig die Ordnung der Diskretisierung auf mindestens der gleichen Ordnung vorzunehmen. Um die Größe $\phi(\mathbf{r}, t)$ mit einer räumlichen und zeitlichen Genauigkeit 2. Ordnung $\mathcal{O}\left((\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right)$zu diskretisieren, benötigt man ein lineares Taylorpolynom.

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_P + (\mathbf{r} - \mathbf{r_P}) \cdot (\nabla\phi)_P \tag{3.4}$$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi^t + \Delta t \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^t \tag{3.5}$$

Wobei:

$$\phi_P = \phi(\mathbf{r}) \tag{3.6}$$

$$\phi^t = \phi(t) \tag{3.7}$$

Die Diskretisierung der einzelnen Terme erfolgt über den Gauß'schen Integralsatz.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} \tag{3.8}$$

$$\int_V \nabla\phi dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}\phi \tag{3.9}$$

Gleichung (3.9) folgt aus $\int_V div(\mathbf{a})\ dV = \int_V div(\phi\mathbf{g})\ dV$ mit $\mathbf{g} = konstant$.

$$\int_V \nabla\mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}\mathbf{a} \tag{3.10}$$

∂V ist die geschlossene Oberfläche des Volumens V und $d\mathbf{S}$ beschreibt ein infinitesimales Oberflächenelement, dass nach außen gerichtet ist und senkrecht auf ∂V steht. Angenommen eine gewisse Anzahl von Oberflächen- und Volumenintegralen soll bestimmt werden. Unter Annahme einer linearen Approximation (3.4) folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{V_P} \phi(\mathbf{r}) dV &= \int_{V_P} \left[\phi_P + (\mathbf{r} - \mathbf{r_P}) \cdot (\nabla\phi)_P\right] dV \\
&= \phi_P \int_{V_P} dV + \underbrace{\left[\int_{V_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r_P}) dV\right]}_{= 0 \ \textit{siehe Gleichung (3.3)}} \cdot (\nabla\phi)_P \\
&= \phi_P V_P
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Als nächstes soll die Berechnung der Divergenz vorgestellt werden. Das Kontrollvolumen V_P ist begrenzt von Oberflächen $\mathbf{S}$ und kann gemäß Gleichung (3.8) als Summation über alle f Oberflächen überführt werden:

$$\begin{aligned}\int_{V_P} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV &= \oint_{\partial V_P} d\mathbf{S}\ \mathbf{a} \\ &= \sum_f \left(\int_f d\mathbf{S}\ \mathbf{a} \right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

Unter erneuter Verwendung einer linearen Approximation ((3.4)) folgt:

$$\begin{aligned}\int_f d\mathbf{S}\ \mathbf{a} &= \left(\int_f d\mathbf{S} \right) \mathbf{a}_f + \left[\int_f d\mathbf{S}\, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_f) \right] (\nabla \mathbf{a}_f) \\ &= \mathbf{S}\ \mathbf{a}_f\end{aligned} \tag{3.13}$$

$\mathbf{a}_f$ entspricht dem Mittelpunkt der Fläche $\mathbf{S}_f$ (siehe auch Abbildung3.4). Aus Gleichung (3.11), (3.12) und (3.13) folgt schließlich der diskretisierte Satz von Gauß mit einer Genauigkeit 2. Ordnung:

$$(\nabla \cdot \mathbf{a}) V_P = \sum_f \mathbf{S}\ \mathbf{a}_f\ . \tag{3.14}$$

Die Summation erfolgt als

$$\sum_f \mathbf{S}\ \mathbf{a}_f = \sum_{owner} \mathbf{S}_f\ \mathbf{a}_f - \sum_{neighbour} \mathbf{S}_f\ \mathbf{a}_f \tag{3.15}$$

da bestimmte Grenzflächen bereits anderen Zellen gehören, sind diese $\mathbf{S}_f$ in die Zelle selbst gerichtet (Abbildung3.4).

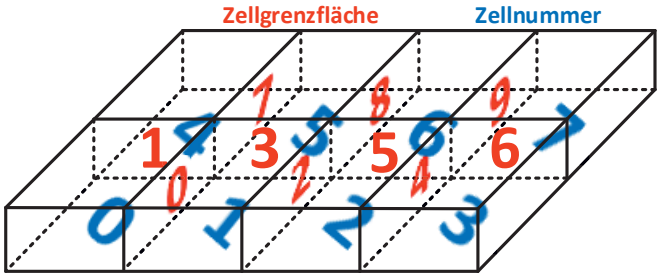


Abbildung 3.3: Gehört die Grenzfläche bereits zu einer anderen Zelle, muss dies bei der Summation (3.15) berücksichtigt werden. Siehe auch nächste Abbildung.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

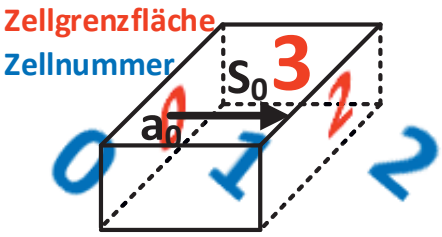


Abbildung 3.4: Die Richtung von $\mathbf{S}_0$ für Zelle 1 zeigt vom Flächenmittelpunkt der Grenzfläche 0 ($\mathbf{a}_0$) aus in Zelle 1 hinein, weil Fläche 0 bereits Zelle 0 gehört.

1. Konvektionsterm

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\phi)\, dV &\overset{(3.14)}{=} \sum_f \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U}\phi)_f \\ &= \sum_f \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U})_f \phi_f \\ &= \sum_f F \cdot \phi_f\end{aligned} \tag{3.16}$$

$F = \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U})$ ist der Massenstrom durch die Zelloberflächen.

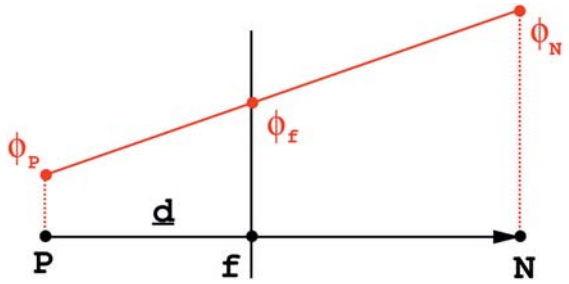


Abbildung 3.5: Zur Berechnung der skalaren Grösse ϕ auf der Oberfläche zwischen den Zellzentroiden P und N. Abbildung aus [Jasak 1996].

Es sind nun die Werte von ϕ auf der Zelloberfläche (ϕ_f) zwischen den benachbarten Zentroiden P und N (ϕ_P, ϕ_N) zu bestimmen. Eine Möglichkeit wäre als Zentraler Differenzenquotient (Central Differencing, CD):

$$\frac{\phi_N - \phi_P}{\overline{PN}} = \frac{\phi_N - \phi_f}{\overline{fN}} \quad \xrightarrow{f_x = \frac{\overline{fN}}{\overline{PN}}} \quad \phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x)\phi_N. \tag{3.17}$$

Eine stabile Diskretisierung ist die Aufwinddifferenz (Upwind Differencing, UD). Sie garantiert die Konvergenz allerdings auf Kosten der Genauigkeit. Der Abbruchfehler wirkt wie eine Diffusion, die so größer werden kann als die eigentliche Diffusion des Strömungsproblems. Man sollte sich vergewissern welche Genauigkeit die verwendete Aufwinddifferenz besitzt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Der Wert ϕ_f an der Zelloberfläche zwischen P und N wird anhand der Strömungsrichtung F entweder mit Hilfe von Rückwärtsdifferenzen oder Vorwärtsdifferenzen ermittelt:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P, & \text{wenn } F \geq 0 \\ \phi_N, & \text{wenn } F < 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Ein ausgewogener Ansatz um beide positive Eigenschaften, Konvergenz und Genauigkeit, gewichtet zu kombinieren, führt zu einer Mischform (Blended Differencing, BD). Hierbei wird die Zentrale (Gleichung (3.17)) und die Aufwinddifferenz (Gleichung (3.18)) linear kombiniert:

$$\begin{aligned} \phi_f &= (1-\gamma)\,(\phi_f)_{UD} + \gamma(\phi_f)_{CD} \\ &= [(1-\gamma)\,max(sgn(F),0) + \gamma f_x]\phi_P + [(1-\gamma)\,min(sgn(F),0) + \gamma(1-f_x)]\phi_N \\ &\text{mit } \gamma \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Man kann also mit Hilfe von γ die Wichtung von Stabilität (Aufwindverfahren, UD, $\gamma \to 0$) und Genauigkeit (Zentrale Differenz, CD, $\gamma \to 1$) vorgeben.

2. Diffusionsterm

$$\begin{aligned} \int_{V_P} (\nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi))\, dV &\overset{(3.14)}{\underset{(3.4)}{=}} \sum_f \mathbf{S}\ (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi)_f \\ &= \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f\ \mathbf{S}\ (\nabla\phi)_f \end{aligned} \tag{3.20}$$

Im seltenem Falle eines orthogonalen Gitters, $\mathbf{d} = \overrightarrow{\mathbf{PN}}$ und $\mathbf{S}$ aus Abbildung 3.6 wären dann parallel, kann der Gradient an der Zelloberfläche zwischen den Zellschwerpunkten P und N unter anderem folgendermaßen diskretisiert werden:

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f = |\mathbf{S}| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \tag{3.21}$$

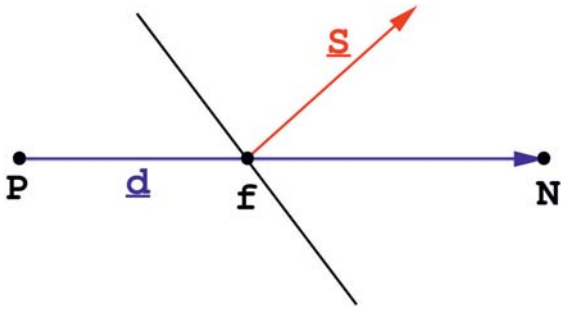


Abbildung 3.6: Diskretisierung am nicht orthogonalen Gitter. Abbildung aus [Jasak 1996].

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Im Falle eines nicht orthogonalen Gitters sollte der Term $\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f$ in einen orthogonalen und einen nicht orthogonalen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f = \underbrace{\mathbf{\Delta} \cdot (\nabla\phi)_f}_{orthogonaler\ Anteil} + \underbrace{\mathbf{k} \cdot (\nabla\phi)_f}_{nicht\ orthogonaler\ Anteil} . \tag{3.22}$$

Wobei:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Delta} + \mathbf{k} . \tag{3.23}$$

Vektor $\mathbf{\Delta}$ ist parallel zu $\mathbf{d}$ gewählt. Somit kann Gleichung (3.21) für den orthogonalen Anteil verwendet werden. Für den nicht orthogonalen Anteil gibt es vielfältige Möglichkeiten, von den hier drei Varianten aus [Jasak 1996] vorgestellt werden.

1. Der minimale Korrekturansatz. Hierbei wird die minimalste nicht orthogonale Korrektur $\mathbf{k}$ angestrebt. Der Betrag von $\mathbf{k}$ ist am geringsten, wenn $\mathbf{k}$ senkrecht zu $\mathbf{\Delta}$ ist (Abbildung 3.7).

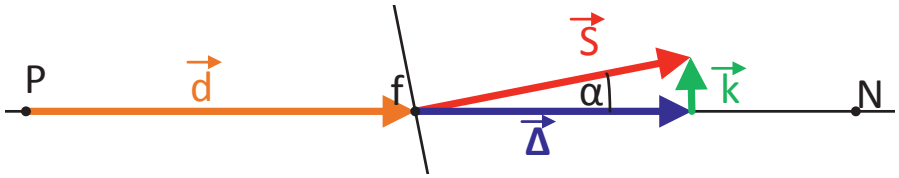


Abbildung 3.7: Zur Berechnung der minimalen Korrektur.

Der Betrag von $\mathbf{\Delta}$ ergibt sich als Projektion von $\mathbf{S}$ auf die Gerade $\mathbf{P} + a \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$, mit $a \in \mathbb{R}$. Also:

$$\mathbf{\Delta} = cos(\alpha) \cdot |\mathbf{S}| \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \tag{3.24}$$

Und mit

$$cos(\alpha) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{S}|} \tag{3.25}$$

ergibt sich

$$\mathbf{\Delta} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{S}|} \cdot |\mathbf{S}| \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} \cdot \mathbf{d}. \tag{3.26}$$

Damit verringert sich der orthogonale Anteil $\mathbf{\Delta}$ wenn der nicht orthogonale Anteil $\mathbf{k}$ zunimmt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

2. Der orthogonale Korrekturansatz. Hierbei wird postuliert, dass der Beitrag von ϕ_N und ϕ_P (Gleichung (3.21)) genauso groß ist, wie im orthogonalen Fall. Also $|\mathbf{\Delta}| = |\mathbf{S}|$.

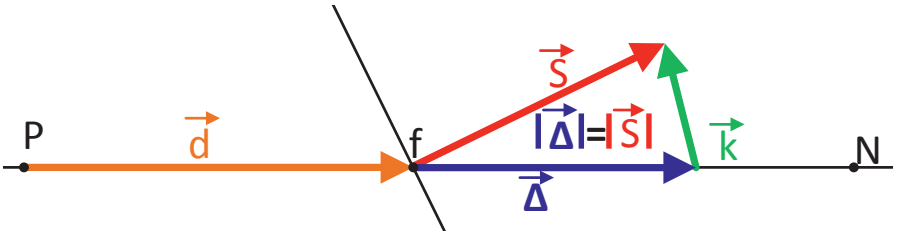


Abbildung 3.8: Zur Berechnung der orthogonalen Korrektur.

.

Somit kann man $\mathbf{\Delta}$ folgendermaßen notieren:

$$\mathbf{\Delta} = |\mathbf{S}| \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}. \tag{3.27}$$

3. Der überrelaxierte Korrekturansatz. Hierbei soll die Länge $|\mathbf{\Delta}|$ winkelabhängig größer sein als die von von $|\mathbf{S}|$. Und zwar so, dass mit zunehmendem α die Länge $|\mathbf{\Delta}|$ zunehmend ansteigt. Also $\mathbf{\Delta} = \frac{|\mathbf{S}|}{cos(\alpha)} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$

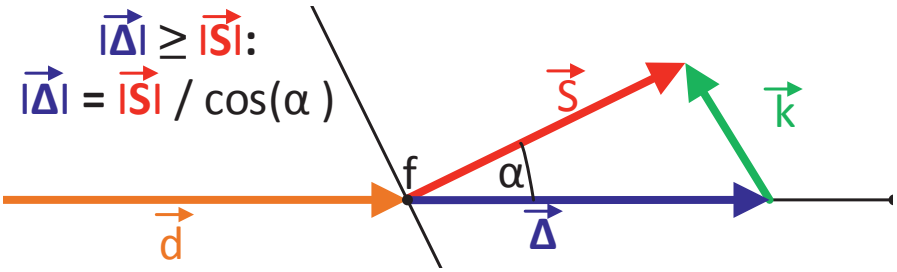


Abbildung 3.9: Zur Berechnung der überrelaxierten Korrektur.

.

Somit kann man $\mathbf{\Delta}$ folgendermaßen notieren:

$$\mathbf{\Delta} = \frac{|\mathbf{S}|}{cos(\alpha)} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{|\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{d}| \cdot cos(\alpha)} \cdot \mathbf{d} = \frac{|\mathbf{S}|^2}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{S}} \cdot \mathbf{d}. \tag{3.28}$$

Der orthogonale Anteil von Gleichung (3.22) lässt sich analog diskretisieren:

$$\mathbf{\Delta} \cdot (\nabla\phi)_f = |\mathbf{\Delta}| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \tag{3.29}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Damit kann Gleichung (3.22) als

$$\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f = |\mathbf{\Delta}| \frac{(\nabla\phi)_f}{|\mathbf{d}|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla\phi)_f \tag{3.30}$$

geschrieben werden, wobei $\nabla\phi$ nach Gleichung (3.17) bestimmt werden kann:

$$(\nabla\phi)_f = f_x (\nabla\phi)_P + (1 - f_x) (\nabla\phi)_N . \tag{3.31}$$

3. Quellterm
Alle Terme der ursprünglichen Gleichung (3.1), die nicht als einer der Terme der linken Seite dargestellt werden können, werden als Quellterm behandelt. Ein Möglichkeit ist den Quellterm vor der Diskretisierung als

$$S_\phi (\phi) = S_k + S_l \ \phi \tag{3.32}$$

zu Linearisieren. Wobei der konstante (S_k) und der lineare (S_l) Anteil des Quellterms von ϕ abhängig sein darf. Mit Gleichung (3.11) erhält man den diskretisierten Quellterm

$$\int_{V_P} S_\phi \ dV = S_k \ V_P + S_l \ V_P \ \phi \tag{3.33}$$

3.1.2 Zeitliche Diskretisierung

Die Transportgleichung (Gleichung (3.2)) lautete:
$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} \rho\phi dV + \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \phi) dV - \int_{V_p} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{V_p} S_\phi(\phi) dV \right) dt.$
Mit Gleichung (3.16) $\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) \, dV = \sum_f F \cdot \phi_f$, (mit $F = \mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{U})$)
Gleichung (3.30) $\mathbf{S} \cdot (\nabla\phi)_f = |\mathbf{\Delta}| \frac{(\nabla\phi)_f}{|\mathbf{d}|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla\phi)_f$
und Gleichung (3.33) $\int_{V_P} S_\phi \ dV = S_k \ V_P + S_l \ V_P \ \phi$
erhält man die semi-diskretisierte Transportgleichung (Gleichung (3.34)).

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} \right)_P V_P + \sum_f F \ \phi_f - \sum_{V_p} (\rho\Gamma_\phi)_f \ \mathbf{S} \ (\nabla\phi)_f \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} (S_k \ V_P + S_l \ V_P \ \phi) \, dt \ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Zunächst wird noch ein Verfahren zur numerischen Integration benötigt. Hierzu wird aus (3.35), in der n und $n+1$ Zeitindizes darstellen,

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{dF}{dt} \right) dt = F^{n+1} - F^n = \int_t^{t+\Delta t} f dt \tag{3.35}$$

eine Vorschrift zur Integration abgeleitet in dem das Integral auf der rechten Seite in (3.36) durch eine Approximation ersetzt wird.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$F^{n+1} = F^n + \int_t^{t+\Delta t} f dt \tag{3.36}$$

Für dieses Problem liefert Abbildung 3.10 aus [Ferziger und Perić 1999] eine gute Veranschaulichung von 4 Möglichkeiten.

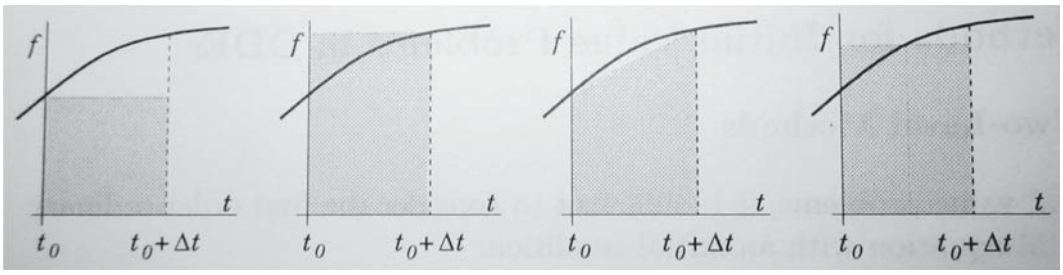


Abbildung 3.10: Zur numerischen Approximation eines Integrals. Abbildung aus [Ferziger und Perić 1999].

1. Explizites Euler-Verfahren (auch forward Euler).
   Nach Abbildung 3.10 linke Abbildung, wird die Fläche unter f im Intervall $t_0 + \Delta t$ mit $f(t_0) \cdot \Delta t$ genähert. Hier erhält man für (3.36):

$$F^{n+1} = F^n + f\left(t_0\right) \cdot \Delta t = F^n + f^n \cdot \Delta t \tag{3.37}$$

2. Implizites Euler-Verfahren (auch backward Euler).
   Nach 2. Abbildung in 3.10 von links, wird die Fläche unter f im Intervall $t_0 + \Delta t$ mit $f(t_0 + \Delta t) \cdot \Delta t$ genähert. Hiermit kann (3.36) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$F^{n+1} = F^n + f\left(t_0 + \Delta t\right) \cdot \Delta t = F^n + f^{n+1} \cdot \Delta t \ . \tag{3.38}$$

3. Crank-Nicolson-Verfahren.
   Wird wie in 2. Abbildung in 3.10 von rechts die Fläche unter f mittels des Trapezes durch $(t_0|0), ((t_0+\Delta t)|0), ((t_0+\Delta t)|f(t_0+\Delta t))$ und $(t_0|f(t_0))$ angenähert, erhält man das Crank-Nicolson Verfahren. Aus (3.36) wird in diesem Fall:

$$F^{n+1} = F^n + \frac{1}{2}\left(f\left(t_0 + \Delta t\right) + f\left(t_0\right)\right) \cdot \Delta t = F^n + \frac{1}{2} f\left(f^{n+1} + f^n\right) \cdot \Delta t \tag{3.39}$$

4. Leapfrog-Methode.
   Hier werden nicht wie im Crank-Nicolson-Verfahren die Funktionswerte $f(t_0), f(t_0 + \Delta t)$ sondern die Argumente $t_0, t_0 + \Delta t$ gemittelt um die Fläche unter f zu approximieren.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$f\left(\frac{t_0+t_0+\Delta t}{2}\right) = f\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) \rightarrow \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f dt \approx f\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\Delta t$
Somit kann (3.36) folgendermaßen dargestellt werden:

$$F^{n+1} = F^n + f\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\Delta = F^n + f\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Delta t \tag{3.40}$$

Nachdem nun auch einige Vorschriften zur Integration bekannt sind, wird noch eine Methode zur Differentiation benötigt. Stellt man Gleichung (3.5) $\phi(t+\Delta t) = \phi^t + \Delta t\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^t$ nach $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^t$ um, erhält man:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}\right)^t &= \frac{\phi^{t+\triangle t}-\phi^t}{\triangle t}\\ \rightarrow \left(\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}\right)_P &= \frac{\rho_P^n\phi_P^n - \rho_P^o\phi_P^o}{\triangle t}\end{aligned} \tag{3.41}$$

Nun soll die semi-diskretisierte Transportgleichung (3.34) für ϕ zunächst mit Hilfe des Crank-Nicolson-Verfahrens (3.39) abschliessend diskretisiert werden. Darüber hinaus soll sich die Dichte ρ und die Diffusion Γ zeitlich nicht ändern. Zusammen mit der Vorschrift zur Differentiation (3.41) ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_P\phi_P^n - \rho_P\phi_P^o}{\triangle t}\ V_P + \frac{1}{2}\sum_f F\phi_f^n - \frac{1}{2}\sum\nolimits_f (\rho\Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla\phi)_f^n\\ &+\frac{1}{2}\sum_f F\phi_f^o - \frac{1}{2}\sum\nolimits_f (\rho\Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla\phi)_f^o\\ &= S_k\ V_P + \frac{1}{2}S_l\ V_P\phi_P^n + \frac{1}{2}S_l\ V_P\phi_P^o\ .\end{aligned} \tag{3.42}$$

Diese Diskretisierung besitzt eine Genauigkeit 2. Ordnung in der Zeit $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$. Hier werden die Werte von ϕ und $\nabla\phi$ auf den Zellgrenzflächen $(\ )_f$ und die Zellwerte $(\ )_{P,N}$ zum neuen und alten Zeitschritt benötigt. Damit handelt es sich um ein implizites Verfahren.

Das Crank-Nicolson Verfahren ist zwar bedingungslos stabil, konvergiert aber nicht unbedingt. So können beispielsweise Oszillationen auftreten. Wie im Fall des Konvektionsterms, kann die Konvergenz durch Reduzierung der Diskretisierungsordnung erreicht werden. Vernachlässigt man die Abweichung in Gleichung (3.42) der Werte von ϕ und $\nabla\phi$ auf den Zellflächen zu den verschiedenen Zeitebenen, erhält man eine Diskretisierung, die nur noch eine Genauigkeit von $\mathcal{O}(\Delta t)$ (Gleichung (3.43)) besitzt.

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_P\phi_P^n - \rho_P\phi_P^o}{\triangle t}\ V_P + \sum_f F\phi_f - \sum\nolimits_f (\rho\Gamma_\phi)_f \mathbf{S}(\nabla\phi)_f\\ &= S_k\ V_P + S_l\ V_P\phi_P\end{aligned} \tag{3.43}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Je nachdem welche Zeitebenen für die Berechnung der Werte von ϕ und $\nabla\phi$ auf den Zellwänden benutzt werden, ergibt sich eine explizite oder eine implizite Diskretisierungsvorschrift.

Mit folgenden Notationen:

neuer Wert:	$\phi^n \equiv \phi\,(t + \Delta t)$
alter/letzter Wert:	$\phi^o \equiv \phi\,(t)$
vorletzter Wert:	$\phi^{oo} \equiv \phi\,(t - \Delta t)$

Bei Verwendung der alten Zeitebene ergibt sich durch

$$\phi_f = f_x \phi_P^o + (1 - f_x)\,\phi_N^o \tag{3.44}$$

und

$$\mathbf{S}\ (\nabla\phi)_f = |\mathbf{\Delta}| \frac{(\phi_N^o - \phi_P^o)}{|\mathbf{d}|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla\phi)_f^o \tag{3.45}$$

die explizite Diskretisierung (3.46).

$$\phi_P^n = \phi_P^o + \frac{\Delta t}{\rho_P V_P} \left[\sum_f F \phi_f^o - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f\, \mathbf{S}\,(\nabla\phi^o)_f + S_k V_P + S_l V_P \phi_P^o \right] \tag{3.46}$$

Hierbei muss die Courant-Zahl Co [Courant und K. Friedrichs 1928], auch CFL-Zahl (Courant Friedrichs Lewy) genannt, beachtet werden. Das explizite Euler Verfahren ist nur für $Co < 1$ stabil. Die Courant-Zahl kann z.B. als Abtastrate verstanden werden. Möchte man eine bestimmte Frequenz korrekt bestimmen, benötigt man dafür eine entsprechende minimale Anzahl von Stützstellen, die sicherstellen, dass zwischen zwei benachbarten Stützstellen keine höherfrequente Schwingung hineinpasst. Oder: Um die Fluidgeschwindigkeit U_x in einem Gitter mit dem Zellenabstand Δx korrekt berechnen zu können benötigt man einen Zeitschritt Δt der kleiner als $\frac{\Delta x}{U_x}$ ist.

$$Co = \frac{U_x\ \Delta x}{\Delta t} < 1 \tag{3.47}$$

Bei Verwendung der neuen Zeitebene ergibt sich durch

$$\phi_f = f_x \phi_P^n + (1 - f_x)\,\phi_N^n \tag{3.48}$$

und

$$\mathbf{S}\ (\nabla\phi)_f = |\mathbf{\Delta}| \frac{(\phi_N^n - \phi_P^n)}{|\mathbf{d}|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla\phi)_f^n \tag{3.49}$$

die implizite Diskretisierung (3.50).

$$\phi_P^n = \phi_P^o + \frac{\Delta t}{\rho_P V_P} \left[\sum_f F \phi_f^n - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f\, \mathbf{S}\,(\nabla\phi^n)_f + S_k V_P + S_l V_P \phi_P^n \right] \tag{3.50}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Obwohl Gleichung (3.43) nur noch eine Genauigkeit in der Zeit von $\mathcal{O}(\Delta t)$ besitzt, ist es möglich diese Gleichung wieder in eine Genauigkeit von $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$ zu überführen. Dazu muss jeder Term in (3.43) mit einer Genauigkeit $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$ diskretisiert werden. Hierzu greifen wir wieder auf die Taylorentwicklung zurück und entwickeln bis zur 2. Ordnung $\mathcal{O}\left((h)^2\right)$.

$$u(x+h) = u(x) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left((h)^2\right) \tag{3.51}$$

Um im Anschluss den Schreibaufwand zu reduzieren sei (3.51) identisch mit (3.52).

$$u(x+h) = u + h \cdot u' + \frac{h^2}{2} \cdot u'' \tag{3.52}$$

Die Erhöhung der Ordnung erzielt man durch Kombination von (3.51) zu verschiedenen Funktionsargumenten oder Stencils, was im folgenden Beispiel letztendlich zur Linearkombination zweier Gleichungen mit 3 verschiedene Zeitebenen(Stencils), führen wird.

$$\begin{aligned} A: &\quad u(x-2h) = u - 2hu' + 2h^2u'' \\ B: &\quad u(x-h) = u - hu' + \frac{h^2}{2}u'' \end{aligned} \tag{3.53}$$

Als Linearkombination beider Gleichungen A-4B ergibt sich

$$\begin{aligned} &u(x-2h) - 4u(x-h) = u - 4hu - 2hu' + 4hu' + 2h^2u'' - 2h^2u'' \\ &= -3u + 2hu' \ . \end{aligned} \tag{3.54}$$

Umstellen nach u'.

$$u' = \frac{3u - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h} \tag{3.55}$$

Mit $u(x-2h) \to \phi^{oo}$, $u(x-h) \to \phi^o$, $u = u(x) \to \phi^n$ und $h \to \Delta t$ ergibt sich dann die Rückwärtsdifferenz (*backward differencing*) als Kombination der Werte von ϕ aus den drei verschiedenen Zeitebenen $\phi^n, \phi^o, \phi^{oo}$ mit einer Genauigkeit von $\mathcal{O}\left((\Delta t)^2\right)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\frac{3}{2}\phi^n - 2\phi^o + \frac{1}{2}\phi^{oo}}{\Delta t}. \tag{3.56}$$

Mit Gleichung (3.56) erhält man für (3.43):

$$\frac{\frac{3}{2}\phi^n - 2\phi^o + \frac{1}{2}\phi^{oo}}{\Delta t} V_P + \sum_f F\phi_f^n - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f \, \mathbf{S} \, (\nabla\phi^n)_f = S_k V_P + S_l V_P \phi_P^n \ . \tag{3.57}$$

3.1.3 Randbedingungen

Die Randgebiete des diskretisierten Rechengebietes bestehen aus einer Reihe von Flächen, für die dem physikalischen Problem entsprechend, Randbedingungen formuliert werden müssen. Diese Randbedingungen können zunächst in numerische und physikalische Randbedingungen unterteilt werden. Die numerischen Randbedingungen können wiederum in Dirichlet (*fixed*

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

value) und Von Neumann Randbedingungen (*fixed gradient*) unterschieden werden. Bei den Dirichlet Randbedingungen werden die Werte auf der Randfläche definiert wohingegen bei den Von Neumann Randbedingungen der wandnormale Gradient der physikalischen Grösse der Randfläche vorgegeben wird. Bei den physikalischen Randbedingungen handelt es sich beispielsweise um Symmetrieebenen, Symmetrieachsen oder Periodizitätsbedingungen, die dem entsprechendem Rand zugeordnet werden aber auch um die Formulierung physikalische Effekte, die den Randwert oder Gradient am Rand beeinflussen, wie z.B. adiabatisches Verhalten des Systems am Rand, Drucknebenbedingungen zur Geschwindigkeitsrandbedingung, Reaktionen, Strahlung und ähnliches. Bevor einige wichtige Randbedingungen aufgeführt werden können, soll zunächst die geometrische Behandlung der Randzellen und ihrer Werte erfolgen. Ähnlich wie im inneren des Rechengietes, ist es auch an den Randflächen überwiegend so, dass Gitterzellen nicht orthogonal vorliegen. Diese Situation ist in Abbildung 3.11 veranschaulicht.

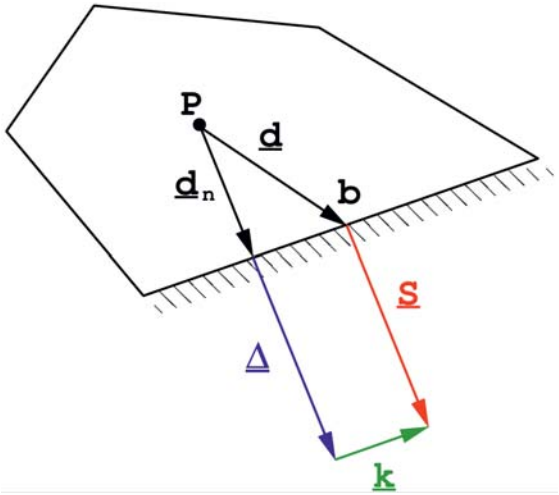


Abbildung 3.11: Diskretisierung am Rand b. Der Randflächenvektor $\mathbf{d}$ zeigt vom Randzellenschwerpunkt $\mathbf{P}$ zum Flächenzentrum der Randfläche. Zur Berechnung der Randwerte oder Gradienten wird der Wandnormalenvektor $\mathbf{d_n}$ von $\mathbf{P}$ aus benötigt. Abbildung aus [Jasak 1996].

$\mathbf{d_n}$ ergibt sich nach 3.11 zu

$$\mathbf{d_n} = |\mathbf{d_n}| \cdot \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} = |\mathbf{d}| \cdot cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{S}||\mathbf{S}|} \ . \tag{3.58}$$

Nun können die beiden wichtigsten Randbedingungen und die diskretisierte Darstellung erläutert werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3.1.4 Numerische Randbedingungen

1. **Vorgabe des Wertes** *fixed value* auf dem Rand.
   Der Wert von ϕ auf dem Rand b sei ϕ_b. (3.11). Gemäß Gleichung (3.16) kann der **Konvektionsterm** für die Randfläche folgendermassen notiert werden:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)\, dV = \sum_f F \cdot \phi_f \ . \tag{3.59}$$

   Wobei die Beiträge der Flächen, die zum Rand gehören als

$$F_b \phi_b \tag{3.60}$$

   kalkuliert werden. F_b ist der Massenstrom durch die Randzellenoberfläche.

   Nach Gleichung (3.20) ergibt sich für den **Diffusionsterm** zunächst

$$\int_{V_P} (\nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi))\, dV = \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \ \mathbf{S}\ (\nabla \phi)_f \ . \tag{3.61}$$

   Da $\mathbf{S}$ und $\mathbf{d_n}$ parallel sind, (3.11) berechnet sich der Gradient am Rand b mittels des bekannten Randflächenwertes ϕ_b und des Zell(schwerpunkt)wertes ϕ_P. Somit ist der Beitrag zur Summe in (3.61) mittels

$$\mathbf{S}\,(\nabla \phi)_b = |\mathbf{S}| \frac{\phi_b - \phi_P}{|\mathbf{d}|} \tag{3.62}$$

   berechenbar.

2. **Vorgabe des Gradienten** (*fixed gradient*) auf dem Rand.
   Der Wandnormalengradient auf dem Rand b sei

$$\left(\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \nabla \phi \right) = g_b \tag{3.63}$$

   Für den **Konvektionsterm** laufen folgende Schritte ab:
   Gemäß (3.4) kann der Wert auf der Randfläche ϕ_b aus dem Zellwert ϕ_P und dem eben definierten, vorgegebenen g_b berechnet werden.

$$\phi_b = \phi_P + \mathbf{d_n} \cdot (\nabla \phi)_b = \phi_P + |\mathbf{d_n}| \cdot g_b \tag{3.64}$$

   Anschließend wird analog (3.59) und (3.60) verfahren.

   Für den **Diffusionsterm** erhält man durch die Vorgabe von g_b den Term

$$\mathbf{S}\,(\nabla \phi)_b = |\mathbf{S}| \cdot g_b \tag{3.65}$$

   für die Beiträge zur Summe in (3.61).

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3.1.5 Physikalische Randbedingungen

1. **inlet** Randbedingung:
   Das Geschwindigkeitsfeld an der Randfläche ist vorgegeben. Der Druckgradient soll 0 sein (*zeroGradient*). Dies bedeutet, der Druck am Rand bleibt konstant.

2. **outlet** Randbedingung:
   Die Ausströmung wird unter Einhaltung der Massenerhaltung kalkuliert. Hierfür gibt es 2 Möglichkeiten.
   1. Die Geschwindigkeitsverteilung der Nachbarzellen wird auf die Randfläche projiziert und wird dann unter der Kontinuitätsbedingung skaliert. Für den Druck gilt wieder *zeroGradient*. Falls der Einlass genauso definiert wurde führt dies aber zu Problemen.
   2. Die Druckverteilung wird vorgegeben (fixedValue) und für die Geschwindigkeitsverteilung gilt die *zeroGradient*- Bedingung und wie immer die Massenerhaltung.

3. **symmetriePlane** Randbedingung:
   Die Gradienten der pysikalischen Grösse in Normalenrichtung dieser Randfläche werden auf 0 gesetzt. Die parallelen Komponenten werden von der Nachbarschicht projiziert. Hiermit kann zum Beispiel ein unendlich langer Zylinderspalt berechnet werden, wenn man die Endplatten auf *symmetryPlane* setzt.

4. eine ausführliche Übersicht aller aktuell in OpenFOAM implementierten Randbedingungen ist unter `http://www.openfoam.org/docs/user/boundaries.php` gelistet.

3.1.6 Diskretisierung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung

Teil man die Navier-Stokes Gleichung(2.11) durch die als konstant vorausgesetzte Dichte erhält man mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p \ . \tag{3.66}$$

Wobei p nun ein dichtenormierter Druck $\frac{p}{\rho}$ ist.
Der Konvektionsterm $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ ist nichtlinear. Er verhält sich quadratisch in der Geschwindigkeit. Geschwindigkeit wird durch sich selbst transportiert. Nach (3.16) und (3.68) lautet der diskretisierte Konvektionsterm:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) &= \sum_f \mathbf{S} \cdot (\mathbf{U})_f (\mathbf{U})_f \\ &= \sum_f F(\mathbf{U})_f \\ &= a_p \mathbf{U}_P + \sum_N a_N \mathbf{U}_N \end{aligned} \tag{3.67}$$

Entweder nutzt man einen Löser für nichtlineare Probleme und nimmt den enormen Rechenaufwand in Kauf oder man Linearisiert den nichtlinearen Term.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3.2 Druck-Geschwindigkeits-Kopplung

Alle zeitlichen und räumlichen Diskretisierungsoperationen für einen Punkt P in Gleichung (3.66) können zu folgender algebraischen Gleichung zusammengefasst werden:

$$a_P \phi_P^n + \sum_N a_N \phi_N^n = R_P \ . \tag{3.68}$$

Der Wert für das Kontrollvolumen $()_P$ ist abhängig von den angrenzenden Zellen $()_N$, was wiederum zu

$$[A]\,[\phi] = [R] \tag{3.69}$$

führt. Wobei sich die Koeffizienten für a_P auf der Hauptdiagonalen befinden (Abbildung 3.12) und die a_N auf den Nebendiagonalen. Die Matrix ist in der Regel „sparse“, also dünn besetzt. Wie dünn hängt von der Ordnung der räumlichen Diskretisierung ab.

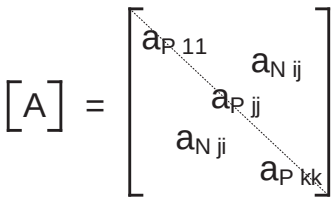


Abbildung 3.12: Struktur der Matrix $[A]$ in (3.69).

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren zur Lösung der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung ist das PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators)-Verfahren, das erstmals von Raad I. Issa [Issa 1986] vorgestellt wurde. Grundgedanke hierbei ist aus der um den Druckgradienten reduzierten Impulsgleichung ein Geschwindigkeitsfeld abzuschätzen (momentum predictor). Das Geschwindigkeitsfeld wird dann zusammen mit dem Druck iterativ korrigiert. Daher wird Gleichung (3.66) zunächst folgendermaßen geschrieben:

$$a_P \mathbf{U}^n{}_P = \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \nabla p. \tag{3.70}$$

Zur Vereinfachung wurden hierbei alle Nichtdiagonalen und Beiträge der rechten Seite (Quellterme) als Operator $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ zusammengefasst. Da der Druckgradient aus genanntem Grund nicht diskretisiert wurde, nennt man diese Form der Impulsgleichung semidiskretisiert.

Aus Gleichung (3.66) wird somit

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = -\sum_N a_N \mathbf{U}^n{}_N + \frac{\mathbf{U}^o}{\Delta t}. \tag{3.71}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Womit (3.71) sich dann die Geschwindigkeiten $\mathbf{U}_P$ ergeben.

$$\mathbf{U}_P = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P}\nabla p \tag{3.72}$$

Durch Einsetzen der Geschwindigkeiten $\mathbf{U}_P$ in die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_P = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P}\nabla p \right) = 0 \tag{3.73}$$

erhält man

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_P}\nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right). \tag{3.74}$$

Anschließend wendet man Identität (3.15) auf (3.74) an und bekommt eine Poisson-Gleichung für den Druck.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_P}\nabla p \right) = \sum_f \mathbf{S} \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f \tag{3.75}$$

Mit der Identität (3.20) ergibt sich Gleichung (3.75) zu

$$\sum_f \mathbf{S} \left[\left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \sum_f \mathbf{S} \left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right) \tag{3.76}$$

Die Geschwindigkeit des neuen Zeitschritts wird mit Hilfe der Identität (3.9) aus (3.72) berechnet. Womit (3.71) sich dann die Geschwindigkeiten $\mathbf{U}_P$ ergeben.

$$\mathbf{U}_P^n = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \sum_f \mathbf{S}(p)_f \tag{3.77}$$

Die Flüsse werden mit

$$F = \mathbf{S}\mathbf{U}_f = \mathbf{S} \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\mathbf{U})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] \tag{3.78}$$

berechnet.

Somit läuft der PISO-Algorithmus im verwendeten Löser folgendermaßen ab:

1. **Initialisierung**:
   Übernehmen der Randbedingungen.
2. **Geschwindigkeitsabschätzung (momentum predictor)**:
   Lösen der semi-diskretisierten Impulsgleichung (3.70). Berechnung eines geschätzten Geschwindigkeitsfeldes mit (3.72).

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

3. **Flussberechnung**:
   Berechnung der resultierenden Massenströme auf Basis der geschätzten Geschwindigkeitsfelder mit (3.78).

4. **Druckberechnung**:
   Berechnung des Korrekturdrucks mit (3.76) aus den geschätzten Geschwindigkeitsfeldern.

5. **Flusskorrektur**:
   Korrektur auf divergenzfreien Massenstrom, welcher im nächsten Zeitschritt für den Konvektionsterm verwendet wird.

6. **Geschwindigkeitskorrektur**:
   Korrektur der geschätzten Geschwindigkeiten, so dass Massenströme divergenzfrei sind. (Kontinuitätsgleichung)

7. **Iteration**:
   Nutze neue Geschwindigkeit und iteriere von Punkt 3 (Flussberechnung) bis 6 (Geschwindigkeitskorrektur) bis die Abbruchgenauigkeit erreicht ist.

8. **neuer Zeitschritt**:
   Überprüfe Randbedingungen, erhöhe den Zeitschritt und durchlaufe Schleife von Punkt 2 (momentum predictor).

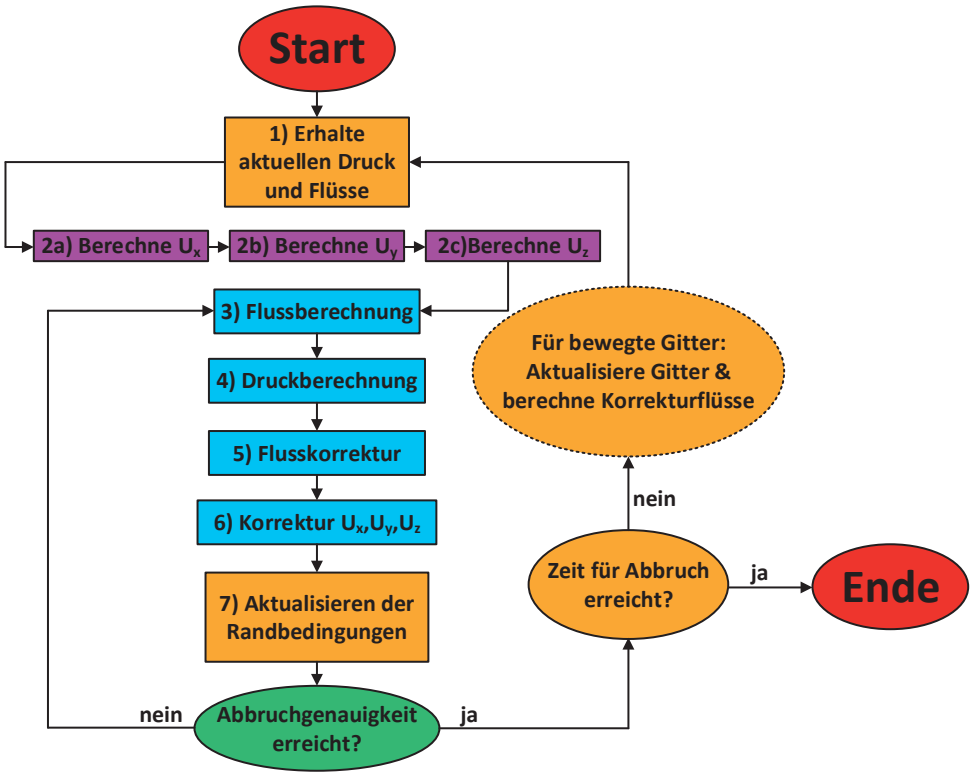


Abbildung 3.13: Schema PISO-Algorithmus in OpenFOAM ®. Im Falle bewegter Geometrien erfolgt eine Gitteraktualisierung und ein entsprechende Flusskorrektur.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

4 Gittererstellung

Die Gittererstelung erfolgt mit dem bereits in OpenFOAM enthaltenen Programm ***blockMesh*** [OpenFOAM]. Als Eingabe benötigt ***blockMesh*** eine Textdatei ***blockMeshDict*** 4.1.

Listing 4.1: blockMeshDict

```
/*--------------------*- C++ -*----------------------*\
FoamFile
{
    version     2.0;
    format      ascii;
    class       dictionary;
    object      blockMeshDict;
}
// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //

convertToMeters 1;

vertices
(
( 0.025       0.0       -0.0185 ) // 0
( 0.0245196320101 0.0048772580504  -0.0185 ) // 1
        ...                 ...       ...        //...
( 0.0461939766256 -0.0191341716183 0.0185 ) // n-2
( 0.0490392640202 -0.00975451610081 0.0185 ) // n-1
);
blocks
(
hex ( 0   32   33   1   160   192   193   161 )( 1   4   8 ) simpleGrading ( 1  1   3.0 ) //0
        ...                 ...       ...                 //...
);
edges
(
arc 0   1 ( 0.0248796181668 0.00245042850824 -0.0185 )
        ...                 ...       ...
);
boundary
(

  patchName00
    {
    type wall;
```


Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

```
37      faces
38      (
39      ( 0   160   161   1 )
40      (  ...   ...    ...    ...)
41      ( 31   191   160   0 )
42      );
43      }
44      ...                  ...       ...
45      patchNameXY
46      {
47      type cyclicAMI;
48      neighbourPatch  outsideSlider;
49      faces
50      (
51      (  ...   ...    ...    ...)
52      );
53      }
54  );
55  mergePatchPairs
56  (
57  );
58  // ************************************************************************* //
```

Hier werden zuerst n kartesische Punkte gelistet definiert (4.1, Zeile 13: *vertices*();). Der erste Punkt der Liste bekommt den Index 0, der letzte den Index $n-1$. Aus den Punkten werden dann, jeweils durch Listen von 8 (im Falle hexagonaler Zellen) der Punktindizes in einer bestimmten Reihenfolge, Blöcke generiert. Neben den 8 Punkten wird zusätzlich die jeweilige(x, y, z) Kantenteilung und ein möglicher Streckungsfaktor für die Kante definiert. Mit dem Streckungsfaktor ist es möglich Zellen in eine Richtung zu verkleinern. Die Blöcke erfahren entsprechend der Reihenfolge ihrer Listung ebenfalls eine bei 0 beginnende Nummerierung, was beim Debuggen eines fehlerhaften ***blockMeshDict***s hilfreich ist. Nun erfolgt die Angabe wie die Punkte die einen Block beschreiben, verbunden werden. Für die Gittererstellung der Geometrien in dieser Arbeit wurden gerade Strecken, Kreisbögen und Splines verwendet. Gibt man hier nichts vor, erfolgt die Verbindung der Punkte einer Kante als gerade Strecke. Gibt man das Schlüsselwort *arc*, 2 Punktindizes und einen Punkt vor, so werden die beiden Punkte durch einen Kreisbogen, der den letztgenannten Punkt tangiert, verbunden. Mit dem Schlüsselwort *spline*, 2 Punktindizes und einer beliebigen Punktliste werden die beiden Punkte über einen Spline verbunden, der die zuletzt gelisteten Punkte enthält. Als nächster Eintrag folgt die Namensgebung von Flächen, die später mit Randbedingungen verknüpft werden. Hierzu werden alle Einzelflächen, die zu einer Gesamtfläche gehören gelistet. Eine Einzelfläche definiert man durch Nennung von 4 Punktindizes in einer entsprechenden Reihenfolge. Abschließend ist es möglich Flächen zusammenzukleben. Hierbei nutzt man das Schlüsselwort *mergePatchPairs* und die Namen der beiden Gesamtflächen, die zusammengeklebt werden sollen. Wichtig ist, dass alle einzelnen Schritte in der eben skizzierten Arbeitsweise von ***blockMesh*** nacheinander abgearbeitet werden. Das bedeutet beispielsweise bei der Definition der Blöcke werden zunächst die Punkte linear verbunden, da ***blockMesh*** noch nicht über die Information verfügt, dass sie eigentlich über

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

einen Kreisbogen verbunden werden sollen. Das führt bei der Erstellung eines Zylinderspalts mit hoher Exzentrizität zu Schwierigkeiten, wenn man das Zylindersystem in Umfangsrichtung aus zu wenigen Blöcken zusammensetzt. Hier können sich gerade Blockkanten zunächst kreuzen obwohl sie später noch als Kreisverbindung deklariert werden und sich nun nicht mehr kreuzen (4.1).

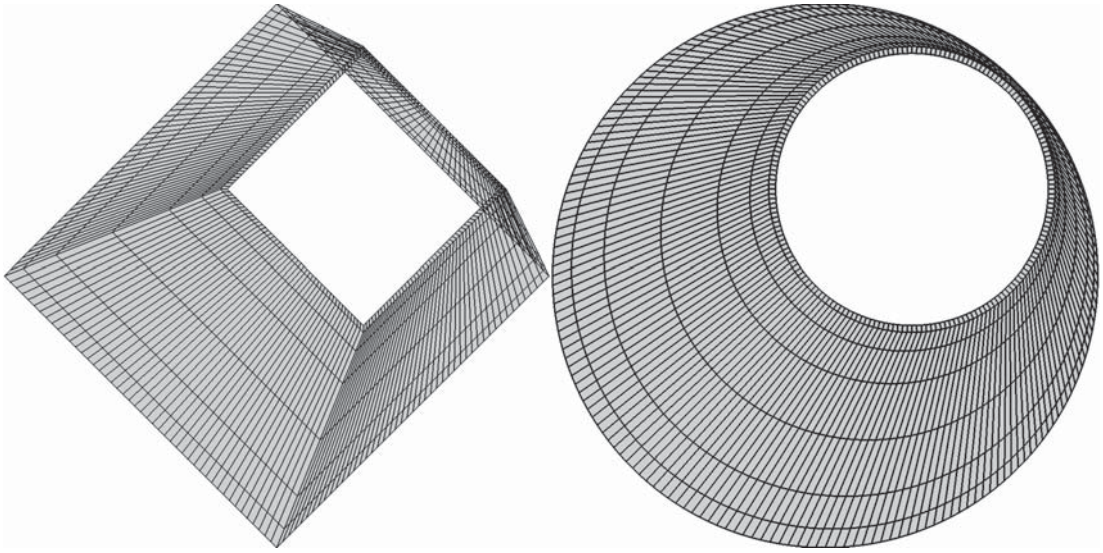


Abbildung 4.1: Links: Zur Veranschaulichung des Problems soll der Zylinderspalt aus 4 Blöcken zusammengesetzt werden. Zunächst lineare Eckpunktverbindungen kreuzen sich bei der Blockverarbeitung. Rechts: Die spätere Bogenverbindung der Eckpunkte führt zu keiner Kreuzung. Trotzdem ist das Gitter durch die vorherige Kantenkreuzung unbrauchbar.

Das bedeutet, bei der Vernetzung hoch exzentrischer Zylinderspaltgeometrien müssen erheblich mehr Blöcke und somit noch mehr Punkte verarbeitet werden. Wie viel Blöcke man benötigt, hängt auch von der Spaltweite Ψ 0.1 und der Richtung der exzentrischen Verlagerung e 0.1 ab. Deshalb wurde ein Gittergenerator erstellt, der als Inputparameter unter anderem die Anzahl der Blöcke benötigt und automatisch alle Punkte, Blöcke, Kanten, Flächen und Klebeflächen im ***blockMeshDict*** listet. Hierzu wurde die Programmiersprache Python verwendet.

Im Folgenden sollen die wichtigsten Eigenschaften, die der Gittergenerator berücksichtigt, vorgestellt werden. Als erstes sind die Vorgabeparameter für das Netz in den Header einzutragen. Das sind Außenradius r_{out}, die maximale Exzentrizität $maxEcc$, die während der Verlagerungsbahn auftritt, der Prozentspalt $gip = \Psi \cdot 100 = \frac{r_{out}-r_{in}}{r_{in}} \cdot 100$, die Höhe des zylindrischen Spalts $heigth$ (Lagerbreite), der Radius der Ölversorgungsbohrungen r_{of}(bestimmt die Höhe des mittleren Gitterbereiches an dem später die Nut angefügt wird), die radiale Nuttiefe dog und die axiale Länge der Ölversorgungsbohrungen $loof$. Eine Skizze des Gitters und die wichtigsten Geometrieeingabeparameter sind in 6.1 dargestellt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

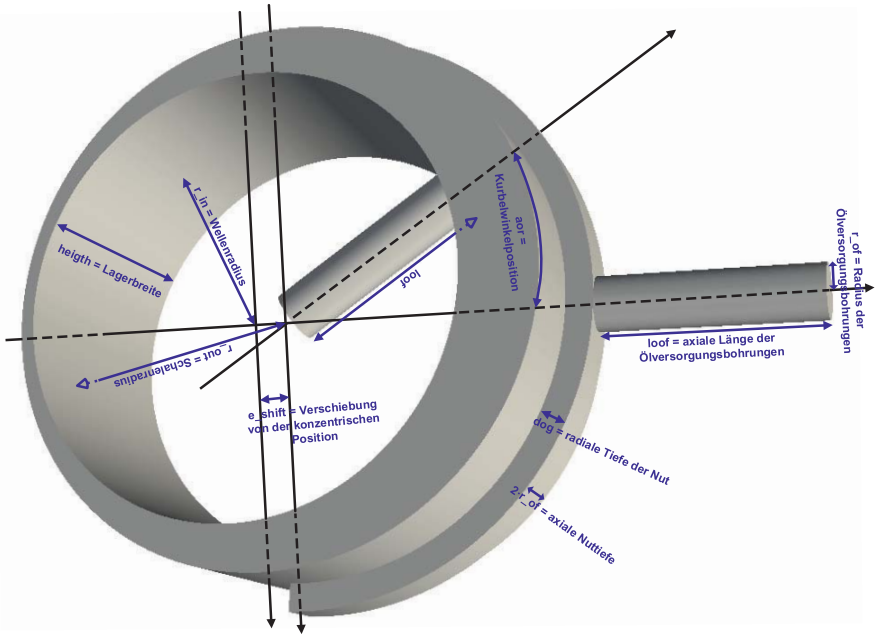


Abbildung 4.2: Geometrieskizze des Wollfarth Lagers

Im Anschluss wird die Anzahl der radialen Zellen *nrc* im Spalt vorgegeben. Aus der Vorgabe der radialen Zellen *nrc* werden alle anderen Zellkalkulationen vorgenommen. Um die radiale Zellenanzahl zu erhöhen ohne die restliche Zellenkalkulation zu beeinflussen, besteht die Möglichkeit den Parameter *anrc* zu nutzen. Des weiteren ist es möglich alle optimalen(4.4) Zellenzahlen über Korrekturfaktoren zu verringern oder zu erhöhen. Mit optimal ist hier gemeint, das Aspektverhältnis aller Zellen im Gitternetz minimal zu halten. Für sehr kleine Spalte beispielsweise ist es unmöglich nach der optimalen Vorgabe zu Vernetzten, da sich hier eine enorme Umfangszellenanzahl ergibt. Diese sehr hohe Umfangszellenanzahl steigt aufgrund der Berücksichtigung der während der Verlagerungsbahn maximal auftretenden Exzentrizität zusätzlich exponentiell 4.3. Somit ist es in diesem Fall nötig die Umfangszellenanzahl über einen Korrekturfaktor zu reduzieren.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

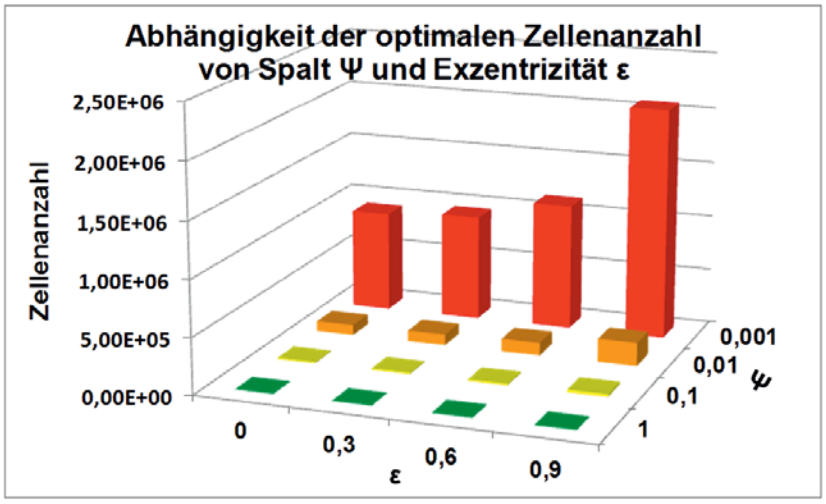


Abbildung 4.3: Abhängigkeit der optimalen Zellenanzahl einer axialen Zellenschicht (Umfangszellen + radiale Zellen) zur Spaltweite Ψ und Exzentrizität ϵ bei jeweiliger Verwendung von 12 radialen Zellen.

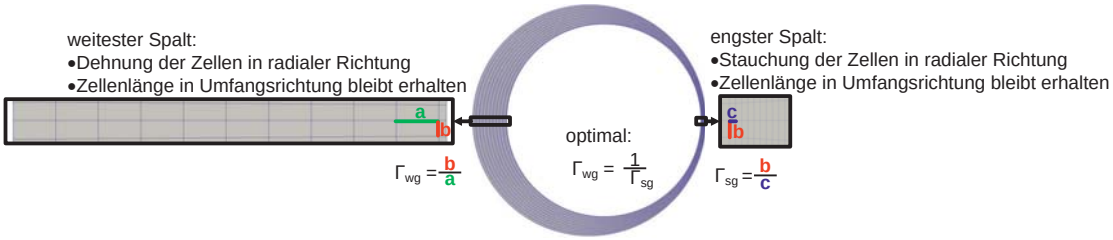


Abbildung 4.4: Berechnung der zur radialen Auflösung optimalen Umfangszellenanzahl

Nach Abbildung 4.4 ergibt sich:

$$\Gamma_{wg} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\Gamma_{sg}} \ . \tag{4.1}$$

Der Parameter a aus 4.4 ist die radiale Zellenlänge im weiten Spalt, b ist die mittlere Umfangszellenlänge (4.2) und c die radiale Zellenlänge im engsten Spalt. Die Abkürzungen sg und wg stehen für smallest und widest gap und beinhalten die Länge des engsten und weitesten Spalts. Da sich die Umfangszellenlänge am Innenzylinder und Außenzylinder je nach Lagerspalt leicht unterscheiden, wird für die Umfangsberechnung des Spalts ein mittlerer Radius angesetzt

$$U_{mean} = \pi \cdot (r_{out} + r_{in}). \tag{4.2}$$

Dies ist nicht genau die mittlere Länge der Umfangszellen, soll an dieser Stelle aber genügen, da sich die Radien bei realistischer Spaltweite eines Lagers von Ψ=0.001=1‰
nur noch infinitesimal unterscheiden. Somit ergibt sich aus (4.1) mit

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$a = \frac{wg}{nrc}, b = \frac{wg}{nrc}, c = \frac{sg}{nrc} \tag{4.3}$$

$$\Gamma_{wg} = \frac{1}{\Gamma_{sg}} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{\frac{U_{mean}}{oncc}}{\frac{wg}{nrc}} = \frac{\frac{sg}{nrc}}{\frac{U_{mean}}{onccc}} \tag{4.4}$$

eine Bestimmungsgleichung für die Anzahl *oncc* der optimalen Umfangszellen in Abhängigkeit der radialen Zellenanzahl *nrc*

$$oncc = \frac{U_{mean} \cdot nrc}{\sqrt{sg \cdot wg}}. \tag{4.5}$$

Durch die Implementierung eines Stretchfaktors eS in die jeweilige Spaltendenrichtung, werden die Zellen an den Zylinderenden verkleinert und in entgegengesetzter Richtung gedehnt. Das Zylinderspaltsystem wurde aus drei axialen Blöcken aufgebaut, zwei Endblöcke und ein Mittelblock. Um den Übergang der axialen Zellenlängen am Mittel- und Endblock zu gewährleisten, muss zunächst die Länge der letzten axialen Zelle des Endblocks an der Grenze zum Mittelblock bestimmt werden. Die axialen Zellenlängen des Mittelblocks werden dann an diese letzte Zelle des Endblocks angepasst. Die Strecke der Länge L soll mit n Zellen diskretisiert werden soll.

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i \tag{4.6}$$

Der oben erwähnte Stretchfaktor ordnet die Zellenlängen so an, dass die n-te Zelle l_n ein eS-faches von l_1 ist.

$$eS \cdot l_1 = l_n \tag{4.7}$$

Desweiteren ist das Längenverhältnis der Nachbarzellen konstant.

$$k \cdot l_{i-1} = l_i \tag{4.8}$$

Aus (4.7)

$$eS \cdot l_1 = l_n = k \cdot l_{n-1} = k \cdot (k \cdot l_{n-2}) = ... = k^{n-1} \cdot l_1 \tag{4.9}$$

folgt dann

$$eS = k^{n-1} \Leftrightarrow k = eS^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4.10}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Nun ist L durch die Eingabeparameter der Gesamthöhe $heigth$ und den Bohrungsradien r_{of} bestimmt 6.1 .

$$L = \frac{heigth - 2 \cdot r_{of}}{2} \tag{4.11}$$

Anschließend kann l_1 durch vorheriges Bestimmen des konstanten Nachbarzellenstretchfaktoren k (4.10) mit (4.12) errechnet werden.

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i = l_1 + k \cdot l_1 + ... + k^{n-1} \cdot l_1 = \sum_{i=0}^{n-1} l_1 \cdot k^i \Leftrightarrow l_1 = \frac{L}{\sum_{i=0}^{n-1} k^i} \tag{4.12}$$

Letztlich ergibt sich mit (4.7) die Länge der Übergangszelle zum Mittelblock l_n und es kann die axiale Auflösung des Mittelblocks (cac) erfolgen.

$$cac = \frac{2 \cdot r_{of}}{l_n} \tag{4.13}$$

Ein ähnlicher Algorithmus ist bei der Optimierung der Sliderzellengröße 4.5 abzuarbeiten. Die Sliderzellen trennen das rotierende vom ortsfesten Rechengebiet. Sie liegen direkt am Innenzylinder und rutschen an den ortsfesten Zellen vorbei. Der restliche Spalt soll ebenfalls mit einer Zellenstretchoption in Richtung Innen- und Außenzylinder versehen werden. Die Gesamtheit der Sliderzellen definiert die Grenze vom Rotor- zum Statorgebiet und muss den selben Ursprung wie der Innenzylinder haben. Würden die Sliderzellen wie die restlichen Spaltzellen der Stretchskalierung unterliegen, hätte der Interface-Kreis im Falle einer exzentrischen Position der Welle einen von der Welle disjunkten Ursprung. Daher soll hier ein optimales Verhältnis der Zellenaspektverhältnisse von Slider- zur Nachbarzelle im weiten und im engen Spalt hergeleitet werden.

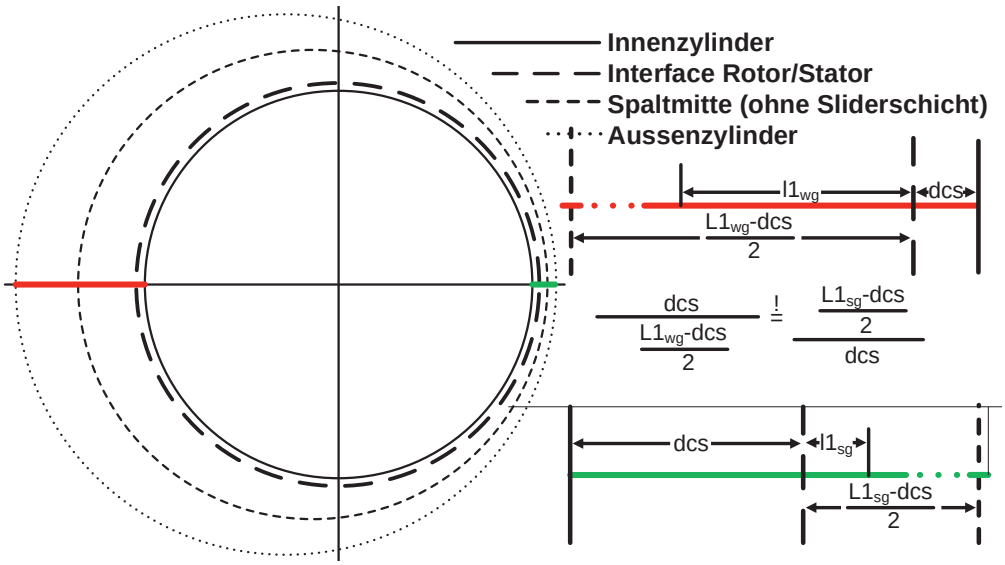


Abbildung 4.5: Skizze zur Berechnung der Sliderzelle

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Die radiale Länge der Sliderzelle wird als *dcs* deklariert. Die radialen Längen der Slidernachbarzellen im engen und im weiten Spalt sind $l1_{sg}$ und $l1_{wg}$. In 4.5 ist der Ansatz zur Berechnung skizziert. (4.12) liefert die Bestimmungsgleichung für $l1_{sg}$ und $l1_{wg}$.

$$l1_{sg} = \frac{L_{sg}}{\sum_{i=0}^{n} k^i} \; ; \; l1_{wg} = \frac{L_{wg}}{\sum_{i=0}^{n} k^i} \; ; \quad mit \; n = \frac{nrc + anrc - 1}{2} \tag{4.14}$$

Hierzu wird k analog (4.10) berechnet.

$$k = rS^{\frac{1}{n-1}}. \tag{4.15}$$

L_{sg} und L_{wg} sind aus 4.5 ablesbar.

$$L_{wg} = \frac{wg - dcs}{2} \; ; \quad L_{sg} = \frac{sg - dcs}{2} \tag{4.16}$$

Aus dem Ansatz, dass die Verhältnisse von Nachbarzelle im weiten Spalt ($l1_{wg}$) zu Sliderzelle (*dcs*) möglichst dem Verhältnis von Sliderzelle zu Nachbarzelle im engen Spalt ($l1_{sg}$) entsprechen soll 4.5 erhält man eine quadratische Bestimmungsgleichung für *dcs*,

$$\frac{L_{wg}}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right) \cdot dcs} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right) \cdot dcs}{L_{sg}} \Leftrightarrow \frac{\frac{wg-dcs}{2}}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right) \cdot dcs} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right) \cdot dcs}{\frac{sg-dcs}{2}} \tag{4.17}$$

bei der nur die positive Lösung Sinn ergibt.

$$dcs = \frac{wg + sg}{-8 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right)^2 + 2} + \sqrt{\left(\frac{-wg - sg}{-8 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right)^2 + 2}\right)^2 + \frac{wg \cdot sg}{4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} k^i\right)^2 - 1}} \tag{4.18}$$

Der Gittergenerator liegt in 2 verschiedenen Versionen vor, als einfacher Zylinderspalt ohne Nut und Bohrungen und als Zylinderspalt mit 180° Nut und Bohrungen.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

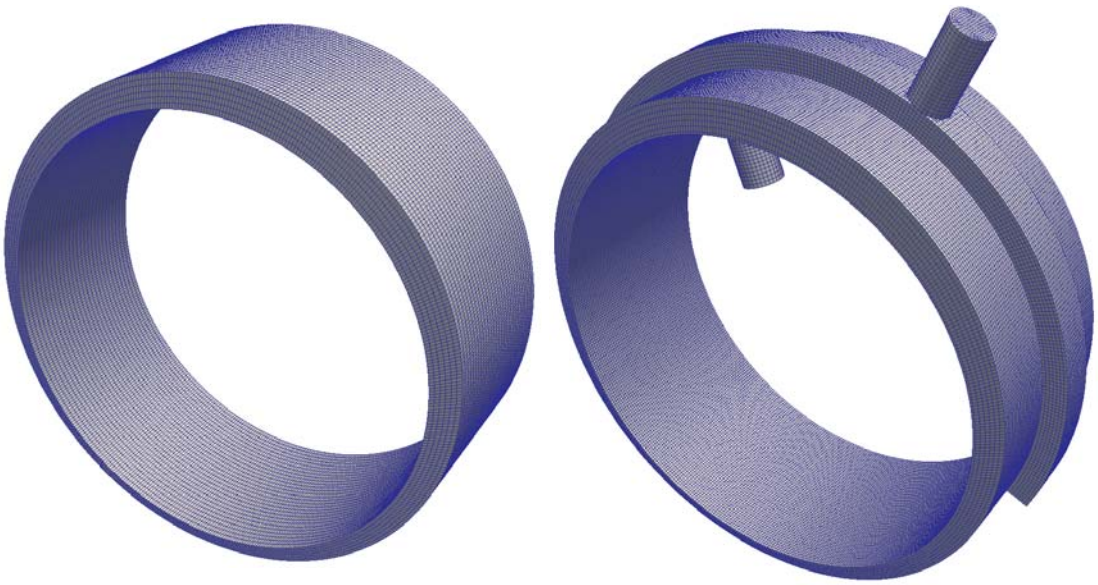


Abbildung 4.6: Links: Das vereinfachte Lagermodell. Ein einfacher Zylinderspalt. Rechts: Das 3D-Lagermodell mit Nut und Bohrungen.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

5 Validierung und Optimierung

In diesem Kapitel sollen die Lösungen verschieden komplex gestalteter Strömungsprobleme, die im Verlauf der Erweiterung vom einfachen Zylinderspalt bis zum Spalt mit Verlagerung der rotierenden Welle, Ölversorgungsbohrungen und Nut, aufgetreten sind, verglichen und validiert werden.

5.1 Gitterstudie des Zylinderspalts

Um Abzuschätzen mit welcher Auflösung man enge Spaltsysteme berechnen kann oder sollte, wurde zunächst eine Gitterstudie vorgenommen. Hierzu wurden Spaltsysteme mit einer Exzentrizität von $\epsilon = 0.3$, 0.6 und 0.9 bei einer normierten Spaltweite $\Psi = 0.001$ also 1 ‰ mit jeweils 2,4,6,8,10 und 12 radialen Zellen vernetzt. Die Berechnung der Umfangs- und axialen Zellen erfolgte automatisch, wie in Kapitel 4 beschrieben. Der Innenzylinder rotiert jeweils mit 2000 rpm. Übersicht der Simulationsparameter:

Parameter	Kurzzeichen	Wert	Einheit
normierter Spalt	Ψ	0.001	-
Innenzylinderradius	R_1	0.04995004995	m
Außenzylinderradius	R_2	0.05	m
Exzentrizität	ϵ	0.3;0.6;0.9	-
Geschwindigkeit am Innenzylinder	U_1	10.461513998	$\frac{m}{s}$
kinematische Viskosität	ν	1.228e-05	$\frac{m^2}{s}$
Fluiddichte	ρ	836.4	$\frac{kg}{m^3}$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

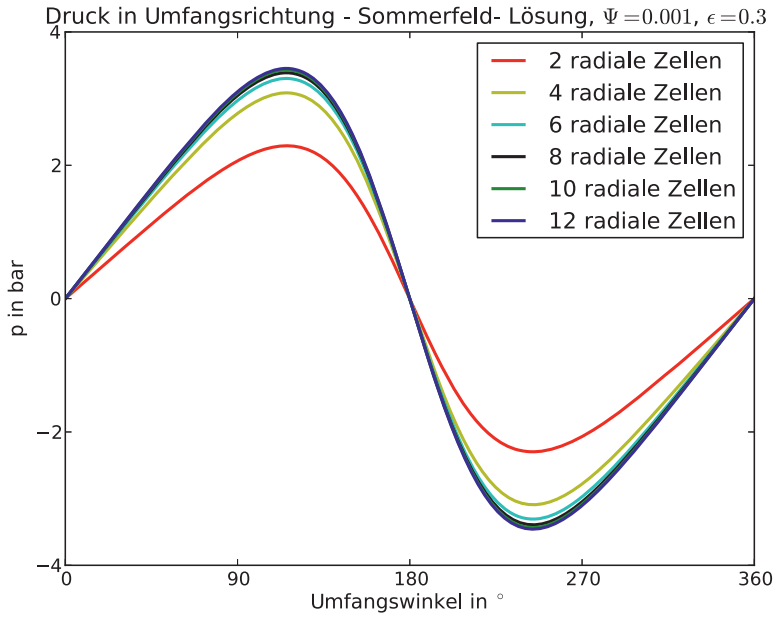


Abbildung 5.1: Gitterstudie zum 1 ‰ Spalt bei 2000 rpm und $\epsilon = 0.3$

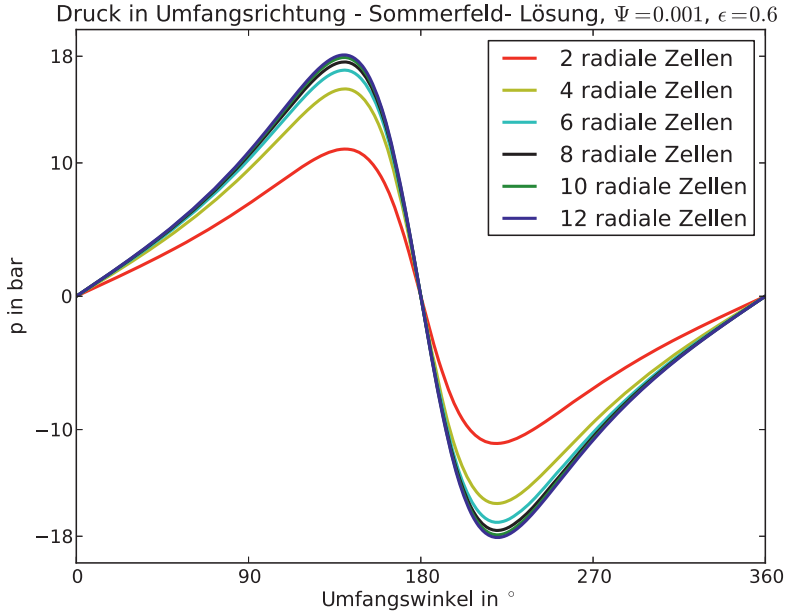


Abbildung 5.2: Gitterstudie zum 1 ‰ Spalt bei 2000 rpm und $\epsilon = 0.6$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

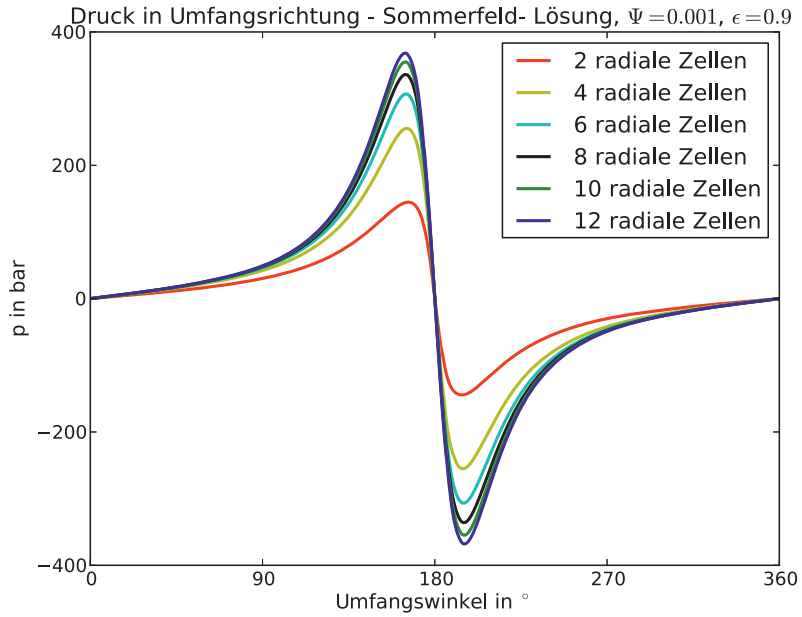


Abbildung 5.3: Gitterstudie zum 1 ‰ Spalt bei 2000 rpm und $\epsilon = 0.9$

Es ergaben sich folgende Fehler bezogen auf 12 radiale Zellen:

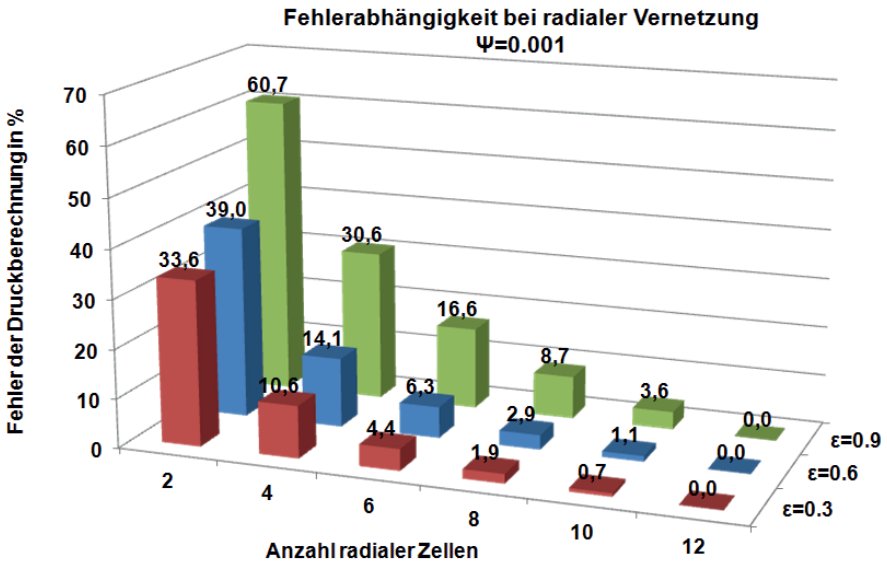


Abbildung 5.4: Gitterstudie zum 1 ‰ Spalt bei 2000 rpm für $\epsilon = 0.3$; 0.6 und 0.9.

Grundsätzlich ist eine stetige Zunahme des Fehlers bei steigender Exzentrizität und gleichbleibender Vernetzung zu Verzeichnen. Bei hoher Exzentrizität sind die Druckgradienten wesentlich steiler und können nur mit hoher Auflösung exakt berechnet werden.

Würde man den Spalt zu vorgegebener radialer Zellenanzahl in Umfangsrichtung optimal (Gleichung 4.5) vernetzten, würde das auf folgende Gesamtzellenanzahl pro axiale Gittere-

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

bene führen. Die gesamte Zellenanzahl eines Gitters wäre dann der entsprechende Wert aus Abbildung 5.5 multipliziert mit der axialen Zellenanzahl.

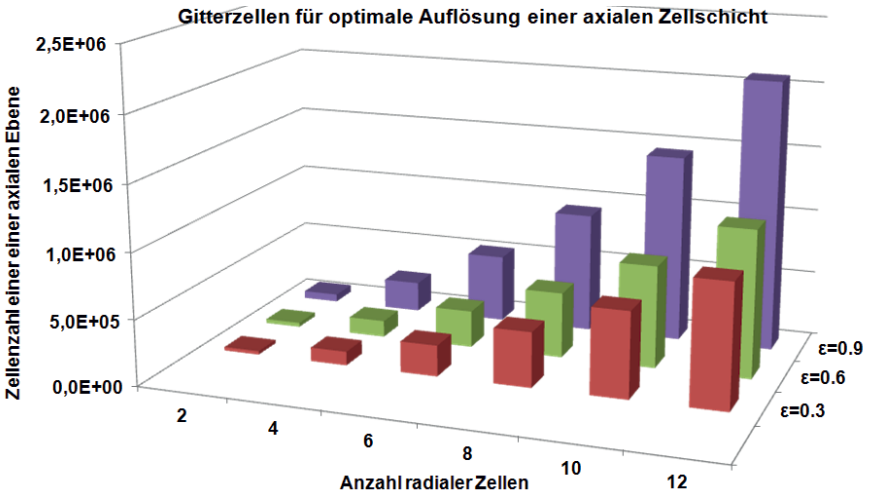


Abbildung 5.5: Optimale Zellenanzahl einer axialen Zellschicht im 1 ‰ Spalt für ϵ = 0.3; 0.6 und 0.9.

Am Beispiel des Wollfarth Lagers ergab sich ein Aspektverhältnis von etwa 740. Es ist leicht abschätzbar, dass im Falle einer radialen Auflösung von 12 Zellen, für die axiale Auflösung weit mehr als 100 Zellen benötigt werden. Der momentane Weg einen solchen Spalt rechenbar (maximal 10 Millionen Zellen) zu vernetzten, ist die optimale Umfangs- und Axialzellenanzahl stark zu reduzieren unter Beachtung ein kritisches maximales Zellenaspektverhältnis nicht zu überschreiten. Eine solche Reduzierung der Umfangs- und Axialzellenanzahl hat keinen Effekt auf das Ergebnis, da immer noch genügend Zellen vorhanden sind um die geringen Änderungen in axialer und Umfangsrichtung aufzulösen. Überschreitet man allerdings ein kritisches Aspektverhältnis konvergiert die Lösung nicht mehr. Somit wäre dies ein neuer Ansatz für einen weiterführenden Gittergenerator. Ein neuer Inputparameter wäre eine maximale Zellenanzahl unter Kontrolle des maximal auftretenden Zellenaspektverhältnisses.

In Abbildung 5.7 und 5.8 ist die maximal auftretende Nicht-Orthogonalität und Skewness der jeweiligen Vernetzungen dargestellt. Zunächst sollen die Begriffe kurz geklärt werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

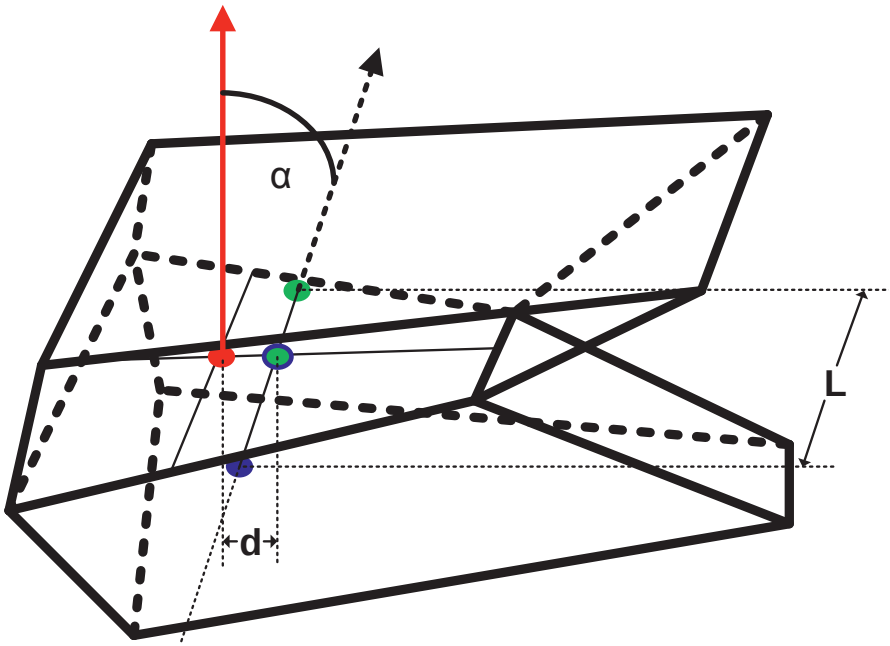


Abbildung 5.6: Skewness d und Nicht-Orthogonalität α.

Der rote „Punkt“ in 5.6 ist der Schwerpunkt der gemeinsamen Grenzfläche zwischen den beiden Zellen, der blaue ist der Schwerpunkt der unteren Zelle, der grüne der Schwerpunkt der oberen Zelle und der blau-grüne der Schnittpunkt der Verbindungslinie vom blauen zum grünen Punkt. Der rote Vektor repräsentiert den gemeinsamen Grenzflächennormalenvektor durch den oben definierten roten Punkt. Der Winkel zwischen dem Grenzflächennormalenvektor(rot) und dem Vektor durch die beiden Zellschwerpunkte (blau,grün) definiert die Nicht-Orthogonalität. Sie wird in OpenFOAM® im Gradmaß angegeben. Der Quotient aus dem Abstand d zwischen dem Grenzflächenschwerpunkt und dem blau-grünen Intersektionspunkt auf der Grenzfläche sowie dem Abstand L der Zellzentren beschreibt in OpenFOAM® die Skewness. Das sei an dieser Stelle erwähnenswert, da die Skewness oft auch als Wert zwischen 0 und 1 definiert wird. Nach der hier verwendeten Definition kann sie beliebig groß werden. Bei einem Wert von über 4 wird allerdings eine Warnmeldung erzeugt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

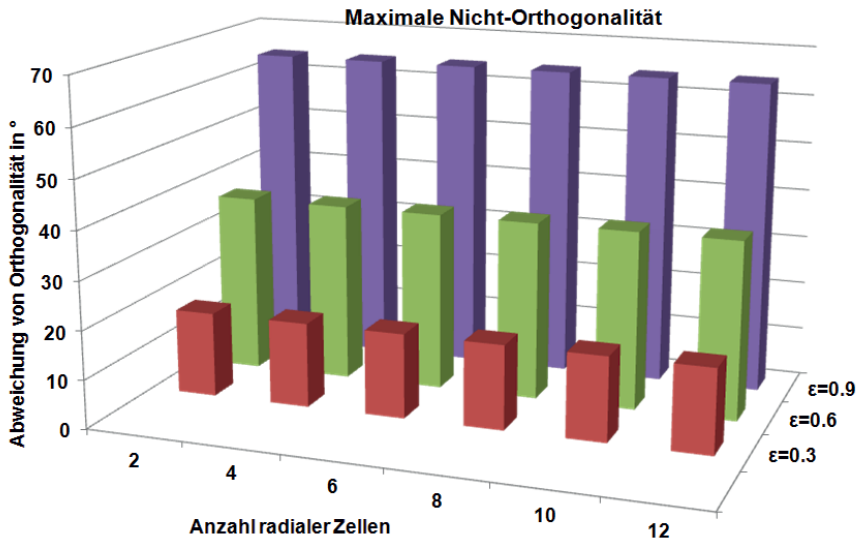


Abbildung 5.7: Nicht-Othogonalität im optimal vernetzten 1 ‰ Spalt für $\epsilon = 0.3$; 0.6 und 0.9.

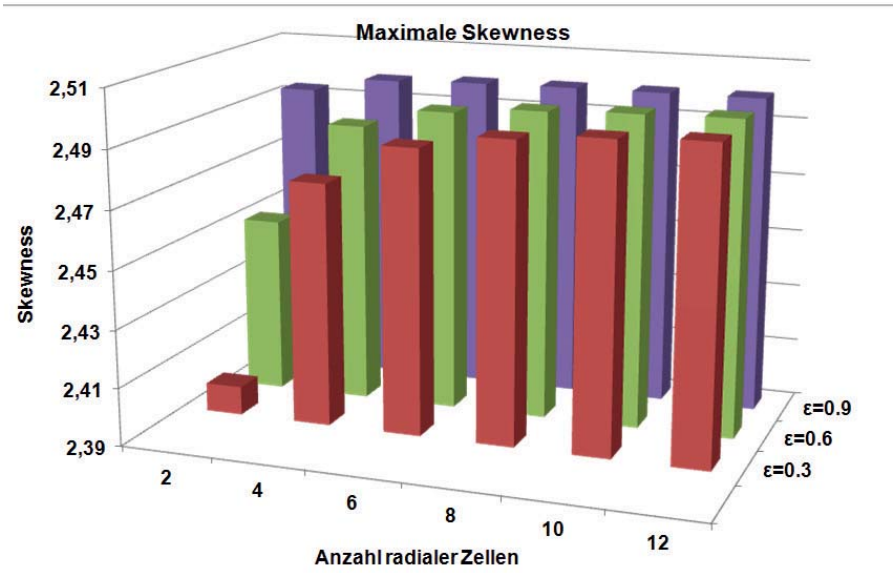


Abbildung 5.8: Skewness des optimal vernetzten 1 ‰ Spalt für $\epsilon = 0.3$; 0.6 und 0.9.

Die nicht-Orthogonalität bleibt für die jeweilige Exzentrizität gleich. Die Skewness steigt geringfügig mit zunehmender radialer Zellenanzahl. Bei Zunahme der Exzentrizität und somit auch der der Nicht-Orthogonalität, muss eine entsprechend aufwendige Nicht-Orthogonale Korrektur 3.1.1 durchgeführt werden, um keine künstliche Diffusion zu erhalten.

5.2 Validierung mit einer analytischer Lösung

Eine der wenigen analytischen Lösungen der Navier-Stokes Gleichung ist die konzentrische Couette-Strömung im unendlich langem Zylinderspalt. Der Innenzylinder rotiert mit

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$U_{\phi 1} = R_1\omega_1$ und der Außenzylinder mit $U_{\phi 2} = R_2\omega_2$. Die differentielle Rotation soll so gering sein, das von der gekrümmten Oberfläche des Außenzylinders kein Impulstransport in radialer Richtung des Innenzylinders erfolgt, sondern alle Fluidpartikel sich auf konzentrischen Kreisbahnen um die Rotationsachse bewegen. Ein Beispiel hierfür, das im Anschluss mit der analytischen Lösung verglichen werden soll, ist ein System mit festem Außenzylinder, einem Spalt von $\eta = \frac{R_1}{R_2} = 0.5$ und einer Rotation die eine $Re = \frac{(R_2 - R_1)R_1\omega_1}{\nu} < 68$ generiert 1.17. Um diese Lösung zu erarbeiten, sollen dem System angepasste Zylinderkoordinaten genutzt werden.

Die Zylinderkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot cos(\phi) & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \cdot sin(\phi) & \phi &= atan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z & z &= z. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Gleichung (2.12) in Zylinderkoordinaten für die jeweiligen Basen:
$\mathbf{e}_r$:

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi \partial v_r}{r\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r}\right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial v_r}{r\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{r^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2\partial v_\phi}{r^2\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

$\mathbf{e}_\phi$:

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_\phi \partial v_\phi}{r\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r}\right) \\ &= -\frac{\partial p}{r\partial\phi} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\phi}{r\partial r} + \frac{\partial^2 v_\phi}{r^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} - \frac{v_\phi}{r^2} - \frac{2\partial v_r}{r^2\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

$\mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi \partial v_z}{r\partial\phi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\ &= -\frac{\partial p}{r\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial v_z}{r\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{r^2\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Da sich die Fluidteilchen nur auf konzentrischen Bahnen um die Rotationsachse bewegen und diese Lösung stationär ist, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ ) = 0; \frac{\partial}{\partial\phi}(\ ) = 0; v_r = 0; v_z = 0;$$

Somit bleibt von (5.2) lediglich

$$\rho\left(-\frac{v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \rho\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{5.5}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

sowie

$$0 = \eta \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\phi}{r \partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\phi}{r \partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} = 0 \tag{5.6}$$

von (5.3). Da $\frac{\partial()}{\partial t} = \frac{\partial()}{\partial \phi} = \frac{\partial()}{\partial z} = 0$ gilt ebenfalls $\frac{\partial()}{\partial r} = \frac{d()}{dr}$. Gleichung (5.6) ergibt Informationen über den radialen Druckverlauf bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit, die noch nicht bekannt ist. Diese ist aber aus (5.6) bestimmbar und das eigentliche Ziel. Somit erhält man für (5.3) folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 v_\phi}{dr^2} + \frac{dv_\phi}{r dr} - \frac{v_\phi}{r^2} = 0. \tag{5.7}$$

Um den Schreibaufwand der folgenden Rechnung zu Begrenzen, wird v_ϕ als U notiert. Daher wird aus(5.7)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \underbrace{\frac{dU}{r dr} - \frac{U}{r^2}}_{NR\ 1} = 0. \tag{5.8}$$

Hinter dem mit $NR\ 1$ markierten Term in (5.8) steckt die Quotientenregel (5.9).

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dr}U\right) \cdot r - U \cdot 1}{r^2} = \frac{dU}{r dr} - \frac{U}{r^2} \tag{5.9}$$

Damit erhält man für Gleichung (5.8)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r}\right) = 0\ , \tag{5.10}$$

die nun integriert und anschließend mit r multipliziert werden kann:

$$\begin{aligned} &\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = k_1 \qquad\qquad | \cdot r \\ &\rightarrow \frac{r dU}{dr} + U = k_1 \cdot r \end{aligned} \tag{5.11}$$

Mit der Produktregel erhalten wir eine günstige Substitution für den 1. Term auf der linken Seite in (5.11)

$$NR\ 2: \ \frac{d}{dr}(U) = U + r\frac{dU}{dr} \rightarrow \frac{r dU}{dr} = \frac{d}{dr}(U \cdot r) - U \tag{5.12}$$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

da sich dann U aufhebt. Nun kann wieder integriert und umgeformt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(U) &= k_1 \cdot r \qquad && | \int dr \\ rU &= k_1 \frac{r^2}{2} + k_2 \qquad && | : r \;\; | \;\; 2k_1 = A;\; k_2 = B \\ U &= Ar + \frac{B}{r} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Somit lautet die Umfangsgeschwindigkeitskomponente der konzentrischen Couette-Strömung

$$U_\phi(r) = Ar + \frac{B}{r} \qquad \forall\, r \in [R_1; R_2]. \tag{5.14}$$

Die Konstanten A und B ergeben sich aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} &1.\; U_\phi(R_1) = R_1 \cdot \omega_1 = AR_1 + \frac{B}{R_1} \\ &2.\; U_\phi(R_2) = R_2 \cdot \omega_2 = AR_2 + \frac{B}{R_2} \end{aligned} \tag{5.15}$$

zu

$$\begin{aligned} A &= \frac{{R_2}^2\omega_2 - {R_1}^2\omega_1}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \\ B &= \frac{{R_1}^2{R_2}^2\,(\omega_1 - \omega_2)}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\;. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Für den folgenden Vergleich von numerischer und analytischer Lösung soll der Außenzylinder fixiert sein ($\omega_2 = 0$). Hierfür ergibt sich folgendes Umfangsgeschwindigkeitsprofil:

$$U_\phi(r) = -\frac{{R_1}^2\omega_1}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \cdot r + \frac{{R_1}^2{R_1}^2\omega_1}{r\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)} \qquad \forall\, r \in [R_1; R_2] \tag{5.17}$$

Um eine sichtbare Abweichung von einem linearen Spaltprofil zu erhalten, darf der Spalt nicht zu klein gewählt werden. Hier wurde $\eta = \frac{R_1}{R_2}$ auf 0.5 gesetzt. Wie zu Beginn der Herleitung bereits erwähnt, sollte für das Couette-Profil etwa $Re < 68$ gelten. Daher wurde die Simulation für eine Re von 50 durchgeführt. Da (5.14) aber unabhängig von der Viskosität ist, kann man darauf schließen, dass die normierte Funktion $\frac{U_\phi(r)}{U_1}$ und somit auch jede andere $Re \in (0; 68]$ für die Simulation einen identischen Vergleich geliefert hätten.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

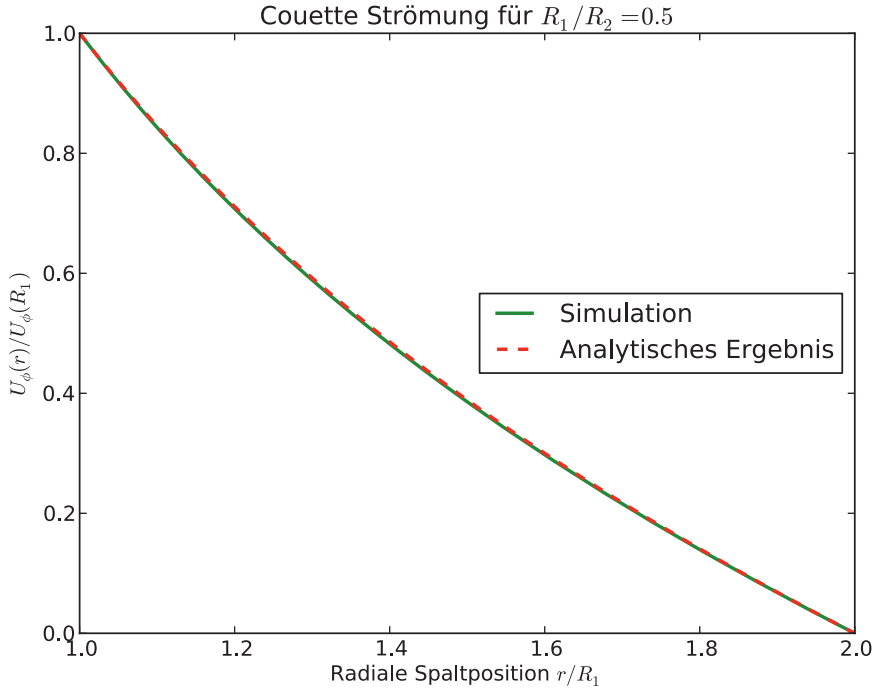


Abbildung 5.9: Vergleich der analytischen und der numerischen Lösung

5.3 Validierung mit einer Lösung auf Basis der Reynolds'schen Differenzialgleichungen

In 2.4 wurde kurz auf den Ansatz der Reynolds'schen Differenzialgleichungen eingegangen. Die Lösung eines Strömungslösers basierend auf diesem Ansatz, sollte für sehr enge Spalte ohne zusätzliche Geometrische Eigenschaften wie Nuten oder Bohrungen eine nahezu analytisch genaue Lösung der Navier-Stokes Gleichung liefern. Dies soll ebenfalls zur Validierung genutzt werden. Als Vergleichsfall soll ein Taylor-Couette System in Wollfarth'schen [Wollfarth 1995] Dimensionen dienen. Die auf den Reynolds'schen Differentialgleichungen basierenden Lösungen wurden vom Kollegen Dipl.-Ing. Carsten Wolf der Universität Kassel mittels TOWER berechnet. Übersicht der Simulationsparameter:

Parameter	Kurzzeichen	Wert	Einheit
normierter Spalt	Ψ	0.001	-
Innenzylinderradius	R_1	0.04995004995	m
Außenzylinderradius	R_2	0.05	m
Exzentrizität	ϵ	0.3;0.6;0.9	-
Geschwindigkeit am Innenzylinder	U_1	10.461513998	$\frac{m}{s}$
kinematische Viskosität	ν	1.228e-05	$\frac{m^2}{s}$
Fluiddichte	ρ	836.4	$\frac{kg}{m^3}$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

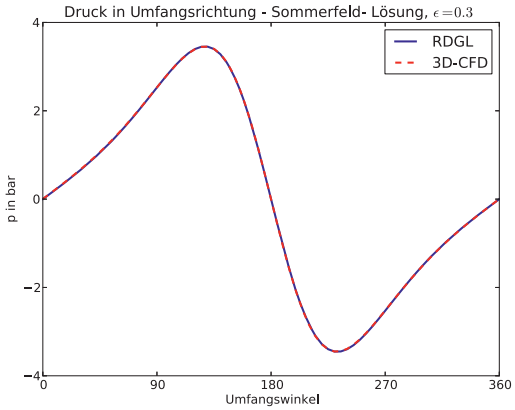


Abbildung 5.10: Vergleich der Druckverläufe bei Verwendung des 3D-CFD-Basisströmungslösers und TOWER. Die Exzentrizität beträgt 0.3.

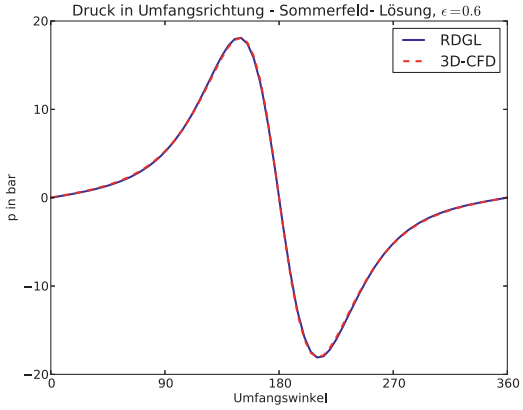


Abbildung 5.11: Vergleich der Druckverläufe bei Verwendung des 3D-CFD-Basisströmungslösers und TOWER. Die Exzentrizität beträgt 0.6.

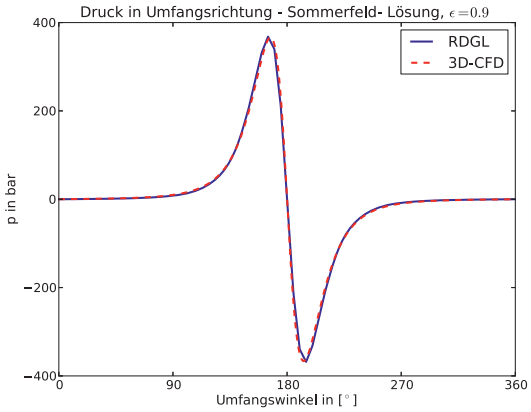


Abbildung 5.12: Vergleich der Druckverläufe bei Verwendung des 3D-CFD-Basisströmungslösers und TOWER. Die Exzentrizität beträgt 0.9.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

5.4 Zeitskala zum Ausbilden und Zerfall von Taylor-Wirbeln

In einem nächstem Schritt wurde untersucht, ob mit dem verwendeten Löser das zeitliche Verhalten der dreidimensionalen Strömung in einem Zylinderspalt mit fest stehendem Außenzylinder, festen Endplatten und rotierendem Innenzylinder korrekt abgebildet werden kann. Als Referenz diente eine Arbeit von Oliver Czarny und Richard M. Lueptow [Czarny und Lueptow 2007]. Hierbei ging es um die Frage, wie lange das knapp unterkritische System in Abhängigkeit von seinen geometrischen Eigenschaften, bei einer kleinen definierten Erhöhung der Reynolds-Zahl, benötigt, um von der Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung zu gelangen und die stationäre Lösung erreicht ist. Es wurde eine unterkritische Strömung mit $Re = 0.9853 \cdot Re_c$ erzeugt. Wobei Re_c die kritische Re für die Taylor-Wirbelströmung ist (Abbildung 1.17). Im Anschluss wurde die Reynolds-Zahl instantan auf $1.0073 \cdot Re_c$ erhöht und es wurde so lange simuliert, bis sich die Taylor-Wirbel in der Strömung komplett ausgebildet hatte. Diese Genauigkeit mag etwas übertrieben wirken, da die kritischen Reynolds-Zahlen (Re_c) von denen ausgegangen wurde [DiPrima u. a. 1984], auch mit einer gewissen Messungenauigkeit vorlagen. Dennoch soll sie für dieses Benchmark eingehalten werden. Als Zeitintervall des Ausbildens der Strömung wurde die Zeit gewählt zu der 95 % der maximalen ausgebildeten radialen Geschwindigkeitskomponente in der axialen Spaltmitte des Systems erreicht wurden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

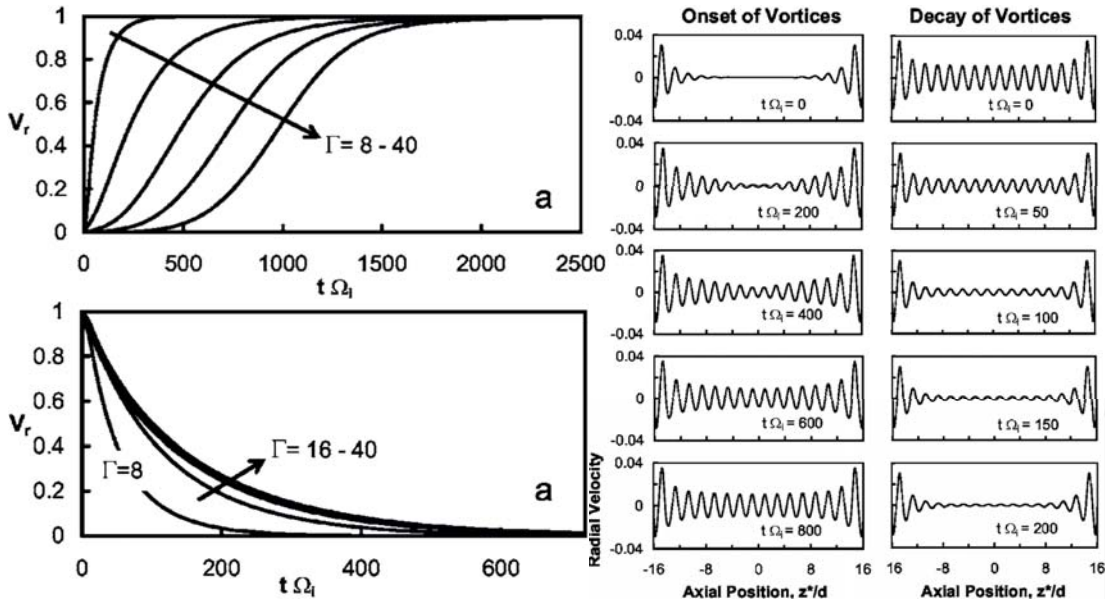


Abbildung 5.13: Einige Ergebnisse von O. Czarny und R. M. Lueptow [Czarny und Lueptow 2007]. Oben links ist das Anwachsen der radialen Geschwindigkeitskomponente mit der dimensionslosen Zeit $\Omega \cdot t$ für $Re = 1.0073 \cdot Re_c$ und den Aspektverhältnissen 8, 16, 24, 32 und 40 zu sehen. Unten links das Verhalten beim Zerfall der Strömung mit $Re = 0.9853 \cdot Re_c$. Rechts ist der zeitliche Verlauf der Radialgeschwindigkeiten bei Ausbildung und Zerfall für $\eta = 0.7$ und $\Gamma = 32$ entlang einer axialen Line in der Spaltmitte dargestellt. Siehe Abb. 5.15

TABLE I. Time ($t\Omega_i$) to achieve 95% of the change from the initial value of the maximum inward radial velocity at midgap to the final value for onset and decay.

	η=0.5		η=0.7		η=0.9	
Γ	Onset	Decay	Onset	Decay	Onset	Decay
8	219	175	103	88	44	39
16	735	364	372	187	151	82
24	1140	444	—	—	—	—
32	1390	473	835	235	384	102
40	1590	483	—	—	—	—
∞	8440	485	—	—	—	—

Abbildung 5.14: Ergebnisse von O. Czarny und R. M. Lueptow [Czarny und Lueptow 2007]. Alle durchgeführten Simulationen und ihre Zeitskalen im Überblick. Die beiden rot markierten Simulationen werden als Validierung berechnet.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

5.4.1 Zeitskala für die Ausbildung von Taylor-Wirbeln

Der Innenradius R_1 und die Rotation wurde so gewählt, dass $t \cdot \Omega = 1$. Somit entsprach eine Sekunde in der Simulation auch einer dimensionslosen Zeiteinheit $1\ t \cdot \Omega$ und nachträgliches Normieren war nicht nötig. Die Reynolds-Zahl wurde über die Vorgabe der kinematischen Viskosität ν eingestellt. Die erste Simulation war die stationäre Berechnung der Ausgangsströmung für die unterkritische Strömung mit $Re = 0.9853 \cdot Re_c = 78.321497$. Nun erfolgte der Sprung von $Re = 78.321497$ auf die überkritische Strömung bei$Re = 1.0073 \cdot Re_c = 80.070277$. Diese Simulation wurde instationär gerechnet um die Zeitinformation zu erhalten und wurde solange durchgeführt bis sich die radiale Geschwindigkeitskomponente nicht mehr wahrnehmbar änderte 5.17. In diesem Fall bis $1500\ \Omega \cdot t$.

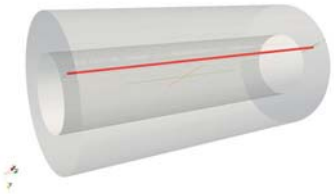


Abbildung 5.15: Beispiel der Simulationsgeometrie für $\eta = 0.5$ mit $\Gamma = 8$. Entlang der roten Linie wurden die berechneten radialen Geschwindigkeiten ausgelesen, die in 5.16 für eine Geometrie von $\eta = 0.7$ und $\Gamma = 32$ dargestellt sind. Der Mittelpunkt der roten Linie wurde mit höherer zeitlicher Auflösung in 5.17 betrachtet.

Um einen ersten Eindruck der zeitlichen Entwicklung der Strömung zu bekommen, wurde ein axiales Mittelspaltprofil 5.15 zu verschiedenen Zeiten ausgelesen. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.16 zu sehen.

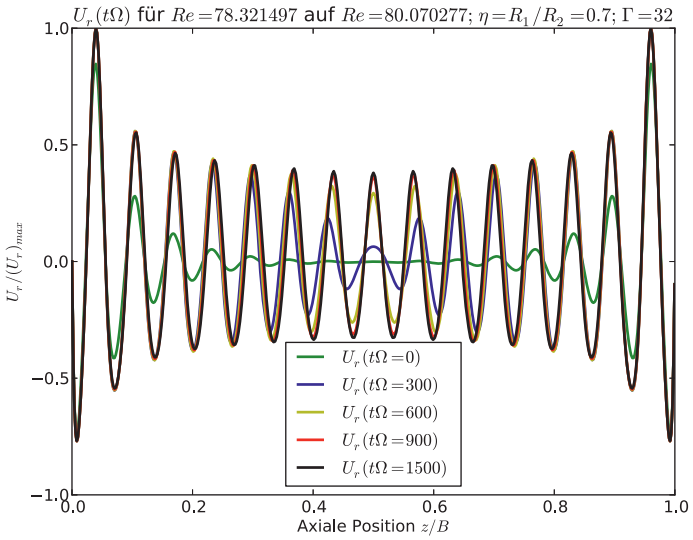


Abbildung 5.16: Übersicht der Entwicklungs- und Zerfallsdauer der Taylor Wirbel.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Um die Zeit zur vollen Ausbildung der Taylor-Wirbel zu bestimmen, wurde der Mittelpunkt der Spaltlinie 5.15 betrachtet. Nach den oben beschriebenen Definitionen ergab sich für die Referenzsimulation eine Zeitskala von ca. 837 $\Omega \cdot t$ was den Zielwert von 835 $\Omega \cdot t$ aus [Czarny und Lueptow 2007] (Abbildung 5.14) sehr gut trifft.

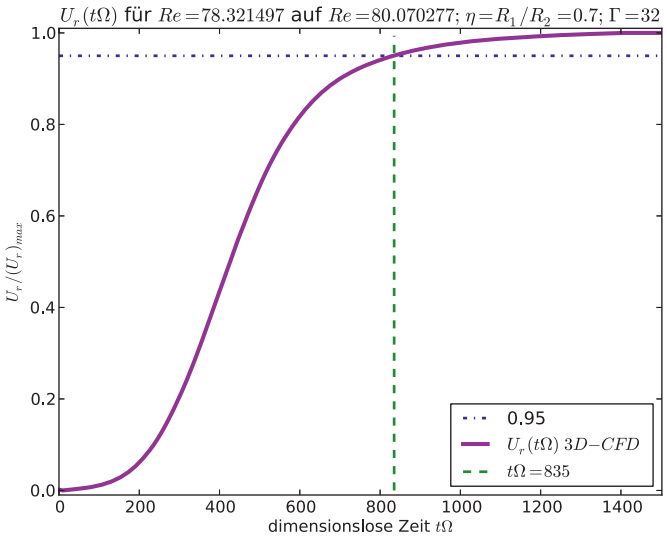


Abbildung 5.17: Bestimmung der Zeitskala für die Ausbildung der Taylor-Wirbelströmung für $\eta = \frac{R_1}{R_2} = 0.7$ und $\Gamma = 32$.

5.4.2 Zeitskala für den Zerfall von Taylor-Wirbeln

Der Zerfall der ausgeprägten Taylor-Wirbelströmung mit $1.0073 \cdot Re_c = 80.070277$ wurde mit einem Sprung auf $Re = 0.9853 \cdot Re_c = 78.321497$ induziert. Hier wurde die Zeit ermittelt werden, in der nur noch 5 % der ursprünglichen radialen Geschwindigkeitskomponente vorhanden war. In Abbildung 5.18 ist zunächst wieder ein axiales Profil zu verschiedenen Zeitpunkten abgebildet um die grobe zeitliche Entwicklung des Zerfalls der Taylor- Wirbel festzustellen.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

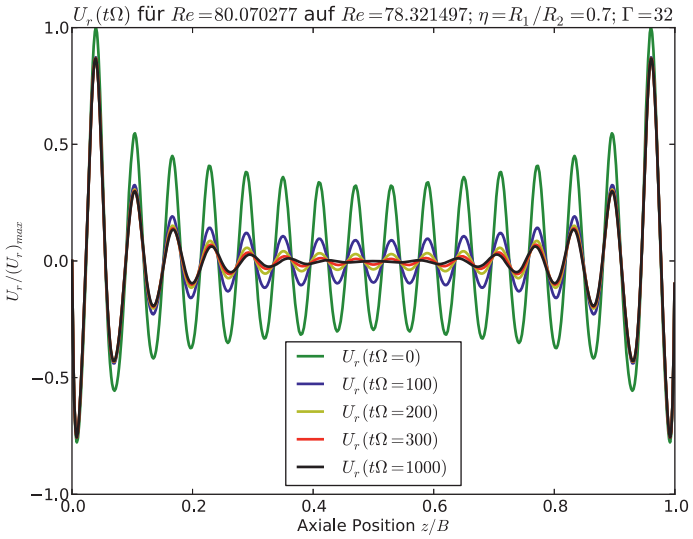


Abbildung 5.18: Axiale Mittelspaltprofile 5.15 für den Zerfall der Taylor-Wirbel bei $\eta = 0.7$ und $\Gamma = 32$.

In Abbildung 5.19 liegt der Fokus erneut auf dem Mittelpunkt der in Abbildung 5.15 dargestellten roten Linie. Hier wurde ein Wert von 5% der Ausgangsamplitude nach ca. 236 $\Omega \cdot t$ erreicht. Somit gelang auch in dieser Simulation eine korrekte Berechnung des zeitlichen Strömungsverhaltens der ausgewählten Referenzsimulation aus [Czarny und Lueptow 2007].

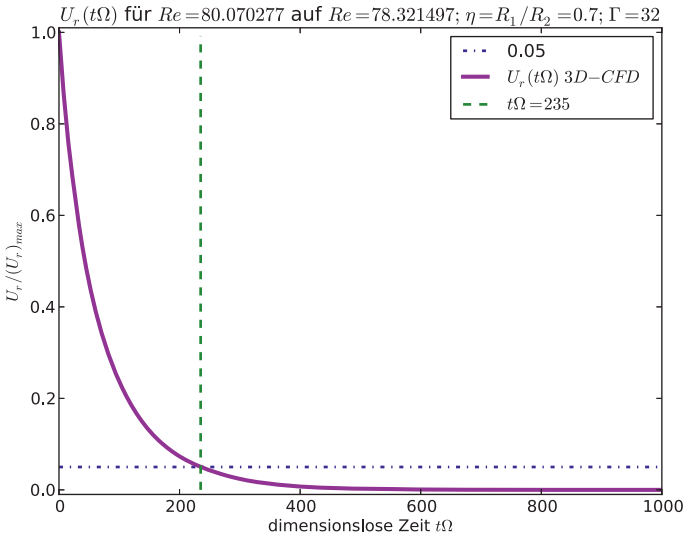


Abbildung 5.19: Zeitlicher Verlauf der radialen Geschwindigkeitskomponente am axialen Mittelpunkt der in 5.15 roten Linie. Die grün gestrichelte Linie entspricht der Zerfallszeitskala von 235 $\Omega \cdot t$ aus [Czarny und Lueptow 2007] für das Erreichens der 5% Grenze der ursprünglichen radialen Geschwindigkeitskomponente.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

O. Czarny und R. Lueptow [Czarny und Lueptow 2007] empfahlen eine Zeitskala von

$$\tau = \frac{B \cdot (R_2 - R_1)}{\nu} \tag{5.18}$$

für die nahezu vollständige Ausbildung und

$$\tau = \frac{10 \cdot (R_2 - R_1)^2}{\nu} \tag{5.19}$$

für den nahezu vollständigen Zerfall der Taylor-Wirbelströmung an. Bis dato existierten nur grundsätzliche Abschätzungen der viskosen Zeitskala von

$$\tau = \frac{\mathcal{L}^2}{\nu} \ . \tag{5.20}$$

Es gibt aber verschiedene charakteristische Längen $\mathcal{L}$ die man nun heranziehen könnte. Beispielsweise den Spalt $H_0 = R_2 - R_1$ oder die Höhe B.

Für das nachgerechnete Beispiel mit $\eta = 0.7$, $\Gamma = 32$, $R_1 = 1\ m$ ergibt sich $R_2 = 1.42857142857\ m$, $B = 13.7142857143\ m$, $\nu(Re = 78.321497) = 0.00547195144357\ m^2/s$ und $\nu(Re = 80.070277) = 0.00535244093849\ m^2/s$ und somit eine Zeitskala von 1098 s für das vollständige Ausbilden von Taylor-Wirbeln sowie 336 s für den vollständigen Zerfall der Strömungsstruktur.

5.5 Verlagerungsbahn des rotierenden Innenzylinders

Zu Beginn des Projektes wurden zunächst grundsätzliche Untersuchungen bezüglich der Möglichkeiten einer translatorischen Verlagerung eines Objekts innerhalb des Rechengebietes durchgeführt. Hierbei wurde das existierende Modul *oscillatingDisplacement* getestet. Dieses Modul ermöglichte unter Abfrage einer Amplitude **A** und einer Frequenz ω die oszillatorische Verlagerung in eine Raumrichtung gemäß:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A} \cdot sin\,(\omega \cdot t) \tag{5.21}$$

Dieses Modul wurde um eine zur ersten Raumrichtung senkrechten Oszillation erweitert und es gelang ein Objekt auf einer Kreisbahn zu verlagern. Das sollte zunächst in höchster Abstraktion eine geschlossene Wellenverlagerungsbahn modellieren.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A_x} \cdot sin\,(\omega \cdot t) + \mathbf{A_y} \cdot cos\,(\omega \cdot t) \tag{5.22}$$

Prinzipiell kann man durch eine kreisförmige Verlagerungsbahn 2 Fälle kreieren. Eine Verlagerungsbahn konstanter Exzentrizität und eine mit oszillatorischer Exzentrizität. Siehe Abbildung 5.20

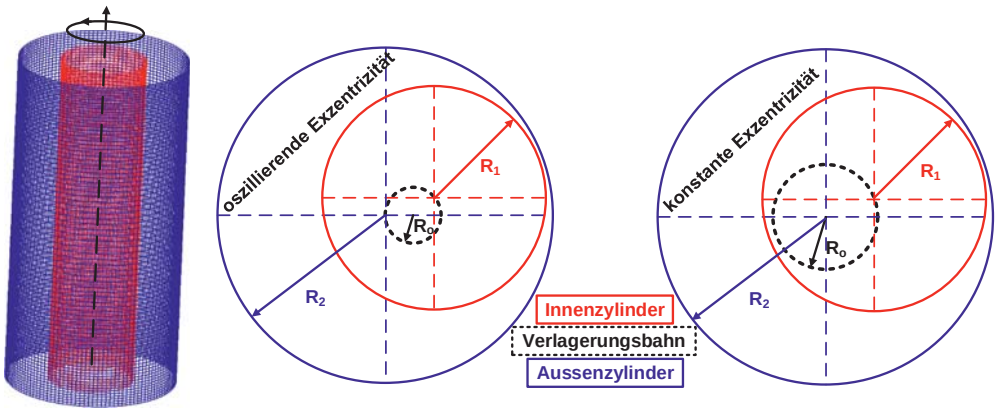


Abbildung 5.20: Links: Das Zylindersystem mit der Rotationsachse des Innenzylinders. Mitte: Verlagerungsbahn mit oszillatorischem Exzentrizitätsverlauf während der Verlagerung. Die Rotationsachse des Innenzylinders wird auf dem schwarz gestrichelten Pfad verlagert. Rechts: Verlagerungsbahn mit konstanter Exzentrizität. Die Verschiebung, die der Ausgangsexzentrizität genügt, definiert den Radius der Verlagerungsbahn.

Die Überprüfung der Lösung dieser Strömung soll wiederum anhand von Zerfall und anschließendem Ausbilden von Taylor-Wirbeln im System geschehen. Aufgrund der Verlagerungsbahn mit oszillatorischer Exzentrizität durchläuft das System verschieden stabile Systemzustände. In Kapitel 1.2.2 wurde auf den destabilisierenden Einfluss hoher Exzentrizitäten auf die Taylor-Wirbelströmung hingewiesen. Dies ist in Abbildung 5.21 anhand von Messwerten von L.S. Siong [Siong 2006] noch einmal dargestellt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

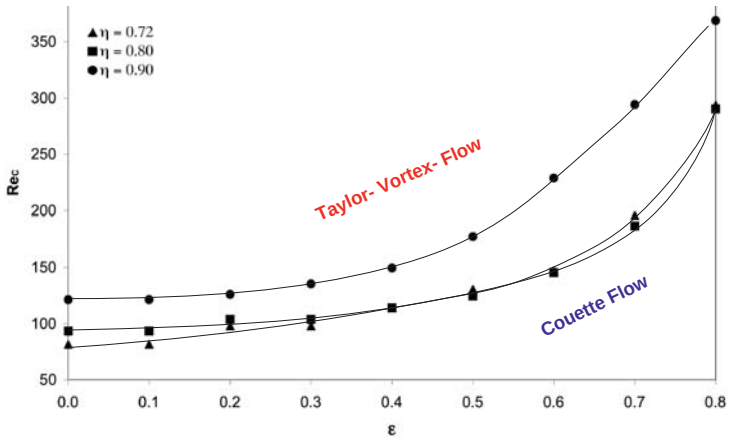


Abbildung 5.21: Die Exzentrizität erhöht die kritische Reynolds-Zahl für die Taylor-Wirbelströmung [Siong 2006]. Siehe auch 1.24, 1.26 oder 1.27.

Die Simulation soll mit ausgeprägten Taylor-Wirbeln in konzentrischer Position beginnen. Die Rotation des Innenzylinders wird konstant gehalten. Nun beginnt die Verlagerung des Innenzylinders auf der definierten Kreisbahn. Das System durchläuft während einer Kreisbahn zunächst zunehmende Exzentrizitäten bis das Maximum bei 180° erreicht ist und sinkt anschließend wieder bis auf ϵ=0 bei 360°. Der genaue Verlauf ist in Abbildung 5.22 dargestellt.

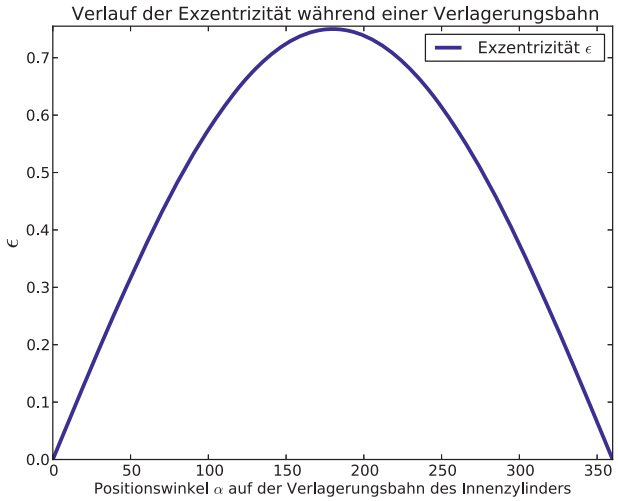


Abbildung 5.22: Exzentrizitätsverlauf der Validierungssimulation.

Dies bedeutet, dass die kritische Reynolds-Zahl bei steigender Exzentrizität ebenfalls steigt. Da aber die Rotation des Innenzylinders konstant bleibt und die kritische Reynolds-Zahl steigt, kann das System bei guter Wahl der Ausgangs-Reynolds-Zahl in den Bereich der Couette Strömung zurückfallen. Ist das Maximum der Exzentrizität überwunden und die kritische Reynolds-Zahl sinkt wieder, können wiederum Taylor-Wirbel entstehen. Im letzten Abschnitt wurde ein ausführliches Beispiel zur numerischen Zeitskala der Ausbildung und des Zerfalls der Taylor-Wirbel vorgestellt. Hier kann dies nun erneut nachvollzogen werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Allerdings soll es in den folgenden Simulationen nicht um komplett ausgebildete Strömungsstrukturen gehen, sondern eher um transiente Strukturen. Daher soll als eine Zeitskala für eine Verlagerungsbahn die kürzere viskose Zeitskala

$$\tau = \frac{(R_2 - R_1)^2}{\nu} \tag{5.23}$$

gewählt werden. Des Weiteren sollen zum Vergleich eine wesentlich kürzere und eine wesentlich längere Zeit für die Verlagerungsbahn eingesetzt werden. Übersicht der Simulationsparameter:

Parameter	Kurzzeichen	Wert	Einheit
Innenzylinderradius	R_1	1	m
Außenzylinderradius	R_2	1.1	m
Verlagerungsbahnradius	R_0	0.0375	m
konzentrischer Spalt	H_0	0.1	m
normierter Spalt	Ψ	0.1	-
Radienverhältnis	η	0.91	-
Zylinderhöhe	B	2	m
Aspektverhältnis	Γ	20	-
Exzentrizität	ϵ	$\epsilon \in [0; 0.75]$	-
max. Verschiebung von konzentrischer Position	e($\epsilon = 0.75$)	0.075	m
viskose Zeitskala	τ	25	s
Dauer der Verlagerungsbahn	T	5;25;45	s
tangentiale Geschwindigkeit am Innenzylinder	U_1	1	$\frac{m}{s}$
kinematische Viskosität	ν	0.0004	$\frac{m^2}{s}$
Reynolds-Zahl des konzentrischen Systems	Re	250	-
Geschwindigkeit an Deckelplatten	-	0	$\frac{m}{s}$
Geschwindigkeit am Außenzylinder	U_2	0	$\frac{m}{s}$

Zur Interpretation der folgenden Abbildungen, in denen der Zylinderspalt einmal abgerollt und dreidimensional Geschwindigkeitsbeträge und deren Isoflächen zeigen, ist es hilfreich anhand Abbildung 5.23 nachzuvollziehen, was ein lokales Maximum der Isofläche der Geschwindigkeit bedeutet.

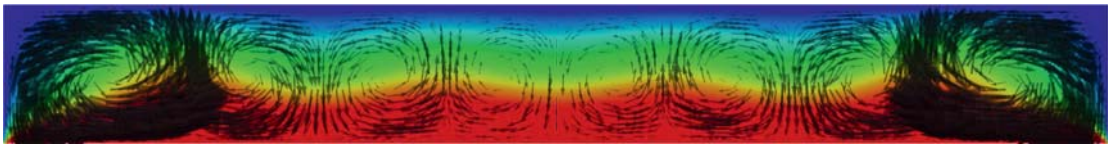


Abbildung 5.23: Beispiel eines Zylinderspalts mit $\eta = 0.5$ und $\Gamma = 8$. Der Übergang von rot nach blau kennzeichnet den Geschwindigkeitsbetrag von hoch nach niedrig. Vier Maxima in der Oberfläche einer Geschwindigkeitsbetragsisofläche weisen 4 Wirbelpaare, also 8 Taylor-Wirbel, nach.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Abbildung 5.24 auf der nächsten Seite zeigt zunächst die Ergebnisse aller drei Simulationen mit verschiedenen konstanten Verlagerungsbahngeschwindigkeiten zu je elf Positionen der Verlagerungsbahn. Im Anschluss wird auf einzelne Positionen einzeln eingegangen.

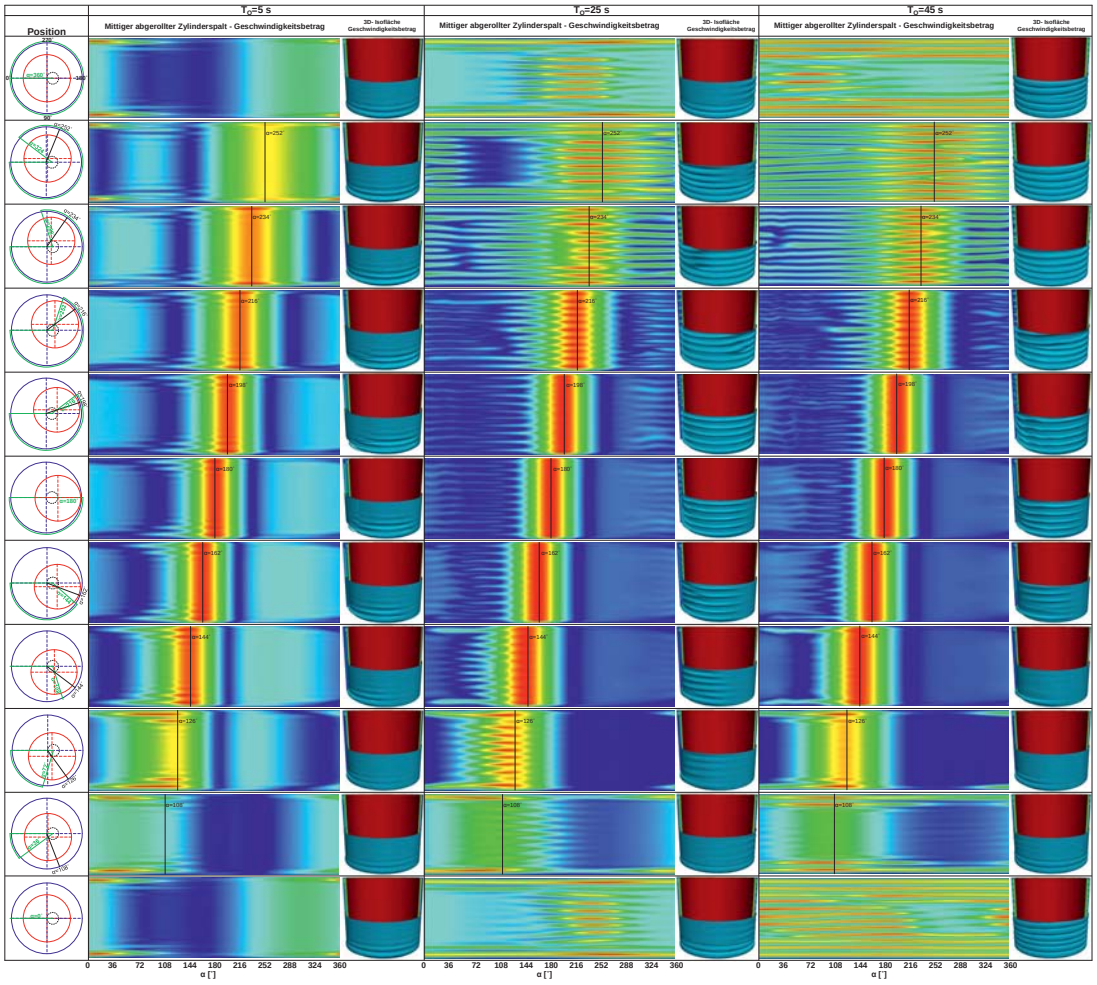


Abbildung 5.24: Zerfall und Neubildung von Taylor-Wirbeln aufgrund veränderlicher Spaltgeometrie. Die 3 Spalten zeigen von oben nach unten, entsprechend der zeitlichen Abfolge, die Strömungsverhältnisse in Form des Geschwindigkeitsbetrags im abgerollten Mittelspalt und als 3D-Bild. Linke Spalte: $T_0 = 5$ s. Mittelspalte: $T_0 = 25$ s. Rechte Spalte: $T_0 = 45$ s.

In der globalen Ansicht kann festgestellt werden, dass sich die Vorüberlegungen bestätigt haben. In der linken Spalte in Abbildung 5.24 ist die schnellste Kreisbahn mit $T_0 = 5$ s dargestellt. Aufgrund der ständig wechselnden Spaltverhältnisse, die zu schnell zwischen über- und unterkritischer Reynolds-Zahl wechseln, kann keine ausgebildete Taylor-Wirbelströmung entstehen. Lediglich Ekman- Wirbel an den Endplatten sind festzustellen. In der mittleren Spalte, der Ergebnisse für die Kreisbahn mit $T_0 = 25$ s, erkennt man in den ersten und letzten Bildern sehr gut die Ausbreitung der Taylor-Wirbel über den gesamten Umfang. Was für eine noch langsamere Kreisbahn mit $T_0 = 45$ s folglich ebenso erfüllt ist. Für letztere erfolgte aufgrund der längeren Zeit ein vollständigerer Zerfall der Taylor-Wirbel, was in den dritt-

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

und viertletzten Bildern der rechten Spalte zu erahnen ist und in Abbildung 5.29 deutlicher dargestellt ist. Besonders interessant ist insbesondere die zweite Reihe in Abbildung 5.24, in der lokal unterschiedlich viele Wirbel gleichzeitig auftreten 5.26.

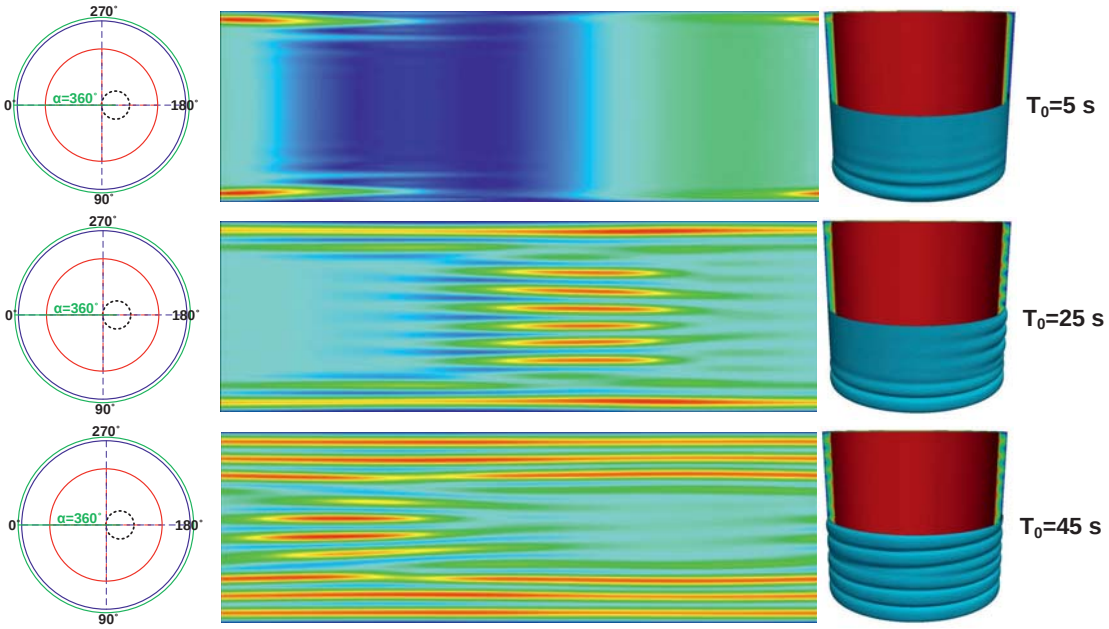


Abbildung 5.25: Startposition der Verlagerungsbahn. Die Strömung ist voll ausgebildet. Einige Kreisbahnen wurden bereits durchlaufen.

Im Falle der Verlagerungsbahnen mit $T_0 = 25$ s und $T_0 = 45$ s sind zu Begin der Bahn, in konzentrischer Position, nahezu in der gesamten Umfangsrichtung 20 Taylor- Wirbel vorhanden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

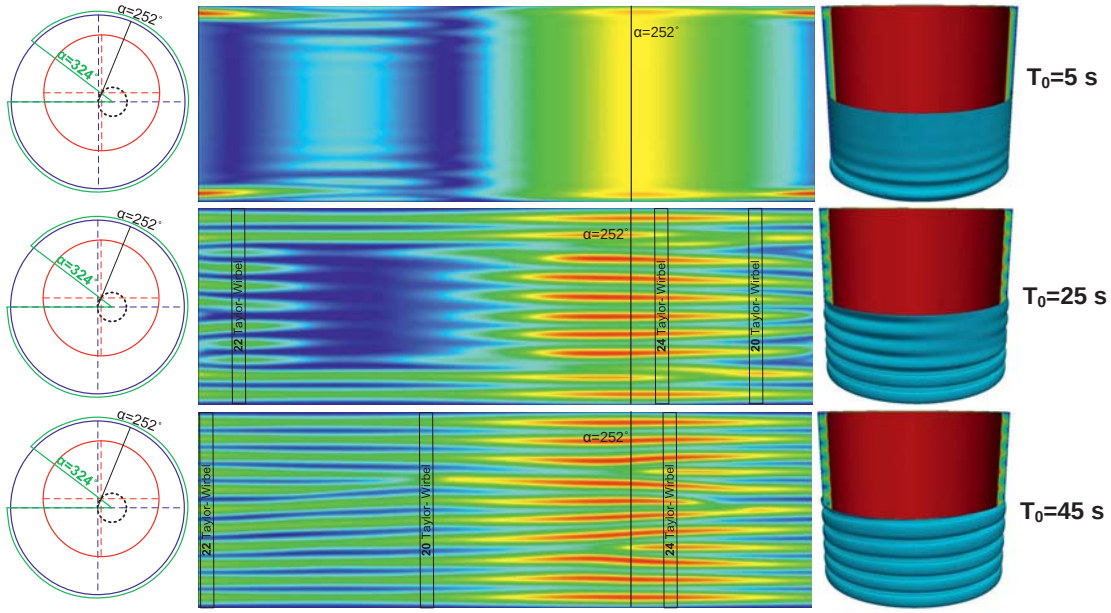


Abbildung 5.26: Nach 10% der Verlagerungsbahn. Im Spalt treten gleichzeitig lokal verschieden viele Taylor- Wirbel auf.

Abbildung 5.26 entspricht der zweiten Reihe in Abbildung 5.24. Durch die Verlagerungsbahn werden lokal engere und gegenüberliegend weitere Spalte generiert. Durch die konstante axiale Höhe des Systems erhöht sich das Aspektverhältnis im engen Spalt, was die Entstehung weiterer Taylor-Wirbelpaare begünstigt. Im gegenüberliegenden weiten Spalt dagegen drängt das System die Strömung zu weniger Wirbelpaaren. So treten hier Übergänge von 20, 22 und 24 Wirbel gleichzeitig im Spalt auf.

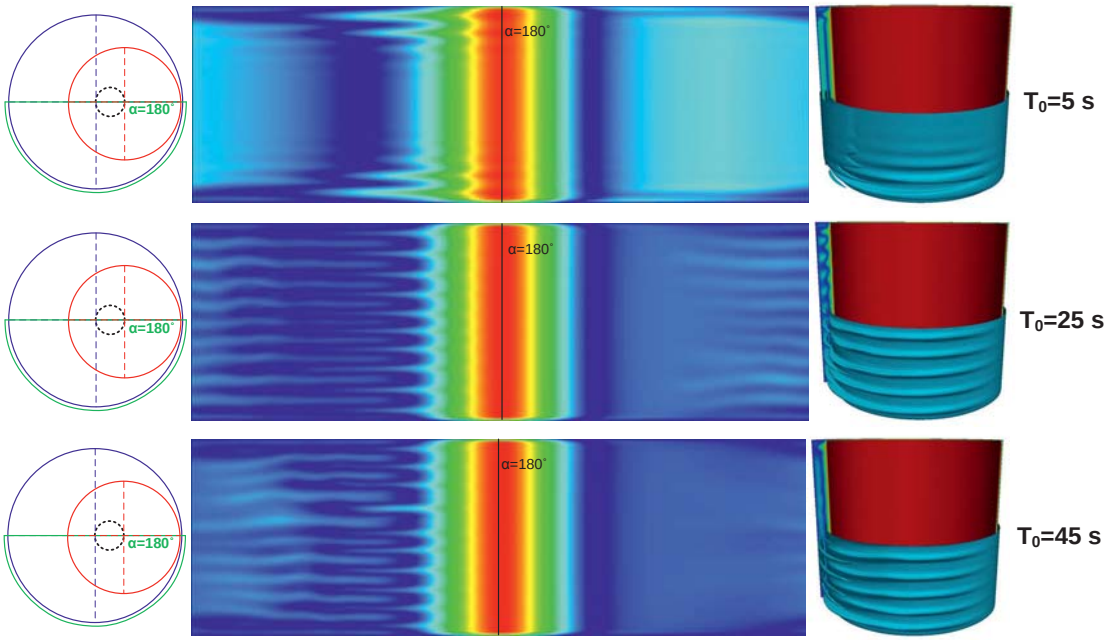


Abbildung 5.27: Position mit höchster Exzentrizität.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Abbildung 5.27 zeigt die Position mit der größten Exzentrizität. Im engen Spalt definieren sich lokal kürzere viskose Zeitskalen und die Taylor-Wirbelströmung ist hier bereits komplett zerfallen. Im weiten Spalt halten sich noch die Wirbelstrukturen, da neben der längeren Zeitskala auch eine größere lokale Reynolds-Zahl vorliegt und das System hier nicht unterkritisch ist. Letzterer Effekt konkurriert aber auch mit dem stärker werdendem Rückströmgebiet. Die lokale Reynolds-Zahl in Abhängigkeit vom Umfangswinkel ist in 5.28 dargestellt.

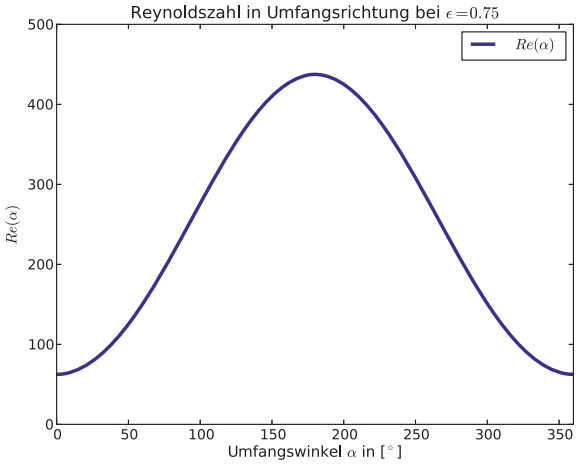


Abbildung 5.28: Lokaler Reynolds-Zahlverlauf im Spalt bei der exzentrischsten Verlagerungsbahnposition $\epsilon = 0.75$. Bei $\alpha = 0° = 360°$ befindet sich in dieser Darstellung der engste Spalt.

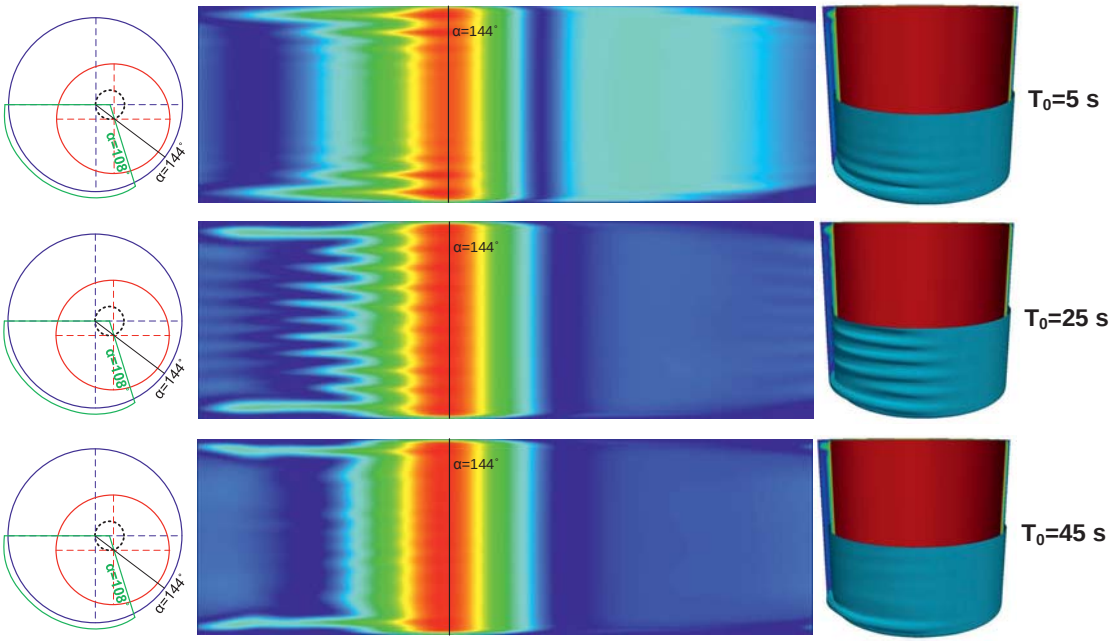


Abbildung 5.29: Position nach ca. 75% der Verlagerungsbahn.

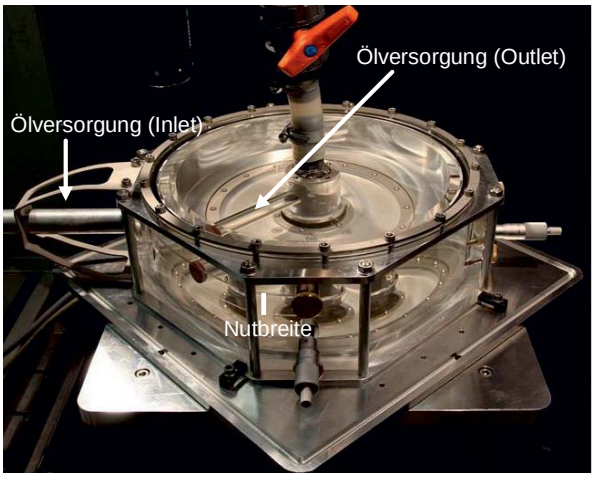
In Abbildung 5.29 ist die viertletzte Reihe aus Abbildung 5.24 vergrößert dargestellt. Der schwarz kolorierte Positionswinkel gibt die Position auf dem Verlagerungsbahnkreis an. Der

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

grüne definiert die Position auf dem Außenzylinder. Es ist sehr gut zu erkennen, dass die Taylor-Wirbel im Falle der langsamsten Verlagerungsbahn mit $T_0 = 45$ s komplett Zerfallen sind. In der mittleren Verlagerungsbahn mit $T_0 = 25$ s sind sie im Bereich der größeren Spaltweite noch gut ausgebildet, da hier die Zeit für den Zerfall der Struktur nicht ausreichend war. Im engeren Spaltbereich hingegen ist sie aufgrund der lokal kürzeren viskosen Zeitskala bereits verschwunden.

5.6 Validierung am Referenzexperiment

Um im numerischen Lagermodell die mitrotierende Wellenbohrung zu berücksichtigen, wurde eine Rotor-Stator System in den Basislöser eingepflegt. Hierbei wird das Rechengebiet in Rotor und Stator mittels eines Interfaces aufgeteilt. Bei dieser Art der Gitterbewegung gleiten die Rotorzellen am Interface an den Statorzellen entlang. Somit bleiben die Nachbarschaftsbeziehungen am Interface nicht erhalten. Zunächst wurde diesbezüglich ein *General Grid Interface* (ggi) verwendet, welches in *OpenFOAM-1.6-ext* implementiert war. Allerdings traten hierbei Schwierigkeiten bei der parallelen Berechnung auf. Ab *OpenFOAM-2.0* ergab sich mit dem *Arbitrary Mesh Interface* (ami) eine gute Alternative zum *General Grid Interface*. Die Anpassung des Strömungslösers auf *OpenFOAM-2.0* brachte einen weiteren Vorteil für den potentiellen Anwender mit sich. Das gesamte Preprocessing, Processing und Postprocessing konnte nun mit einer OpenFOAM-Version durchgeführt werden. Es war bis dahin lediglich mit Version 1.7.0 möglich das Gitter zu erstellen. Anschließend mussten die ggi Flächen definiert werden. Die Berechnung wurde dann wieder mit OpenFOAM-1.6-ext durchgeführt. Die Arbeitsgruppe des Instituts für Energiemanagement i.G. der Westsächsischen Hochschule Zwickau baute während des Projektes ein Reynolds-ähnliches Gleitlagerströmungsexperiment auf. So wurden die geometrischen Eigenschaften des Wollfarth-Lagers im Maßstab 3:1 nachgestellt und es konnte mittels Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) Geschwindigkeitsprofile in der Spaltströmung gemessen werden. Abbildung 5.30 zeigt das Experiment und seine Abmessungen.



Durchmesser	300 mm
Lagerspiel Ψ	0.025 (2.5%)
Lagerbreite	111 mm
Nut	180°
Nutbreite	24 mm
Nuttiefe	3.51 mm
Exzentrizität	variabel
Ölversorgung (Inlet)	Schale (Ø 24 mm)
Ölversorgung (Outlet)	Welle (Ø 24 mm)
Wellenrotation	variabel
Fluid	variabel

Abbildung 5.30: Gleitlagerströmungsexperiment des Instituts für Energiemanagement i.G. der Westsächsischen Hochschule Zwickau.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Als Vergleichsgröße wurde die Umfangsgeschwindigkeitskomponente entlang der Abbildung 5.31 rot eingezeichneten Linie gewählt, da diese mittels Laser-Doppler Anemometrie am unproblematischsten und somit zuverlässigsten zu messen ist.

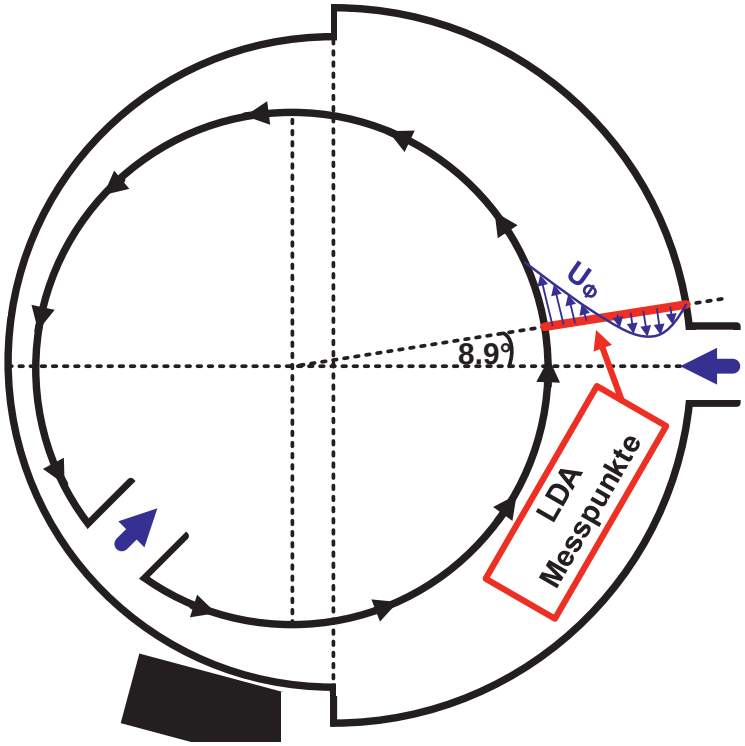


Abbildung 5.31: Das Spaltprofil wurde an 32 Punkten auf der roten Linie gemessen.

Das Referenzströmungsexperiment wurde bei folgenden Parametern durchgeführt:

Parameter	Kurzzeichen	Wert	Einheit
Innenzylinderradius	R_1	0.14641	m
Außenzylinderradius	R_2	0.15	m
normierter Spalt	Ψ	0.024623	-
Radienverhältnis	η	0.976	-
Zylinderhöhe	B	0.111	m
Aspektverhältnis	Γ	30.79	-
Exzentrizität	ϵ	0.8	-
Verschiebung von konzentrischer Position	e	0.002884	m
Dauer halbes Kurbelspiel (360 °)	T	1.674735	s
tangentiale Geschwindigkeit am Innenzylinder	U_1	0.54777	$\frac{m}{s}$
kinematische Viskosität	ν	5.642e-05	$\frac{m^2}{s}$
Dichte des Fluids	ν	960	$\frac{kg}{m^3}$
Reynolds-Zahl des konzentrischen Systems	Re	35	-
Geschwindigkeit an Deckelplatten	-	0	$\frac{m}{s}$
Geschwindigkeit am Außenzylinder	U_2	0	$\frac{m}{s}$

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

In einem ersten Vergleich konnte keine gute Übereinstimmung gefunden werden. Daher wurde am Prüfstand in weiteren Durchläufen die Drücke an der Ölversorgungsbohrung an der Lagerschale (inlet) und der dortige Volumenstrom gemessen. Hier stellte sich eine deutliche Abweichung zu dem konstant angenommenen Druckunterschied heraus. Dies ist in Abbildung 5.32 zu sehen.

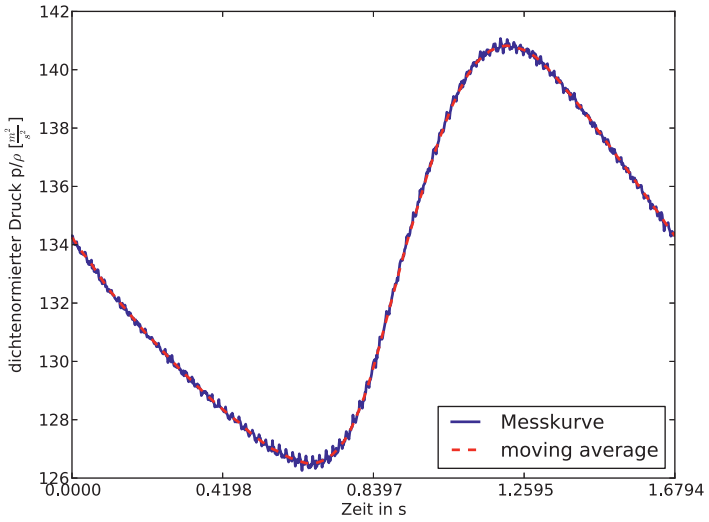


Abbildung 5.32: Das gemessene Druckprofil. Zu sehen ist der dichtenormierte Druckunterschied zwischen den beiden Versorgungsbohrungen.

Da nun auch der Volumenstrom am inlet vorlag, wurde dieser als numerische Randbedingung verwendet (Abbildung 5.33).

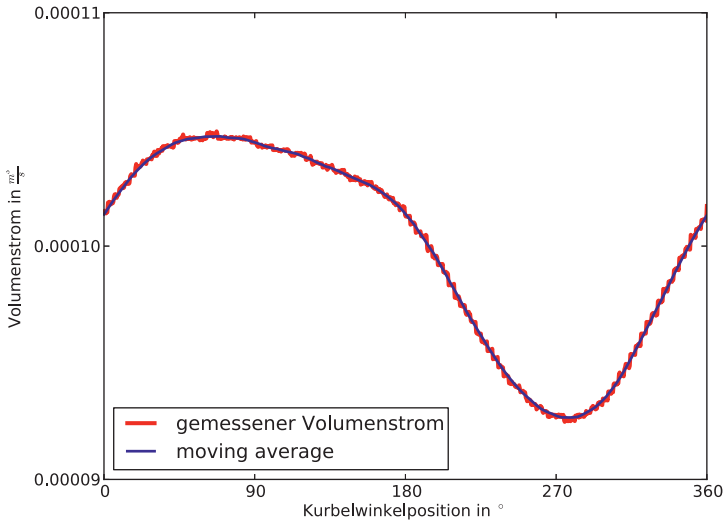


Abbildung 5.33: Der gemessene und gemittelte Volumenstrom der Ölversorgung.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Es wurden pro Lastspiel 720 Zeitverzeichnisse herausgeschrieben. Von denen nun einige gezeigt werden.

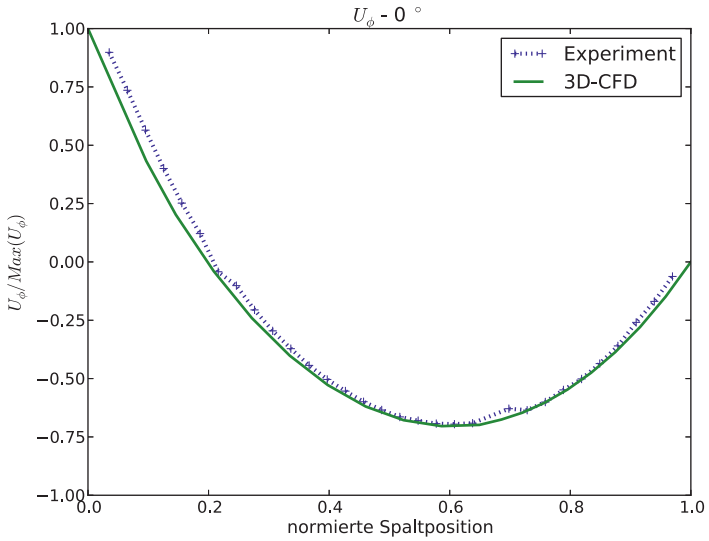


Abbildung 5.34: Vergleich von Numerik und Experiment bei 0 ° Kurbelwinkel.

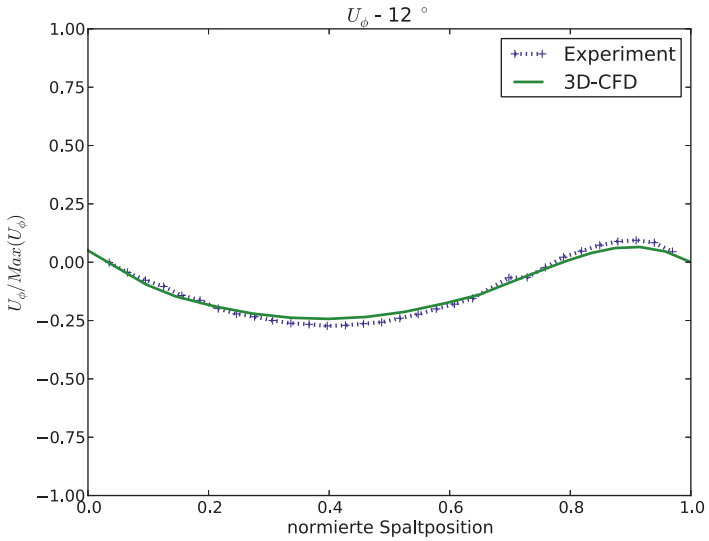


Abbildung 5.35: Vergleich von Numerik und Experiment bei 12 ° Kurbelwinkel.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

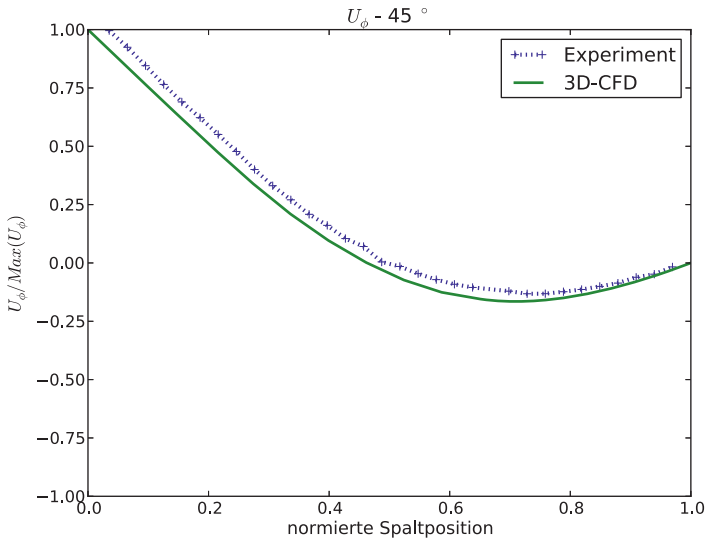


Abbildung 5.36: Vergleich von Numerik und Experiment bei 45 ° Kurbelwinkel.

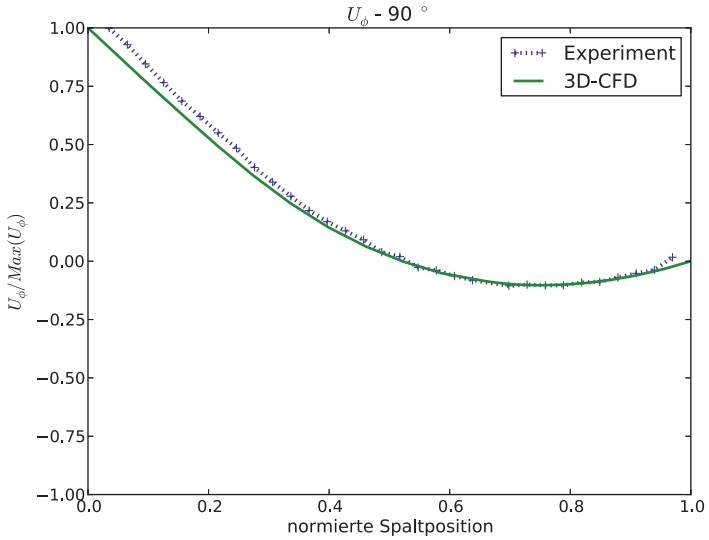


Abbildung 5.37: Vergleich von Numerik und Experiment bei 90 ° Kurbelwinkel.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

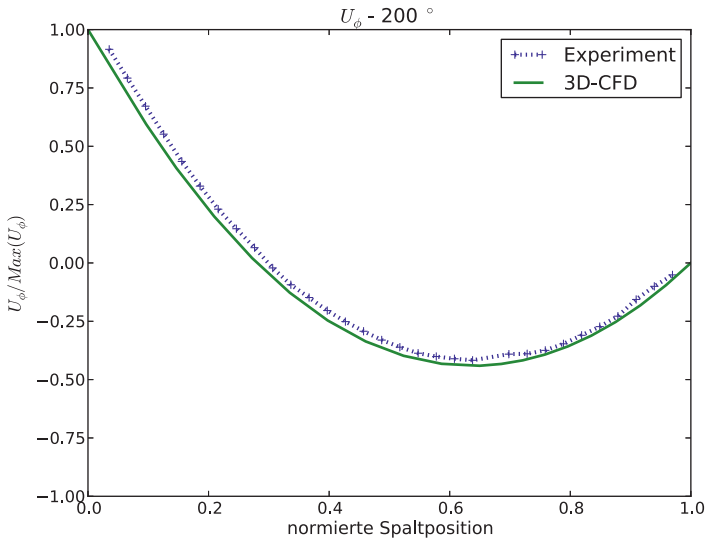


Abbildung 5.38: Vergleich von Numerik und Experiment bei 200 ° Kurbelwinkel.

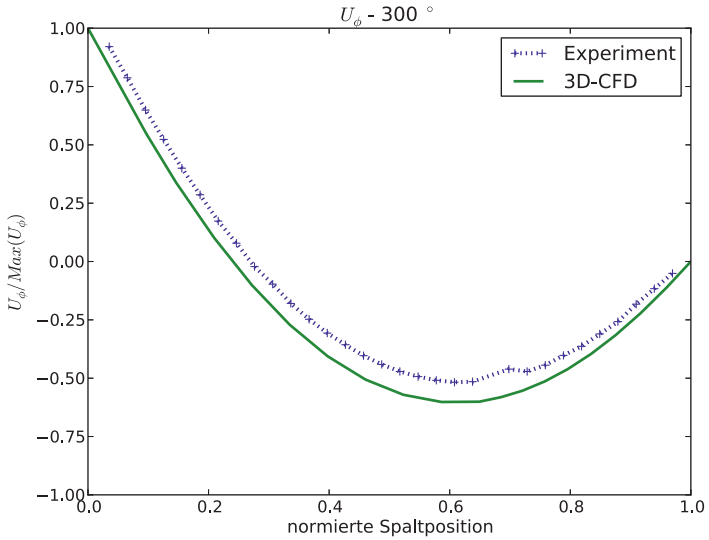


Abbildung 5.39: Vergleich von Numerik und Experiment bei 300 ° Kurbelwinkel.

Mit der gemessenen Volumenstrom-Randbedingung gelang es letztlich eine wesentlich bessere Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit den Experimentwerten zu erzielen. In der Numerik bildet sich nach ca. 250° Kurbelwinkel ein etwas stärkeres Rückströmgebiet aus. Die stärkste Abweichung mit ca. 5.5 % liegt etwa bei 300 ° Kurbelwinkel. Im Anschluss nähern sich beide Profile wieder sehr gut an. Des weiteren ist zu bemerken, dass die gemessenen Werte nahe des Innenzylinders mit einem größeren, dem Verfahren geschuldetem, Messfehler behaftet sind. Berücksichtigt man also, dass neben den Geschwindigkeitswerten auch eine Randbedingung für die Simulation selbst gemessen wurde und jede Messung fehlerbehaftet ist, ergibt sich, dass die numerische Simulation die Reynolds-ähnliche Gleitlagerströmung wirklichkeitsgetreu abgebildet hat.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

6 Simulation des Wollfarth Lagers

Abschließend soll nun die Simulation eines Testlaufs aus den Experimenten von Wollfarth [Wollfarth 1995] mit dem inkompressiblen Basisströmungslöser ohne Kavitation erfolgen. Zur Veranschaulichung der Simulationsparameter soll erneut Abbildung 6.1 dienen. Da für das Wollfarth Lager kein Druckverlauf am Einlass der Ölzuführbohrung bekannt ist (Siehe Referenzexperiment 5.32), wird zum Testen des Basisströmungslösers eine konstante Ölversorgungsdruckdifferenz ($p_{inlet} - p_{outlet}$) von 14 bar angenommen. An den Lagerenden sowie am Auslass soll Umgebungsdruck gelten.

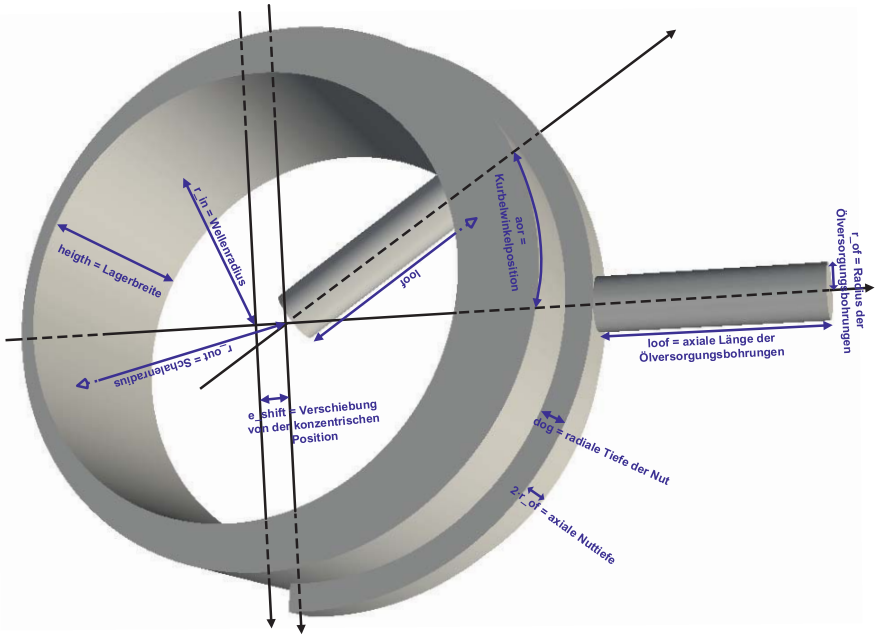


Abbildung 6.1: Geometrieskizze des Wollfarth Lagers

In Abbildung 6.2 ist die durch die stationär aufgeprägte Last resultierende Verlagerungsbahn abgebildet. Die Verlagerungsbahn wurde von der kooperierenden Arbeitsgruppe des Lehrstuhls für Maschinenelemente und Tribologie der Universität Kassel mittels EHD berechnet. Um den rotierenden Innenzylinder auf einer beliebigen Verlagerungsbahn zu bewegen war es nötig ein neues, von Abschnitt 5.5 verschiedenes, Gitterbewegungsmodul zu implementieren. Diese Aufgabe wurde von M.Sc. Matthias Neben [Neben 2012] hervorragend gelöst. Hierbei wird bei Initialisierung der Rechnung eine Tabelle mit den Orts-Zeit Koordinaten der Verschiebung der rotierenden Welle abgefragt.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Die Simulation wurde mit folgenden Parametern durchgeführt:

Parameter	Kurzzeichen	Wert	Einheit
normierter Spalt	Ψ	0.001	-
Innenzylinderradius	R_1	0.04995004995	m
Außenzylinderradius	R_2	0.05	m
Lagerbreite	B	0.037	m
Radius Versorgungsbohrungen	r_{of}	0.004	m
Nuttiefe	dog	0.00117	m
Nutbreite	$2 \cdot r_{of}$	0.008	m
Exzentrizität	ϵ	$\epsilon \in \{0; 0.93\}$	-
Geschwindigkeit am Innenzylinder	U_1	10.461513998	$\frac{m}{s}$
Druckdifferenz Ölversorgung	Δp	$14 \cdot 10^5$	$Pa, \frac{kg}{ms^2}$
stationäre Belastung der Welle	**F** 6.2	15	kN
kinematische Viskosität	ν	1.228e-05	$\frac{m^2}{s}$
Fluiddichte	ρ	836.4	$\frac{kg}{m^3}$
Reynolds-Zahl Spalt	Re	42.55	-

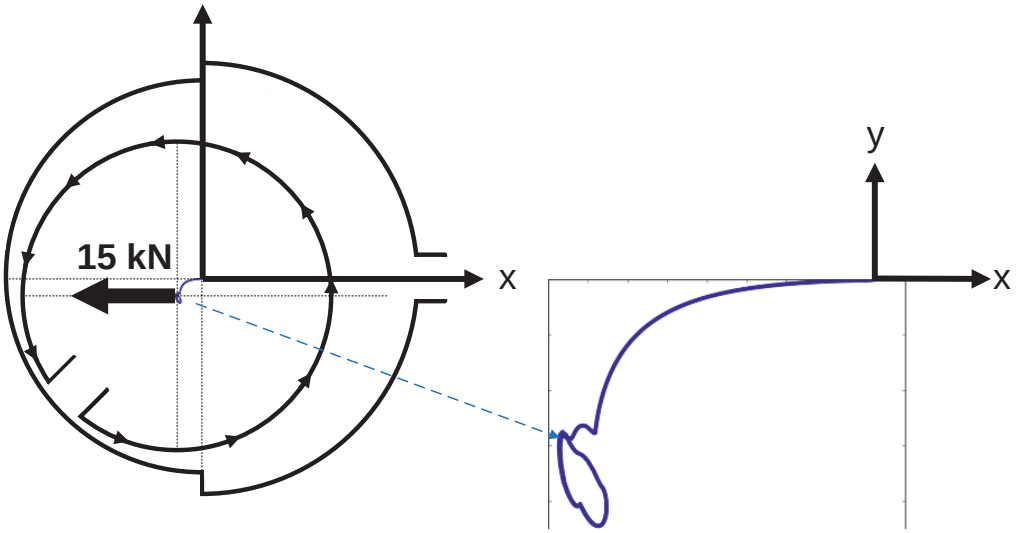


Abbildung 6.2: Systemskizze: Die mit 2000 rpm rotierende Welle ist stationär mit 15 kN belastet. Dies führt zur rechts abgebildeten Verlagerungsbahn für ein Kurbelspiel von 720 °.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

6.1 Auswahl des optimalen Lösers und Prekonditonierers

Um ein Gleichungssystem wie in Gleichung (3.69), hier beispielhaft mit linksseitiger Prekonditionierung M,

$$[M]^{-1}\,[A]\,[\phi] = [M]^{-1}\,[R] \tag{6.1}$$

möglichst optimal zu lösen, wurde zunächst ein Gleitlager mit $\Psi = 0.001$ mit einer geringeren Netzauflösung von ca. 1 Million Zellen vernetzt um ein Benchmark aller verfügbaren Gleichungslöser durchzuführen. Untersucht wurde der Löser für den Druck, da hier die meiste Rechenzeit benötigt wird.

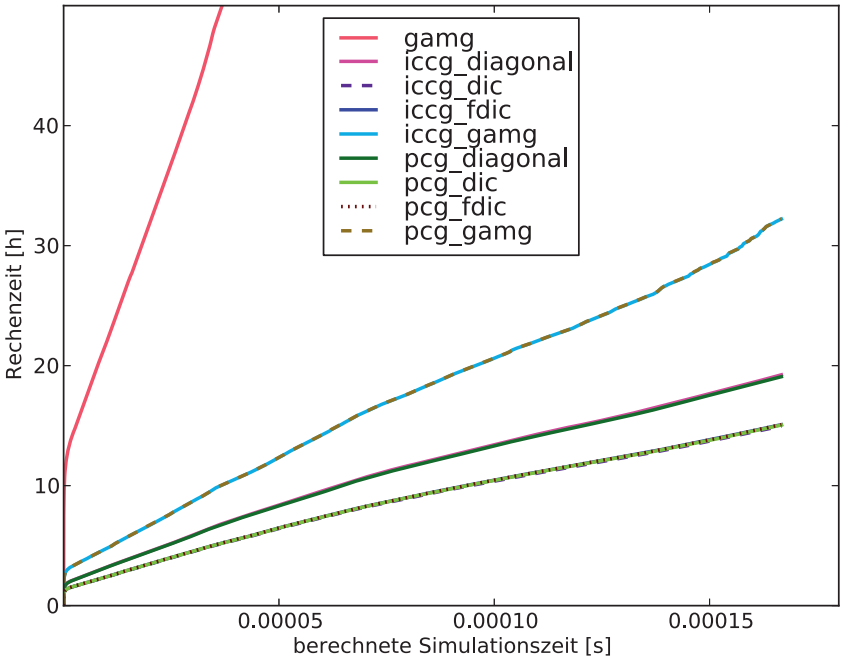


Abbildung 6.3: Performance aller Gleichungslöser

Was sofort auffällt ist die Ineffizienz von GAMG (**G**eometric **A**gglomeration algebraic **M**ulti**g**rid) gegenüber den konjugierten Gradienten (**C**onjugated **G**radients CG). Was an dem sehr engen Spalt und einer entsprechend verschwindend geringen Anzahl von Gitterzellen in radialer Richtung verglichen mit der Umfangs- oder Höhenzellenanzahl liegt. So kann im Falle von GAMG in radialer Richtung wenig Rechengebiet zusammengefasst und grob vorkaluliert werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

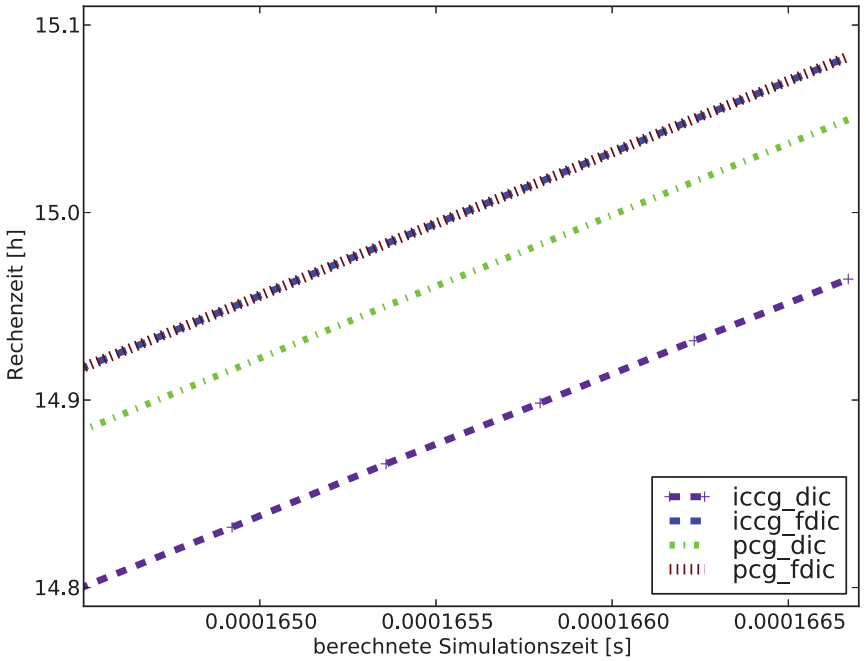


Abbildung 6.4: Zoom in 6.3

Eine weitere Erkenntnis ist, dass die Prekonditionierung mit FDIC (**F**aster version Simplifed **d**iagonal-based **i**ncomplete **C**holesky) nicht schneller ist als die normale Prekonditionierung mit DIC. Letztlich verwendet wurde ICCG (**I**ncomplete **C**holesky preconditioned **C**onjugate **G**radients solver) mit DIC Prekonditionierung.

6.2 Abschätzung der Strömung im Wollfarth‘schen Gleitlager

Bevor im Anschluss die Ergebnisse zu den Berechnungen des Wollfarth Lagers präsentiert werden, soll zunächst das Strömungsverhalten abgeschätzt werden. In der Übersicht der Simulationsparameter (Tabelle 6) wurde eine Reynolds-Zahl für den Zylinderspalt angegeben, die global als $\frac{(R_2-R_1)U}{\nu}$ berechnet wurde. Ruft man sich die Verlagerungsbahn (Abbildung 6.2) in Erinnerung, stellt man fest, dass das Zylinderspaltsystem nach dem Start nie wieder konzentrisch ist, sondern sich nach dem Anlaufvorgang auf einem kleinen Suborbit in Abbildung 6.2 bewegt. Durch die Exzentrizität entstehen lokal enge und entsprechend weite Spaltregionen im Zylinderspaltsystem. Dies bedeutet man kann jetzt wie auch in Kapitel 5 in Abbildung 5.28 eine lokale Reynolds-Zahl definieren. Der Grund, warum in der Abschätzung bisher immer der Begriff Zylinderspaltsystem verwendet wurde, ist der, dass es das auf Grund der 180° Nut nicht mehr ist. Mit Beginn der Nut weitet sich der Spalt zusätzlich instantan enorm auf. Definiert man einen lokalen Spalt, kann eine entsprechende Reynolds-Zahl angegeben werden (Abbildung 6.5).

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

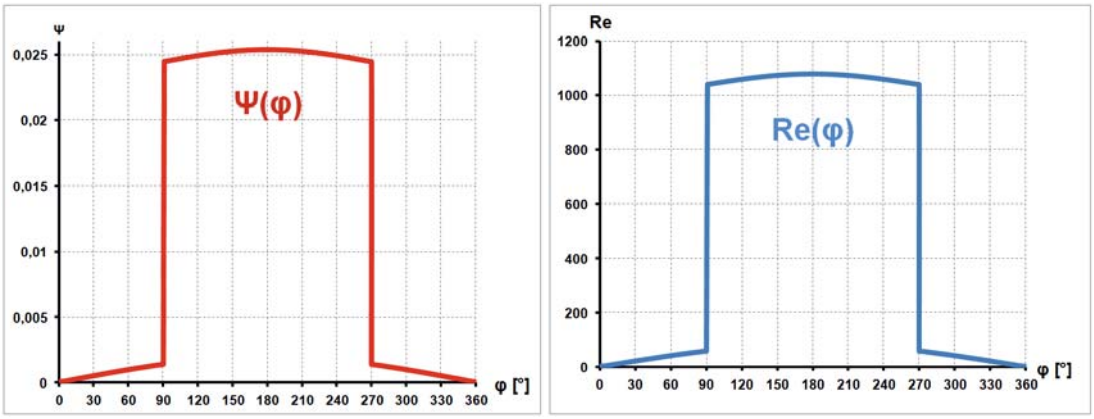


Abbildung 6.5: Links: Lokale Spaltweite $\Psi(\varphi)$ im Wollfarth Lager bei einer Verlagerung der Welle, die zu einer Exzentrizität von $\epsilon = 0.95$ führt. Rechts: Lokale Reynolds-Zahl in Abhängigkeit vom lokalen Spalt bei Rotation des Innenzylinders mit 2000 rpm. Die Nut beginnt bei $\varphi = 90°$ und endet bei 270°.

Schaut man nun welche Reynolds-Zahl bei diesen Randbedingungen maximal entstehen kann, stellt man fest, dass sich das Wollfarth- Lager am Grenzbereich zur Taylor- Wirbelströmung befindet 6.6. Bedenkt man weiterhin, dass auch Testläufe mit 3000 und 4000 rpm in den Wollfarth Versuchen gefahren wurden, liegt der Nutbereich des Gleitlagers im Bereich der Taylor- Wirbelströmung. Dies verdeutlicht etwas globaler eine Stabilitätskarte 6.7. Das Aspektverhältnis im Nutbereich beträgt circa $\Gamma = 6.56 > 2$, was das Entstehen von Taylor-Wirbeln theoretisch erlauben würde.

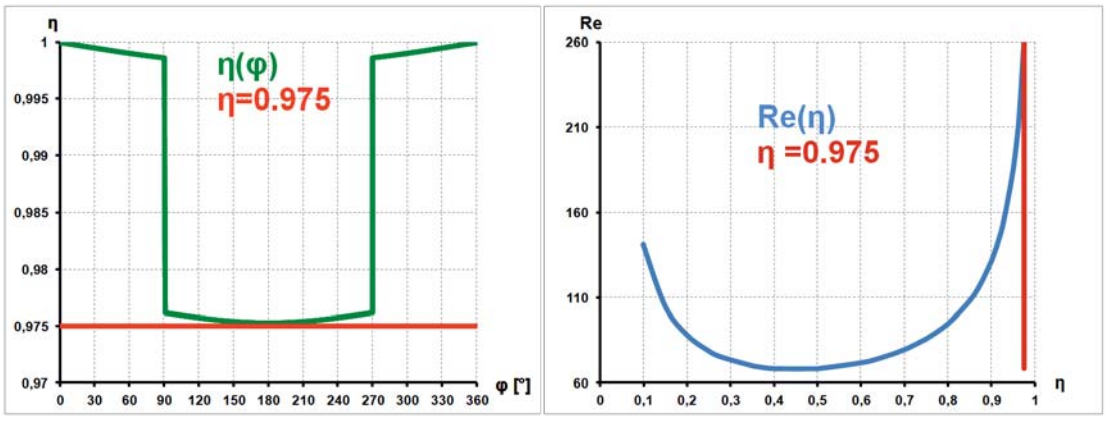


Abbildung 6.6: Links: Lokales Radienverhältnis im Lager und das minimal auftretende Radienverhältnis (rote Linie). Rechts: Kritische Reynolds-Zahl in Abhängigkeit des Radienverhältnisses und das rot markierte Minimum der linken Abbildung.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

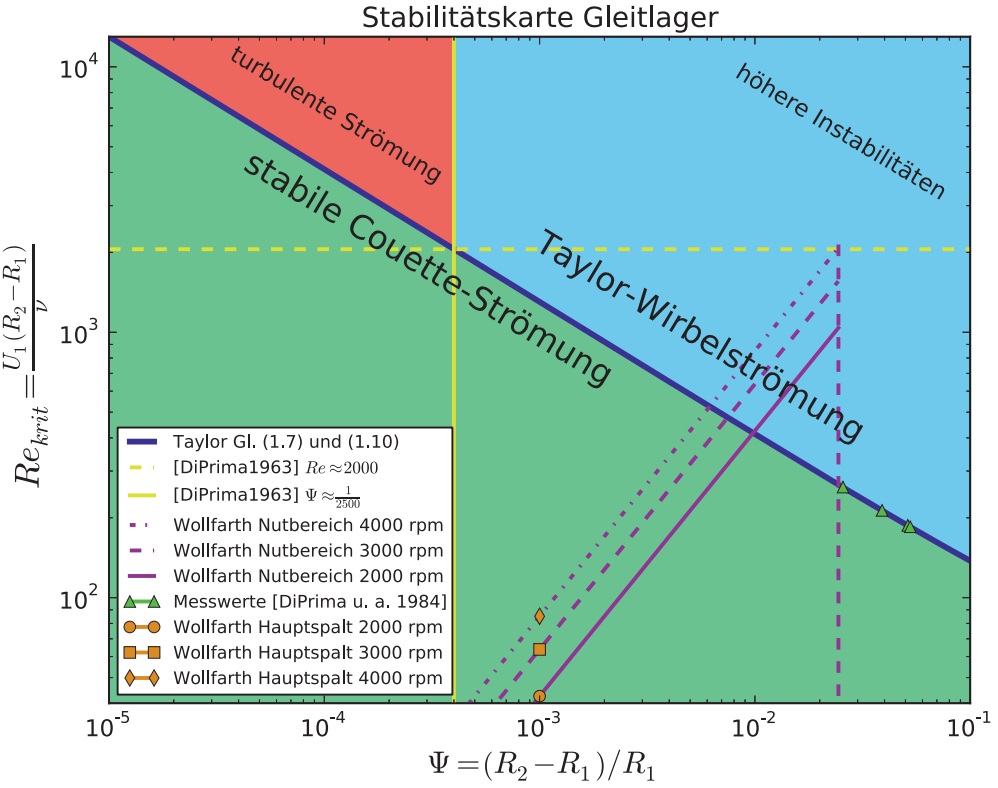


Abbildung 6.7: Einordnung des Wollfarth Lagers in eine Stabilitätskarte.

Dem tatsächlichen Ausbilden von Taylor-Wirbel stehen mindestens zwei weitere auftretende Effekte gegenüber. Zunächst wäre hier die Verdrängungsströmung aufgrund der Verlagerungsbahn (Squeeze-Effekt, Abbildung 6.11) und die Querströmung durch die Ölversorgungsbohrungen zu nennen. Der Squeeze-Effekt sollte hier nicht stark ins Gewicht fallen, da nach dem Anlaufvorgang nicht mehr so viel Verlagerung stattfindet. Dies ist bei einem instationär belastetem Gleitlager nicht der Fall und würde in diesem Fall dominierender sein. Was in den Wollfarth‘schen Versuchen allerdings übertrieben angewendet wurde, um eben Kavitation zu provozieren, ist die Ölversorgung. Dies bedeutet, erreicht die Wellenbohrung den Nutbereich, saugt sie dort sämtliche Strömungsstrukturen ab. Interessanter würde es bei reiner hydrodynamischer Schmierung werden, wo kein externes Druckpotential die Ölversorgung durch die Bohrungen steuert, da hier die Querströmung nicht derart dominant sein sollte. Trotz allem, sollte selbst die geringere Querströmung bei hydrodynamischer Schmierung, dem Bilden von Taylor-Wirbeln im Nutbereich doch arg entgegenwirken. Die entscheidende Frage ist, wie lange die Strömung im Gebiet der Nut durch die Wellenbohrung „ungestört “ bleiben könnte. Die Dauer einer Umdrehung der Welle bei 2000 rpm und dem Radius aus Tabelle 6 ergibt sich zu T=0.03 s. Die günstigst anzunehmende Zeitskala für das Ausbilden der Taylor-Wirbel in der Nut wäre $\tau_{Spalt+Nut} = \frac{(R_2-R_1+Nuttiefe)^2}{\nu} \approx 0.1212$ s. Die Wellenbohrung würde also 4 mal an dem verdächtigem Taylor-Wirbel Gebiet der Nut vorbei streifen und alle Ansätze dieser Wirbelstruktur fortspülen. Daher sind in diesem Gleitlager, bei den genannten Betriebsparametern keine Taylor- Wirbel zu erwarten.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

6.3 Lösung auf einem groben Gitter

Als nächster Schritt wurde auf dem groben Gitter der gesamte Simulationsablauf wie Neustart von beliebigem Verlagerungsbahnpunkt und das Postprocessing getestet. Da bereits Simulationen des Strömungslösers mit Kavitationmodul (in Abbildungen als GLL abgekürzt) vorlagen, wurden diese bereits als Vergleich für die berechnete Strömung des Basisströmungslösers (in Abbildungen als BSL abgekürzt) ohne Kavitation herangezogen.

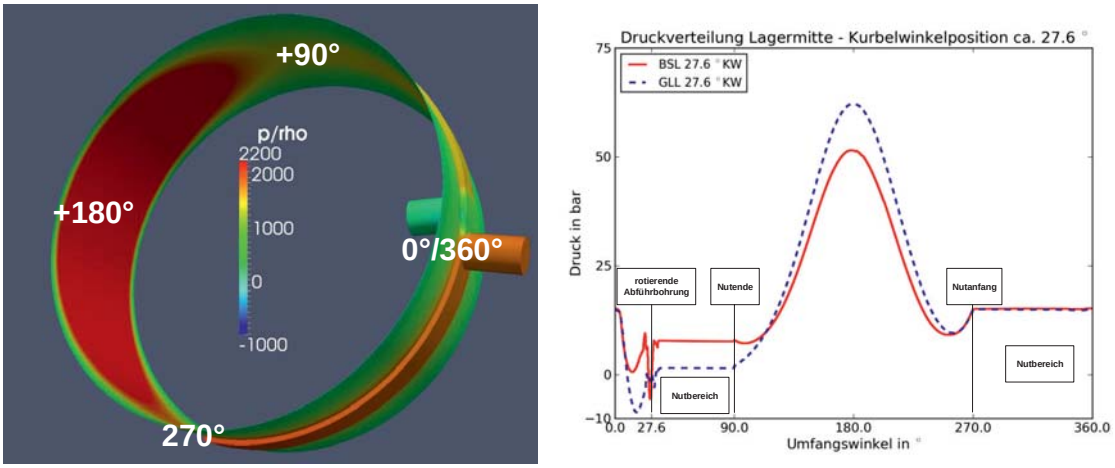


Abbildung 6.8: Zum Winkelbezug der Auswertegrafiken. Im rechten Bild wurde entlang einer zum Außenzylinder konzentrischen Linie nahe des Außenzylinders, auf axialer Mitte des Lagers, der Druck herausgeschrieben. Der Unterdruck-Peak bei 27.6° im rechten Bild resultiert aus der Querströmung durch die Ölversorgungsbohrungen. Die 180° Ringnut beginnt bei 90° und endet bei 270°.

Nach Abbildung 5.12 ist klar, dass die Druckmaxima mit der geringen Auflösung viel zu gering ausgefallen sein müssen. Weiterhin hat der Gleitlagerlöser GLL ein höheres Druckmaximum und ein realistischeres Unterdruckgebiet im Nutbereich zwischen Bohrung und Nutende im Gegensatz zum Basisströmungslöser BSL berechnet. Ein weiteres Postprocessing-Skript mit Python zum Darstellen der Druckverteilung in der gesamten Lagerbreitenrichtung ist in Abbildung 6.9 zu sehen.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

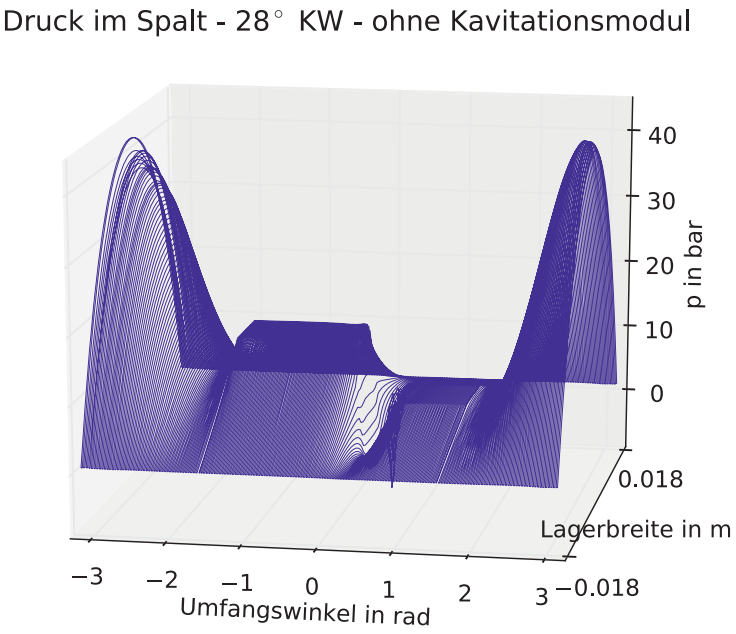


Abbildung 6.9: 3D-Abbildung der Druckverteilung im Spalt berechnet mit dem Basisströmungslöser. Die Abbildung 6.8 rechts entspricht hier dem Schnitt mit der Ebene definiert durch Lagerbreite = 0.

Zur globaleren Ansicht der Strömungsgrößen wurde Paraview [Paraview] genutzt. Hierfür sind mit 6.10 6.11 einige Beispielabbildungen der unteraufgelösten Simulation zu sehen.

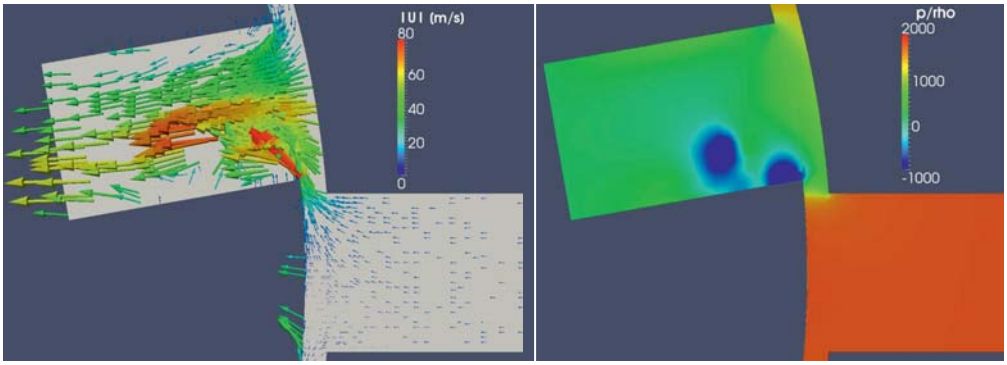


Abbildung 6.10: Schnittebene durch die axiale Lagermitte. Druck und Geschwindigkeitsverteilung in Bohrungsnähe bei 10° Kurbelwinkel.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

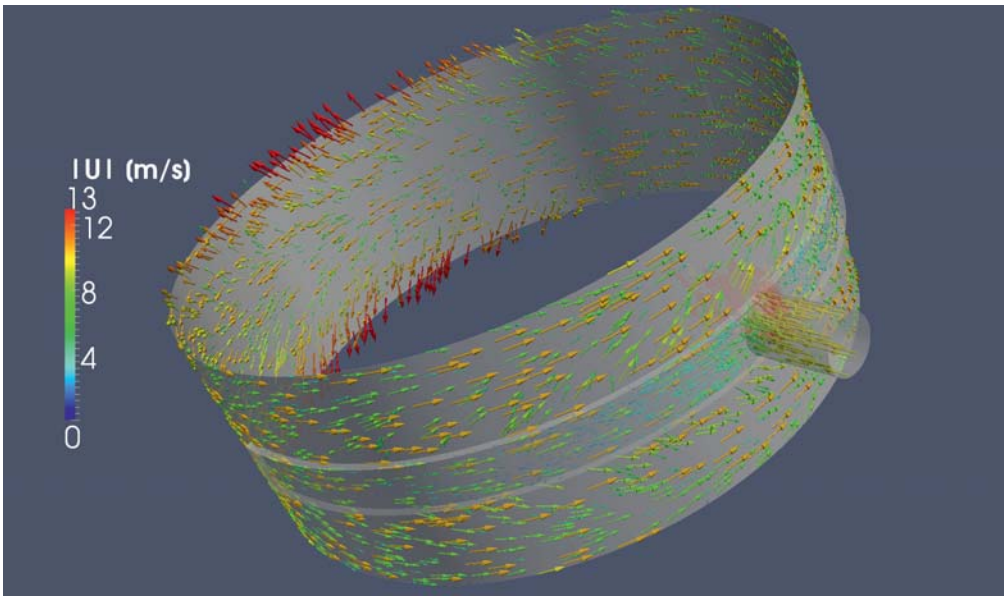


Abbildung 6.11: Zu Beginn der Simulation befindet sich die Welle in einer konzentrischen Position zum Außenzylinder. Daher ist die Verlagerung(Abbildung 6.2) zu Begin relativ stark verglichen mit dem späterem eingeschwungenen Zustand. Dies führt gerade zu Beginn der Simulation zu einer starken Verdrängungsströmung (Squeeze Effekt).

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

6.4 Lösung auf einem hochaufgelösten Gitter

Um die unteraufgelöste Lösung auf ein hochaufgelöstes Gitter zu übertragen und hochaufgelöst weiterzurechnen, wurde die in OpenFOAM® implementierte Routine „*mapFields* “ genutzt. Dies wurde in mehreren Zwischenschritten durchgeführt, da beim direkten Mappen von 3 auf die letztlich sogar 15 radialen Zellen beinhaltende Gitter im Anschluss keine Konvergenz erhalten werden konnte. Im Folgenden ist ein Vergleich der Druckverläufe bei Verwendung von TOWER 5.3 (RDGL) und dem Basisströmungslöser BSL zu sehen.

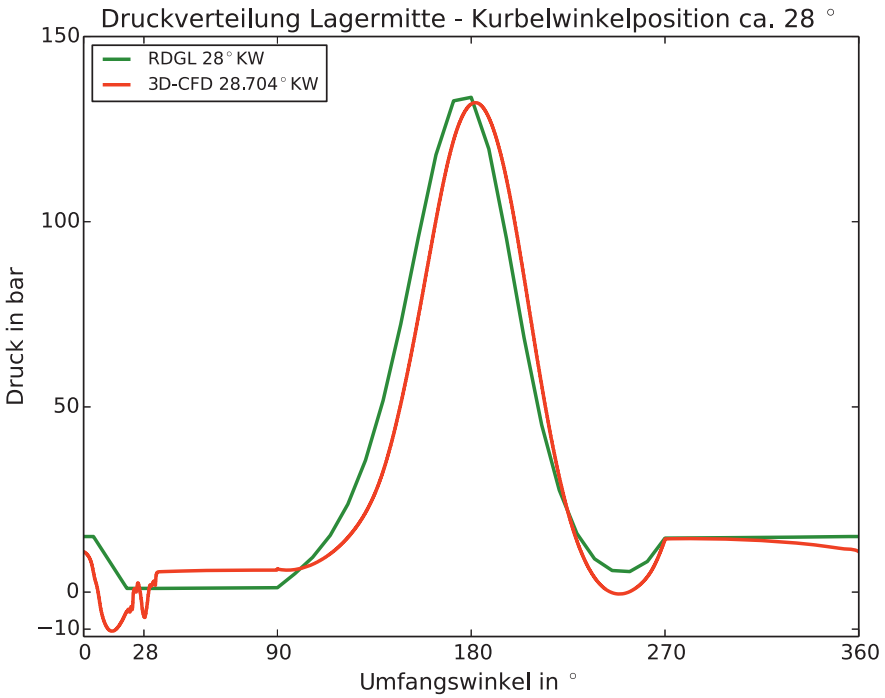


Abbildung 6.12: Vergleich des dreidimensionalen Basisströmungslöser (BSL) und dem (E)HD-Tool TOWER 5.3 (RDGL) am Wollfarth-Lager mit 2000 rpm bei einer Kurbelwinkelposition von etwa 28°. Die radiale Auflösung beträgt 15 Zellen.

Es ist erkennbar, dass mit dem Basisströmungslöser ein sehr ähnliches Druckmaximum wie mit dem EHD Tool TOWER berechnet wurde. Allerdings stimmen die Positionen nicht exakt überein. Als Ursache hierfür stellte sich eine leicht abweichende Verlagerungsbahn der Referenzsimulation heraus. Die in der 3D-CFD Simulation verwendete Verlagerungsbahn wurde bereits im Jahr 2012 zur Verfügung gestellt und wurde bisher für alle 3D-Simulationen mit Verlagerungsbahn verwendet. Aus bisher ungeklärtem Grund stimmt sie nicht exakt mit der der aktuellen Referenzsimulation überein. Letztlich ist dies aber nicht bedeutend, da anhand eines Vergleiches der Positionen der Welle im Falle der alten (in 3D-CFD simuliert) und aktuellen (HD-Referenzsimulation) Verlagerungsbahn, eine relativierte Diskussion von Abbildung 6.12 vorgenommen werden kann. Hierzu werden in Abbildung 6.13 zunächst die für die 3D-CFD-Simulation verwendete Verlagerungsbahn mit der der Referenzsimulation verglichen.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

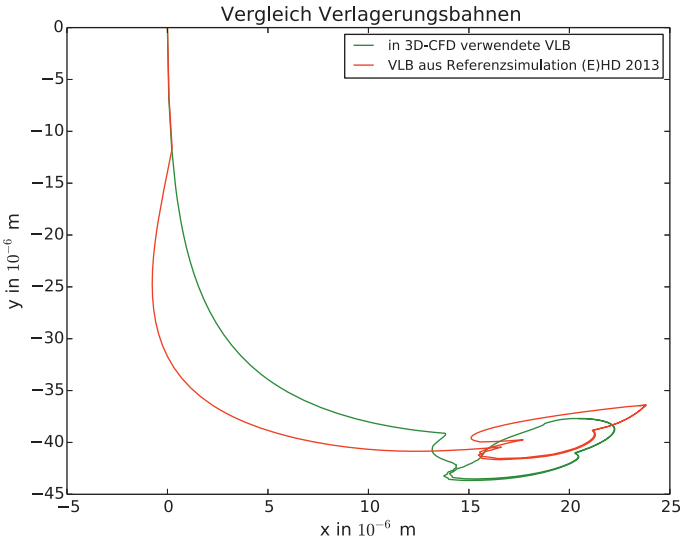


Abbildung 6.13: Globaler Vergleich der Verlagerungsbahnen von 3D-CFD und HD-Referenzsimulation.

Um festzustellen wie stark sich die Wellenpositionen für etwa 28° Kurbelwinkel unterscheiden, erfolgt mit Abbildung 6.14 eine Detaildarstellung bis zu diesem Kurbelwinkel.

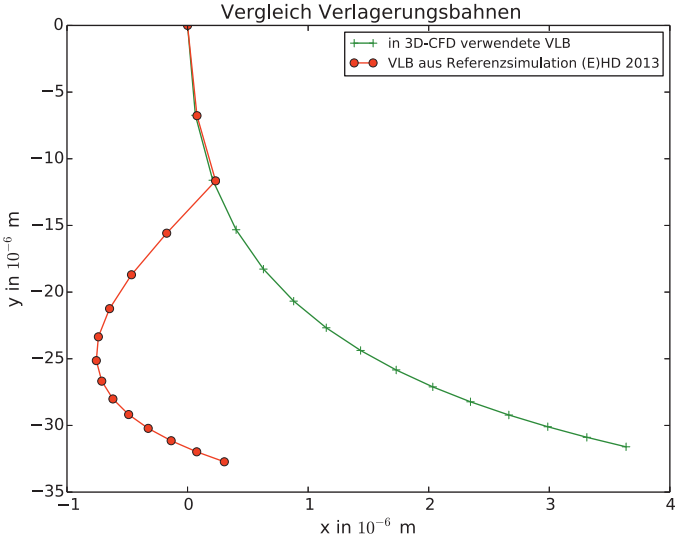


Abbildung 6.14: Vergleich der Verlagerungsbahnen von 3D-CFD und HD-Referenzsimulation bis 28° Kurbelwinkel. Start der Verlagerungsbahn ist der Punkt (0|0)

Da nach Abbildung 6.14 die Wellenpositionen leicht verschieden sind, muss die Position des Druckmaximums von der der Referenzsimulation in Abbildung 6.12 entsprechend verschieden sein. Da auch die Beträge der Druckmaxima in Abbildung 6.12 sehr ähnlich sind, sollen zur relativierten Diskussion ebenfalls die vorliegenden Exzentrizitäten verglichen werden.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

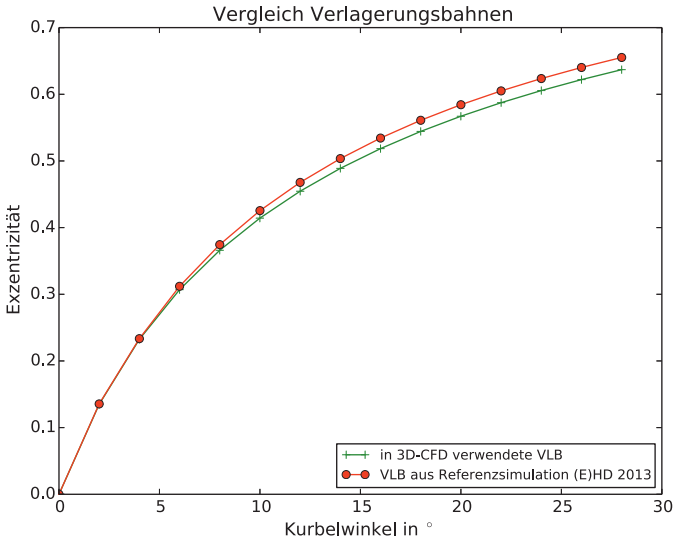


Abbildung 6.15: Vergleich der Exzentrizitäten der Verlagerungsbahnen von 3D-CFD und HD-Referenzsimulation bis 28° Kurbelwinkel.

Nach Abbildung 6.15 besitzt die 3D-CFD-Simulation bei 28° Kurbelwinkel eine leicht geringere Exzentrizität, was dann dem leicht geringerem Druckmaximum in Abbildung 6.12 entspricht. Somit kann trotz der geringfügig verschiedenen Verlagerungsbahnen eine sehr gute Übereinstimmung des Basisströmungslösers mit der EHD-Simulation konstatiert werden.

Des weiteren sind in Abbildung 6.12 klar die dreidimensionalen Strömungseffekte im Vergleich zur EHD-Simulationen zu sehen. Überall, wo der Spalt größer wird als der reguläre Lagerspalt, wie beispielsweise im Bereich der Nut und der Bohrung, sind signifikant mehr Informationen aufgrund der dreidimensionalen Betrachtung verfügbar. So herrscht im Bereich der Zuführbohrung (bei 0° Kurbelwinkel) aufgrund der hohen Strömungsgeschwindigkeit ein geringerer Druck als der Versorgungsdruck, der sich erst am Nutende (bei 270° Kurbelwinkel) wieder einstellt. Im anderen Nutbereich (von 0° Kurbelwinkel bis 90° Kurbelwinkel) wird vom Basisströmungslöser ein zu hoher Druck berechnet. Dies wird sich als Ausblick mit der Implementation des Kavitationsmoduls ändern, was auch Abbildung 6.8 zu entnehmen ist.

Im Folgendem soll nun die Strömung im Bohrungs- und Nutbereiche näher betrachtet werden. Abbildung 6.16 ist zu entnehmen, dass die Strömungsverhältnisse in der Abführbohrung zu der abgebildeten Kurbelwellenposition nicht mehr zwingend laminar sind. Dazu soll die Geschwindigkeit am Abführbohrungsende gemittelt und eine Reynolds-Zahl bestimmt werden. Die gemittelte Geschwindigkeit ergibt sich bei dieser Kurbelwellenposition zu $\overline{U}_{outlet}$=8.9 m/s, was einer Reynolds-Zahl von $Re_{outlet} = 5798$ entspricht. Dieser Wert liegt weit über dem kritischem Wert von $Re_{krit} \approx 2040$ [Avila u. a. 2011]. Dies bedeutet, dass der laminaren Lösung im Nutbereich bei diesen Randbedingungen nicht voll vertraut werden sollte. Nun stellt sich die Frage, ob diese Geschwindigkeit in der Abführbohrung realistisch ist. Ein ähnliches Problem gab es als die Simulation zum Referenzexperiment

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

durchgeführt wurde. Es wurde im ersten Versuch ebenfalls der konstante Druckunterschied an den Bohrungen angenommen aber die Messergebnisse konnten mit diesen Werten nicht erreicht werden. Erst als es gelang die Druckkurve $p_{inlet}(t)$ 5.32 zu messen, konnte dies geklärt werden. Der Druck änderte sich enorm und dies ohne Verlagerungsbahn. Es ist zu schließen, dass bei vorliegender Verlagerungsbahn zum betrachteten Kurbelwinkel ein Unterdruck im Nutbereich um die Zuführbohrung entsteht. Dies bedeutet, der Druck am Einlass ist zu diesem Zeitpunkt nicht mehr 15 bar sondern wesentlich geringer. Da aufgrund der Randbedingung aber weiter 15 bar vorliegen, strömt mehr Fluid ein, als es real der Fall wäre. Somit wäre es für folgende Modellrechnungen zum Wollfarth Lager anzuraten eine konstante Volumenstromrandbedingung am Einlass zu testen um die aktuelle künstliche Überhöhung der Geschwindigkeit zu überprüfen. Idealerweise sollte man den Volumenstrom im Zeitverlauf ebenso wie die Verlagerungsbahn als EHD-Input erhalten und wie im Referenzexperiment als Randbedingung wählen. Andernfalls ist es ohne weiteres möglich eines der implementierten Turbulenzmodellierungen zu verwenden.

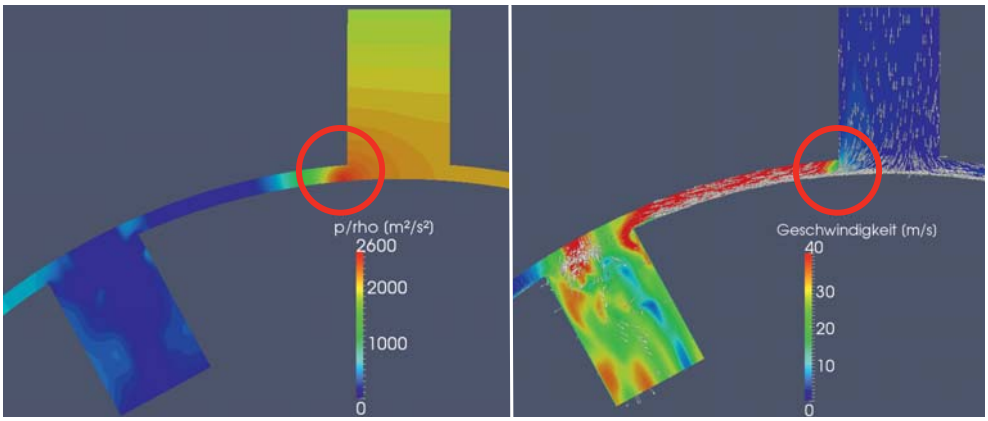


Abbildung 6.16: Schnitt durch die Lagermitte mit Vergrößerung des Ölzufuhreinlaufbereiches. Links: Auf guten Kontrast skalierte normierte Druckverteilung der BSL-Lösung. Rechts: Geschwindigkeit.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

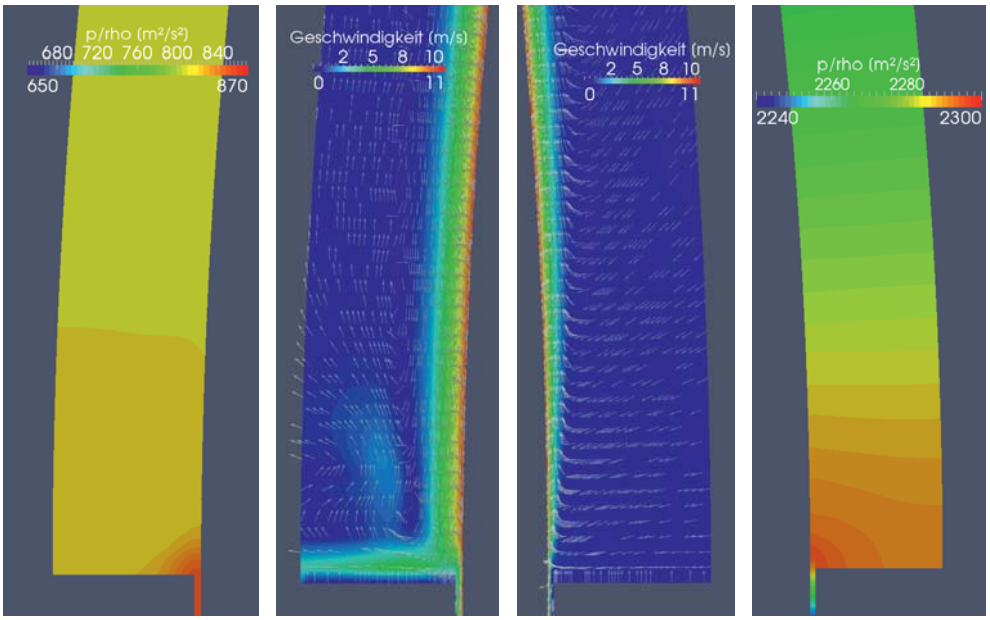


Abbildung 6.17: Links: normierter Druck und Geschwindigkeit am Nutende. Rechts: Nutanfang. Kurbelwinkel: 28.656 °

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

7 Diskussion und Ausblick

Basierend auf der Open Source CFD Toolbox OpenFOAM® wurde ein Basisströmungslöser (BSL) für ein dreidimensionales Berechnungstool für Gleitlager entwickelt.

Ausgehend vom einfachen Zylinderspalt wurde das Rechengebiet um typische geometrische Details wie eine 180° Nut und Ölversorgungsbohrungen erweitert. Für beide Systeme liegen Gittergeneratoren vor, die die teils hochpräzisen strukturierten Rechennetze automatisiert erstellen.

Es konnte gezeigt werden, dass der Basisströmungslöser eine korrekte dreidimensionale, zeitabhängige Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen für Strömungen mit konstanter Temperatur und ohne Phasenübergang in weiten und engen Zylinderspaltsystemen berechnen kann. So wurde der Löser an einer analytischen Lösung 5.2, den Reynolds'schen Differenzialgleichungen 5.3, Literaturbeispielen 5.4 5.5 und experimentellen Messungen 5.6 validiert. Nach den Erfahrungen in Kapitel 6.4 wäre weiterhin eine Validierung der implementierten Turbulenzmodelle für turbulente Lagerberechnungen zu empfehlen, obwohl für die Mehrheit der Gleitlager Laminarität anzunehmen ist. Der Versuch von Wollfarth bedingt eine ungewöhnlich hohe Ölzufuhr um Kavitation zu provozieren. Dies ist nicht der Normalfall. Es gibt trotzdem Lager, die aufgrund größerer Spalte oder enormen Drehzahlen Gefahr laufen im turbulenten Bereich zu arbeiten.

Der vorliegende Löser soll als Grundlage für weiterentwickelte dreidimensionale Gleitlagerlöser dienen, welche Phasenübergänge oder Temperatureinfluss berücksichtigen. Die größte Schwierigkeit die der vorliegende und alle folgenden dreidimensionalen Löser haben werden, ist die Vernetzung des Rechengebietes. Die enorm engen Spalte, sehr hohen Exzentrizitäten und eine minimale radiale Auflösung von 12 radialen Zellen, bedingen automatisch hohe Nicht-Orthogonalitäten und sehr hohe Zellenaspektverhältnisse im Hauptspalt. Dadurch entsteht eine rechenzeitintensive Korrekturrechnung. Es ist daher mittelfristig nicht zu erwarten ein komplettes Kurbelspiel hochaufgelöst dreidimensional zu berechnen. Eine in dieser Arbeit vorgestellte Alternative ist es, eine auf einem sehr grobem Gitternetz berechnete Grundlösung zu erstellen und sich gezielte, aus der EHD vorhergesagte, interessante Kurbelwinkelpositionen hochaufgelöst zu Berechnen.

Weitere Alternativen sind die Simulationen von dreidimensionalen Subsystemen. So konnte beispielsweise von der Arbeitsgruppe der Westsächsischen Hochschule Zwickau gezeigt werden, dass man aus EHD getriggerten kritischen Kurbelwinkelsituationen quasi-stationäre 3D-Lösungen berechnen konnte und damit die radiale Position der Kavitation erhielt. Diese Information ist entscheidend um Kavitation als gefährlich oder unschädlich einzuordnen.

Ein vielversprechender Ansatz die Gittergröße zu verringern und somit die Rechenzeit enorm herabzusetzen, ist die Implementierung eines Drucksensitiven Gitters. Der Spalt ist aktuell konstant hoch aufgelöst, was nur an wenigen Stellen erforderlich ist.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

In einem Folgeprojekt an der BTU Cottbus wird gezielt an einem Hybrid-Löser gearbeitet, bei dem die Geometrie in Bereiche zerlegt wird, in denen die Lösung auf Basis der Reynolds'schen Differenzialgleichungen gelöst werden kann und in Bereiche, wo die Lösung dreidimensional berechnet wird. Hierbei würde die teure und an sich unnötige hohe Auflösung im Hauptspalt wegfallen. Ein weiteres Ziel dieses Projektes ist die Erarbeitung einer optimalen Prekonditionierung.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Literaturverzeichnis

Altmeyer u. a. 2011

Altmeyer, S. ; Hoffmann, C. ; Lücke, M.: Islands of instability for growth of spiral vortices in the Taylor-Couette system with and without axial through flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 84 (2011) 1.2.2

Andereck u. a. 1986

Andereck, D. ; Liu, S. ; Swinney, H.: Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 164 (1986) 1.2.1, 1.15

Atta 1966

Atta, C. V.: Exploratory measurements in spiral turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 25 (1966) 1.2.1

Avila u. a. 2011

Avila, K. ; Moxey, D. ; Avila, M. ; Lozar, A. ; Hof, B.: Onset of Turbulence in Pipe Flow. 333 (2011) 6.4

Ballal und Rivlin 1976

Ballal, B.Y. ; Rivlin, R.S.: Flow of a Newtonian Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders: Inertial Effects. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer* 62 (1976) 1.2.2, 1.28

Bestehorn 2006

Bestehorn, M.: *Hydrodynamik und Strukturbildung.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006 2.3, 2.3

Bois und Ocvirk 1953

Bois, G.B. D. ; Ocvirk, F.Y.: Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings. In: *NACA Techn. Report* (1953), Nr. 1157 1.2.2

Castle und Mobbs 1967

Castle, P. ; Mobbs, F.R.: Paper 6: Hydrodynamic Stability of the Flow between Eccentric Rotating Cylinders: Visual Observations and Torque Measurements. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* 182 (1967), Nr. 14 1.2.2

Chandrasekhar 1961

Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability.* Oxford : Clarendon Press: Oxford University Press, 1961 1.2.1

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Chawda und Avgousti 1996

Chawda, A. ; Avgousti, M.: Stability of viscoelastic flow between eccentric rotating cylinders. In: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 63 (1996) 1.2.2

Cole 1965

Cole, J. A.: Experiments on Taylor Vortices between Eccentric Rotating Cylinders. In: *Proceeding 2nd Australasian Conference Hydraulics & Fluid Mechanics* (1965), S. B 313–320 1.2.2

Cole 1957

Cole, J.A.: Experiments on the Flow in Rotating Annular Clearances. In: *Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear* paper 15 (1957) 1.24

Coles 1965

Coles, D.: Transition in circular Couette flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 21 (1965) 1.2.1, 1.14, 1.2.1

Coles 1967

Coles, D.: A note on Taylor instability in circular Couette flow. In: *Journal of Applied Mechanics* 34 (1967) 1.2.1

Couette 1890

Couette, M. M.: *Études sur le frottement des liquides.* Gauthier-Villars et fils, 1890 1.2.1

Courant und K. Friedrichs 1928

Courant, R. ; K. Friedrichs, H. L.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928) 3.1.2

Czarny und Lueptow 2007

Czarny, O. ; Lueptow, R.: Time scales for transition in Taylor-Couette flow. In: *Physics of Fluids* 19 (2007), Nr. 5 5.4, 5.13, 5.14, 5.4.1, 5.4.2, 5.19, 5.4.2

Dai u. a. 1992

Dai, R.-X ; Dong, Q. ; Szeri, A.Z.: Flow between eccentric rotating cylinders: bifurcation and stability. In: *International Journal of Engineering Science* 30 (1992), Nr. 10 1.2.2

Davey u. a. 1968

Davey, A. ; DiPrima, R.C. ; Stuart, J.T.: On the instability of Taylor vortices. In: *Journal of Fluid Mechanics* 31 (1968) 1.2.1

DiPrima u. a. 1984

DiPrima, R. ; Eagles, P. ; Ng, B.: The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow. In: *Physics of Fluids* 27 (1984), Nr. 10 1.2.1, 1.2.1, 5.4

DiPrima und Swinney 1985

DiPrima, R. ; Swinney, H. L.: Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In: Swinney, HarryL. (Hrsg.) ; Gollub, JerryP. (Hrsg.): *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* Bd. 45. Springer Berlin Heidelberg, 1985 1.2.1, 1.2.1

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

DiPrima und Stuart 1972

DiPrima, R. C. ; Stuart, J. T.: Non-local effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 54 (1972) 1.2.2, 1.26

DiPrima und Stuart 1975

DiPrima, R. C. ; Stuart, J. T.: The nonlinear calculation of Taylor-vortex flow between eccentric rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 67 (1975) 1.2.2

DiPrima 1955

DiPrima, R.C.: Application of the Galerkin Method to the calculation of the stability of curved flows. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 13 (1955), S. 55–62 1.2.1, 1.2.1

DiPrima 1963

DiPrima, R.C.: A note on the stability of Flow in Loaded Journal Bearings. In: *Tran. ASLE* 6 (1963) 1.2.2, 1.23, 1.24, 1.2.2, 1.25, 1.27

Donnelly 1991

Donnelly, R. J.: Taylor-Couette flow: The early days. In: *Physics Today* (1991), S. 32–39 1.2.1

Donnelly und Fultz 1960

Donnelly, R. J. ; Fultz, D.: Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. II. Visual observations. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 258 (1960), Nr. 1292, S. 101–123 1.2.1

Dris und S.G.Shaqfeh 1998

Dris, I.M. ; S.G.Shaqfeh: Experimental and theoretical observations of elastic instabilities in eccentric cylinder flows: local versus global instability. In: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 80 (1998), Nr. 1, S. 1 – 58 1.2.2

Eckhardt und Yao 1995

Eckhardt, B. ; Yao, D.: Local stability analysis along lagrangian paths. In: *Chaos Solitons & Fractals* 5 (1995), Nr. 11, S. 2073 – 2088 1.2.1

Escudier u. a. 2002a

Escudier, M.P. ; Oliveira, P.J. ; Pinho, F.T.: Fully developed laminar flow of purely viscous non-Newtonian liquids through annuli, including the effects of eccentricity and inner-cylinder rotation. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 23 (2002), Nr. 1, S. 52 – 73 1.2.2

Escudier u. a. 2002b

Escudier, M.P. ; Oliveira, P.J. ; Pinho, F.T. ; Smith, S.: Fully developed laminar flow of non-Newtonian liquids through annuli: comparison of numerical calculations with experiments. In: *Experiments in Fluids* 33 (2002), Nr. 1, S. 101–111 1.2.2

Esser und Grossmann 1996

Esser, A. ; Grossmann, S.: Analytic expression for Taylor-Couette stability boundary. In: *Physics of Fluids* 8 (1996), Nr. 7, S. 1814–1819 1.2.1, 1.17, 1.18, 1.2.2

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Feng und Fu 2007

Feng, S. ; Fu, S.: Influence of Orbital Motion of Inner Cylinder on Eccentric Taylor Vortex Flow of Newtonian and Power-Law Fluids. In: *Chinese Physics Letters* 24 (2007), Nr. 3, S. 759 1.2.2

Feng u. a. 2007

Feng, S. ; Li, Q. ; Fu, S.: On the orbital motion of a rotating inner cylinder in annular flow. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 54 (2007), Nr. 2, S. 155–173 1.2.2

Fenstermacher u. a. 1979

Fenstermacher, P.R. ; Swinney, H.L. ; Gollub, J.P.: Dynamical Instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 94, issue 1 (1979), S. 103–128 1.2.1, 1.16

Ferziger und Perić 1999

Ferziger, J. ; Perić, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999 3.1.2, 3.10

Ferziger und Perić 2002

Ferziger, J. ; Perić, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002 2.1

Formex

Formex: *Abbildung*. `http://www.formex.hu/sites/default/files/banner/auto-part-crankshaft.jpg` 1.4

Frêne und Godet 1971

Frêne, J. ; Godet, M.: Transition from laminar to Taylor vortex flow in journal bearings. In: *Tribology* 4 (1971), Nr. 4, S. 216 – 217 1.2.2, 1.27

Gasch u. a. 2006

Gasch, R. ; Nordmann, R. ; Pfützner, H.: *Rotordynamik*. Springer Berlin Heidelberg, 2006 1.21

Gollub und Swinney 1975

Gollub, J.P ; Swinney, H.L.: Onset of turbulence in a rotating fluid. In: *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975), S. 927–930 1.2.1

Gümbel und Everling 1925

Gümbel, L. ; Everling, E.: *Reibung und Schmierung im Maschinenbau*. Krayn, Berlin, 1925 1.2.2

Harris und Reid 1964

Harris, D.L. ; Reid, W.H.: On the stability of viscous flow between rotating cylinders Part 2. Numerical analysis. In: *Journal of Fluid Mechanics* 20 (1964), S. 95–101 1.2.1

Hwang und Yang 2004

Hwang, J.Y. ; Yang, K.S.: Numerical study of Taylor-Couette flow with an axial flow. In: *Computers & Fluids* 33 (2004), Nr. 1, S. 97 – 118 1.2.2

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Issa 1986

Issa, R. I.: Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator Splitting. In: *Journal of Computational Physics* 62 (1986), Nr. 1, S. 40 – 65 3.2

Jasak 1996

Jasak, H.: *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, Diss., 1996 3, 3.1, 3.5, 3.6, 3.1.1, 3.11

Joseph 1976

Joseph, D.D.: *Stability of Fluid Motions: 1.* Springer-Verlag, 1976 (Springer tracts in natural philosophy ; v. 27-28) 1.2.1

Kimbrell 2012

Kimbrell, A. B.: *Development and Verification of a Navier-Stokes Solver with Vorticity Confinement Using OpenFOAM*, University of Tennessee, Diplomarbeit, 2012 3

Lang und Steinhilper 1978

Lang, O. R. ; Steinhilper, W.: *Gleitlager*. Springer Berlin Heidelberg, 1978 2.4, 2.4

Leclercq u. a. 2013

Leclercq, C. ; Pier, B. ; Scott, J.F.: Temporal stability of eccentric Taylor-Couette-Poiseuille flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 733 (2013), S. 68–99 1.2.2

Mallock 1888

Mallock, A.: Determination of the viscosity of water. In: *Proc. R. Soc. London* 45 (1888), S. 126–132 1.1.2, 1.2.1

Margules 1881

Margules, M.: On the determination of the coefficients of friction and of gliding in the plane motions of a fluid. In: *Wien. Akad. Sitzber.* [Ser. 2] 83 (1881), S. 588–602 1.2.1

Martinand u. a. 2009

Martinand, D. ; Serre, E. ; Lueptow, R.M.: Absolute and convective instability of cylindrical Couette flow with axial and radial flows. In: *Physics of Fluids* 21 (2009), Nr. 10 1.2.2

Meharzi 1989

Meharzi, M.: *Axial angespeister Schmierspalt eines Radialgleitlagers*, ETH Zürich, Diss., 1989 1.22

Minbiole und Lueptow

Minbiole, M. ; Lueptow, R.: *Abbildung*. `http://www.scholarpedia.org/article/Taylor-Couette_flow` 1.6, 1.14

Muhs u. a. 2007

Muhs, D. ; Wittel, H. ; Jannasch, D. ; Vossiek, J.: *Roloff/Matek Maschinenelemente: Normung, Berechnung, Gestaltung*. Springer Vieweg, 2007 1.2, 1.3

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Mullin 1993

Mullin, T.: „Chaos in fluid dynamics“. In: Mullin, T. (Hrsg.): *The nature of chaos*. Chapter 4. Oxford Science Publications, 1993, S. 67–94 1.6

Neben 2012

Neben, M.: *Implementierung eines Bewegungsmoduls mit Rotor-Stator-Gitternetz in OpenFOAM*, BTU Cottbus, Diplomarbeit, 2012 6

Oikawa u. a. 1989

Oikawa, M. ; Karasudani, T. ; Funakoshi, M.: Stability of flow between eccentric rotating cylinders with a wide gap. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 58 (1989) 1.2.2

OpenFOAM

OpenFOAM: *User Guide*. `http://www.openfoam.org/docs/user/` 3, 4

Paraview

Paraview: *Paraview*. `http://www.paraview.org/` 6.3

Pinkus und Sternlicht 1961

Pinkus, O. ; Sternlicht, B.: *Theory of Hydrodynamic Lubrication*. McGraw-Hill, New York, 1961 1.2.2

Rayleigh 1916

Rayleigh, J. W. S.: On the Dynamics of Revolving Fluids. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 93 (1916), Nr. 648, S. 148–154 1.2.1, 1.7

Rayleigh 1918

Rayleigh, J. W. S.: Notes on the Theory of Lubrication. In: *Philos. Mag.* 35 (1918), S. 1–12 1.2.2

Reynolds 1886

Reynolds, O.: On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 177 (1886), S. 157–234 1.2.2, 1.20, 1.22

Ritchie 1968

Ritchie, G.S: On the stability of viscous flow between eccentric rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 32 (1968), S. 131–144 1.2.2, 1.25, 1.27

Schultz-Grunow 1959

Schultz-Grunow, F.: Zur Stabilität der Couette-Strömung. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 39 (1959), Nr. 3-4, S. 101–110 1.2.2

Siong 2006

Siong, L. S.: *An Experimental Investigation of Taylor Couette flow between eccentric cylinders*, National University of Singapore, Diplomarbeit, 2006 5.5, 5.21

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Sommerfeld 1904

Sommerfeld, A.: Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. In: *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 50 (1904), S. 97–105 1.2.2

Stieber 1933

Stieber, W.: *Das Schwimmlager.* VDI-Verlag. Berlin, 1933 1.2.2

Stokes 1845

Stokes, G. G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1845), S. 287–305 1.1.2, 1.2.1

Stokes u. a. 1880

Stokes, G. G. ; Larmor, J. ; Rayleigh, J. W. S.: *Mathematical and Physical Papers.* Vol. 1, Cambridge Univ. Press, 1880 1.2.1

Stuart 1958

Stuart, J. T.: On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. In: *Journal of Fluid Mechanics* 4 (1958), S. 1–21 1.2.1

Swift 1931

Swift, H.W.: The stability of lubricating films in journal bearings. In: *Minutes of the Proceedings* 233 (1931), S. 267–288 1.2.2

Taylor 1923

Taylor, G. I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 223 (1923), Nr. 605-615, S. 289–343 1.1.2, 1.6, 1.2.1, 1.8, 1.9, 1.2.2

Tower 1883

Tower, B.: First report on friction experiments. In: *Proc. Inst. Mech. Engineers* (1883), S. 632–659 1.2.2

Vohr 1968

Vohr, J. H.: An Experimental Study of Taylor Vortices and Turbulence in Flow between Eccentric Rotating Cylinders. In: *Journal of Lubrication Technology* 90(1) (1968), S. 285–296 1.2.2, 1.26

Walden und Donnelly 1979

Walden, R.W. ; Donnelly, R.J.: Reemergent order of chaotic circular Couette flow. In: *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979), S. 301–304 1.2.1

Wendt 1933

Wendt, F.: Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern. In: *Ingenieur-Archiv.* Springer-Verlag. 4 (1933), Nr. 6, S. 577–595 1.2.1

Wollfarth 1995

Wollfarth, M.: *Experimentelle Untersuchungen der Kavitationserosion im Gleitlager*, Universität Karlsruhe, Diss., 1995 1.1.1, 5.3, 6

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines von der industriellen Gemeinschaftsforschung und -entwicklung (IGF), im weiteren der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschung (AiF) sowie der Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen (FVV) geförderten Projektes.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing Christoph Egbers für die Möglichkeit der Promotion am Lehrstuhl Aerodynamik- und Strömungslehre der BTU-Cottbus. Ich danke weiterhin Frau Dr. rer. nat. Nicoleta Herzog für die weiterführende Betreuung während dieser Zeit.

Mein weiterer Dank gilt den Professoren Prof. Dr.-Ing. Adrian Rienäcker vom Lehrstuhl für Maschinenelemente und Tribologie der Universität Kassel und Prof. Dr.-Ing. Peter Reinke (geb. Stücke) vom Institut für Kraftfahrzeugtechnik der Westsächsische Hochschule Zwickau für die konstruktiven Diskussionsrunden in Vorbereitung und Durchführung des Projektes *3D-CFD-Gleitlager*.

Ebenso bedanke ich mich bei meinen Kollegen Dipl.-Ing. Carsten Wolf aus Kassel, M.Sc. Marcus Schmidt und M.Sc. Matthias Nobis aus Zwickau sowie Dipl.-Ing. Paul Gorenz und M.Sc. Matthias Neben der BTU Cottbus. Ein besonderer Dank geht auch an die Administratoren Dr. rer. nat. Andreas Krebs und Dipl.-Ing. Andreas Stöckert des Lehrstuhls für Aerodynamik und Strömungslehre der BTU Cottbus für den Aufbau und Pflege einer Rechnerstruktur, ohne die diese und andere Arbeiten nicht möglich gewesen wäre.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie, die mir immer ein fester und unverzichtbarer Rückhalt war.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.

Dieses Werk ist copyrightgeschützt und darf in keiner Form vervielfältigt werden noch an Dritte weitergegeben werden.
Es gilt nur für den persönlichen Gebrauch.