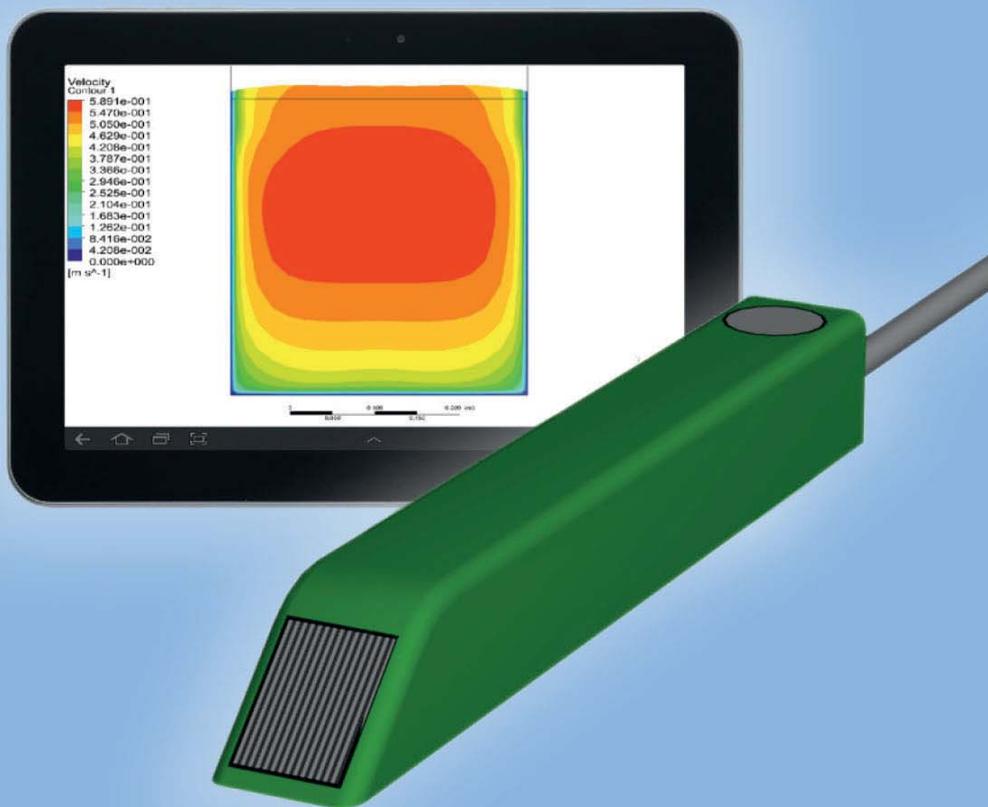


# Durchflussmessung mit Ultraschall-Phased- Array-Sensoren



Manuel Haide



Cuvillier Verlag Göttingen  
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag



## Durchflussmessung mit Ultraschall-Phased-Array-Sensoren





# Durchflussmessung mit Ultraschall-Phased-Array-Sensoren

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)  
der Technischen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von

**Manuel Haide**

Kiel 2015



## Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2016

Zugl.: Kiel, Univ., Diss., 2015

1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt  
2. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schroer  
Datum der mündlichen Prüfung: 22. Februar 2016

Ulm, September 2015  
Manuel Haide

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2016  
Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen  
Telefon: 0551-54724-0  
Telefax: 0551-54724-21  
[www.cuvillier.de](http://www.cuvillier.de)

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2016

Gedruckt auf umweltfreundlichem, säurefreiem Papier aus nachhaltiger Forstwirtschaft

ISBN 978-3-7369-9246-7

eISBN 978-3-7369-8246-8



# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Forschung der Hochschule Ulm. In besonderem Maß bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schroer für das entgegengebrachte Vertrauen und den mir eingeräumten Freiraum zur Ausgestaltung der wissenschaftlichen Arbeit. Seinem persönlichen Engagement, hilfreichen Hinweisen und interessanten konstruktiven Diskussionen bin ich zu tiefstem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Gerhard Schmidt danke ich herzlich für die Betreuung und die Gelegenheit zur Durchführung einer externen Promotion. Seine Begeisterung für das Forschungsprojekt und die ausgezeichneten Rahmenbedingungen, auch durch Skype-Kommunikation, haben wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen. Die Anstöße aus der Forschungsgruppe „Signalverarbeitung für Unterwasseranwendungen“ trugen maßgeblich zur Zielsetzung der Signalverarbeitungsverfahren bei.

Für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission bedanke ich mich vielmals bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Werner Rosenkranz. Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Meurer danke ich für die Abnahme der Prüfung und das tiefgreifende Interesse an meiner Arbeit.

Bei allen Mitarbeitern des Projektes „SigSon“ sowie den Kollegen des Instituts für Automatisierungssysteme an der Hochschule Ulm möchte ich mich für die schöne Zeit, angenehme Arbeitsatmosphäre, zahlreichen Ideen und hilfreichen Diskussionen bedanken. Hervorhebend möchte ich hier die Herren Helmut Alders, Jürgen Krahforst, Christian Herrmann, Markus Fleischmann, Manuel Tobler und Sebastian Herr nennen.

Für die Zusammenarbeit, vielen nützlichen Anregungen und Unterstützung bei mathematischen sowie strömungsmechanischen Fragen, gilt mein Dank den Herren Prof. Dr. rer. nat. Günter Gramlich und Prof. Dr. rer. nat. Klaus Ressel.

Des Weiteren bedanke ich mich bei der Firma Nivus für die Nutzung des Strömungsprüfstandes und vor allem bei Herrn Dr.-Ing. Michael Teufel und Herrn Dr.-Ing. Laurent Sollic für deren gewinnbringende Kooperation und praxisnahen Hinweisen.

Unterstützt wurde die Arbeit durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung im Rahmen des Förderprogramms „FHprofUnt“.

Abschließend gilt mein Dank vor allem meiner Familie und meiner Frau Verena, die mich im Lauf der Promotionszeit verständnisvoll unterstützt und stets den erforderlichen Rückhalt gegeben hat. Und meiner kleinen Tochter, die mich mit ihrem Lächeln immer aufs Neue motivierte.





# Kurzfassung

Der hohe Stellenwert einer verlässlichen Durchflussmessung im kommunalen Wassermanagement, dem Hochwasserschutz, in der Verfahrenstechnik und der Energietechnik ist gekennzeichnet durch die Entwicklung von verschleißfreien und flexiblen Messsystemen mit hoher Genauigkeit. Aktuelle Ultraschallmesssysteme erfüllen diese Anforderungen nur bedingt und sind daher hinsichtlich der Signalverarbeitung und Sensorkonzeption zu verbessern. Grundlage des behandelten Messprinzips bilden schallreflektierende Schwebstoffe im Fluid, welche schlupffrei in der Strömung mitgeführt werden.

Die vorliegende Arbeit beschreibt fusionierte Signalverarbeitungsverfahren zur Geschwindigkeitsbestimmung von Schwebstoffen in Fluiden. Zusammen mit einem Phased-Array-Ultraschallsensor wird die sukzessive Vermessung des Geschwindigkeitsprofils entlang des Kanal- bzw. Rohrquerschnittes möglich. Um zudem eine ortsabhängige Detektion der Laufzeit- und Dopplerinformationen zu realisieren, werden die Signale mit einer Frequenz-Hopping-Codierung gesendet. Objekt-Tracking oder Cluster-Methoden fusionieren die empfangenen Echoinformationen mit dem Ziel einer störunempfindlichen und genaueren Durchflussmessung.

Die Objektverfolgung wird durch ein Kalman-Filter und diverse lokale und globale Assoziationsverfahren wie das Nearest-Neighbour- und (Joint) Probabilistic Data Associations-Verfahren realisiert. Gegenüber diesem zeitlichen Spurverfolgungsansatz erfolgt bei der Cluster-Methode die Bestimmung der Dopplerfrequenz durch ein anwendungsorientiertes MUSIC-Verfahren. Bereiche im Kanal-/Rohrquerschnitt, welche über den Phased-Array-Sensor nicht erfassbar sind, werden durch rechenoptimierte Funktionen zur Nachbildung der Geschwindigkeitsverteilung vervollständigt. Der Nachweis zur Realisierbarkeit der Auswerteverfahren sowie des Sensorsystems wird mit einem Hardware-Funktionsmuster geführt.

Durch die Fusionsansätze können Messschwankungen bei hohen Einlaufgeschwindigkeiten reduziert werden. Mehrdeutigkeiten bei der Dopplerauswertung wurden durch die Fusion aufgehoben und damit der Messkorridor erweitert. Zusammen mit der Ultraschall-Phased-Array-Technologie lassen sich zudem inhomogene Geschwindigkeitsprofile über den kompletten Kanal-/Rohrquerschnitt abbilden.



# Abstract

Future development of reliable flow measurement in urban water management, flood control, process and power engineering are driven by developing wear-free and flexible measurement systems with high accuracy. Current ultrasonic measurement systems are limited in their scope and thus signal processing and sensor design need to be improved. The basis of the discussed measuring principle are sound-reflecting suspended solids in the fluid, which move slip-free along the stream.

This thesis presents fused signal processing methods to determine velocities of suspended solids in fluids. In combination with a phased-array ultrasonic sensor, a successive measurement of the velocity profile across the entire channel or pipe cross section can be performed. Moreover, signals are transmitted with a frequency hopping coding in order to detect a position-dependent information of the transit time and Doppler frequency. With the objective of noise-resistant and accurate flow measurement, object tracking theories or cluster methods are used to fuse the received echo information.

The object tracking is realized by a Kalman filter and various local and global association methods such as the Nearest-Neighbour- and (Joint) Probabilistic Data Associations method. In contrast to this time-based tracking of streamlines, the cluster method determines the Doppler frequency by an application-oriented MUSIC method. Areas which are beyond of the phased-array sensor coverage, are complemented by a computational optimized function to generate a velocity distribution across the entire channel / pipe cross section. The technical feasibility of the analyzed evaluation methods as well as the sensor system has been adduced by a hardware platform.

By using the data fusion methods measurement errors have been reduced for high inflow velocities. Ambiguities in the Doppler frequency interpretation are cancelled by the data fusion, and thus enlarge the measurement range. In combination with the ultrasonic phased-array technology inhomogeneous velocity profiles are determined across the entire channel / pipe cross section.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungen und Notation</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik . . . . .	2
1.2 Problemstellung und Ziele der Arbeit . . . . .	4
1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .	5
<b>2 Modellierung des Sensorsystems</b>	<b>7</b>
2.1 Grundlagen und Funktionsweise des Sensorsystems . . . . .	7
2.2 Messeinschränkungen von Auswerteverfahren . . . . .	9
2.3 Modellierung des Sensorsystems . . . . .	12
2.3.1 Strömungsmodell . . . . .	13
2.3.2 Reflexionspunktberechnung . . . . .	15
2.3.3 Elektromechanische Übertragungsfunktion . . . . .	17
2.3.4 Schallausbreitungs- und Phased-Array-Modellierung . . . . .	21
2.3.5 Schallabsorptionsmodell . . . . .	27
2.3.6 Reflexionsmodell . . . . .	29
2.4 Systemdesign . . . . .	31
2.5 Mess- und Prozessrauschen . . . . .	32
<b>3 Laufzeitbasierte Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit</b>	<b>39</b>
3.1 Funktionsweise . . . . .	40
3.2 Sendesignalform . . . . .	41
3.3 Signalaufbereitung . . . . .	45
3.4 Objektverfolgung . . . . .	50
3.4.1 Zustandsschätzung . . . . .	50
3.4.2 Datenassoziation . . . . .	58



3.4.3	Modellansatz . . . . .	73
3.4.4	Objektreduktion/ -erweiterung . . . . .	75
3.4.5	Geschwindigkeitsextraktion . . . . .	76
3.5	Räumliche Geschwindigkeitsfilterung . . . . .	77
3.5.1	Vollgefüllte Rohrströmung . . . . .	77
3.5.2	Offene Kanalströmung . . . . .	81
3.6	Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation . . . . .	83
3.6.1	Konvergenz und Stabilität . . . . .	84
3.6.2	Variation von SNR und Reflektoranzahl . . . . .	85
3.7	Messergebnisse zum Auswerteverfahren . . . . .	87
3.7.1	Vollgefüllte Rohrströmung . . . . .	87
3.7.2	Offener Kanal . . . . .	88
3.7.3	Klärwerk Ulm . . . . .	90
3.8	Abschließende Bewertung . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Dopplerbasierte Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit</b>	<b>93</b>
4.1	Funktionsweise . . . . .	93
4.2	Sendesignalform und Signalaufbereitung . . . . .	94
4.3	Dopplerfrequenzbestimmung . . . . .	96
4.3.1	DFT mit Zero-Padding . . . . .	97
4.3.2	Kovarianzmethode . . . . .	99
4.3.3	Pisarenko . . . . .	101
4.3.4	MUSIC . . . . .	104
4.4	Analysen der Auswerteverfahren durch Simulation . . . . .	108
4.4.1	Gegenüberstellung der Auswerteverfahren . . . . .	108
4.4.2	Variation von SNR und Reflektoranzahl . . . . .	109
4.5	Messergebnisse zum Auswerteverfahren . . . . .	113
4.5.1	Vollgefüllte Rohrströmung . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Fusion von laufzeit- und dopplerbasierten Auswerteverfahren</b>	<b>117</b>
5.1	Sendesignalformen und Signalaufbereitung . . . . .	118
5.2	Erweiterung der Objektverfolgung um die Dopplerfrequenz . . . . .	123
5.2.1	Funktionsweise . . . . .	123
5.2.2	Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation . . . . .	124
5.2.3	Messergebnisse zum Auswerteverfahren . . . . .	124



5.3	Erweiterung der Dopplerauswertung um die Ortsinformation . . . . .	128
5.3.1	Funktionsweise . . . . .	128
5.3.2	Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation . . . . .	129
5.3.3	Messergebnisse zum Auswerteverfahren . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Realisierung</b>	<b>133</b>
6.1	Implementierung . . . . .	133
6.2	Optimierung der Phased-Array-Strahler . . . . .	135
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>141</b>
A.1	Fehlerzuwachs Kreuzkorrelationsfunktion bei großem $t_{PRI}$ . . . . .	142
A.2	Navier-Stokes Gleichung . . . . .	144
A.3	Iterationsroutine zur Reflexionspunktbestimmung . . . . .	146
A.4	Messergebnisse: Phased-Array-Sensor . . . . .	147
A.5	Frequenzgänge zur Bestimmung der Piezo-Übertragungsfunktion . . . . .	149
A.6	Herleitung Wiener-Hopf-Gleichung . . . . .	152
A.7	Levinson-Durbin Rekursion . . . . .	154
A.8	Geschlossene Lösung zum Richtfaktor eines Einzelstrahlers . . . . .	160
A.9	Vgl. gemessener und simulierter Schalldrucksignale . . . . .	161
A.10	Messfehler Sekundärgeschwindigkeiten . . . . .	163
A.11	Auswertung Strömungsbeschleunigungen . . . . .	167
A.12	Matched-Filter-Design . . . . .	169
A.13	Filterdesign der Hilbert-Transformation . . . . .	172
A.14	Herleitung Kalman-Filter - Prädiktionskoeffizienten . . . . .	174
A.15	Herleitung Kalman-Filter - Innovationskoeffizienten . . . . .	179
A.16	Herleitung der a-priori Zuweisungswahrscheinlichkeit . . . . .	181
A.17	Nachweis der Gaußverteilung bei Mess-zu-Prädiktionsfehlern . . . . .	183
A.18	Simulierte und modellierte Geschwindigkeitsprofile . . . . .	184
A.19	Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - vollgefülltes Rohr . . . . .	188
A.20	Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - offener Kanal . . . . .	189
A.21	Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - Klärwerk Ulm . . . . .	191
A.22	Herleitung Auswertestreuung der Kovarianzmethode . . . . .	192
A.23	Messergebnisse: DFT mit Zero-Padding - vollgefülltes Rohr . . . . .	194
A.24	Messergebnisse: MUSIC-Verfahren - vollgefülltes Rohr . . . . .	195



A.25 Messergebnisse: Fusionierte KF-PDA- mit DFT-Verfahren - vollgefülltes Rohr	196
A.26 Messergebnisse: Fusionierte KF-PDA- mit DFT-Verfahren - offener Kanal .	197
A.27 Messergebnisse: Erweiterte Dopplerauswertung MUSIC - vollgefülltes Rohr	198
A.28 Messergebnisse: Erweiterte Dopplerauswertung MUSIC - offener Kanal . .	199

**Literaturverzeichnis****201**



# Abkürzungen

AAF	Antialiasing-Filter
ADCP	Acoustic Doppler Current Profiler
ADV	Acoustic Doppler Velocimeter
AFFT	Averaged Fast Fourier-Transformation
AKF	Autokorrelationsfunktion
AR	Autoregressive
ARMA	Autoregressive Moving Average
CD	Correlation Detection
CFD	Computational Fluid Dynamics
CW	Continuous Wave
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DSP	Digitaler Signalprozessor
EKF	Extended-Kalman-Filter
FFT	Fast Fourier-Transformation
FHSS	Frequency Hopping Spread Spectrum
FIR	Finite Impulse Response
FPGA	Field Programmable Gate Array
GNN	Global Nearest Neighbour
IDFT	Inverse Diskrete Fourier-Transformation
IF	Informationsfilter
IIR	Infinite Impulse Response
JPDA	Joint Probabilistic Data Association
JPDAF	Joint Probabilistic Data Association Filter
KF	Kalman-Filter
KF-NN	Kombination aus Kalman-Filter und Nearest Neighbour Verfahren
KF-PDA	Kombination aus Kalman und Probabilistic Data Association Filter
KKF	Kreuzkorrelationsfunktion
LDS	Leistungsdichtespektrum
LNA	Low Noise Amplifier
MA	Moving Average
MC	Monte-Carlo-Methode
MHT	Multi-Hypothesen-Tracker

MID	Magnetisch-Induktiver Durchflusssensor
MSE	Mean Square Error
MUSIC	Multiple Signal Classification
NN	Nearest Neighbour
PDA	Probabilistic Data Association
PDA <sub>xa</sub>	Probabilistic Data Association mit zusätzlicher Amplitudeninformation
PDAF	Probabilistic Data Association Filter
PVDF	Polyvinylidenfluorid
PZT	Blei (Pb) Zirkonat Titanat
RAM	Random-Access Memory
RFFT	Regression der Fast Fourier-Transformation
ROM	Read-Only Memory
SMC	Sequentieller Monte-Carlo-Filter
SNR	Signal-zu-Rausch-Verhältnis
UART	Universal Asynchronous Receiver Transmitter
UKF	Unscented-Kalman-Filter
V-ADCP	Vertical-Acoustic Doppler Current Profiler



# Notation

## Konventionen und Operatoren

$p(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$P\{\cdot\}$	Auftrittswahrscheinlichkeit
$\mathbb{E}[\cdot]$	Erwartungswert
$\text{Cov}[\cdot]$	Kovarianz
$\det(\cdot)$	Determinante
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
$\mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P})$	Normalverteilung mit $\mathbf{x}$ als Zufallsvariable, $\hat{\mathbf{x}}$ Erwartungswert und $\mathbf{P}$ Kovarianz
$\partial$	Partielle Ableitung
$\nabla$	Nabla-Operator
$\propto$	Proportionalität
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm
$ \cdot $	Betragsfunktion
$\cap$	Schnittmenge
$\delta(\cdot)$	Dirac-Impulsfunktion
$si(\cdot)$	<i>si</i> -Funktion
$\mathcal{F}(\cdot)$	Fourier-Transformation
$\text{DFT}(\cdot)$	Diskrete Fourier-Transformation
$\otimes$	Faltungssymbol
$\text{diag}(\mathbf{A})$	Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{A}$
$\text{abs}(\cdot)$	Absolutwertbestimmung
$\text{max}(\cdot)$	Maximalwertbestimmung

## Formelzeichen

### Allgemeine Parameter

$\rho_0$	Dichte von Wasser
$c_w$	Schallgeschwindigkeit in Wasser

$\omega$	Kreisfrequenz
$\tau$	Schalllaufzeit
$\lambda$	Wellenlänge
$t$	Zeit
$f$	Frequenz
$T$	Dauer des Empfangssignals
$\varphi$	Phase eines komplexen Signals
$d$	Rohrdurchmesser
$b$	Kanalbreite
$h$	Füllstand
$Re$	Reynold-Zahl
$\nu$	Kinematische Viskositätskonstante des Mediums
$d_h$	Hydraulischer Durchmesser
$v_x$	In Fließrichtung projizierte Geschwindigkeit
$\mathbf{v}_{ist}$	Tatsächlicher Geschwindigkeitsvektoren gegeben durch CFD-Simulationen
$\mathbf{v}_{mess}$	Gemessener Geschwindigkeitsvektoren in Sensorrichtung
$\gamma$	Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{mess}$ und $\mathbf{v}_{ist}$

## Parameter zum Sensorsystem

$t_{PRI}$	Pulswiederholintervall
$t_{PW}$	Pulsbreite
$\alpha$	Horizontaler Einstrahlwinkel auf der x-y-Ebene
$\beta$	Vertikaler Einstrahlwinkel auf der x-z-Ebene
$\theta_{az}$	Azimuthwinkel der Richtcharakteristik
$\theta_{az,3dB}$	Halbwertsbreite der Richtcharakteristik entlang der Azimuthebene
$\theta_{el}$	Elevationswinkel der Richtcharakteristik
$\theta_{el,3dB}$	Halbwertsbreite der Richtcharakteristik entlang der Elevationsebene
$\Delta v_{\alpha,\beta}$	$\hat{=} \frac{\Delta v_x}{v_x} \Big _{\alpha,\beta}$ Relativer Projektionsfehler gegeben durch Halbwertsbreite und Einstrahlwinkel (Messrauschen)
$\sigma_s$	Standardabweichung gegeben durch Abtausrauschen (Messrauschen)
$\sigma_{v_{y,z}}$	Standardabweichung gegeben durch Sekundärgeschwindigkeiten (Prozessrauschen)
$\sigma_a$	Standardabweichung gegeben durch Beschleunigungsrauschen (Prozessrauschen)

## Parameter zum Simulationsmodell

$\bar{v}_{in}$	Mittlere Einlaufgeschwindigkeit
$s_0$	Sendesignal
$s_{in}$	Empfangssignal
$F_R$	Reibungskraft
$F_p$	Druckkraft
$F_g$	Schwerkraft
$\mathbf{g}$	Erdbeschleunigung
$\xi$	Gefälle des Kanals/Gerinnes/Rohres
$f(\cdot)$	Funktion einer Strömungslinie
$\alpha_s$	Horizontaler Winkel auf der x-y-Ebene zum Reflektor
$\beta_s$	Vertikaler Winkel auf der x-z-Ebene zum Reflektor
$\mathcal{P}_S(k)$ ,	Reflektorposition $[x, y, z]^T$ zum Sende- bzw. Reflexionszeitpunkt $k$
$\mathcal{P}_R(k)$	
$\mathbf{r}_{ref}$	Distanz zwischen Sensor und Reflektor zum Reflexionszeitpunkt
$\mathbf{r}_s$	Ortsvektor der Reflektorposition zum Sendezeitpunkt
$\eta$	Dynamische Viskositätskonstante des Mediums
$\Delta t_{sim}$	Simulationsintervall
$p$	Schalldruck (oft auch mit Indizes)
$l_N$	Nahfeldlänge
$\acute{r}, \acute{d}$	Radius bzw. Durchmesser einer Kolbenmembrane
$l_P$	Länge eines Einzelstrahlers
$b_P$	Breite eines Einzelstrahlers
$A_P$	Fläche eines Einzelstrahlers
$A_H$	Druckempfindliche Fläche des Hydrophons
$p_0$	Schalldruck eines Einzelstrahlers bzw. Piezo-Kristalls
$p_P$	Schalldruck eines Einzelstrahlers bzw. Piezo-Kristalls ohne Flächen- normierung
$\tilde{p}_P$	Einwirkender Schalldruck auf das Hydrophon
$s_H$	Ausgangssignal am Hydrophon
$s_V$	Ausgangssignal am Verstärker
$H_0$	Übertragungsfunktion eines Einzelstrahlers
$H_P$	Übertragungsfunktion des einwirkenden Schalldrucks auf das Hydro- phon

$H_{tot}$	Übertragungsfunktion des Kanals
$H_H$	Übertragungsfunktion des Hydrophons
$H_V$	Übertragungsfunktion des Verstärkers
$H_{Ges}$	Übertragungsfunktion der gesamten Messkette
$\hat{p}_0$	Geschätzter Schalldruck eines Einzelstrahlers bzw. Piezo-Kristalls
$e$	Prädiktionsfehler
$\mathbf{b}, \mathbf{b}_{opt}$	Filterkoeffizienten, optimale Filterkoeffizienten eines FIR-Filters
$N, L$	Filterlänge, Stufenanzahl der Vorwärtsprädiktion
$\mathbf{r}_{pp}$	Kreuzkorrelationsvektor
$\mathbf{R}_{pp}$	Kovarianzmatrix
$I$	Schallintensität
$L$	Schallpegel
$v_0$	Schallschnelle
$Z_0$	Wellenwiderstand bzw. Schallkennimpedanz des Mediums
$p_Q$	Schalldruck einer Kolbenmembrane
$q_0$	Schallfluss (Volumenfluss)
$\mathcal{K}$	Proportionalitätsfaktor zwischen Schallfluss und Schalldruck
$\vartheta$	Winkelauslenkung zwischen Flächennormale des Einzelstrahlers und dem Ortsvektor eines Aufpunktes
$\Delta r_{ref,n}$	Gangunterschied zwischen den $n$ Einzelstrahlern
$\Gamma$	Richtfaktor
$\varepsilon$	Klassische Schallabsorptionskonstante
$\varepsilon_v$	Viskositätskonstante der kl. Schallabsorptionskonstante
$\varepsilon_w$	Wärmeleitkonstante der kl. Schallabsorptionskonstante
$\varpi$	Wärmeleitfähigkeit
$\kappa$	Adiabatexponent
$\varepsilon_m, K_m$	Experimentell bestimmte Schallabsorptionskonstante
$A_R$	Rückstreuquerschnitt eines Schallreflektors
$C_r$	Reflexionsfaktor
$Z_g$	Wandimpedanz des Reflektors

## Parameter der laufzeitbasierten Auswerteverfahren

$H_{MF}$	Übertragungsfunktion eines Matched-Filters
$H_{HT}$	Übertragungsfunktion eines Hilbert-Transformationsfilters

$s_{MF}$	Ausgangssignal am Matched-Filter
$s_{abs}$	Ausgangssignal nach der Hilbert-Transformationsfilterung und Absolutwertbildung
$s_{max}$	Ausgangssignal am differentiellen Hüllkurvendetektor
$s_{out}$	Ausgangssignal der Filterbank zur Hüllkurvenauswertung
$\mu_A$	Mittelwert der Verteilung von Amplitudenmaxima nach der Hüllkurvenauswertung
$\sigma_A$	Standardabweichung der Verteilung von Amplitudenmaxima nach der Hüllkurvenauswertung
$\varsigma_A$	Schwellwert zur Trennung von irrelevanten, lokalen Amplitudenmaxima nach der Hüllkurvenauswertung
$\sigma_{tr}$	Standardabweichung von Auswertefehlern zweier interferierender Pulsodierungen
$g(\cdot)$	Funktion des Bewegungsmodells
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\mathbf{z}$	Messvektor
$c$	Variable zur Zusammenfassung der totalen Wahrscheinlichkeit
$\mathbf{A}$	Prozess-/Bewegungsmodellmatrix
$\mathbf{H}$	Messmodellmatrix
$\mathbf{w}$	Prozessrauschen
$\mathbf{v}$	Messrauschen
$\mathbf{Q}$	Kovarianzmatrix des Prozessrauschens $\mathbb{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T]$
$\mathbf{R}$	Kovarianzmatrix des Messrauschens $\mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]$
$\hat{\mathbf{x}}^-$	Geschätzter Erwartungswert der Systemzustände
$\mathbf{P}^-$	Geschätzte Kovarianzmatrix der Systemunsicherheit
$\mathbf{v}$	Mess-zu-Prädiktionsfehler beim Kalman-Filter
$\mathbf{K}$	Kalman-Faktor
$\mathbf{S}$	Innovationskovarianz
$\mathbf{g}(\cdot)$	Funktion des Prozess-/ Bewegungsmodells
$\mathbf{h}(\cdot)$	Funktion des Messmodells
$d_{MH}$	Mahalanobis-Distanz
$M$	Anzahl der Freiheitsgrade einer $\chi^2$ -Verteilung
$P_G$	Gating-Wahrscheinlichkeit
$k_G$	Schwellwert zur Begrenzung der Gating-Wahrscheinlichkeit
$\mathbf{\Omega}$	Binäre Gating-Matrix

$V$	Gating-Volumen
$C_M$	Proportionalitätskonstante zur Bestimmung des Gating-Volumens
$\mathbf{d}_\omega$	Zuordnungsmatrix
$\mathbf{C}$	Binäre Zuweisungs-Matrix beim GNN
$c_{i,t}$	Element der Matrix $\mathbf{C}$ von Objekt $t$ und Messpunkt $i$
$a_{i,t}$	Gewichtung der Zuweisungen über Distanzen von Objekt $t$ und Messpunkt $i$ beim GNN
$m_k$	Anzahl der Messpunkte im Gating-Bereich
$\mathbf{z}_{i,k}$	Validierter Messpunkt $i$ zum Zeitpunkt $k$
$\mathbf{Z}_k$	Satz validierter Messpunkte $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_{i,k}\}_{i=1}^{m_k}$ zum Zeitpunkt $k$
$\mathbf{Z}_{1:k}$	Sämtliche validierten Messpunkte über den kompletten Zeitraum
$\epsilon_{i,k}$	Zuweisungsereignis des Messpunktes $i$ mit dem Objekt $t$
$P_D$	Detektionswahrscheinlichkeit
$\mu_F(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zur Anzahl an Falschmessungen im Gating-Bereich
$\varpi$	Wahrscheinlichkeitsdichtekonstante der Störmesspunkte eines nicht parametrisierten Modells
$\bar{v}$	Mess-zu-Prädiktionsfehler beim PDA-Filter
$\mathbf{P}^*$	Korrigierte Kovarianzmatrix des PDA-Filters mit Kalman-Faktor
$d\mathbf{P}$	Änderung der Kovarianzmatrix durch die Zuweisungswahrscheinlichkeiten von Messpunkten
$\epsilon$	Assoziations-/Zuweisungsmatrix
$E_n$	Verbundereignis der $n$ -ten Ereigniskombination
$\hat{\Omega}(E_n)$	Binäre Ereigniskombinationsmatrix des Verbundereignisses $E_n$
$\delta_t(E_n)$	Binäre Variable als Indikator für die Existenz eines Messpunktes zum Objekt $t$ im Verbund $E_n$
$\tau_i(E_n)$	Binäre Variable als Indikator für die Existenz eines Objektes zum Messpunkt $i$ im Verbund $E_n$
$\phi(E_n)$	Anzahl der Fehlmesspunkte eines Verbundereignisses $E_n$
$\mathbf{Q}_a$	Prozesskovarianzmatrix gegeben durch das Rauschen der Reflektorbeschleunigungen
$\mathbf{Q}_{y,z}$	Prozesskovarianzmatrix gegeben durch das Rauschen von Sekundärgeschwindigkeiten
$\mathbf{Q}_\phi$	Prozesskovarianzmatrix gegeben durch Amplitudenrauschen von Echos

$\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$	Messkovarianzmatrix gegeben durch Strahlerrauschen von Halbwertsbreite und Einstrahlwinkel
$\mathbf{R}_s$	Messkovarianzmatrix gegeben durch Abtastrauschen
$\mathbf{R}_\phi$	Messkovarianzmatrix gegeben durch Amplitudenrauschen von Echos

## Parameter der räumlichen Geschwindigkeitsfilterung

$z_{tot}$	Toter Messbereich entlang der z-Achse
$d_{KR}$	Durchmesser einer Rohrkrümmung
$y_R$	Horizontale Achse mit Ursprung im Rohrmittelpunkt
$z_R$	Vertikale Achse mit Ursprung im Rohrmittelpunkt
$v_{x,R}$	Geschwindigkeitsprofil einer vollgefüllten Rohrströmung
$w_{FR}$	Fensterfunktion einer vollgefüllten Rohrströmung
$w_{FK}$	Fensterfunktion einer offenen, rechtwinkligen Kanalströmung
$l$	Variable zur Geschwindigkeitsanpassung der Fensterfunktion
$v_{x,RW}$	Geschwindigkeitsprofil einer vollgefüllten Rohrströmung mit Fensterfunktion
$v_{x,Kln}$	ln-Funktion als Geschwindigkeitsprofil eines offenen Kanals mit Fensterfunktion
$v_{x,KPo}$	Polynomiales Geschwindigkeitsprofil eines offenen Kanals mit Fensterfunktion

## Parameter zur Analyse von Auswerteverfahren

$r_{LSQ}$	Summe der normierten Fehlerquadrate bzw. Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten zum Profil
$e_{Rohr}$	Geschwindigkeitsfehler zwischen Simulations- und angepasstem Geschwindigkeitsprofil beim Rohr
$e_{Kanal}$	Geschwindigkeitsfehler zwischen Simulations- und angepasstem Geschwindigkeitsprofil beim offenen Kanal
$\bar{v}_{x,m}$	Mittelwert der Reflektorgeschwindigkeiten entlang der vertikalen Achse des $m$ -ten Messzyklus über alle Raumzonen
$\bar{v}_{x,std}$	Standardabweichung der Reflektorgeschwindigkeiten zum Endprofil entlang der vertikalen Achse des $m$ -ten Messzyklus aller Raumzonen
$v_{x,KPo,Mess}$	Gemessenes polynomiales Geschwindigkeitsprofil eines offenen Kanals
$v_{x,KPo,\alpha}$	Polynomiales Geschwindigkeitsprofil mit beschränktem Auslenkungswinkel $\alpha$
$e_{Q,ph}$	Relativer Durchflussfehler durch Auslenkungs- bzw. Sichtbereichsbegrenzung

## Parameter der dopplerbasierten Auswerteverfahren

$\mu_F$	Mittelwert der Frequenzstützstellen
$\sigma_F$	Standardabweichung der Frequenzstützstellen
$\zeta_F$	Schwellwert zum Nachweis einer Reflektorexistenz
$\Phi_{ss}$	Leistungsdichtespektrum
$M_m$	Moment der Ordnung $m$
$\sigma_D$	Standardabweichung der Dopplerfrequenz im Spektrum
$\phi_{ss}$	Autokorrelationsfunktion
$\hat{\phi}_{ss}$	Schätzung der Autokorrelationsfunktion
$\Delta T$	Zeitliche Verschiebung der Autokorrelationsfunktion
$\sigma_R$	Rauschleistung
$\mathbf{s}$	Signalvektor
$\mathbf{n}$	Rauschvektor
$\mathbf{R}_{ss}$	Autokorrelationsmatrix des gemessenen Signalvektors
$\mathbf{a}$	Parametervektor eines ARMA-Modells bzw. Eigenvektor von $\mathbf{R}_{ss}$
$\hat{\mathbf{R}}_{ss}$	Geschätzte Autokorrelationsmatrix des gemessenen Signalvektors
$\mathbf{R}_{nn}$	Autokorrelationsmatrix des Rauschvektors bzw. Störtraums
$\mathbf{R}_{sn}$	Kreuzkorrelationsmatrix von Signal- und Rauschvektor
$\sigma_n^2$	Rauschvarianz $\hat{=} \text{diag}(\mathbf{R}_{nn})$ bzw. Eigenwert des zugehörigen Eigenvektors $\mathbf{a}$
$H_{AR}(z)$	Übertragungsfunktion eines AR-Modells
$\mathbf{R}_{xx}$	Autokorrelationsmatrix des Nutzsignals
$\mathbf{G}_f$	Frequenzmatrix des Signalraums
$\mathbf{D}_A$	Amplitudenmatrix des Signalvektors
$\lambda$	Eigenwert der Nutzsignalmatrix $\mathbf{R}_{xx}$
$\mathbf{v}$	Eigenvektor der Nutzsignalmatrix $\mathbf{R}_{xx}$
$\mathbf{g}$	Signalvektor mit den zugrundeliegenden, gesuchten Frequenzen

## Parameter zum fusionierten Auswerteverfahren

$\sigma_{Dv}$	Standardabweichung des Geschwindigkeitsfehlers zur Dopplerfrequenzbestimmung
$\mathbf{R}_{Dv}$	Messkovarianz zum dopplerbasierten Geschwindigkeitsfehler



# Kapitel 1

## Einleitung

Bereits im Jahre 1513 beobachtete Leonardo da Vinci den Zusammenhang von Wasserstand, Durchfluss, Gefälle von Gewässern und deren Flussbettraugigkeit für die Wasserstraßen der Poebene. Die mathematischen Grundlagen hierzu erforschte Galileo Galilei im Jahre 1638 und anschließend Isaac Newton 1687 in seinem berühmten Werk der Bewegungsgesetze [New87] sowie 1684 in den Reibungsgesetzen von Flüssigkeiten. In den darauf folgenden Jahren wurden für den jeweiligen Einsatzzweck eine Vielzahl an mechanischen Prinzipien zur Durchflussmessung entwickelt, welche hinsichtlich Fluidart, -menge und Wirtschaftlichkeit eine Optimierung erfahren haben.

Etablierte Messprinzipien wie das Wirkdruckverfahren, der Kammer- bzw. Flügelbasierten Volumenzähler oder der Schwebekörper-Durchflussmesser sind, bedingt durch ihre Historie, auch heute noch weit verbreitet [Bon90, Fie92, OR71]. Aufgrund der mechanisch beweglichen Teile und/oder des zusätzlichen Druckabfalls werden die mechanischen Messprinzipien jedoch mehr und mehr vom Markt verdrängt. Vor allem die zunehmende Bedeutung von verschleißfreien Durchflussmessungen in der Energie-, Versorgungs- und Verfahrenstechnik setzt die Entwicklung neuer Verfahren voraus, welche hinsichtlich ihrer Messgenauigkeit und Wirtschaftlichkeit den klassischen Messmethoden überlegen sind.

Um die Forderungen der (industriellen) Betreiber von immer genaueren und zuverlässigeren Durchflussmesssystemen Sorge tragen zu können, fußen modernere Messkonzepte auf bewegungslosen Verfahren. Neben optischen und thermischen Messprinzipien, setzten sich hierbei im Wesentlichen induktive, oszillierende und akustische durch. Vor allem magnetisch-induktive Durchflusssensoren (MID) für meist vollgefüllte Rohrströmungen in überwiegend gedückerter Form sind stark verbreitet. Hohe Messgenauigkeiten unterliegen hierbei jedoch der Bedingung eines rotationssymmetrischen Strömungsprofils, welches nur bei entsprechenden Ein- und Auslaufstrecken (größer  $10 \times$  Nennweite), sowie der Vermeidung von Luftbläschen im Fluid gegeben ist. Neben den hohen Baukosten (bei einer Dükerung) steigen zusätzlich auch die Kosten für dieses Messsystem überproportional mit zunehmenden Nennweiten. [Teu06b, Han03, MSW98]

Mit der Fertigung von definierten Rohrdurchmessern und zunehmender Erfahrung, erlangen Coriolis-Durchflussmesser in der standardisierten Verfahrenstechnik zunehmende Beliebtheit. Das Messverfahren findet ausschließlich bei vollgefüllten Rohrströmungen Anwendung und zeichnet sich durch hohe Messgenauigkeit aus. Von Nachteil sind jedoch die relativ hohen Beschaffungskosten und der begrenzte Einsatzbereich auf kleine Nennweiten (DN=15–80 mm) sowie einphasige Messmedien. [FG<sup>+</sup>10]

In jüngster Zeit erfahren allerdings Ultraschall-Durchflussmesser einen überdurchschnittlichen Zuwachs an Marktanteilen. Bedingt durch die vergleichsweise geringen Kosten, die weitgehende Wartungsfreiheit, die einfache Installation und das hohe Maß an Anwendungsflexibilität auch für größere Nennweiten, findet sich dieses akustische Messprinzip im Sortiment von allen großen Geräteherstellern [Bru08, Bet06]. Prinzipiell untergliedert sich das Messprinzip in das Laufzeitdifferenzverfahren, welches auf Mitführeffekte der Schallwellen in reinem Fluid basiert, und Doppler- bzw. Korrelationsverfahren, welche auf Echoauswertungen in Mehrphasenfluiden beruhen. Durch den Einsatz von immer leistungsfähigeren Signalprozessoren sowie der Anwendung von neuen Technologien, versprechen die Doppler- bzw. Korrelationsverfahren ein maßgebliches Verbesserungspotenzial. Die Identifizierung und Nutzung dieses Potenzials, in Form von neuen Signalverarbeitungsverfahren gepaart mit der Phased-Array-Technologie, ist Bestandteil dieser Arbeit.

## 1.1 Stand der Technik

Die Durchflussmessung in voll- und teilgefüllten Rohren mit hohen Volumenströmen erfolgt heutzutage vorwiegend mit berührungs- und bewegungslosen Messprinzipien. Das Bekannteste von ihnen ist das der elektrodynamischen Induktion, welches bereits Anfang des 19. Jahrhunderts durch elektrische Schaltungstechniken realisiert werden konnte [Wil30]. Wird ein starkes magnetisches Feld senkrecht zur Strömungsrichtung erzeugt, so entsteht beim Durchfließen des magnetischen Feldes -aufgrund der im Fluid mitgeführten Ladungsträger- eine elektrische Feldstärke senkrecht zum Magnetfeld und der Fließrichtung. Die durch die Feldänderung hervorgerufene Spannungsdifferenz an den Elektroden der Rohrwand verhält sich dabei proportional zur gemittelten Strömungsgeschwindigkeit des Fluids. Das Messprinzip lässt sich mithilfe einer Dükerung auch auf teilgefüllte Rohre anwenden.

Neben diesem induktiven sind auch akustische Messprinzipien -meist im Ultraschallbereich- in der Durchflussmessung weit verbreitet. Die zugrunde liegenden Effekte zur Strömungsmessung beruhen entweder auf dem Mitführen von Schallwellen im Fluid und der damit verbundenen Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit oder auf dem Dopplereffekt, hervorgerufen durch Schallreflexionen von vorbeifließenden Schwebstoffen im Fluid. Beim Mitführeffekt sind Sender und Empfänger getrennt voneinander angeordnet und über einen gemeinsamen Schalllaufpfad verbunden. Der Schalllaufpfad muss dabei quer zur Strömungsrichtung ausgerichtet sein, sodass die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Strömung gegeben ist. Ausgewertet wird die von der Strömungsgeschwindigkeit hervorgerufene Laufzeit-, Phasen- oder Frequenzdifferenz zwi-

schen Sende und Empfangssignal [Fie92]. Die gewonnene Signaldifferenz entlang eines Schalllaufpfades ist zur Fließgeschwindigkeit proportional. Zur Steigerung der Geschwindigkeitsauflösung wird wechselseitig die Funktionalität von Sender und Empfänger umgekehrt oder die Schalllaufdistanz durch Reflexionen an der Rohrwand erhöht. Bei Messungen von Teilfüllungen muss die Anordnung von Sender und Empfänger so gestaltet werden, dass der Schalllaufpfad vollständig im Fluid liegt und der Füllstand bekannt ist [ISO05].

Die auf dem Dopplereffekt aufbauende Strömungsmessung beruht auf der Schallrückstreuung von vorbeifließenden Schwebstoffen oder ungelösten Luftbläschen im Fluid und wird daher auch oft als reflexionsbasiertes Messverfahren bezeichnet. Sind diese Verunreinigungen in ausreichender Menge im Fluid vorhanden und bewegen sich diese schlupffrei mit der Strömung -was in guter Näherung zutrifft-, dann lässt sich von der Geschwindigkeitsbestimmung dieser Verunreinigungen auf die Fließgeschwindigkeit zurückschließen [Mor10, Teu06a, ST10]. Die Verunreinigungen und somit Repräsentanten der Fließgeschwindigkeit reflektieren dabei die vom Sensor ausgestrahlten Schallwellen und streuen diese zurück. Die dadurch hervorgerufene Stauchung bzw. Dehnung der Schallwellen sind ein Maß für die Reflektorgeschwindigkeit und lassen sich durch die Auswertung der Dopplerverschiebung bestimmen. Bei gepulstem Senden wird die Änderung der Echolaufzeit zur Erfassung der Reflektorgeschwindigkeit verwendet. Ist die Füllstandshöhe bekannt, lassen sich mit diesem Verfahren auch teilgefüllte Rohrströmungen messen.

Reflexionsbasierte Ultraschallmessgeräte existieren sowohl in bistatischer, als auch monostatischer Ausführung. Da bei bistatischen Messgeräten Sender und Empfänger örtlich voneinander getrennt angeordnet sind, lassen sich neben gepulsten Signalen auch continuous wave (CW) Signale verwenden. Während sich Sensoren mit CW-Signalen in voll und teilgefüllten Rohren höherer Nennweite aufgrund ihrer ortsunabhängigen Geschwindigkeitsmessung nicht etablieren konnten, sind Sensoren mit gepulsten Sendesignale unter der Bezeichnung ADV (Acoustic Doppler Velocimeter) weit verbreitet [LCK94, VT98]. ADV-Sensoren bestehen aus drei Empfängern, welche im Winkel von  $120^\circ$  ringförmig um den Sender angeordnet sind. Die Abstrahlung der Sendepulse erfolgt senkrecht zur Fließrichtung und der Empfang der Echos unter einem Einstrahlwinkel von  $60^\circ$  zum Sendepfad. Unter Kenntnis der Echolaufzeit ist eine punktuelle Messung aller drei Geschwindigkeitskomponenten möglich. Die Echoauswertung erfolgt durch das Puls-zu-Puls Verfahren [MR72, KP89]. Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils und damit der mittleren Fließgeschwindigkeit müssen mehrere Messungen über den Querschnitt verteilt durchgeführt werden.

Im Gegensatz zur bistatischen Sensorkonzeption haben sich in der Praxis monostatische Ultraschall-Durchflusssensoren aufgrund ihrer Kosteneffizienz durchgesetzt. Hierbei finden Senden und Empfangen intermittierend mit demselben Strahler statt, sodass gepulste Sendesignale notwendig sind. Die Einstrahlrichtung eines räumlich festen Messpfades erfolgt radial zur Fließrichtung, um die Laufzeitänderung der Reflektoren oder die Dopplerverschiebung erfassen zu können. Abgestrahlt wird entweder in Richtung Sohle oder

Oberfläche [Teu06a, ISO07], sodass neben einem Sensor zur Geschwindigkeitsmessung oft noch zusätzlich ein Füllstandssensor im Messgerät integriert ist. Zur Bestimmung der Dopplerfrequenz bzw. Phasendifferenz der Echos müssen die Pulse in kohärenter Signalform gesendet werden. Bei Kanal- oder Rohrmessungen mit einem Füllstand bzw. einer Nennweite unter 5 m findet dieses Auswerteverfahren beispielsweise bei V-ADCP (Vertical -Acoustic Doppler Current Profiler) Sensoren Anwendung [HWX09]. Im Gegensatz hierzu wird die Detektion der Laufzeitänderung von Reflektoren durch korrelative Auswerteverfahren gelöst, sodass hier auch das inkohärente Senden von Pulsen möglich ist. Bekannte Durchflusssensoren in diesem Anwendungsbereich sind beispielsweise die der Firma NIVUS [Sol13]. Um die Messgenauigkeit der Durchflusssensoren bei gestörten Strömungen und komplexen Gerinnkonturen weiter zu steigern, ist die Messpfadanzahl im Strömungsquerschnitt zu erhöhen [Mor10, Sol13].

## 1.2 Problemstellung und Ziele der Arbeit

Damit der Durchfluss an einer Messstelle bestimmt werden kann, muss die durchströmende Querschnittsfläche mit der mittleren Fließgeschwindigkeit in diesem Querschnitt multipliziert werden. Während diese Durchflussberechnung bei vollgefüllten und symmetrischen Rohrströmungen mit hoher Präzision realisierbar ist, lässt sich eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit bei offenen Gerinnen oder stark gestörten bzw. asymmetrischen Strömungsprofilen mit einer punktuellen Messung auf einem Messstrahl nicht bestimmen.

Besonders schwierig sind dabei Messstellen, bei welchen das Strömungsverhalten durch gestörte Ein- und Auslaufbedingungen beeinflusst wird oder der Querschnitt z.B. durch Sedimentationen variiert. Ausgehend von diesen praxisnahen Bedingungen sind Messgenauigkeiten von unter  $\pm 2\%$  zum tatsächlichen Durchfluss kaum möglich, sofern keine kontinuierliche Vermessung des gesamten Geschwindigkeitsprofils und des Querschnitts stattfindet. [Mor10, Teu06b]

Um diese Problematik lösen zu können, müssen zur Rekonstruktion des Geschwindigkeitsprofils möglichst viele Messpunkte, verteilt über den Querschnitt, vorliegen und die Querschnittsfläche und Füllstandshöhe bekannt sein. Die Erfüllung dieser Prämissen werden inzwischen überwiegend mit mehreren Ultraschall-Durchflussmesser entlang des Querschnittes realisiert [Mor10]. Mit zunehmender Anzahl an Messgeräten steigen jedoch die Kosten aber auch Komplexität zur Sensorsynchronisierung, Installation und Datenfusion.

Um eine hohe Messpunktabdeckung über den kompletten Querschnitt, bei gleichzeitiger Reduktion der Messgeräte zu erreichen, wird in dieser Arbeit die Phased-Array-Technologie angewendet. Dadurch lässt sich die Schallabstrahlung des Sensorsystems elektrisch durch phasenselektives Ansteuern in jede gewünschte Richtung auslenken. Die gerichtete Schallabstrahlung erfolgt bewegungslos und ohne mechanischen Verschleiß des Sensorsystems. Mit diesem Sensorkonzept lassen sich, selbst unter starker Störung der Strömung, die Fließgeschwindigkeiten hinreichend gut erfassen.

Mit der Phased-Array-Technologie zur Steigerung der Messpunktabdeckung, setzt sich diese Arbeit zum Ziel, geeignete Auswerteverfahren zu entwickeln. Durch den Einsatz leistungsfähiger Prozessoren lassen sich auch komplexere Algorithmen in den Sensorsystemen realisieren. Hierzu werden auf Grundlage der Sensorwerte Geschwindigkeitsprofile quer über den kompletten Kanal- bzw. Rohrquerschnitt generiert, sodass asymmetrische Strömungsverläufe erfasst werden können. Zusätzlich zu dieser technologischen Verbesserung sollen in dieser Arbeit neue Auswerteverfahren zur Geschwindigkeitsmessung von Reflektoren untersucht werden. Dabei sollen Mehrdeutigkeiten von Echos durch eine spezielle Sendesignalcodierung unterbunden und ein detailliertes Verfolgen der Reflektoren erzielt werden. Darauf aufbauend wird aus den Laufzeitänderungen einer Reflektorspur die Geschwindigkeit bestimmt, wozu es innovativer Filtermethoden bedarf. Neben dieser Spurverfolgung von Reflektoren werden auch Signalformen und Auswerteverfahren zur Bestimmung der Dopplerfrequenz analysiert. Für die Kombination der beiden Verfahren, besteht das Ziel ein Signalmuster und die dazugehörige Auswertemethodik zu entwickeln, welche sowohl die Laufzeitänderung und Position der Reflektoren als auch deren Dopplerfrequenz im Echo erfassen.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** wird das Messprinzip der Durchflussmessung durch einen Phased-Array-Sensor für offene Kanäle und vollgefüllte Rohre vorgestellt. Zudem werden die Randbedingungen des Sensorsystems analysiert und der daraus resultierende Parameterbereich näher spezifiziert. Im Weiteren findet die Modellierung des Systems statt, mit dem Ziel einer möglichst realitätsnahen Nachbildung der Messumgebung. Neben dem Strömungsverlauf von Schallreflektoren werden auch Modellansätze zum elektromechanischen Verhalten eines Piezokristalls, deren Zusammenspiel in der Gruppe und Charakteristiken der Ultraschallausbreitung in Fluiden erläutert. Durch die Nachbildung des Sensorsystems in Form einer Signalkette und unter Kenntnis der Eingangssignale und Variation der Modellparameter, lassen sich Empfangssignale simulativ generieren und zur Verifikation der Auswerteverfahren nutzen. Darüber hinaus wird eine sensor- und strömungsbedingte Fehleranalyse des Systems durchgeführt.

Basierend auf den simulativ und messtechnisch ermittelten Empfangssignalen, werden in den nachfolgenden Kapiteln Auswerteverfahren zur Bestimmung von Fließgeschwindigkeiten durch die Phased-Array-Technologie erläutert. Hierbei wird in **Kapitel 3** ein laufzeitbasiertes Korrelationsverfahren beschrieben, welches gepaart mit einer speziellen Sendesignalform, die zeitliche Verfolgung von Reflektorspuren ermöglicht. Die Verfolgung von Reflektoren erfolgt auf Grundlage der Objektverfolgungstheorie und damit auf Verfahren der Zustandsschätzung mit Datenassoziation. Sind die Reflektorgeschwindigkeiten im Sichtbereich des Phased-Array-Sensor bekannt, werden räumliche Geschwindigkeitsprofile von vollgefüllten Rohrleitungen und teilgefüllten Rechteckkanälen zur Extrapolation nicht

messbarer Zonen vorgestellt und bewertet. Abschließend finden zahlreiche Analysen zur Durchflussmessung mittels Phased-Array-Sensor und dem laufzeitbasierten Auswerteverfahren statt.

In **Kapitel 4** werden dopplerbasierte Auswerteverfahren zur Bestimmung der Reflektorgeschwindigkeiten untersucht. Hierzu werden etablierte und moderne Verfahren zur Identifizierung der Dopplerfrequenz vorgestellt und auf die vorliegende Aufgabenstellung erweitert. Hauptaugenmerk liegt auf der Theorie der eigenwertbasierten Spektralanalyse. Nach einer simulativen Gegenüberstellung der Verfahren sowie einer Bewertung hinsichtlich Störfestigkeit, variierender Reflektoranzahl und Strömungseinflüssen, werden Messergebnisse des Phased-Array-Sensors bei vollgefüllter Rohrströmung präsentiert.

Zur Verbesserung der Geschwindigkeitsmessung werden -aufbauend auf den zuvor beschriebenen laufzeit- und dopplerbasierten Auswerteverfahren- in **Kapitel 5** zwei Optionen zur Verfahrensfusion erläutert. Dabei wird ein Sendesignal bestehend aus kohärentem und codiertem Pulsmuster und dessen Signalaufbereitung vorgestellt und näher untersucht. Die daraus gewonnenen Geschwindigkeits- und Positionsinformationen dienen einerseits zur Reduktion von Messunsicherheiten bei der laufzeitbasierten Objektverfolgung und andererseits zur Steigerung der Messentfernung beim dopplerbasierten Auswerteverfahren. Zum Ende des Kapitels erfolgt die simulative Untersuchung beider fusionierter Auswerteverfahren und der Vergleich mit den Ergebnissen aus den vorhergehenden Kapiteln. Zusätzlich werden die Verfahren experimentell an Strömungskanälen untersucht.

Das Hardwarekonzept des Sensorsystems, bestehend aus einem Phased-Array-Strahler zur elektromechanischen Wandlung, einem digitalen Signalprozessor zur Signalaufbereitung und einem Mikrocontroller zur Umsetzung der Auswertverfahren, wird in **Kapitel 6** aufgezeigt. Um die Machbarkeit der diskutierten Verfahren zu stützen, wird zusätzlich ein rechenintensives Auswerteverfahren hinsichtlich Rechenlaufzeit und Speicherressourcen auf dem Mikrocontroller untersucht. Zudem wird geprüft, ob eine Sichtbereichserweiterung des Phased-Array-Sensors zu einer Fehlerminimierung der Durchflussmessung führt. **Kapitel 7** vervollständigt die Arbeit mit einer abschließenden Bewertung der vorgestellten Auswerteverfahren und einer Zusammenfassung.



# Kapitel 2

## Modellierung des Sensorsystems

Das in dieser Arbeit vorgestellte Sensorsystem kombiniert das intermittierende Strahlerverhalten mit der Phased-Array-Technologie und ist damit in der Lage bestehende Messsysteme zu verbessern. Diese Erweiterung geht mit einer Komplexitätssteigerung des Sensorsystems einher, sodass eine ausführliche Modellierung und Analyse des Systems unumgänglich erscheint. Im Nachfolgenden wird daher zunächst die Funktionsweise des Sensorsystems vorgestellt und dessen Randbedingungen im Bezug auf existierende Auswerteverfahren untersucht. Zudem wird das Sensorsystem messtechnisch erfasst und in ein mathematisches Modell zur Empfangssignalgenerierung überführt. Abschließend erfolgt ein Überblick über das Sensordesign und eine ausführliche Fehleranalyse des Systems.

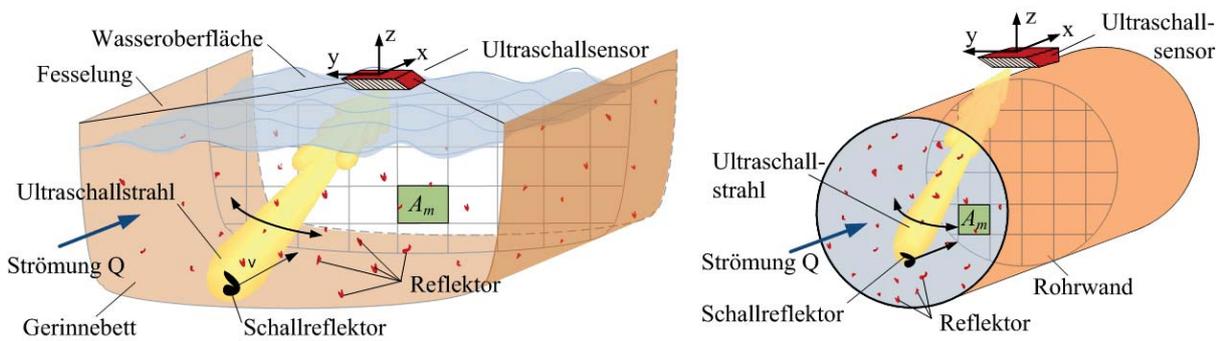
### 2.1 Grundlagen und Funktionsweise des Sensorsystems

Der Schallfrequenzbereich zwischen Hörschall und Hyperschall wird als Ultraschall bezeichnet und beansprucht das Frequenzband von oberhalb 20 kHz. Dabei breitet sich der Schall in Flüssigkeiten als Longitudinalwelle aus. Die Erzeugung der Ultraschallwellen kann mit piezoelektrischen Materialien erfolgen, mithilfe welcher die reversible Transformation von mechanischer in elektrische Energie möglich ist. Wird folglich ein elektrisches Feld an das piezoelektrische Material angelegt, verformt sich dieses Material und eine Schallwelle entsteht. Wird hingegen umgekehrt Druck auf das Material ausgeübt, führt dies zu einer elektrischen Ladung des Materials. Der Werkstoff empfängt Schallwellen und stellt diese in Form elektrischer Feldänderungen dar. Dieses Phänomen wird auch als „Piezoeffekt“ bezeichnet. Da mit dem piezoelektrischen Material sowohl gesendet, als auch empfangen werden kann, setzte sich umgangssprachlich der Begriff des aktiven Sensors durch [Kut88, LMM09].

In dieser Arbeit wird zur Durchflussmessung ein eindimensionaler Phased-Array-Sensor mit ebener Strahlenschwenkung aus der Medizintechnik verwendet. Der Sensor besteht dabei aus einem 1-3 Kompositmaterial, bestehend aus Polymer und einer piezoelektrischen Blei

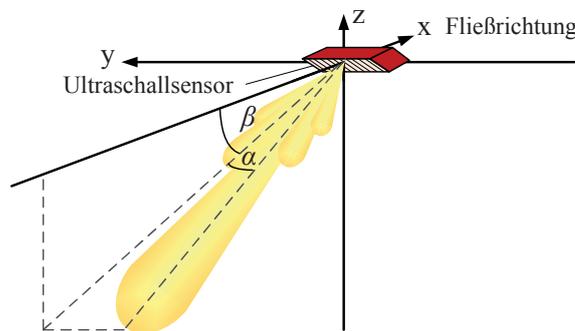
(Pb) Zirkonat Titanat (PZT) Keramik [SA91, WH09]. Die Resonanzfrequenz und damit auch die Sendefrequenz der Sensorik liegt bei 1 MHz.

Um den Funktionsnachweis der Auswerteverfahren und der Phased-Array-Technologie für ein möglichst breites Anwendungsspektrum erbringen zu können, werden im Nachfolgenden zwei Positionierungsformen des Sensors betrachtet (siehe Abb. 2.1). Dabei wird bei offenen Gerinnen oder teilgefüllten Rohrleitungen der Durchflussmesser an einem Schwimmer auf der Wasseroberfläche gefesselt, sodass dieser frei von Ablagerungen den kompletten Querschnitt sukzessiv ausleuchten kann. Für vollgefüllte Rohrleitungen ist der Sensor an der Rohrwand fixiert (vgl. Abb. 2.1 rechts) und bei Teilfüllungen an der Sohle.



**Abb. 2.1:** Grundprinzip des Ultraschallmesssystems für freie Gerinne (links) und vollgefüllte Rohre (rechts). Von Bedeutung sind die Ausrichtung des Koordinatensystems und die Querschnittsdiskretisierung zur Durchflussberechnung.

Der Sensor misst entgegen der Strömungsrichtung. Die Richtcharakteristik des Sensors in Azimuthebene wird mit  $\theta_{az}$  und in Elevationsebene mit  $\theta_{el}$  beschrieben.  $\alpha$  und  $\beta$  sind die Hauptstrahlrichtungen des Sensors. Der horizontale Einstrahlwinkel  $\alpha$  befindet sich auf der  $x$ - $y$  Ebene und der vertikale Winkel  $\beta$  auf der  $x$ - $z$  Ebene (siehe Abb. 2.2).



**Abb. 2.2:** Koordinatensystem zur Sensorpositionierung und -einstrahlung.

Zusammenfassen lässt sich die Funktionalität des Sensorsystems wie folgt: Zur Berechnung des Durchflusses muss zunächst die Kontur des Gerinnequerschnitts bekannt sein. Sofern die Ultraschallwellen an der Sohle beispielsweise durch Kies zurückgestreut werden

und nicht absorbiert oder einer Totalreflexion unterliegen, ist eine Vermessung der Kontur durchaus mit dem Phased-Array-Sensor möglich. Sind die Kanalabmaße -wie in dieser Arbeit- bekannt, genügt für Teilfüllungen eine lotrechte Füllstandsmessung im Fluid, um unter Berücksichtigung der Sedimentationen Rückschlüsse auf die Kontur schließen zu können. Die Geschwindigkeitskomponenten, der mit der Strömung schlupffrei mitfließenden Reflektoren, lassen sich aus dem Empfangssignal auf Grundlage einer Laufzeitänderung (im Zeitbereich) oder der Dopplerbestimmung (im Frequenzbereich) extrahieren. Mithilfe dieser Komponente  $v_{mess}$  und den bekannten Einstrahlwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  erschließt sich der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(x_m, y_m, z_m)$  eines jeden Flächenelements  $m$  durch die Projektion:

$$\mathbf{v}(x_m, y_m, z_m) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} (\cos(\alpha) \cos(\beta))^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{mess,m}. \quad (2.1)$$

Liegen der Querschnitt und die Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{v}(x_m, y_m, z_m)$  der Reflektoren vor, lässt sich der Durchfluss des Fluids über die Querschnittsfläche  $A$  wie folgt berechnen:

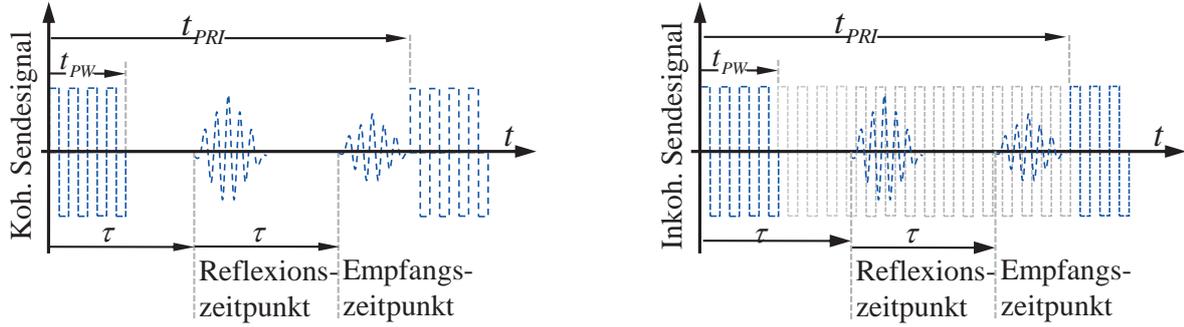
$$\text{Durchfluss } Q \text{ über } A = \iint_A \mathbf{v} \, d\mathbf{A} \approx \sum_{m=1}^M \mathbf{v}(x_m, y_m, z_m) \Delta\mathbf{A}_m. \quad (2.2)$$

In der Realität wird dieses Oberflächenintegral durch eine diskrete Methode [DR84] berechnet, wie Abb. 2.1 verdeutlicht.

## 2.2 Messeinschränkungen von Auswerteverfahren

Laufzeitmessverfahren unterliegen der Beschränkung, dass die Messentfernung durch das Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  begrenzt wird. Dopplerverfahren benötigen ein geringes Pulswiederholintervall, um eine eindeutige Bestimmung der Dopplerverschiebung zu ermöglichen. Laufzeitmessungen werden mit gepulsten Signalen durchgeführt, die nicht notwendigerweise kohärent<sup>1</sup> sein müssen. Zur Dopplerbestimmung muss die Pulsfolge kohärent sein. Soll mit dem kohärenten Pulssignal zusätzlich die Reflektorentfernung bestimmt werden, um die gemessenen Signale einem Ort zuzuordnen, müssen beide Bedingungen (Entfernungs- und Frequenzeindeutigkeit) eingehalten werden (siehe Abb. 2.3). In Bezug auf diese beiden Sendesignalformen sollen im weiteren Verlauf unter Einfluss von Parametern wie Halbwertsbreite des Strahlers in Elevationsrichtung ( $\theta_{el,3dB}$ ), Azimuthrichtung ( $\theta_{az,3dB}$ ), Einstrahlwinkel ( $\beta$ ), Pulswiederholintervall ( $t_{PRI}$ ), Pulsbreite ( $t_{PW}$ ), Pulsanzahl ( $N$ ), Sendefrequenz ( $f_0$ ) und Maximalgeschwindigkeit des Reflektors ( $v_{x,max}$ ), die Größe und Form des Messbereichs bestimmt werden.

<sup>1</sup>Kohärent: Die Signalform der Pulse zueinander weist ein kontinuierliches und durchgehendes Signalmuster auf.



**Abb. 2.3:** Inkohärente (links) und kohärente (rechts) Signalformen mit zusätzlicher Dopplermessung.

Damit eine eindeutige Messung bei inkohärenten Signalformen stattfinden kann, müssen die Echo-Signale des ersten Sendepulses stets vor dem Absenden des zweiten Pulses empfangen werden. Nur unter Einhaltung dieser Bedingung lassen sich die Echos auch eindeutig einer Entfernung und damit einem Sendepuls zuordnen. Um diese Entfernungseindeutigkeit gewährleisten zu können, muss demnach das Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  stets größer sein als die doppelte Schalllaufzeit  $\tau$  zwischen Sensor und Reflektor,  $t_{PRI} \geq 2\tau$  (siehe Abb. 2.3 links). Abzüglich der Pulsdauer  $t_{PW}$  erschließt sich die Maximalentfernung aus

$$r \leq r_{max} = \frac{(t_{PRI} - t_{PW})c_w}{2}, \quad (2.3)$$

wobei mit  $c_w$  die Schallgeschwindigkeit im Wasser mit 1480 m/s definiert ist. Zusätzlich zu dieser Bedingung ist festzuhalten, dass während des Sendevorgangs kein Empfang möglich ist, sodass eine Minimalentfernung von

$$r \geq r_{min,1} = \frac{t_{PW}c_w}{2}, \quad (2.4)$$

vorliegt.

Diese zwei Restriktionen zeigen bereits die Messbereichseinschränkung für das älteste und zugleich bekannteste „single-pulse“-Verfahren [LS04, Lhe73, Pin79]. Hierbei wird ein zusammenhängendes Signal über eine besonders lange Pulsdauer gesendet, um mit einer anschließenden diskreten Fourier-Transformation (DFT) eine möglichst gute Frequenzauflösung zu erhalten. Erst nachdem das komplette Signal empfangen wurde, wird wieder gesendet. In Abb. 2.4 links wird nun unter Verwendung der oberen Gleichungen deutlich, dass bereits bei einer Pulsdauer von 0,5 ms die Entfernung unterhalb 37 cm nicht messbar ist. Ein weiterer Nachteil bei diesen langen Sendesignalen liegt in der schlechten Raumaufklärung von  $\Delta r = c_w t_{PW}$ , weswegen dieses Verfahren in seichten Gewässern (Füllstände  $< 5$  m) kaum anzutreffen ist.

Neben dieser Minimalentfernung von Gl. 2.4 wird bei kurzer Pulsdauer die Entfernung im Wesentlichen durch den Öffnungswinkel und den Einstrahlwinkeln  $\beta$  sowie  $\alpha$

eingeschränkt. Demnach muss sich ein Reflektor für einen längeren Zeitraum innerhalb des Strahlersichtbereichs aufhalten, um genügend Pulse zu reflektieren. Die notwendige Anzahl an Pulsreflexionen  $N$  resultiert aus der Art des Auswerteverfahrens. Für eine Hauptstrahlrichtung  $\alpha = 0$  gilt die Gleichung zur Bestimmung der Minimalentfernung

$$r \geq r_{min,2} = \frac{Nv_{x,max}t_{PRI} + t_{PW}}{\sin(\beta)} \left( \tan\left(\beta - \frac{\theta_{el,3dB}}{2}\right) - \tan\left(\beta - \frac{\theta_{el,3dB}}{2}\right) \right), \quad (2.5)$$

wobei die Variable  $v_{x,max}$  die maximal anzunehmende Reflektorgeschwindigkeit im Fluid definiert.

Das weit verbreitete Kreuzkorrelationsverfahren<sup>1</sup> nutzt kurze Pulse und unterliegt damit dieser Restriktion. Um die Fließgeschwindigkeit einer Wolke aus Reflektoren zu bestimmen, genügen bereits zwei Sendepulse bzw. Pulsreflexionen. Abb. 2.4 links zeigt die Abhängigkeit des Messbereichs von der Pulsbreite und dem Pulswiederholintervall. Jedoch wird in [KTSH10, ST10] darauf hingewiesen, dass in der Realität der Erhöhung der Messentfernung, bedingt durch das Pulswiederholintervall, Grenzen gesetzt sind. Die Annahme beruht auf der Tatsache der Schallabsorption. Darüber hinaus konnte ein Zuwachs der Messfehler durch die strukturelle Änderung der Reflektorwolke über die Zeit nachgewiesen werden. In vielen Fällen, insbesondere in Kläranlagen, handelt es sich nicht um einzelne Reflektoren, sondern um Reflektorwolken, deren Struktur sich stetig ändert. Die Dekorrelation der Echos zweier aufeinanderfolgender Empfangssignale nimmt demnach mit steigendem Pulswiederholintervall ( $t_{PRI}$ ) zu. Bei einem Simulationsszenario mit einer Fließgeschwindigkeit von 3 m/s und einer Strahlerkeulenbreite von  $\frac{\theta_{el,3dB}}{2} = 3^\circ$ , sowie einem Einstrahlwinkel  $\beta = 45^\circ$  erfolgt der Fehlerzuwachs ab einer  $t_{PRI}$  von etwa 2ms (vgl. Anhang A.1). Zusammenfassend zeigt sich, dass damit das Kreuzkorrelationsverfahren einer Einschränkung der Messentfernung auf wenige Meter unterliegt.

Soll aus den Echos einer kohärenten Pulsfolge die Dopplerfrequenz bestimmt werden, so muss die Abtastfrequenz und damit das Pulsintervall dem Nyquist-Kriterium genügen. Bei einer Sendefrequenz  $f_0$  gilt:

$$f_{D,max} = \frac{2f_0v_{x,max}}{c_w} = \frac{1}{2t_{PRI}}. \quad (2.6)$$

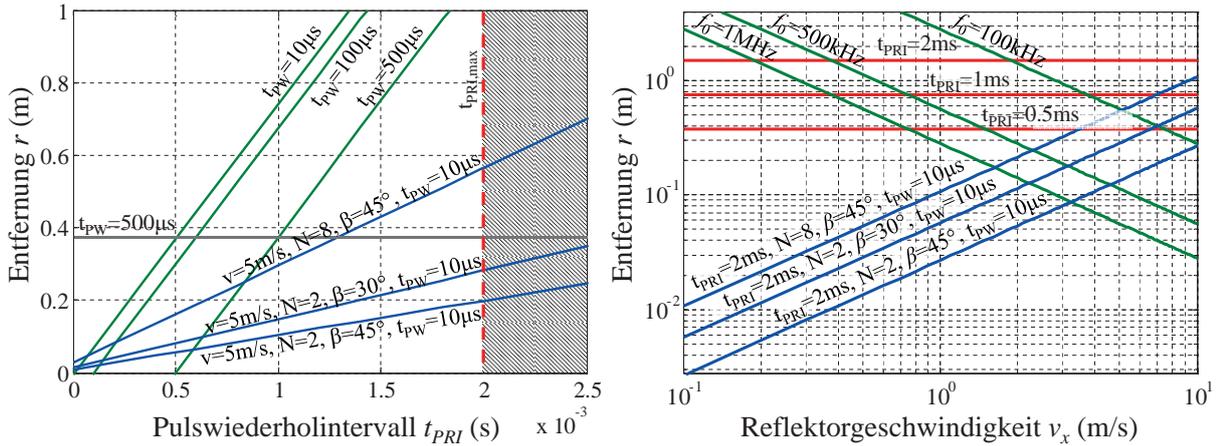
Soll also gleichzeitig aus der kohärenten Echofolge die Entfernung bestimmt werden, so erhält man mit Gl. 2.3 -unter Vernachlässigung der Pulsbreite- die Einschränkung [DZS79, BCDT91, LS84]:

$$r \leq r_{max} = \frac{c_w^2}{8f_0v_{x,max}}. \quad (2.7)$$

In Abb. 2.4 rechts ist der Messbereich für eine simulative Doppler- und Entfernungsmessung dargestellt. Hier wird deutlich, dass selbst bei einer niedrigen Sendefrequenz

<sup>1</sup>Bei der Kreuzkorrelation werden zwei Empfangssignale miteinander korreliert, um die Radialgeschwindigkeit zu bestimmen [KTSH08].

$f_0$  und einem zur Fließgeschwindigkeit passenden Pulswiederholintervall, eine eindeutige Messung nur bis zu einer geringen Messentfernung möglich ist. Auswerteverfahren wie die Kovarianzmethode nach [MR72] oder die darauf zurückzuführende „Puls-Paar“-Methode unterliegen diesen Einschränkungen. Kohärente Messverfahren sind somit auf unter 1–2 m limitiert [Lhe83], vgl. Parameter in [ZHCL96].



**Abb. 2.4:** Messrestriktionen von inkohärenten (links) und kohärenten (rechts) Signalformen. Links: Gl. 2.3 in grün, Gl. 2.4 in grau, Gl. 2.5 in blau und Dekorrelationssimulation in rot; Rechts: Gl. 2.3 in rot, Gl. 2.5 in blau und Gl. 2.6 in grün.

Um diese gravierenden Nachteile der Messbereichsrestriktion zu umgehen, wird vorgeschlagen, die Sendesignale zu codieren. Dadurch erweitert sich der Entfernungsbereich und die für die Geschwindigkeitsbestimmung erforderliche hohe Pulsfrequenz kann trotzdem eingehalten werden. In Kap. 3.2 wird ein Codierverfahren auf der Basis des Frequency Hopping Spread Spectrum (FHSS) vorgestellt. Weitere Codier-Möglichkeiten sind die Phasen-Codierung [DZ93, SO93], sowie das aus der Radartechnik bekannte staggered pulse train-Verfahren nach [Zrn77, SZ00, SZ02] oder [ZM85, DZS79], welche jedoch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

## 2.3 Modellierung des Sensorsystems

In diesem Kapitel wird ein mathematisches Modell des Sensorsystems und der Messumgebung erstellt. Basierend auf diesem Modellansatz findet neben der Identifizierung von Systemeigenschaften auch die Generierung von Empfangssignalen statt, um Auswerteverfahren zu entwickeln und zu bewerten. Das System ist in folgende Einzelmodelle aufgeteilt:

- Strömungsmodell,
- Elektromechanische Übertragungsfunktion,

- Schallausbreitungsmodell,
- Schallabsorptionsmodell und
- Schallreflexionsmodell.

In Abb. 2.5 ist der Signalflussverlauf dargestellt. Im Strömungsmodell wird die Geometrie und das Rechengitter des zu simulierenden Kanals abgebildet. Für eine gegebene Einlaufgeschwindigkeit  $\bar{v}_{in}$  werden die resultierenden Strömungslinien<sup>1</sup> ( $f(x, y, z, k)$ ) und damit Repräsentanten einer Reflektorspur zur Reflexionspunktbestimmung berechnet. Sind Informationen über Distanz ( $r_{ref}$ ) und Winkel ( $\alpha_s, \beta_s$ ) zwischen Sensor und Reflektor zum Zeitpunkt der Schallreflexion ( $k$ ) bekannt, lässt sich das Sendesignal  $s_0(k)$  über die elektromechanische Wandlung des Piezos in Schalldruck überführen und über die entsprechenden Schallausbreitungsmodelle bis hin zur Reflexion berechnen. Zur Generierung der Echosi-

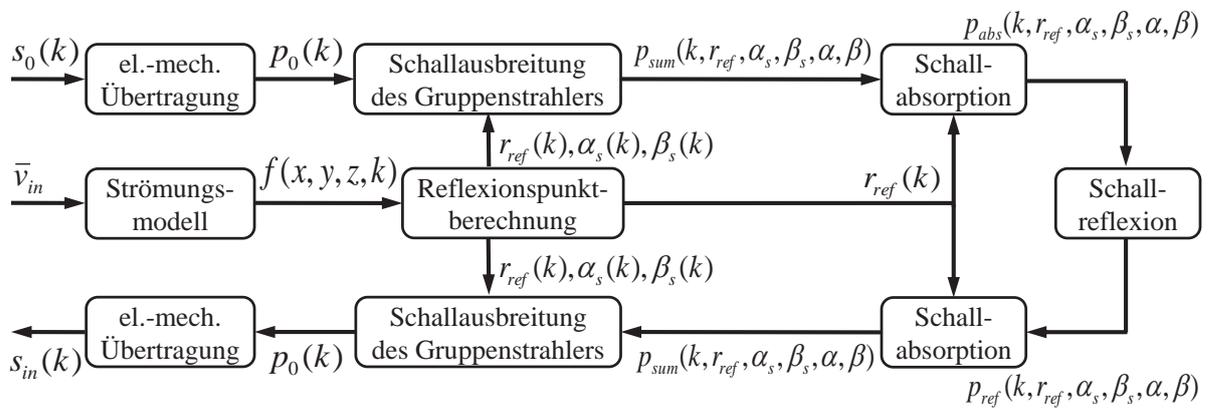


Abb. 2.5: Modellstruktur.

gnale am Sensor müssen die Einzelmodelle von Schallabsorption, Schallausbreitung und elektromechanischer Wandlung ein weiteres Mal in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden, um das Echosignal  $s_{in}(k)$  zu erhalten.

### 2.3.1 Strömungsmodell

Die Notwendigkeit vollständiger Informationen über die Strömung ist bei der Durchflussmessung mit einer Geschwindigkeitsprojektion unabdingbar. Mit zunehmenden Turbulenzen steigen die Messfehler, sodass zur Kompensation mehr und mehr Sekundärinformationen über die Strömungseigenschaften erforderlich werden. Neben dem Einwirken auf Störgrößen, benötigt die Messung zur Lösung von Gl. 2.2 ein mathematisches Strömungsprofil über den kompletten Kanalquerschnitt. Um an diese Strömungsinformationen zu gelangen, werden CFD (Computational Fluid Dynamics) Simulationen mit der Software FLUENT<sup>®</sup> durchgeführt. Das dabei aufgestellte Modell dient letztlich auch zur Generierung von Strömungslinien, welche zur Empfangssignalgenerierung notwendig sind.

<sup>1</sup>Der Verlauf der Strömungslinien erfolgt dabei tangential zu den Geschwindigkeitsvektoren.

Das instationäre Strömungsmodell für inkompressible Flüssigkeiten wird vollständig über die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichung beschrieben [Lj11]. Die Kontinuitätsgleichung stellt dabei die Erhaltung der Massen dar und ist durch

$$\nabla \mathbf{v}_{ist} = \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

definiert [Sie00]. D.h. die Flüssigkeit, welche in ein Volumenelement hineinfließt muss auch wieder herausfließen, sodass die Kontinuität der gesamten Masse erhalten bleibt<sup>1</sup>. Ausgangspunkt der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung bildet der Impulserhaltungssatz und somit die Tatsache, dass die Summe aller Impulse eines abgeschlossenen Systems gleich Null ist. Zusammen mit der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Massenelement ( $dm = \varrho_0 dV$ ) gilt:

$$dF = dF_R + dF_p + dF_g = dm \frac{d\mathbf{v}_{ist}}{dt} = \varrho_0 dV \frac{d\mathbf{v}_{ist}}{dt}. \quad (2.9)$$

Wird die Gleichung durch die Kräfte eines viskosen Fluids für ein Volumenelement  $dV$  ersetzt sowie dessen substantielle Beschleunigung, resultiert die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$\varrho_0 dV \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{v}_{ist}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{ist} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{ist} \right)}_{\text{subs. Beschleunigung } \frac{d\mathbf{v}_{ist}}{dt}} = \underbrace{\eta \Delta \mathbf{v}_{ist} dV}_{\text{Reibungskraft } dF_R} - \underbrace{\mathbf{grad} p dV}_{\text{Druckkraft } dF_p} + \underbrace{\varrho_0 \mathbf{g} dV}_{\text{Schwerkraft } dF_g} \quad (2.10)$$

$$\varrho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_{ist} \cdot \nabla) \right) \mathbf{v}_{ist} = -\mathbf{grad} p + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v}_{ist}, \quad (2.11)$$

wobei  $\eta$  die dynamische Viskosität des Fluids beschreibt. Für  $\eta = 0$  und folglich eine ideale Flüssigkeit, reduziert sich die Gleichung um den Reibungsterm zur Euler-Gleichung und somit zu einer vereinfacht lösbaren Differentialgleichung 1.Ordnung. Der Vektor  $\mathbf{g}$  erschließt sich aus dem Gefällewinkel des Gerinnes  $\xi$  und der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ :

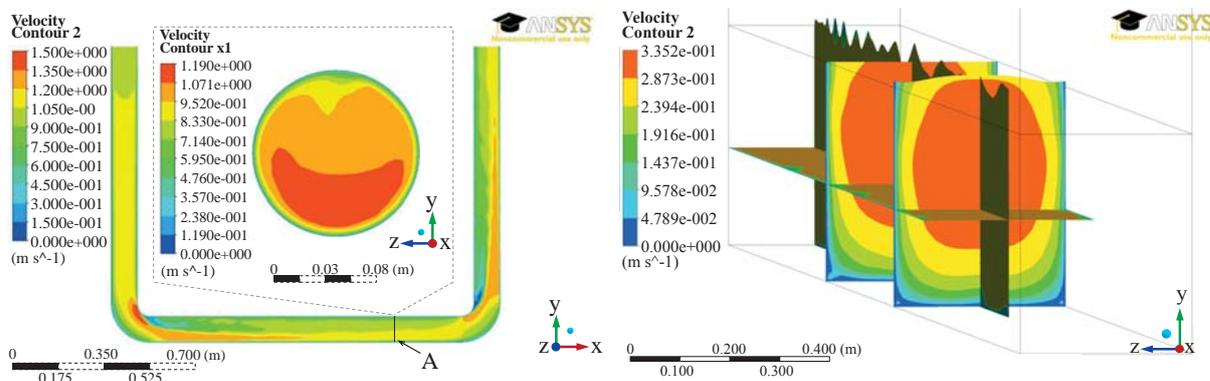
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g \sin(\xi) \\ 0 \\ -g \cos(\xi) \end{bmatrix}.$$

Die substantielle Beschleunigung setzt sich aus einer zeitlichen Änderung  $\frac{\partial \mathbf{v}_{ist}}{\partial t}$  der Geschwindigkeit am selben Ort und der Konvektionsbeschleunigung  $(\mathbf{v}_{ist} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{ist}$  -also der räumlichen Änderung der Geschwindigkeit- zusammen [SS07]. Die ausführliche Schreibweise der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung ist im Anhang unter Kap. A.2 dargestellt. Mit Gl. 2.8 und 2.11 sind insgesamt vier Differentialgleichungen für vier unbekannte Variablen

<sup>1</sup>Dichte  $\varrho_0 = const$ , folglich ist  $dm \propto dV$  vgl. Gl. 2.9.

-die Geschwindigkeitskomponenten ( $v_{ist,x}, v_{ist,y}, v_{ist,z}$ ) und den Druck ( $p$ )- beschrieben, die ein geschlossenes System bilden.

Die Generierung des Strömungskanals, dessen Rechengitter und das numerische Lösen des Strömungsmodells erfolgen mithilfe der Software FLUENT<sup>®</sup>. Es werden ein vollgefülltes Rohr mit einem Durchmesser von 100 mm und ein rechteckiger, offener Kanal mit den Abmaßen 350×455 mm (b×h) simuliert. Diese Kanalformen werden zur Verifizierung der Strömungsprüfstände nachgebildet. Basierend auf den resultierenden Geschwindigkeitsvektorfeldern lassen sich nun die ortsabhängigen Strömungsprofile für unterschiedliche Einlaufgeschwindigkeiten bestimmen. In Abb. 2.6 links ist exemplarisch das simulierte Geschwindigkeitsprofil einer Rohrströmung in Fließrichtung für die Einlaufgeschwindigkeit von 1 m/s dargestellt und rechts die einer Kanalströmung mit der Einlaufgeschwindigkeit von 0,3 m/s.

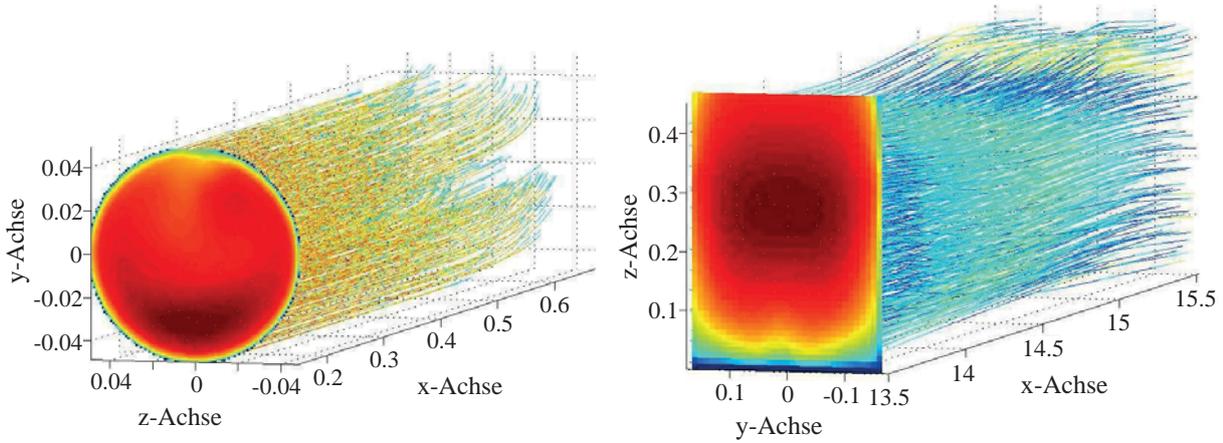


**Abb. 2.6:** Links: Vollgefülltes Rohr und dessen Geschwindigkeitsverteilung bei  $\bar{v}_{in} = 1$  m/s; Rechts: Offener Kanal und dessen Geschwindigkeitsverteilung bei 17 m und 21 m nach dem Einlauf mit  $\bar{v}_{in} = 0,3$  m/s.

Zusätzlich zu diesen Profilen ist auf Grundlage des Geschwindigkeitsfeldes die Generierung von Strömungslinien  $f(x, y, z, k)$  möglich. Für die nachfolgende Signalmodellierung werden diese zeitlich äquidistant abgetasteten Strömungslinien als Stromlinien von Reflektoren interpretiert. In Abb. 2.7 sind die Strömungslinien für einen Kanalabschnitt beider Formen dargestellt.

### 2.3.2 Reflexionspunktberechnung

Um die Stromlinien der Reflektoren aus der CFD-Simulation in die Signalflosskette einzubinden, wird in diesem Kapitel ein Verfahren zur Synchronisierung der Daten vorgestellt. Während aus dem Strömungsmodell die Positionen einer Stromlinie für ein kontinuierliches Zeitintervall  $k$  gegeben sind, müssen die Positionen bei der Berechnung der Schallausbreitung bzw. Schallabsorption zum Reflexionszeitpunkt bekannt sein. Bewegen sich die Reflektoren entlang einer Strömungslinie in Sensorrichtung, nimmt auch die Distanz zwischen Reflektor und Sensor schrittweise ab. Äquivalent zur Distanzabnahme reduziert



**Abb. 2.7:** Links: Strömungslinien des vollgefüllten Rohres bei  $\bar{v}_{in} = 1$  m/s; Rechts: Strömungslinien des offenen Kanals bei  $\bar{v}_{in} = 0,3$  m/s.

sich auch die Schalllaufzeit  $\tau$  mit jedem weiteren Abtastpunkt, sodass das Sendesignal zu jedem Abtastpunkt eine Phasenverschiebung erfährt. Diese Eigenschaft ist im Frequenzbereich auch als Dopplereffekt bekannt. Um nun die Positionen entlang der Strömungslinie  $f(x, y, z, k)$  zum Reflexionszeitpunkt zu bestimmen, wird im Folgenden zunächst das Gleichungssystem zur Berechnung der Schalllaufzeit vorgestellt. Basierend auf dieser Information lassen sich anschließend Aussagen über Winkel und Distanz zwischen Reflektor und Sensor treffen.

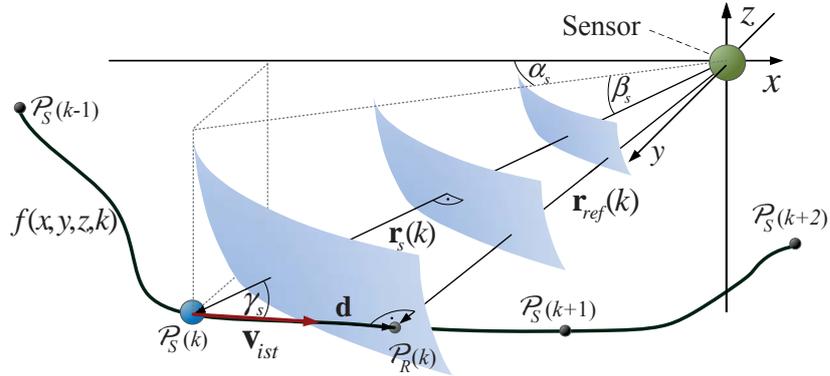
Gegeben sei eine Strömungslinie aus einer Reihe von Reflektorpositionen  $f(x, y, z, k) = [\mathcal{P}_S(k), \mathcal{P}_S(k+1), \dots, \mathcal{P}_S(K)]$  zum Sendezeitpunkt  $k, k+1, \dots, K$ . Die Schalllaufzeit ist bis zur Reflexionsposition  $\mathcal{P}_R$  zu bestimmen. Das Ultraschallsignal breitet sich mit einer konzentrischen Wellenfront aus (vgl. Abb. 2.8). Der Reflektor bewegt sich mit seinem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{ist} = (v_{ist,x}, v_{ist,y}, v_{ist,z})^T$  zwischen  $\mathcal{P}_S(k)$  und  $\mathcal{P}_R(k)$  näherungsweise geradlinig. Da sich der Sensor im Nullpunkt befindet, beschreibt der Ortsvektor  $\mathbf{r}_s = (r_{s,x}, r_{s,y}, r_{s,z})^T$  die Reflektorposition. Ziel ist es, abhängig von der Geschwindigkeit des Reflektors  $\mathbf{v}_{ist}$  und der Schallgeschwindigkeit in Wasser  $c_w$ , den Reflexionsort bzw. die Laufzeit  $\tau$  bis zum Reflexionszeitpunkt zu bestimmen.

Für das in Abb. 2.8 dargestellte Dreieck gilt:

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{r}_{ref}\|_2)^2 &= (\|\mathbf{r}_s\|_2)^2 - 2 \cdot \|\mathbf{r}_s\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_2 \cdot \cos(\gamma_s) + (\|\mathbf{d}\|_2)^2 \\ (\|\mathbf{r}_s\|_2)^2 - (\|\mathbf{r}_{ref}\|_2)^2 - 2 \cdot \|\mathbf{r}_s\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_2 \cdot \cos(\gamma_s) + (\|\mathbf{d}\|_2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der abgebildete Winkel  $\gamma_s$  resultiert aus der Beziehung:

$$\cos(\gamma_s) = \frac{-\mathbf{r}_s^T \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{r}_s\|_2 \cdot \|\mathbf{d}\|_2}. \quad (2.13)$$



**Abb. 2.8:** Geometrischer Zusammenhang der Teilchenbewegung und des Reflexionspunktes;  $x$  = Fließrichtung,  $y$  = Kanal-/Rohrbreite,  $z$  = Kanal-/Rohrhöhe.

Ersetzt man  $\|\vec{\mathbf{r}}_{ref}\|_2$  durch  $\tau \cdot c_w$ , sowie  $\|\mathbf{d}\|_2$  durch  $\tau \cdot \|\mathbf{v}_{ist}\|_2$ , so ergibt sich:

$$0 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 - \tau (2 \cdot \|\mathbf{r}_s\|_2 \cdot \|\mathbf{v}_{ist}\|_2 \cdot \cos(\gamma_s)) + \tau^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c_w^2). \quad (2.14)$$

Man erhält eine positive Lösung für  $\tau$  und kann damit den Reflexionsvektor  $\mathbf{r}_{ref}(k) = \mathbf{r}_s(k) + \tau \mathbf{v}_{ist}(k)$  bestimmen.

Gl. 2.14 zur Schalllaufzeitberechnung gilt für eine geradförmige Bewegungsrichtung des Reflektors. Ist die Schalllaufzeit jedoch größer als das Abtastintervall der Strömungslinie, bewegt sich der Reflektor zwischen  $\mathcal{P}_S(k)$  und  $\mathcal{P}_R(k)$  auf einer gekrümmten Bahn. Der Reflexionspunkt  $\mathcal{P}_R(k)$  entlang der Strömungslinie wird dann iterativ ermittelt. Eine mögliche Iterationsroutine wird im Anhang unter Kap. A.3 vorgestellt. Unter Kenntnis sämtlicher Reflexionsvektoren  $\mathbf{r}_{ref}(\cdot)$ , lassen sich die notwendigen Parameter für die nachfolgende Schallausbreitung des Gruppenstrahlers und des Schallabsorptionsmodells ableiten. Demnach resultieren aus den Vektoren  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)^T$  und  $\mathbf{r}_{ref,xy} = (r_{ref,x}, r_{ref,y}, 0)^T$  die Reflektorwinkel aus den Vektorprojektionen:

$$\alpha_s(k) = \frac{-\mathbf{e}_x^T \cdot \mathbf{r}_{ref,xy}}{\|\mathbf{e}_x\|_2 \cdot \|\mathbf{r}_{ref,xy}\|_2} \quad (2.15)$$

$$\beta_s(k) = \frac{\mathbf{r}_{ref,xy}^T \cdot \mathbf{r}_{ref}}{\|\mathbf{r}_{ref,xy}\|_2 \cdot \|\mathbf{r}_{ref}\|_2}.$$

### 2.3.3 Elektromechanische Übertragungsfunktion

Eine weitere Kennlinie zur Charakterisierung des stationären Schallfeldes ist der Schalldruck  $p$  längs der Membranorthogonale (Mittelachse) des Piezostrahlers. Je nach Entfernung zum Piezostrahler ( $x$ ) untergliedert sich die Schalldruckkennlinie in ein Nah- und Fernfeld. Während sich im Fernfeld die Schalldruckamplitude umgekehrt proportional zur Distanz

zum Strahler reduziert und somit dem Abstandsgesetz einer Kugelwelle genügt, finden im Nahfeld Interferenzen von Schalldruckwellen statt. Vergleichbar mit einer ebenen Welle nach Durchlaufen einer kreisförmigen Lochblende, verhält sich auch das Schallfeld einer kreisförmigen Kolbenmembrane gleichen Radiuses ( $r$ ) [Daß02]. Dabei setzt sich der Schalldruck aus einer senkrecht zur Membrane ausbreitenden „ebenen Welle“<sup>1</sup> und einer vom Rand der Kolbenmembrane ausgehenden „Beugungswelle“<sup>2</sup> zusammen. Beide Wellen besitzen die gleiche Amplitude jedoch unterschiedliche Phasen, sodass konstruktive und destruktive Interferenzen im Nahbereich auftreten. Nach [LSW09] und [Mös09] liegt bei einem Kolbenstrahler der Übergang von Nah- auf Fernfeld bei einer Entfernung von

$$l_N = \frac{r^2}{\lambda} = \frac{d^2}{4\lambda} \quad (2.16)$$

vor. Da in dieser Arbeit die Membrane rechteckig ist und sich im Verhältnis von Länge ( $l_P$ ) zu Breite ( $b_P$ ) unterscheidet, ergeben sich zwei sog. Nahfeldlängen  $l_N$ . Aus der Membranbreite der 16 Elemente ( $d = 11,2$  mm) resultiert ein  $l_N$  von 21 mm und aus der Länge ( $d = 22,4$  mm) ein  $l_N$  von 85 mm. Basierend auf einer Worst-Case-Betrachtung tritt folglich das letzte Schalldruckmaximum ab einer Nahfeldlänge von 85 mm auf.

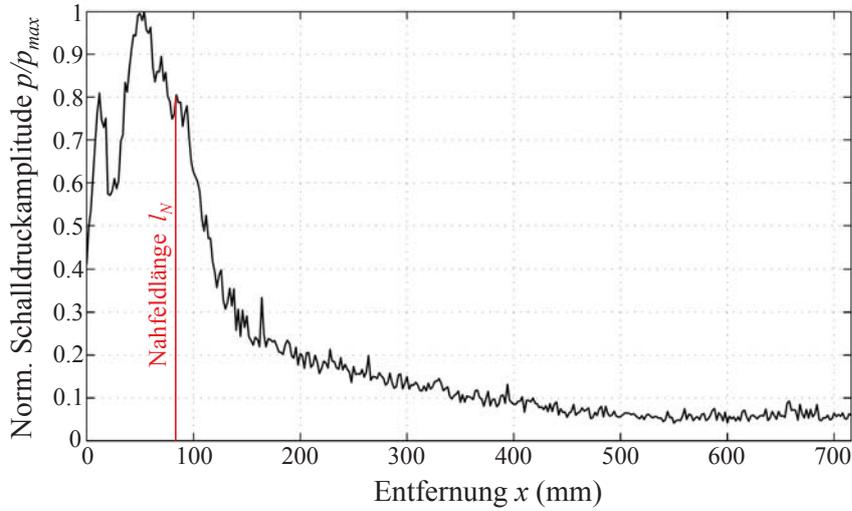
Der messtechnische Nachweis ist in Abb. 2.9 dargestellt. Deutlich zu sehen sind die Interferenzmuster im Nahbereich und das Verhalten im Fernbereich ab einer Entfernung von 85 mm. Die Fernfeldkennlinie wird nicht nur durch die Schallausbreitung einer Kugelwelle, sondern auch durch die zusätzliche Überlagerung von Absorptionsverlusten definiert. Unter Einbeziehung von Messungen findet in Kap. 2.3.4 und 2.3.5 eine ausführliche, mathematische Beschreibung des Schallausbreitungsverhaltens statt. Aufgrund der hohen Komplexität des Nahfeldes, wurden sowohl die Messungen zur Richtcharakteristik, als auch die Erhebung der empirischen Daten zur Sensormodellierung und die Anwendung der Auswerteverfahren im Fernfeld durchgeführt. Diese Betrachtung ist nach [Mös09] durchaus zulässig, da ab dieser Nahfeldlänge sämtliche Fernfeldkriterien  $l_N \gg l_P$ ,  $\frac{l_N}{l_P} \gg \frac{l_P}{\lambda}$  und  $l_N \gg \lambda$  erfüllt sind.

Um unter Wasser den Schalldruck als Ausgangssignal am Piezo-Kristall messen zu können, kommt ein Hydrophon mit Verstärker zum Einsatz. Das Hydrophon misst bei der Nahfeldlänge ( $l_N$ ) den Schalldruck ( $\tilde{p}_P$ ) im Wasser und setzt diesen in ein Spannungssignal ( $s_H$ ) um. Diese Spannung wird anschließend über einen Breitbandverstärker erhöht und gemessen. Weil die Schalldruckmessung mit dem Hydrophon bei der Nahfeldlänge stattfindet, muss zudem die kanalbedingte Totzeit bis zum Hydrophon aus der Messung eliminiert werden. Die komplette Signalflosskette zum Aufzeichnen der Ausgangssignale ist in Abb. 2.10 dargestellt.

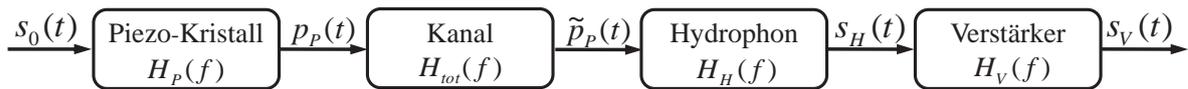
Bei bekannten Übertragungsverhalten von Hydrophon (vgl. Anhang Kap. A.5) und Messverstärker (60 dB im Frequenzbereich 1 Hz-10 MHz) sowie Totzeit lässt sich aus dem gemessenen Gesamtfrequenzgang  $H_{Ges}(f)$  die Übertragungsfunktion des Piezos berechnen:

<sup>1</sup>Mit  $f_0$  für die Sendefrequenz gilt  $p(x) = \varrho_0 c_w e^{-jx \frac{2\pi f_0}{c_w}}$ .

<sup>2</sup>Mit  $f_0$  für die Sendefrequenz gilt  $p(x) = \varrho_0 c_w e^{-j \frac{2\pi f_0}{c_w} \sqrt{r^2 + x^2}}$ .



**Abb. 2.9:** Gemessene Schalldruckamplitude entlang der Mittelachse  $x$  des Prototypen Phased-Array-Sensors.

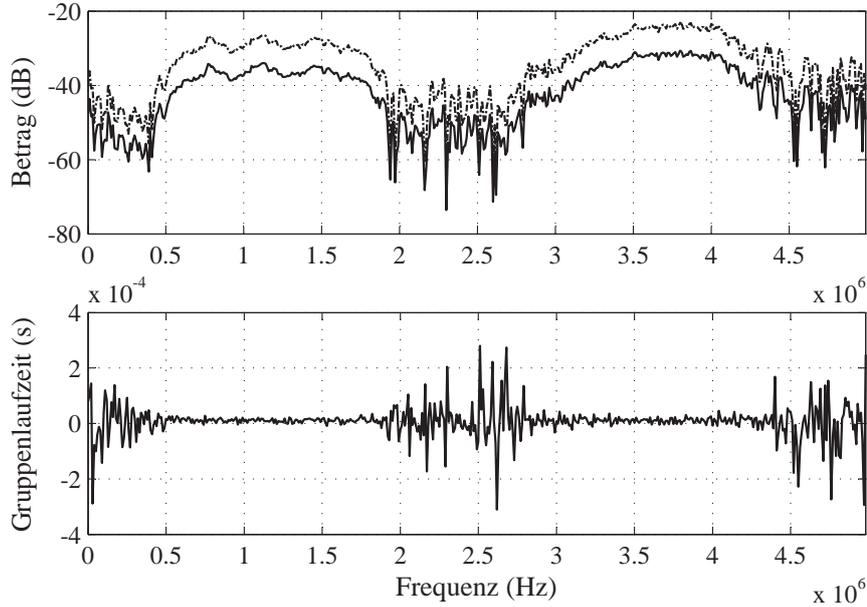


**Abb. 2.10:** Messkette zur Identifikation des Frequenzganges eines Piezo-Kristalls. Der Kanal wird zunächst als Totzeitglied betrachtet und in Kap. 2.3.4 und 2.3.5 um die Effekte der Schallausbreitung und Dämpfung ergänzt.

$$H_{Ges}(f) = H_P(f)H_{tot}(f)H_H(f)H_V(f) = \frac{S_V(f)}{S_0(f)}. \quad (2.17)$$

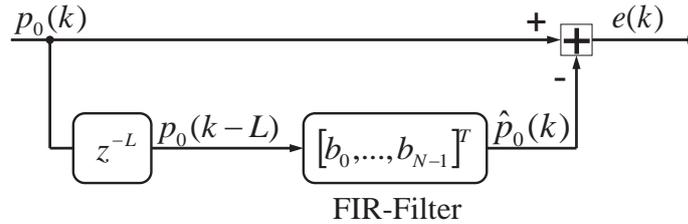
Die druckempfindliche Fläche des Hydrophons ist mit  $A_H = 7,0686 \text{ mm}^2$  bekannt, die des Einzelstrahlers mit  $A_P = 16,8 \text{ mm}^2$ . Folglich müssen die gemessenen Druckwerte auf die tatsächliche Wirkfläche eines Einzelstrahlers des Piezo-Kristalls gemäß  $|H_0(f)| = |H_P(f)|(A_P/A_H)$  normiert werden. Das Verhalten eines einzelnen Piezo-Kristalls ( $H_0(f) = \mathcal{F}\{p_0(t)\}/\mathcal{F}\{s_0(t)\}$ ) ist in Abb. 2.11 dargestellt, wobei zur Verdeutlichung der Phasenlinearität im Diagramm die Gruppenlaufzeit ( $d\varphi/df$ ) aufgetragen ist. Neben den zwei Resonanzstellen bei ca. 1 MHz und 3,5 MHz weist der Frequenzgang in den Bereichen zwischen 0,4 - 1,9 MHz und 2,7 - 4,3 MHz einen phasenlinearen Verlauf auf.

Aufgrund der Phasenlinearität im Arbeitspunkt (1 MHz), ist es naheliegend diesen dargestellten Frequenzgang  $H_0(f)$  über einen FIR-Filter (Finite Impulse Response) nachzubilden. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Filterkoeffizienten besteht in der inversen diskreten Fourier-Transformation IDFT des Frequenzganges, um die Impulsantwort des Piezo-Kristalls  $p_0(k)$  zu erhalten. Die diskreten Amplitudenwerte der Impulsantwort sind



**Abb. 2.11:** Zurückgerechneter Frequenzgang eines einzelnen Piezo-Kristalls; (-) ohne Flächennormierung =  $H_P(f)$ , (-.) mit Flächennormierung =  $H_0(f)$ .

die Filterkoeffizienten. Neben diesem Filterdesign lassen sich die Koeffizienten auch rekursiv berechnen. Dabei wird gemäß Abb. 2.12 das Ziel verfolgt, die Differenz  $e(k)$  zwischen Impulsantwort des Piezo-Kristalls  $p_0(k)$  und dem Ausgangssignal der Systemnachbildung  $\hat{p}_0(k)$  zu minimieren. Das Verfahren ist aus der linearen Prädiktion bekannt und lässt sich an einem einstufigen Vorwärtsprädiktor verdeutlichen.

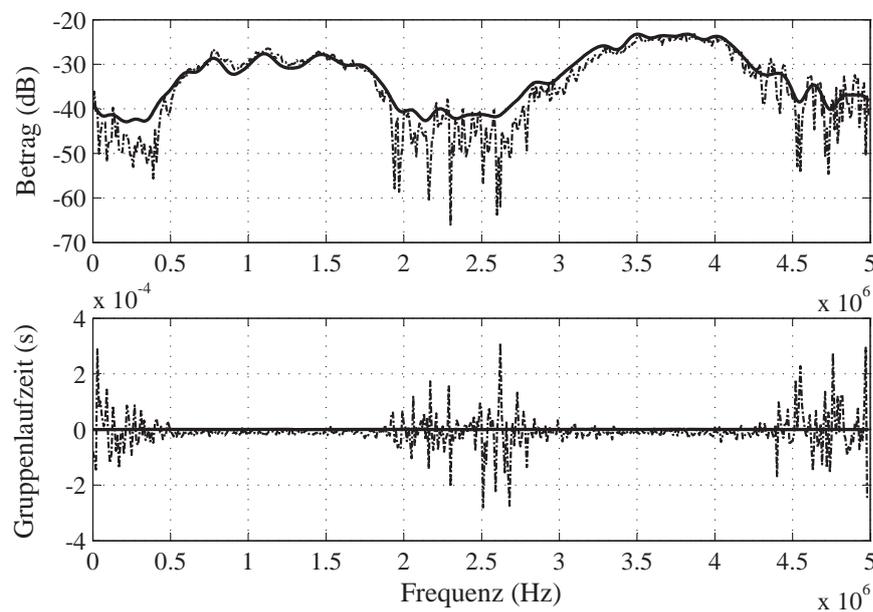


**Abb. 2.12:** Einstufiger Vorwärtsprädiktor also  $L = 1$  mit  $e(k)$ =Prädiktionsfehler,  $\hat{p}_0(k)$ =Schätzwert,  $p_0(k)$ =Impulsantwort.

Die Minimierung des Fehlers  $e(k) = p_0(k) - \hat{p}_0(k)$  über das mittlere Fehlerquadrat und die anschließende partielle Ableitung nach den Filterkoeffizienten, führt zu einer Optimallösung im Sinne der Wiener-Hopf-Gleichung (Herleitung siehe Anhang Kap.A.6):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{b}} \mathbb{E} [e^2(k)] &= 2\mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} + 2\mathbf{r}_{pp}(-L) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{opt} &= \mathbf{R}_{pp}^{-1} \mathbf{r}_{pp}(-L). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Zur Berechnung der optimalen Filterkoeffizienten wird in dieser Arbeit der Levinson-Durbin-Algorithmus auf die Problemstellung angewendet. Die ausführliche Herleitung dieses rekursiven Algorithmus, sowie dessen schrittweise Lösung nach [HS04, Wen05] sind im Anhang unter Kap. A.7 erläutert. Nachdem die optimalen Filterkoeffizienten gefunden sind, lassen sich diese mithilfe der Faltung zu einem FIR-Filter vom Typ 1<sup>1</sup> zusammensetzen, sodass die oben aufgestellte Bedingung der Phasenlinearität erfüllt ist. Das Ergebnis der Levinson-Durbin-Rekursion ist in Abb. 2.13 dargestellt. Hier sind die gemessene Übertragungsfunktion des Piezo-Strahlers und der Frequenzgang des nachgebildeten FIR-Filters mit der Koeffizientenlänge  $N = 63$  ersichtlich.



**Abb. 2.13:** (-.-) gemessener Frequenzgang des Piezo-Strahlers; (-) approximierter Frequenzgang des FIR-Filters der Länge  $N = 63$  aus der Levinson-Durbin-Rekursion.

### 2.3.4 Schallausbreitungs- und Phased-Array-Modellierung

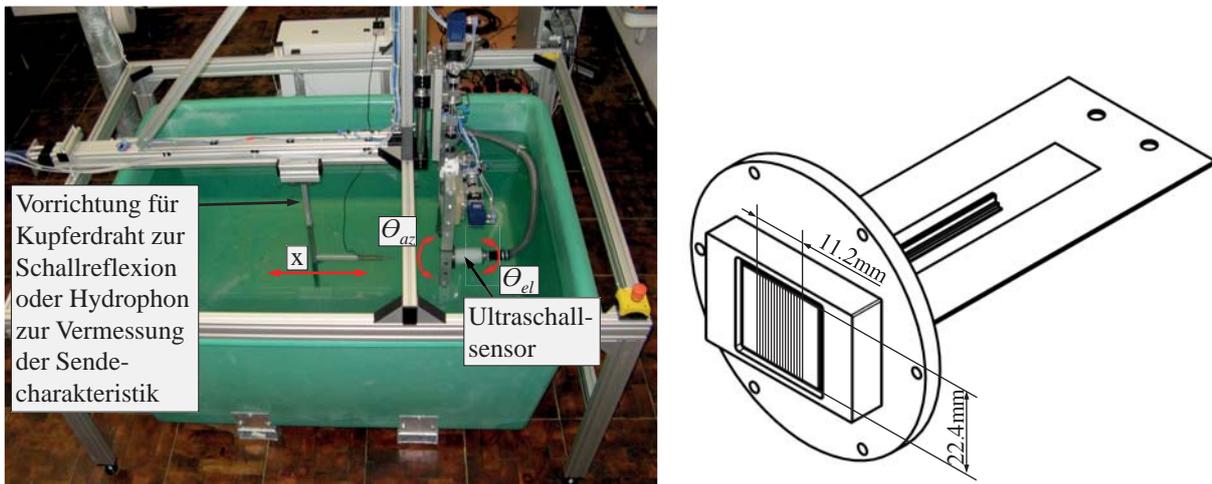
Zentraler Bestandteil des Sensorkonzeptes ist die Phased-Array-Technologie. Durch phasenselektive Ansteuerung der Einzelstrahler lässt sich die Schallwellenfront des Gruppenstrahlers und damit die Intensität des Schallfeldes im Fluid gezielt in diverse Richtungen lenken. Die Kenntnis dieser winkelabhängigen Intensitätsverteilung ist ein wesentlicher Grundbaustein in der Modellierung und Entwicklung des Sensorsystems und erfolgt mit einem dafür entwickelten Messaufbau.

Der Aufbau ist in der Lage den Sensor in Azimuth- und Elevationsrichtung zu verstellen. Mithilfe eines Hydrophons wird der abgestrahlte Schall empfangen und damit die gesendete

<sup>1</sup>Der Typ 1 FIR-Filter zeichnet sich durch eine ungerade Anzahl und achsensymmetrische Filterkoeffizienten aus (vgl. [KK09]).

Richtcharakteristik vermessen. Um die räumliche Sende- und Empfangscharakteristik zu vermessen, wird üblicherweise ein senkrecht gespannter Draht mit dem Durchmesser 0,5 mm als Reflektor eingesetzt. Abb. 2.14 links zeigt den Messaufbau. Beim Aufzeichnen der winkelabhängigen Schallintensität sendet der Sensor mit einer Sendefrequenz von 1 MHz zyklisch kurze Pulse aus. Diese Pulszüge werden anschließend entweder vom Hydrophon oder nach Reflexion am Draht wieder vom Sensor empfangen und verstärkt. Die Messung wird schrittweise in Azimuth- und Elevationsrichtung erhöht, um eine vollständige Richtcharakteristik zu erhalten.

Die Membrane des Sensorprototyps hat in der Elevationsebene eine Länge von  $l_P = 22,4 \text{ mm}$  und jedes Einzelement in der Azimuthebene eine Breite von  $b_P = 0,7 \text{ mm}$ . Wie in Abb. 2.14 rechts ersichtlich, ergibt sich somit bei Ansteuerung aller 16 Einzelemente eine Membranbreite von 11,2 mm.



**Abb. 2.14:** Links: Prüfstand zur Vermessung der sende- und empfangsseitigen Schallcharakteristik. Rechts: Abmaße des Phased-Array-Prototypensensors.

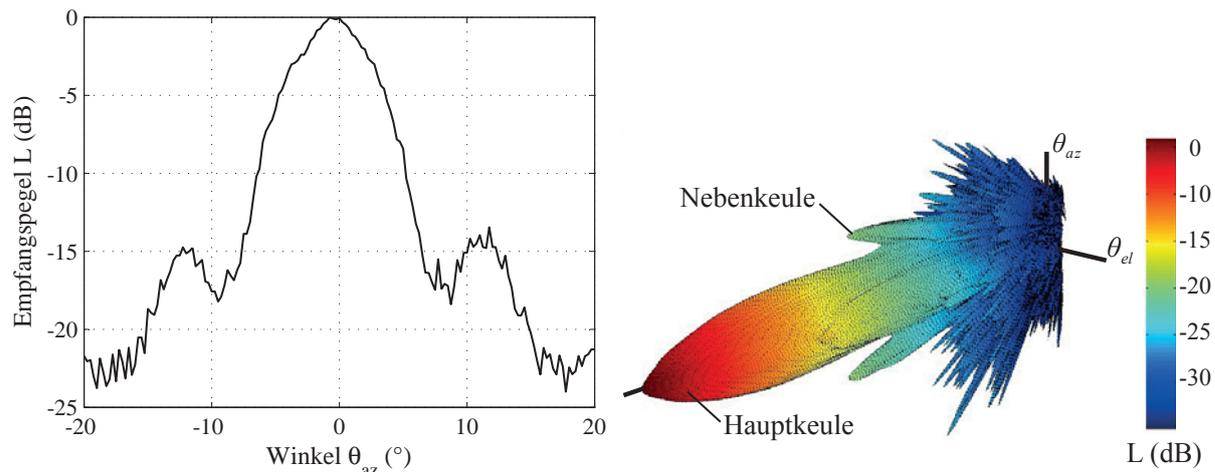
Werden diese 16 Elemente des Gruppenstrahlers phasenselektiv über die Steuereinheit angesteuert, ist eine Fokussierung der Schallintensität  $I$  in die gewünschten Richtungen der Azimuthebene möglich. Da sich die Intensität aus dem Produkt Schalldruck  $p$  und Schallschnelle  $v_0$  ergibt und im Fernfeld beide Feldgrößen bei fortschreitenden, ebenen Wellen mit  $p = \rho_0 c_w v_0$  in Phase zueinander liegen, gilt:

$$I(t) = p(t)v_0(t) = \frac{p^2(t)}{\rho_0 c_w} = \frac{p^2(t)}{Z_0}. \quad (2.19)$$

Das Produkt aus der Schallgeschwindigkeit  $c_w$  und der Dichte  $\rho_0$  bildet den Wellenwiderstand bzw. die Kennimpedanz des Mediums mit  $Z_0$  und stellt eine häufig verwendete Näherung zur Beschreibung der Übertragungseigenschaften von ebenen Wellen dar. Wird nun der Wellenwiderstand als mediumabhängige Konstante angenommen, erschließt sich die Intensität im Schallfeld durch das Erfassen des Schalldrucks. Der Schalldruck lässt sich

messtechnisch über das Hydrophon oder nach Reflexion wieder über den Gruppenstrahler empfangen. Sowohl das Hydrophon, als auch der Gruppenstrahler wandeln letztlich über den elektromechanischen Piezoeffekt den Druck in Spannung um und führen die Empfangssignale einem Breitbandverstärker zu.

In Abb. 2.15 ist die gesendete Richtcharakteristik des Ultraschall-Phased-Array-Strahlers für eine Phasenauslenkung von  $0^\circ$  in Azimuth- und Elevationsrichtung als Schnittbild und in dreidimensionaler Form dargestellt.



**Abb. 2.15:** Schnittbild links und dreidimensional abgestrahlte Phased-Array-Richtcharakteristik rechts in  $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_{max}}\right)$  bei einer Phasenansteuerung von  $0^\circ$ . Mit  $L$  ist der Schallpegel definiert.

In Tab. 2.1 sind die wichtigsten Eigenschaften der ausgestrahlten Richtcharakteristikmessung für die Phasenwinkel  $0^\circ - 40^\circ$  in Azimuthorichtung und den nicht schwenkbaren Winkel in Elevationsrichtung tabellarisch für den Prototypensensor zusammengefasst. Der Abstand zwischen Reflektor und Sensor bzw. Hydrophon und Sensor beträgt bei der Messung stets 0,2 m. Die jeweiligen Messungen hierzu finden sich im Anhang unter Kap. A.4.

Unterschiedliche Phasenansteuerungswinkel in Azimuthorichtung offenbaren beim Gruppenstrahler eine stetige Reduktion des Strahlungsmaximums der Hauptkeule mit zunehmender Winkelauslenkung. Basierend auf den Messergebnissen der gesendeten Richtcharakteristik, ist demnach die Winkelauslenkung auf einen Sichtbereich von  $\theta_{az} = \pm 30^\circ$  limitiert. Auch das Verhältnis von Haupt- zu Nebenmaxima oder die Halbwertsbreite bzw. der Halbwertsinkel weisen bei einer Winkelauslenkung von über  $\theta_{az} = 30^\circ$  unplausible Resultate auf. Auf Grundlage dieser Einschränkung des Sichtbereichs werden im weiteren Verlauf Auswerteverfahren zur Durchflussbestimmung vorgestellt. Die nicht ausgeleuchteten Bereiche werden durch einen modellbasierten Ansatz des Strömungsprofils berücksichtigt. Eine weitere Erkenntnis aus den Messergebnissen der empfangenen Richtcharakteristik ist, dass wegen der hohen Differenz von Haupt- zu Nebenmaxima in Tab. 2.1 und der

Eigenschaften	$\theta_{el} = 0^\circ$	$\theta_{az} = 0^\circ$	$\theta_{az} = 10^\circ$	$\theta_{az} = 20^\circ$	$\theta_{az} = 30^\circ$	$\theta_{az} = 40^\circ$
Intensitäts- abnahme	0 dB	0 dB	-0,2 dB	-2,2 dB	-5,8 dB	-15,4 dB
Neben- zu Hauptmaximum	n.m.	-13,5 dB	-12,5 dB	-11 dB	-8 dB	0,4 dB
Halbwertsbreite	3,5°	6,5°	6,5°	7,75°	7°	9,5°
Halbwertswinkel	1,75°	3°	3,25°	4°	3,25°	5,75°

**Tabelle 2.1:** Messergebnisse zur ausgestrahlten Richtcharakteristik des Phased-Array-Prototypensensors. Ist die Messgröße von Rauschen überlagert, wird diese mit n.m. (=nicht messbar) abgekürzt. Die halben Halbwertsbreiten  $\theta_{el,3dB}$  bzw.  $\theta_{az,3dB}$  entsprechen in erster Näherung den jeweiligen Halbwertswinkeln.

multiplikativen Überlagerung von ausgestrahlter und reflektierter Schallcharakteristik, die Nebenkeulen in der Regel vom Rauschen überdeckt werden. Somit sind spezielle Algorithmen zur Nebenkeulenunterdrückung nicht notwendig.

Die messtechnisch gewonnenen Kenntnisse über die richtungsabhängigen Schallausbreitungen im Wasser, werden im Folgenden weiter vertieft. Dabei wird das dynamische Schalldruckmodell eines Einzelstrahlers  $p_0(t)$  aus dem vorherigen Kapitel um das räumliche Schallfeldverhalten, wie Einstrahlwinkel  $(\alpha, \beta)$ , Reflektor-Winkel  $(\alpha_s, \beta_s)$  und Entfernung  $(r_{ref})$ , erweitert. Basierend auf diesen Erkenntnissen eines Einzelstrahlers lässt sich, durch Zerlegen der Membranfläche in mehrere gleich große und quadratische Elementarstrahler, ein mathematisches Modell des Gruppenstrahlers aufstellen. Die komplette Membrane der Größe  $11,2 \times 22,4$  mm teilt sich auf der Elevationsebene in 32 „feste“ und auf der Azimutebene in 16 „schwenkbare“ Elementarstrahler der Abmaße  $0,7 \text{ mm} \times 0,7 \text{ mm}$  auf (vgl. Abb. 2.15 links). Demnach besteht ein Einzelstrahler aus 32 linear zusammengesetzten Elementarstrahlern.

Das Modell des Elementarstrahlers lässt sich näherungsweise über eine einseitig abstrahlende Kolbenmembrane beschreiben. Der Schalldruck einer einseitigen Kolbenmembrane ist nach [LSW09, Kut88] wie folgt definiert:

$$p_Q(k, r_{ref}) = \frac{j\omega \rho_0 q_0(k)}{2\pi r_{ref}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r_{ref}}. \quad (2.20)$$

Die Variable  $q_0(k)$  entspricht dem Schallfluss (Volumenfluss), welche sich aus dem Flächenintegral  $q_0 = \int_A v_0(k) dA$  zum Abtastzeitpunkt  $k$  ergibt. Da die Membranschnelle  $v_0(k)$  bei dieser Anwendung nur schwer erfasst werden kann, jedoch der Schalldruck eines Einzelstrahlers  $p_0(k)$  in der Entfernung  $l_N$  aus der Messung von Kap. 2.3.3 bestimmt wurde, lässt sich die gemessene Größe analytisch herleiten. Hierzu wird die obere Gleichung zunächst mit dem Faktor  $N = 32$  multipliziert (1 Einzelstrahler = 32 Elementarstrahler), nach dem Schallfluss  $q_0(k)$  umgeformt und die Variable  $r_{ref}$  durch die Messposition  $l_N$  ersetzt. Setzt

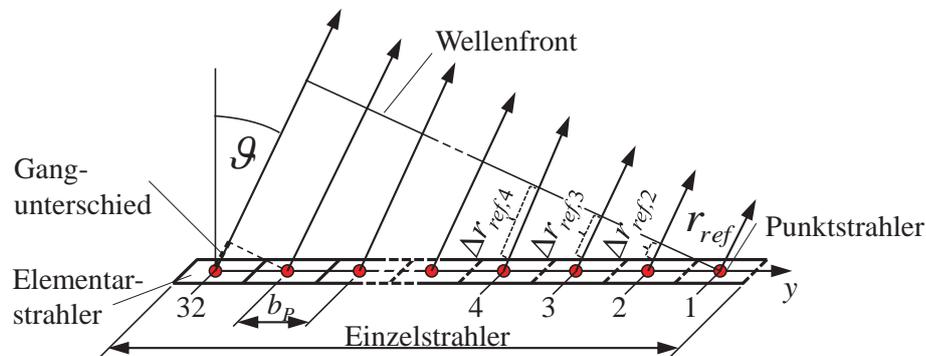
man zudem den gemessenen, dynamischen Schalldruck  $p_0(k)$  des Einzelstrahlers ein so folgt:

$$q_0(k) = \underbrace{\frac{2\pi l_N}{j\omega \rho_0 e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} l_N} 32}}_{\mathcal{K}} p_0(k). \quad (2.21)$$

Der konstante Proportionalitätsfaktor  $\mathcal{K}$  verdeutlicht den analytisch hergeleiteten Zusammenhang zwischen Schallfluss und dem gemessenen Schalldruck aus Kap. 2.3.3, sodass der Elementarstrahler durch Einsetzen von Gl. 2.21 in 2.20 definiert ist mit:

$$p_Q(k, r_{ref}) = \frac{j\omega \rho_0 \mathcal{K} p_0(k)}{2\pi r_{ref}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r_{ref}}. \quad (2.22)$$

Zur Bestimmung des einseitigen Abstrahlverhaltens eines Einzelstrahlers, wird ausgehend von dem Huygensschen Prinzip zunächst die Membranfläche eines Einzelstrahlers in 32 Elementarflächen zerlegt. Jedes dieser Flächenelemente stellt wiederum einen Elementarstrahler dar, welche auf einer Geraden im Abstand von  $b_P = 0,7 \text{ mm}$  angeordnet sind. Wird diese Gruppe von Elementarstrahlern mit gleicher Phase und gleichem Betrag angesteuert, entsteht aufgrund von destruktiver und konstruktiver Interferenz eine gerichtete Intensitätsverteilung des Schallfeldes entlang der Flächennormalen. Zur Herleitung des Schallfeldes wird Abb. 2.16 herangezogen. Hier liegt zwischen der Flächennormalen des Einzelstrahlers und dem Ortsvektor eines Aufpunktes in der Beobachtungsebene eine Winkelauslenkung von  $\vartheta$  vor.



**Abb. 2.16:** Lineare Strahlergruppe.

Zwischen dem  $n$ -ten und dem ersten Elementarstrahler ergibt sich somit ein Gangunterschied von:

$$r_{ref,n} - r_{ref,1} = \Delta r_{ref,n} = (n - 1)b_P \sin(\vartheta). \quad (2.23)$$

Da jeder Elementarstrahler zu einem richtungsabhängigen Gesamtfeld beiträgt, ist der Schalldruck, je nach Gangunterschied, über alle  $N = 32$  Strahler aufzusummieren:

$$p_0(k, r_{ref}, \vartheta) = p_Q(k, r_{ref}) \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{\omega}{c_w} \Delta r_{ref,n}} = p_Q(k, r_{ref}) \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{\omega}{c_w} (n-1)b_P \sin(\vartheta)}. \quad (2.24)$$

Zur Verdeutlichung des Richtfaktors ( $\Gamma$ ) wird die Gleichung in eine geometrische Reihe umgeformt:

$$p_0(k, r_{ref}, \vartheta) = p_Q(k, r_{ref}) e^{-j(N-1)\frac{\omega b_P}{2c_w} \sin(\vartheta)} \frac{\sin(N\frac{\omega b_P}{2c_w} \sin(\vartheta))}{N \sin(\frac{\omega b_P}{2c_w} \sin(\vartheta))}. \quad (2.25)$$

Nach [Rei68] reduziert sich im Allgemeinen die Amplitude bei Gangunterschieden einzelner Partialwellen zu:

$$p_0(k, r_{ref}, \vartheta) \hat{=} p_Q(k, r_{ref}) \frac{\sin(N\frac{\pi b_P}{\lambda} \sin(\vartheta))}{N \sin(\frac{\pi b_P}{\lambda} \sin(\vartheta))}. \quad (2.26)$$

Normiert auf dessen Maximaldruckamplitude entlang der Mittelachse ( $p_0(k, r_{ref}, 0^\circ) = Np_Q(k, r_{ref})$ ) erhält man [FKS84, Mös09]:

$$\Gamma = \left| \frac{p_0(k, r_{ref}, \vartheta)}{Np_Q(k, r_{ref})} \right| = \left| \frac{\sin(N\frac{\pi b_P}{\lambda} \sin(\vartheta))}{N \sin(\frac{\pi b_P}{\lambda} \sin(\vartheta))} \right|. \quad (2.27)$$

Die Herleitung der geschlossenen Lösung zum gleichphasigen Richtfaktor wird im Anhang unter Kap. A.8 bzw. [LSW09] erläutert.

Durch Einsetzen der Elementarstrahlergleichung 2.22 in die der linearen Strahlergruppe Gl. 2.24 und Ersetzen des Aufpunktswinkels  $\vartheta$  durch die Differenz  $\beta_s - \beta$  (Reflektorwinkel  $\beta_s$  vgl. Abb. 2.8, Einstrahlwinkel  $\beta$  vgl. 2.1), resultiert der räumliche und zeitliche Schalldruck auf einen Reflektor durch einen Einzelstrahler entlang der Elevationsebene.

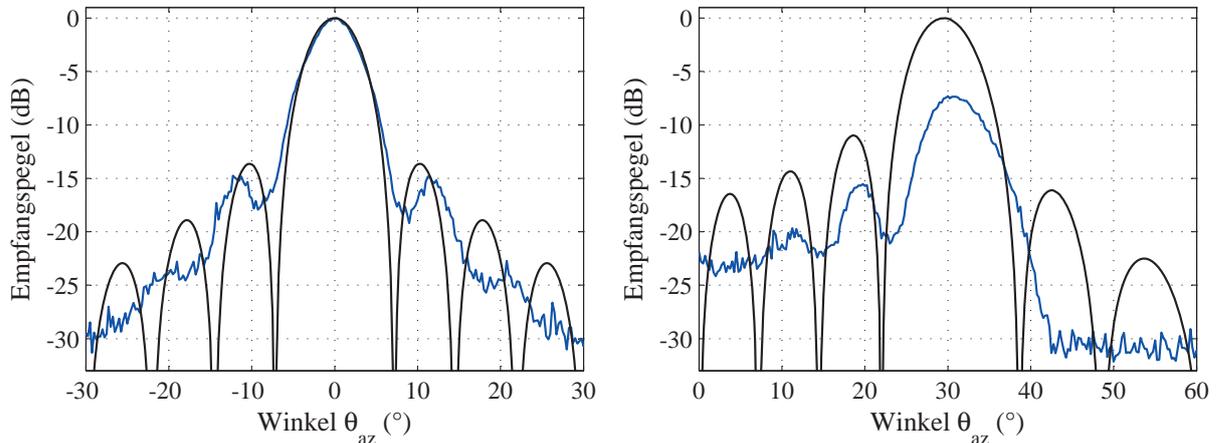
Zur Beschreibung des Abstrahlverhaltens in Azimuthrichtung muss wegen der schwenkbaren Hauptkeule des Gruppenstrahlers die Gl. 2.24 um den Richtwinkel  $\alpha$  ergänzt werden. Setzt man für den Beobachtungswinkel  $\vartheta$   $\alpha_s$  ein, ist der Schalldruck in Reflektorrichtung  $\alpha_s$  wie folgt gegeben:

$$p_{sum}(k, r_{ref}, \alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta) = \frac{j\omega Q_0 \mathcal{K} p_0(k)}{2\pi r_{ref}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r_{ref}} \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{\omega}{c_w}(n-1)b_P \sin(\beta_s - \beta)} \sum_{m=1}^M e^{-j\frac{\omega}{c_w}(m-1)b_P [\sin(\alpha_s) - \sin(\alpha)]}. \quad (2.28)$$

Die Variable  $N$  charakterisiert die Anzahl der in der Näherung aneinanderliegenden Elementarstrahler eines Einzelstrahlers ( $N = 32$ ) und die Variable  $M$  die Anzahl der parallel zueinander liegenden Einzelstrahler ( $M = 16$ ).

In Abb. 2.17 sind die gemessenen und modellierten Richtdiagramme des Gruppenstrahlers entlang der Azimuthebene  $\theta_{az}$  ( $\alpha_s = -30^\circ; -29^\circ; \dots; 30^\circ$  bzw.  $\alpha_s = 0^\circ; 1^\circ; \dots; 60^\circ$ ) bei der Auslenkung  $\alpha = 0^\circ$  und  $30^\circ$  ersichtlich. Mit zunehmender Winkelauslenkung  $\alpha$  divergieren die Richtdiagramme zwischen Modellansatz und Messung. Diese Eigenheit lässt sich nach [LSW09, Daß02, Smi89, Qi00] im Wesentlichen auf das mechanische Übersprechen

der benachbarten Einzelstrahler (sog. „crosstalk“) und die anisotrope Ausbreitung der Einzelstrahler zurückführen. Diese Effekte werden in [Tob11] nachgewiesen, aber für die weitere Modellierung nicht berücksichtigt.



**Abb. 2.17:** Vergleich der modellierten und gemessenen Richtcharakteristik bei  $\alpha = 0^\circ$  (links) und  $\alpha = 30^\circ$  (rechts).

### 2.3.5 Schallabsorptionsmodell

Bei der Schallausbreitung wird aufgrund der Bewegung eines jeden Teilchens permanent mechanische Energie in Wärme umgewandelt, sodass jede Schallausbreitung unvermeidlich von Verlusten begleitet ist. Die Schallwelle wird bei diesem Vorgang „gedämpft“ bzw. die Energie absorbiert. Zu der im vorhergehenden Kapitel beschriebenen geometrischen Reduktion des Schalldrucks nimmt somit die Amplitude einer harmonischen Schallwelle in Abhängigkeit des zurückgelegten Weges zusätzlich exponentiell ab:

$$p_{abs}(k, r_{ref}, \alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta) = p_{sum}(k, r_{ref}, \alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta) \cdot e^{-\varepsilon r_{ref}}. \quad (2.29)$$

Die Variable  $p_{sum}(\cdot)$  beschreibt die Ausbreitungscharakteristik des Gruppenstrahlers nach Gl. 2.28 und  $\varepsilon$  die allgemeine Absorptionskonstante. Nach [Kut88, LSW09, HSF08] setzt sich diese Absorptionskonstante im Wesentlichen aus einem klassischen und einem erweiterten empirisch ermittelten Modellansatz zusammen. Ziel ist es, auf Grundlage dieser beiden Ansätze die in Abb. 2.9 gewonnene Kennlinie der Schalldruckreduktion im Fernfeld theoretisch nachzuvollziehen und zur Erweiterung des Ausbreitungsmodells zu verwenden.

Die klassische Schallabsorptionskonstante setzt sich mit  $\varepsilon = \varepsilon_v + \varepsilon_w$  aus der Viskositätskonstante ( $\varepsilon_v$ ) und Wärmeleitkonstante ( $\varepsilon_w$ ) zusammen. Beide Komponenten sind von der Art des Wellenmediums und der Frequenz abhängig. Die Viskositätskonstante besteht aus zwei Wirkmechanismen. Zum einen wird das Volumenelement in Richtung der Schallausbreitung allseitig komprimiert und zum anderen schubdeformiert. Der Kompression

wirkt eine vom Stoff bestimmte Rückstellkraft entgegen. Bei der Schubdeformation müssen Reibungskräfte überwunden werden, die zur Schergeschwindigkeit proportional sind. Nach [Kut88] erhält man:

$$\varepsilon_v = \frac{2\eta\omega^2}{3\rho_0 c_w^3}. \quad (2.30)$$

In der Gleichung ist  $\rho_0$  die Dichte,  $\omega$  die Kreisfrequenz,  $c_w$  die Schallgeschwindigkeit in Wasser und  $\eta$  die Viskositätskonstante des Mediums.

Oft wird die in einer Schallwelle auftretende Zustandsänderung des Wellenmediums als adiabatisch angenommen, d.h. es findet kein Wärmeaustausch zwischen benachbarten Volumenelementen statt. Tatsächlich findet durch unterschiedlich starke Kompression eine Erwärmung von Volumenelementen statt, sodass ein Wärmestrom vom wärmeren zum kälteren Element auftritt. Dieser Wärmeleitprozess ist irreversibel und trägt somit ebenfalls zu einer Dämpfung der Welle bei:

$$\varepsilon_w = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\varpi\omega^2}{\rho_0 c_v c_w^3}. \quad (2.31)$$

Die Größe  $c_v$  ist die auf die Masseneinheit bezogene spezifische Wärme des Stoffes bei konstantem Volumen,  $\varpi$  seine Wärmeleitfähigkeit und  $\kappa$  der Adiabatenexponent.

Beide Absorptionskonstanten lassen sich laut [Kut88] durch experimentell beobachtete Ultraschalldämpfung in einatomigen Flüssigkeiten gut nachweisen. Jedoch gibt es weitere Dämpfungsursachen, da die meisten Fluide aus mehratomigen Molekülen bestehen bzw. eine kompliziertere Struktur aufweisen. Um der Komplexität der Schallabsorption Sorge zu tragen, wird in [ISO99, LSW09] eine experimentelle Erweiterung des klassischen Absorptionsmodells vorgeschlagen. Mit den Absorptionskonstanten  $\varepsilon_m$  und  $K_m$  wird daher das Ziel verfolgt, das mathematische Modell an die Beobachtungen eines mehratomigen Fluids ( $H_2O$ ) anzupassen. Werden die Absorptionskurven messtechnisch erfasst, lässt sich das Modell in Gl. 2.29, um die klassischen  $\varepsilon_v, \varepsilon_w$  und experimentellen Konstanten  $\varepsilon_m$  und  $K_m$  gemäß

$$p_{abs}(k, r_{ref}, \alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta) = \underbrace{p_{sum}(k, r_{ref}, \alpha_s, \beta_s, \alpha, \beta)}_{\text{geom. Schallausbreitung}} \cdot \underbrace{K_m e^{-r_{ref}(\varepsilon_v + \varepsilon_w + \varepsilon_m)}}_{\text{Schallabsorption}} \quad (2.32)$$

erweitern. Mit diesen experimentellen Konstanten wird das Modell an die Messwerte angenähert. Hierzu muss die oben aufgezeigte nichtlineare Funktion umgeformt

$$\ln \left( \frac{p_{abs}(\cdot)}{p_{sum}(\cdot)} \right) + r_{ref} (\varepsilon_v + \varepsilon_w) = \ln (K_m) - r_{ref} \varepsilon_m \quad (2.33)$$

und durch Substitution des Terms  $\ln(K_m) = \mathcal{A}$  für alle  $N$  Messungen in die Matrixnotation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{p_{abs,1}(\cdot)}{p_{sum,1}(\cdot)}\right) + r_{ref,1}(\varepsilon_v + \varepsilon_w) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{p_{abs,N}(\cdot)}{p_{sum,N}(\cdot)}\right) + r_{ref,N}(\varepsilon_v + \varepsilon_w) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & r_{ref} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{ref} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \quad (2.34)$$

gebracht werden. Durch Minimierung der Fehlerquadrate

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|\mathbf{w} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.35)$$

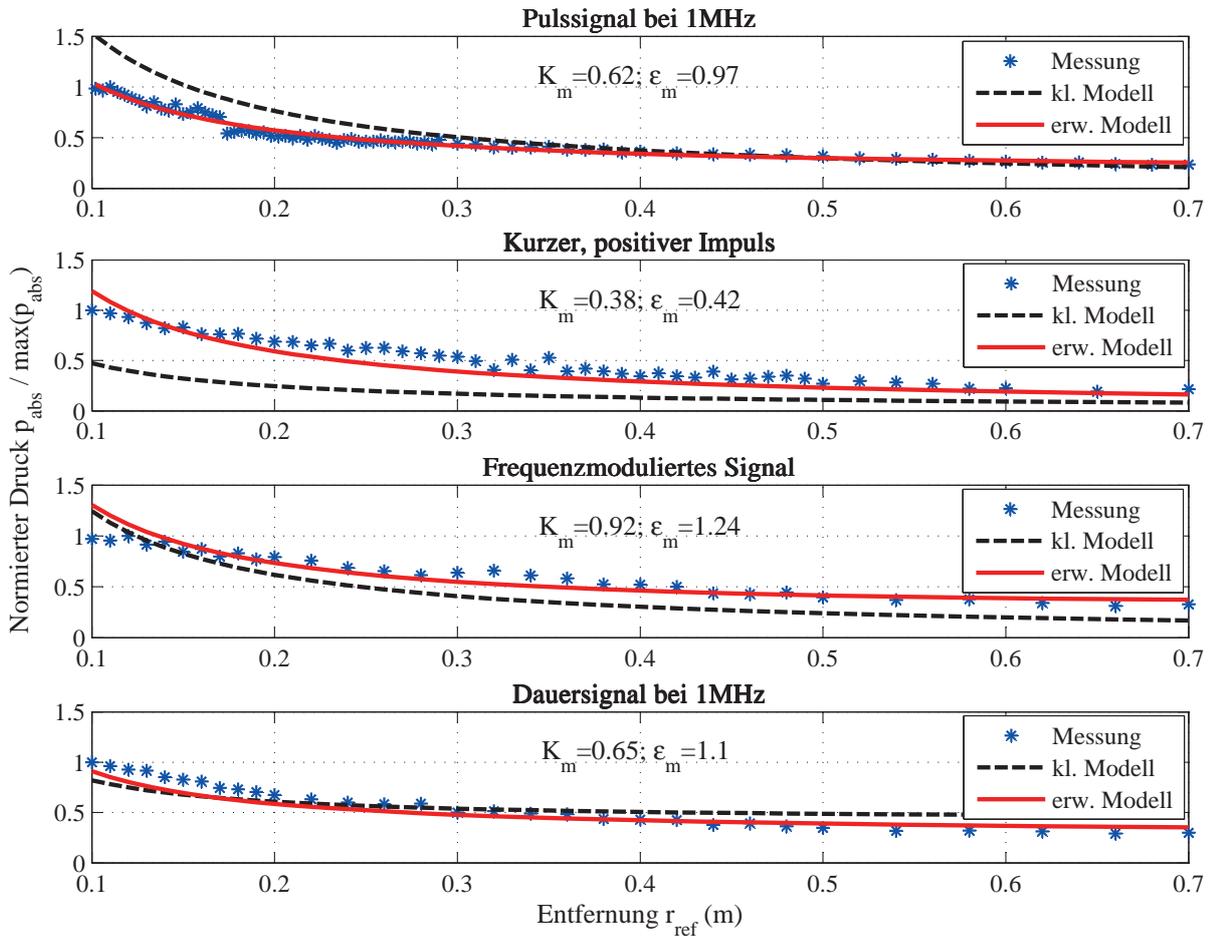
resultieren die Werte  $K_m = e^{\mathcal{A}}$  und  $\varepsilon_m$ . In Abb. 2.18 sind vier normierte Diagramme ( $\frac{p_{abs}(\cdot)}{\max(p_{abs}(\cdot))}$ ) für unterschiedliche Sendesequenzen dargestellt. Jedes Diagramm beinhaltet drei Absorptionskurven: Die der Messungen, die des theoretischen Modells nach Gl. 2.29 und die der experimentellen Erweiterung nach Gl. 2.32. Aufgrund der sendeform abhängigen Streuung der Konstanten, ist es nur schwer möglich ein allumfassendes Absorptionsmodell zu finden. Die Konstanten  $K_m$  und  $\varepsilon_m$  sind von dem Sendesignal abhängig. Weil in der nachfolgenden Untersuchung das Sendesignal aus Pulssignalen bei  $1\text{ MHz} \pm 20\%$  besteht, werden die Simulationen mit den Konstanten  $K_m=0,62$  und  $\varepsilon_m=0,97$  aus dem obersten Diagramm der Abb. 2.18 durchgeführt.

Wird die Signalflusskette der elektromechanischen Übertragungsfunktion, der Schallausbreitung von Gruppenstrahlern und der Schallabsorption auf Basis der vorgestellten Modellansätze simuliert, erhält man die in Abb. 2.19 dargestellten Signale  $p_{abs}(k, 10\text{ cm}, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  und  $p_{abs}(k, 62\text{ cm}, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$  für ein Pulssignal. Zur Verifizierung sind in den Diagrammen die gemessenen und modellierten Schalldrücke dargestellt. Im Anhang unter Kap. A.9 wurden weitere Messergebnisse unterschiedlicher Signalformen mit dem Modellansatz verglichen.

### 2.3.6 Reflexionsmodell

Der Reflektor ist in Abhängigkeit von Winkel und Entfernung einem definierten Schalldruck  $p_{abs}(\cdot)$  ausgesetzt, welcher entsprechend der Reflektorbeschaffenheit rückgestreut wird. Aufgrund des geringen Rückstreuquerschnitts  $A_R$ , wird die Schallreflexion als Punktstrahler charakterisiert. Der dabei rückgestreute Schalldruck lässt sich über das Produkt von Reflexionsfaktor  $C_r$  und einfallendem Schalldruck  $p_{abs}(\cdot)$  beschreiben. Je nach Reflektorform, -material und -größe nimmt der Reflexionsfaktor Werte zwischen -1 und 1 an:

$$C_r = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}. \quad (2.36)$$

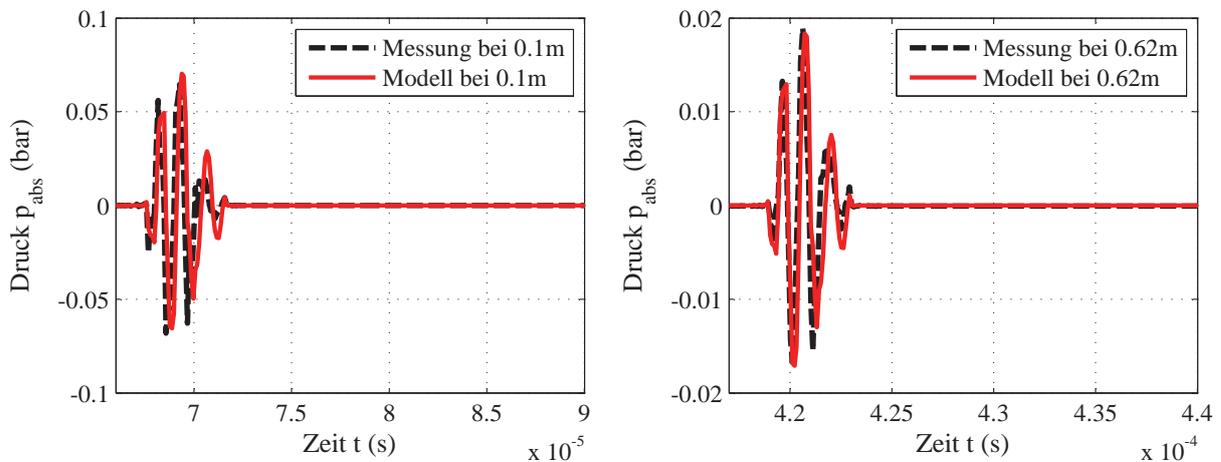


**Abb. 2.18:** Einhüllende Kurven von gemessenen, modellierten und experimentell erweiterten Spitzenwerten bei unterschiedlichen Signalen. Pulssignal entspricht 2 Sinusperioden der Frequenz 1 MHz, kurzer Impuls der Dauer 500 ns, Frequenzmodulation im Bereich 0.5 : 1,5 MHz und Dauersignal der Frequenz 1 MHz. Die Absorptionskennlinien sind jeweils auf den gemessenen Druck bei  $r_{ref} = 0,1$  m normiert.

Die spezifische Wandimpedanz  $Z_g$  berechnet sich aus dem Quotient von Druck und Schnelle direkt an der Reflexionsfläche [Mös09, LSW09] und die Kennimpedanz  $Z_0$  durch das Medium Wasser (vgl. Gl. 2.19).

Nimmt man an, dass der Reflektor in den zum Sender zugewandten Halbraum abstrahlt, ist unter Zuhilfenahme von Gl. 2.20 die Herleitung der Schallcharakteristik möglich. Da für den Schallfluss näherungsweise  $q_0(k) = A_R v_0(k) = A_R (C_r p_{abs}(\cdot)) / (\rho_0 c_w)$  gilt, erhält man:

$$p_{ref}(\cdot) = \frac{j\omega A_R C_r p_{abs}(\cdot)}{2\pi r_{ref} c_w} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r_{ref}}. \quad (2.37)$$



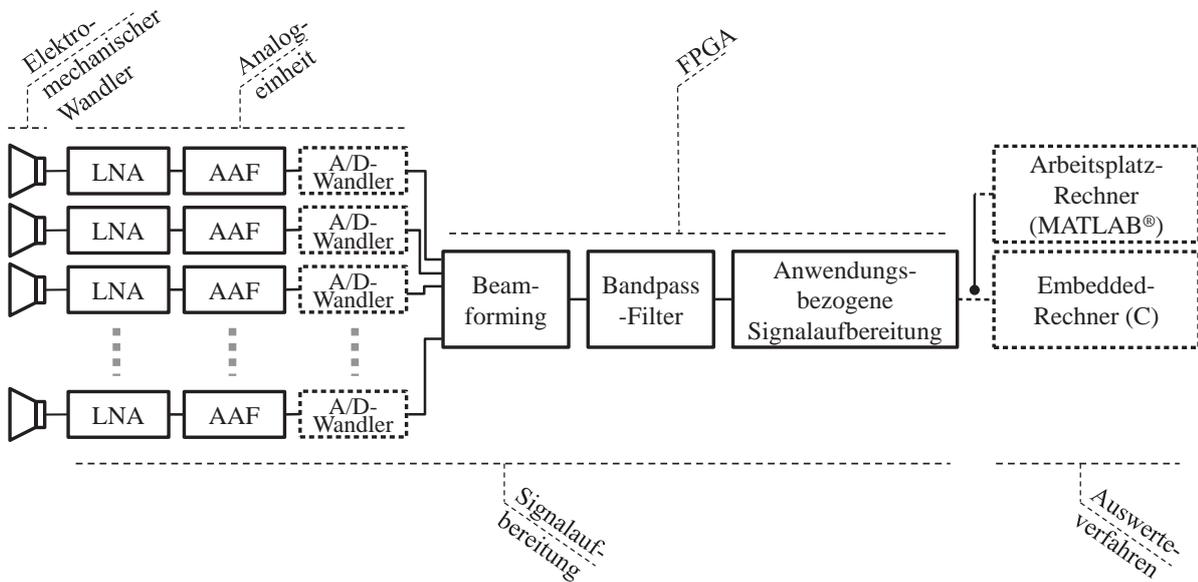
**Abb. 2.19:** Vergleich von modelliertem und gemessenem Pulssignal bei einer Entfernung von 10 cm und 62 cm.

## 2.4 Systemdesign

Das in dieser Arbeit verwendete Ultraschallmesssystem lässt sich in die elektromechanische Wandlereinheit, die Signalaufbereitung und die rechnergestützte Auswerteeinheit untergliedern (vgl. Abb. 2.20). Die elektromechanische Wandlereinheit wird mit einer Sendefrequenz zwischen 0,8 MHz und 1,2 MHz betrieben und mit einer Rechteckspannung von  $\pm 90$  V angesteuert. Wie bereits in Kap. 2.3.4 erwähnt, besitzt der Gruppenstrahler die Abmaße  $11,2 \times 22,4$  mm und besteht aus 16 Einzelstrahlern, die in einem Abstand von  $\lambda/2 = 0,7$  mm angeordnet sind. Der schwenkbare Azimutwinkel des Strahlers ist auf  $\pm 30^\circ$  begrenzt (vgl. Kap. 2.3.4).

Die Signalaufbereitung findet auf einem Field Programmable Gate Array (FPGA) mit vorgelagerter Analogeneinheit statt. Im FPGA werden die binären Sendesignale generiert und für die Einzelelemente phasenverschoben. Die bipolare Verstärkung der Sendesignale erfolgt in der Analogeneinheit. Nach der Empfangsumschaltung wird auf der Analogeneinheit die Spannung des Signals zunächst um 18dB verstärkt und zur Vermeidung des Alias-Effektes mit den Grenzfrequenzen 0,7 MHz - 6,3 MHz ( $1/3f_s$ ) bandpassgefiltert. Abschließend findet die Digitalisierung des Signals mit einer Abtastfrequenz  $f_s$  von 20 MHz und einer Auflösung von 12Bit statt. Eingangsseitig des FPGA's werden alle 16 Kanäle der Einzelstrahler einem Delay-And-Sum Beamforming unterzogen, wobei die phasenselektive Addition der Kanäle durch den Azimutswenkwinkel des Sendevorgangs vorgegeben ist. Zur Steigerung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses (SNR) wird das Summensignal ein weiteres Mal einem schmalbandigeren Finite Impulse Response (FIR) -Filter (0,8 MHz-1,2 MHz) zugeführt. Die anwendungsbezogene Signalaufbereitung und deren anschließende Auswerteverfahren werden in den jeweiligen Kap. 3, 4 und 5 erläutert und diskutiert.

Zwei grundsätzlich Verfahren zur Signalauswertung und -analyse werden untersucht, zum einen eine auf Korrelation beruhende Berechnung der Reflektorentfernung und zum



**Abb. 2.20:** Systemdesign des Ultraschallsensors. AAF=Antialiasing-Filter, LNA=Low Noise Amplifier.

anderen eine Geschwindigkeitsbestimmung durch Schätzung der Dopplerfrequenz. Die Algorithmen werden auf einem Embedded-Rechner realisiert. Die Entwicklung und Analyse erfolgt offline auf einem Arbeitsplatzrechner über zwischengespeicherte Signale mit der Software MATLAB<sup>®</sup>. Beim Embedded-Rechner ist die anwendungsbezogene Realisierung der Verfahren von Bedeutung, um Fragen nach Rechenzeit und -ressourcen beantworten zu können. Näheres hierzu wird in Kap. 6.1 behandelt.

## 2.5 Mess- und Prozessrauschen

Im Folgenden werden die Störeinflüsse analysiert. Die Störgrößen sind meist stochastischer Natur und lassen sich über Verteilungsfunktionen beschreiben. Bei der nun folgenden Analyse werden die Fehlerquellen strikt in Mess- und Prozessrauschen untergliedert. Während unter dem Begriff Messrauschen sämtliche hardwarebedingten Fehler zusammengefasst sind, wie beispielsweise Projektions- oder Abtastfehler, charakterisiert das Prozessrauschen Störeinflüsse durch Sekundärgeschwindigkeiten<sup>1</sup> und Strömungsbeschleunigungen.

Projektionsfehler werden durch die Halbwertsbreite der Strahlercharakteristik und den Einstrahlwinkel bestimmt. In Gl. 2.1 wurde der gemessene Geschwindigkeitswert mithilfe der Einstrahlwinkel in Fließrichtung projiziert. Diese Annahme trifft jedoch nur zu, wenn die Halbwertsbreite der Richtcharakteristik gegen Null konvergiert. Dies entspricht jedoch nicht der Realität, denn mit der gemessenen Halbwertsbreite werden auch Reflektoren

<sup>1</sup>Als Sekundärströmungen werden Geschwindigkeitsvektoren bezeichnet, die nicht in Hauptflussrichtung liegen.

außerhalb der Hauptkomponente erfasst. Unabhängig an welcher Position in der Richtcharakteristik der Reflektor detektiert wird, kann die Geschwindigkeitsprojektion nur mit den konstanten Einstrahlwinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  erfolgen. Somit steigt der Projektionsfehler mit zunehmender Halbwertsbreite von  $\theta_{az,3dB}$  und  $\theta_{el,3dB}$ . Zusätzlich hängt der Störeinfluss von den Einstrahlwinkeln ab, weil mit steigenden Einstrahlwinkeln die gemessene Geschwindigkeitskomponente  $v_{mess}$  sinkt, und sich folglich der Projektionsfehler durch die Halbwertsbreite verstärkt über die Nichtlinearität von Gl. 2.1 auswirkt. Zur Berechnung dieses Einflusses wird die x-Komponente dieser Gleichung an den Stellen der Einstrahlwinkel differenziert:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv_x}{d\tilde{\alpha}} \right|_{\alpha} &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha) \cos(\beta)} v_{mess} , \\ \left. \frac{dv_x}{d\tilde{\beta}} \right|_{\beta} &= \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos^2(\beta)} v_{mess} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Der relative Geschwindigkeitsmessfehler für die Einstrahlwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  resultiert aus den halben Halbwertsbreiten ( $\hat{=}$  Halbwertswinkel) der Richtcharakteristik  $\frac{\theta_{az,3dB}}{2}$  und  $\frac{\theta_{el,3dB}}{2}$  (vgl. [FH85, Keh94]):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta v_x}{v_x} \right|_{\alpha} &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha) \cos(\beta)} \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{\theta_{az,3dB}}{2} = \tan(\alpha) \frac{\theta_{az,3dB}}{2} , \\ \left. \frac{\Delta v_x}{v_x} \right|_{\beta} &= \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos^2(\beta)} \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{\theta_{el,3dB}}{2} = \tan(\beta) \frac{\theta_{el,3dB}}{2} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Der gesamte Fehler berechnet sich durch quadratische Addition beider Fehlerkomponenten gemäß:

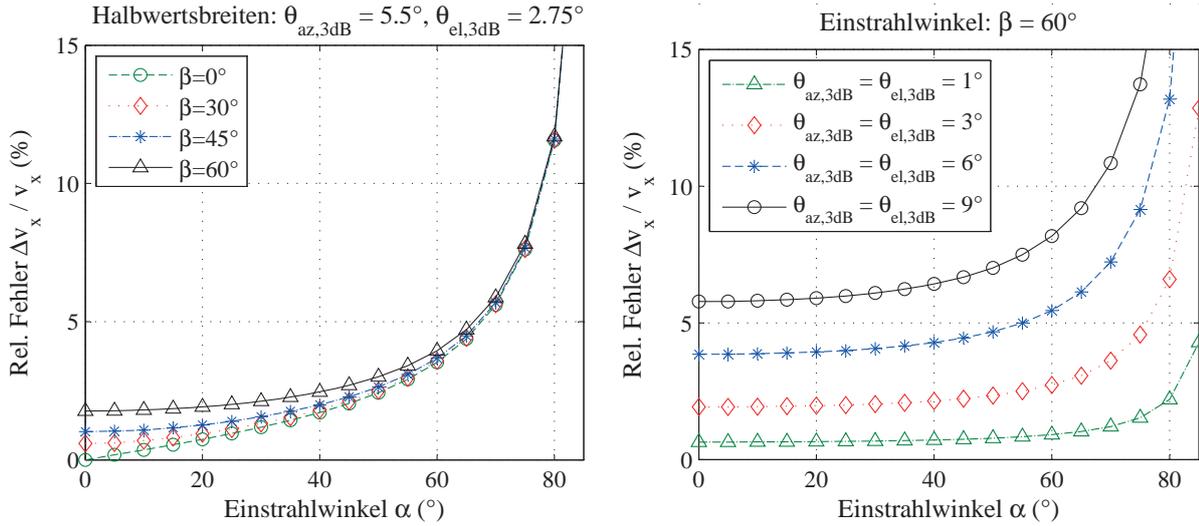
$$\left. \frac{\Delta v_x}{v_x} \right|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\left( \tan(\alpha) \frac{\theta_{az,3dB}}{2} \right)^2 + \left( \tan(\beta) \frac{\theta_{el,3dB}}{2} \right)^2} . \quad (2.40)$$

Die Reflektoren treten innerhalb des Öffnungswinkels gleichverteilt auf. Die Empfangsleistung der Reflektoren wird durch die Richtcharakteristik des Strahlers berechnet. Mit zunehmender Distanz der Reflektoren vom Einstrahlwinkel, nimmt demnach die Wahrscheinlichkeit einer Detektion und folglich der Fehlereinfluss ab. Wird die Empfangscharakteristik des Strahlers durch eine Normalverteilung genähert [Bla04], lässt sich diese über eine Standardabweichung beschreiben. Der Zusammenhang zwischen der Halbwertsbreite des Strahlers und der Standardabweichung führt zur folgenden Erweiterung der Gl. 2.40:

$$\left. \frac{\Delta v_x}{v_x} \right|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\left( \tan(\alpha) \frac{\theta_{az,3dB}}{4\sqrt{2 \ln(2)}} \right)^2 + \left( \tan(\beta) \frac{\theta_{el,3dB}}{4\sqrt{2 \ln(2)}} \right)^2} . \quad (2.41)$$

Die graphische Auswertung dieser Gleichung in Abb. 2.21 macht deutlich, dass unter Anwendung der gegebenen Worst-Case-Parameter aus Tab. A.2 (Halbwertsbreite:  $\theta_{az,3dB} \approx 5,5^\circ$ ,  $\theta_{el,3dB} \approx 2,75^\circ$ ) und einem maximalen Einstrahlwinkel in Azimuth von  $\alpha = 30^\circ$

sowie einem in Elevation von  $\beta = 45^\circ$ , ein Gesamtfehler von 1,5% auftreten kann. Bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 60^\circ$  beträgt der Gesamtfehler bereits 2,1%. Angewendet auf eine Maximalgeschwindigkeit von 5 m/s bedeutet dies ein projektionsbedingter Fehler von 0,075 m/s bzw. 0,1 m/s.



**Abb. 2.21:** Links: Relativer Fehler bei variierenden Einstrahlwinkeln und festen Halbwertsbreiten; Rechts: Relativer Fehler bei variierenden Halbwertsbreiten und fixem Einstrahlwinkel  $\beta$ .

Neben diesem Projektionsfehler verursacht auch die zeitliche Abtastung einen weiteren Fehler. Dabei wird das Rauschen durch die zeitliche Diskretisierung des Empfangssignals hervorgerufen und entspricht einem gleichverteilten Fehler in den Grenzen  $\pm \frac{1}{f_s 2}$ . Mit der Positionsungenauigkeit von  $\Delta r = c_w / (f_s 2)$  erhält man ein gleichverteiltes Positionsrauschen in den Grenzen:

$$\pm \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \frac{\Delta r}{2} = \pm \frac{1}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \frac{c_w}{4 f_s}. \quad (2.42)$$

Mit

$$\int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}} p(\xi) d\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad p(\xi) = \frac{1}{x}, \quad (2.43)$$

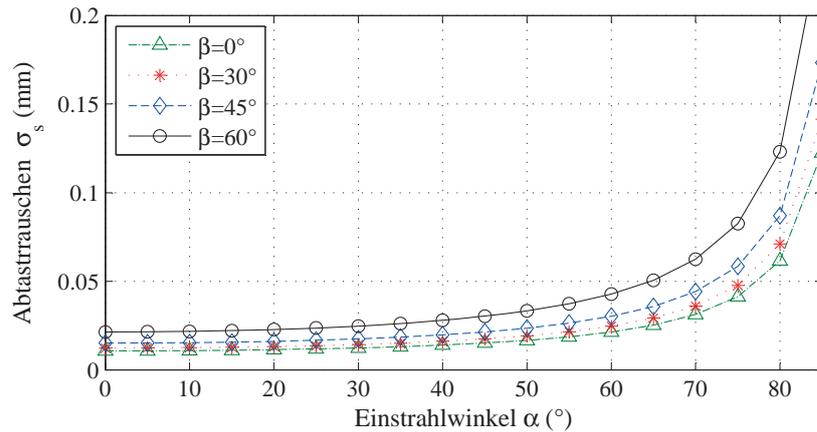
berechnet sich die Standardabweichung:

$$\sigma_s = \sqrt{\int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}} \xi^2 \frac{1}{x} d\xi} = \frac{x}{\sqrt{12}}. \quad (2.44)$$

Zusammen mit Gl. 2.1 lässt sich diese Erkenntnis auf das positionsbedingte Abtausrauschen übertragen (vgl. [BSKL05]):

$$\sigma_s = \frac{c_w}{\cos(\alpha) \cos(\beta) 2f_s \sqrt{12}}. \quad (2.45)$$

In Abb. 2.22 sind die Auswertungen für diverse Einstrahlwinkel und eine Abtastfrequenz von  $f_s=20$  MHz dargestellt. Aufgrund der Projektion nimmt die Standardabweichung  $\sigma_s$  mit zunehmendem Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zu.

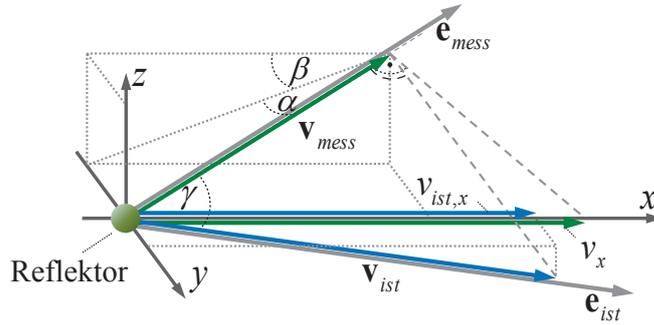


**Abb. 2.22:** Standardabweichung der Abtastfehler in Abhängigkeit der Einstrahlwinkel  $\alpha$  und  $\beta$ .

Bisher wurden der Fehleranalyse streng laminare Strömungen ohne Sekundärgeschwindigkeiten unterstellt. Tatsache ist jedoch, dass sich je nach Geometrie, Strömungsgeschwindigkeiten, Viskosität und Dichte des Fluids die Sekundärkomponenten unterschiedlich ausprägen. Die Größenordnung von Sekundärströmungen beträgt ca. 1-4% der maximalen Hauptströmung [II86], wodurch die Verteilung der Hauptgeschwindigkeit und damit der durchflossene Querschnitt verzerrt wird. Nehmen folglich die Turbulenzen im Fluid zu, steigen auch die Geschwindigkeiten in  $z$  und  $y$ -Richtung. Ein praxisnahes Maß zur Bewertung dieses Effekts ist die Reynolds-Zahl, welche definiert wird durch:

$$Re = \frac{\|\mathbf{v}_{ist}\|_2 d_h}{\nu}. \quad (2.46)$$

Dabei beschreibt  $\nu$  die kinematische Viskosität und  $d_h$  den hydraulischen Durchmesser. Während  $d_h$  beim vollgefüllten Rohr äquivalent zum Durchmesser ist, berechnet sich dieser bei einem rechteckigen offenen Gerinne mit  $d_h = \frac{4bh}{b+2h}$  ( $b$ =Kanallbreite,  $h$ =Füllstand) [Bol07]. Obwohl bei den gemessenen Strömungen der Wert stets unterhalb der kritischen Reynolds-Zahl von  $Re_{krit} \approx 2300$  [Rot10] liegt, nimmt der Störeinfluss der Sekundärgeschwindigkeit aufgrund der Projektion zu. In Abb. 2.23 wird der Fehlereinfluss von Sekundärgeschwindigkeiten deutlich. Wird angenommen, dass der tatsächliche Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{ist} = [v_{ist,x}, v_{ist,y}, v_{ist,z}]^T$  bekannt ist, dann erfasst der Sensor dessen orthogonalen Projektionswert gemäß:



**Abb. 2.23:** Störeinfluss von Sekundärgeschwindigkeiten auf die Messung.

$$\|\mathbf{v}_{mess}\|_2 = \cos(\gamma) \|\mathbf{v}_{ist}\|_2. \quad (2.47)$$

Der Winkel  $\gamma$  ergibt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Einheitsvektoren:

$$\cos(\gamma) = \mathbf{e}_{ist}^T \mathbf{e}_{mess} = \begin{bmatrix} \frac{v_{ist,x}}{\|\mathbf{v}_{ist}\|_2} & \frac{v_{ist,y}}{\|\mathbf{v}_{ist}\|_2} & \frac{v_{ist,z}}{\|\mathbf{v}_{ist}\|_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ \sin(\beta) \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Projiziert man diesen gemessenen Wert nach Gl. 2.1 in Fließrichtung resultiert:

$$v_x = \frac{\mathbf{e}_{ist}^T \mathbf{e}_{mess}}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \|\mathbf{v}_{ist}\|_2. \quad (2.49)$$

Da zur Durchflussberechnung lediglich die zur Fläche orthogonale Geschwindigkeitskomponente  $v_{ist,x}$  einfließt, tatsächlich aber aufgrund der Sekundärgeschwindigkeiten die projizierte Geschwindigkeit  $v_x$  gemessen wird, entsteht eine Abweichung von  $v_x - v_{ist,x}$ . Um den statistischen Störeinfluss bestimmen zu können, werden für unterschiedliche Reynolds-Zahlen die Ergebnisse der Strömungssimulationen eines offenen Kanals und eines vollgefüllten Rohres (vgl. Abb. 2.1) herangezogen. Zur Durchführung dieser Analyse wird der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{ist}$  simulativ bestimmt, dessen Projektion gemäß Gl. 2.1 berechnet und statistisch durch eine Normalverteilung ausgewertet. Die Standardabweichungen  $\sigma_{v_{y,z}}$  sind in Tab. 2.2 zusammengefasst. Die Verteilungen sind im Anhang Kap. A.10 beigelegt.

Neben diesem Störeinfluss der Sekundärgeschwindigkeiten wirkt zusätzlich eine beschleunigungsabhängige Komponente in den Prozessfehler ein. Dieser Fehler ist darin begründet, dass die Echosignale und damit auch die Reflektorpositionen mit einem definierten Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  abgetastet werden (vgl. Abb. 2.3). Da den nachfolgenden Auswertemethoden stets ein gleichförmiges Bewegungsmodell unterstellt wird, wirken die Beschleunigungen als Störgröße in den Messprozess ein. Um die Beschleunigungen

identifizieren zu können, wurden Strömungssimulationen ausgewertet und dessen Standardabweichung  $\sigma_a$  bestimmt (vgl. Anhang Kap. A.11). Die Diagramme hierzu sind im Anhang hinterlegt und gemäß folgender Tabelle zusammengefasst.

$\bar{v}_{in}$	vollgef. Rohr				offenes Gerinne 350 × 455mm	
	0,5 m/s	1 m/s	1,5 m/s	2 m/s	0,3 m/s	0,5 m/s
$d_h$	0,1 m	0,1 m	0,1 m	0,1 m	0,25 m	0,25 m
$Re$ bei 10 °C	38,26	77,1	115,7	154,2	116,9	194,9
$\sigma_{v_{y,z}}, \beta = 45^\circ$	27 $\frac{mm}{s}$	28 $\frac{mm}{s}$	25 $\frac{mm}{s}$	27 $\frac{mm}{s}$	26 $\frac{mm}{s}$	31 $\frac{mm}{s}$
$\sigma_{v_{y,z}}, \beta = 60^\circ$	47 $\frac{mm}{s}$	49 $\frac{mm}{s}$	44 $\frac{mm}{s}$	47 $\frac{mm}{s}$	40 $\frac{mm}{s}$	43 $\frac{mm}{s}$
$\sigma_a$	0,22 $\frac{m}{s^2}$	0,89 $\frac{m}{s^2}$	2,12 $\frac{m}{s^2}$	3,42 $\frac{m}{s^2}$	11 $\frac{m}{s^2}$	17 $\frac{m}{s^2}$

**Tabelle 2.2:** Simulativ gewonnene Ergebnisse.  $d_h$ =Hydraulischer Durchmesser,  $\bar{v}_{in}$ =Mittlerer Durchfluss,  $Re$ =Reynolds-Zahl,  $\sigma_a$ =Standardabweichung des Beschleunigungsfehlers,  $\sigma_{v_{y,z}}$ =Standardabweichung des Fehlers bedingt durch Sekundärgeschwindigkeiten.



## Kapitel 3

# Laufzeitbasierte Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit

Die Anforderungen im Bereich der Durchflussmessung verlangen ein erweitertes Auswerteverfahren, welches in diesem Kapitel vorgestellt wird. Im Gegensatz zu dem in Kap. 2.2 angedeuteten Kreuzkorrelationsverfahren [KTSH08], bei welchem zwei aufeinanderfolgende Empfangssignale miteinander korreliert werden, findet hier die Korrelation zwischen den Sende- und Empfangssignalen statt. Grundsätzlich wird hierfür die Änderung der Schalllaufzeit von Pulsen über zwei oder mehr Sendeperioden erfasst ( $\tau_1 - \tau_2$ ), sodass sich die Entfernungsdifferenz  $\Delta r$  eines Reflektors wie folgt erschließt:

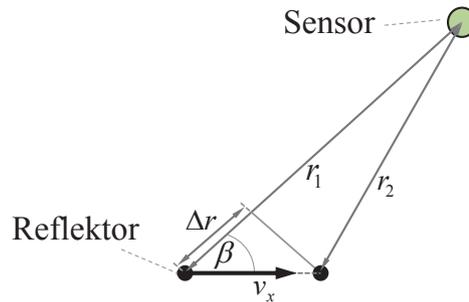
$$\Delta r = r_1 - r_2 = \frac{(\tau_1 - \tau_2) c_w}{2}. \quad (3.1)$$

Durch die Projektion in Fließrichtung und Berücksichtigung des Pulswiederholintervalls  $t_{PRI}$  erhält man die Fließgeschwindigkeit  $v_x$  des Reflektors. Wie in Abb. 3.1 dargestellt, resultiert somit die Reflektorgeschwindigkeit für den Fall  $\alpha = 0$  aus:

$$v_x = \frac{\Delta r}{\cos(\beta)t_{PRI}} = \frac{(\tau_1 - \tau_2) c_w}{2 \cos(\beta)t_{PRI}}. \quad (3.2)$$

Unter Beibehaltung einer hohen Ortsauflösung unterliegt dieser Korrelationsansatz keiner physikalischen Restriktion der Messentfernung, da jeder gesendete Puls einer Codierung unterzogen wird. Dies ermöglicht ein hochfrequentes Senden und Empfangen ohne Mehrdeutigkeiten bei gleichzeitiger Steigerung des Informationsgehaltes.

Zur weiteren Verbesserung der Korrelation sind bei diesem Ansatz zeitliche und räumliche Filtermethoden überlagert. Das Ziel die Spur eines jeden Reflektors zu verfolgen und dessen Geschwindigkeit zu erfassen, wird durch die zeitliche Filterung mit Objektverfolgungsverfahren realisiert. Das Verfahren ermöglicht somit einen detaillierten Einblick in das Strömungsverhalten des Fluids. Auf Grundlage dieser Geschwindigkeitsinformatio-



**Abb. 3.1:** Grundprinzip der laufzeitbasierten Geschwindigkeitsbestimmung eines Reflektors.

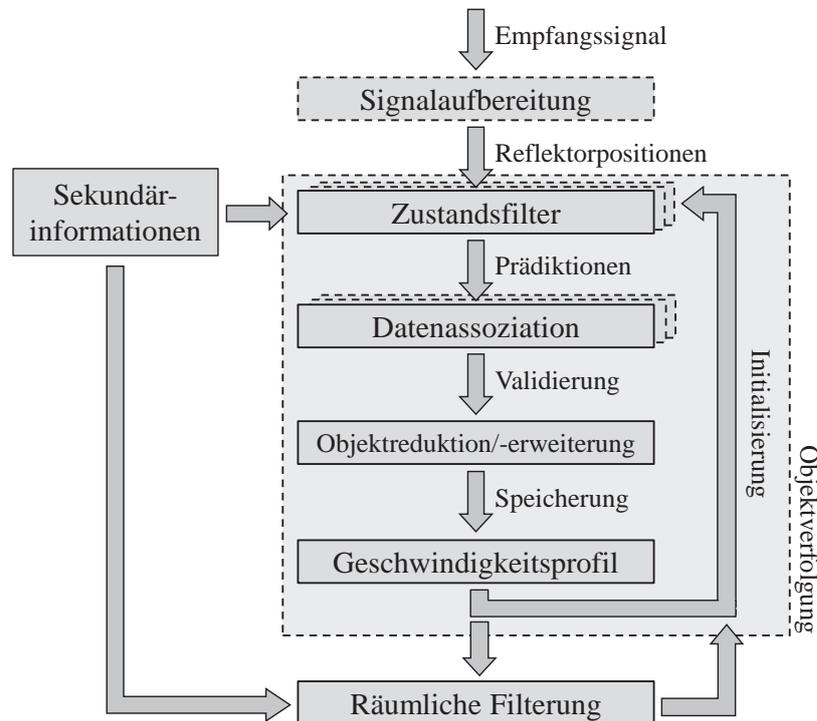
nen, verteilt über den kompletten Querschnitt, erfolgt in der räumlichen Filterung eine Parameteridentifikation zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils.

### 3.1 Funktionsweise

Ein neues Konzept, auf der Basis einer speziellen Signalform, soll die Vorteile der Kreuzkorrelation von Pulsen beibehalten, deren Nachteile umgehen und um weitere Aspekte ergänzen. Im Gegensatz zu dem schmalbandigen Codierverfahren [Zrn77] wird in diesem Konzept nicht die Pulsfolge codiert, sondern die Sendefrequenzen innerhalb eines Pulses. Das Pulswiederholintervall zwischen den Pulsen ist stets konstant. Durch die Codierung sind die Pulse zueinander nahezu orthogonal und zeigen mit sich selbst eine Dirac-förmige Autokorrelation auf. Man erreicht eine Steigerung des SNR. Die Art der Pulscodierung lässt sich auch für relativ schmalbandige Schallwandler anwenden.

Nach der Front-End nahen Signalaufbereitung in Kap. 2.4, untergliedert sich die nachliegende korrelative Auswertearchitektur in mehrere Einzelmodule. Die Module und deren Wechselwirkung untereinander sind in Abb. 3.2 dargestellt. Die anwendungsbezogene Signalaufbereitung erfüllt die Aufgabe, aus den Empfangssignalen die Positionen von Reflektoren zu extrahieren. Diese Auswertung beruht auf einer Schalllaufzeitanalyse der reflektierten Echos. Dabei werden die gesendeten Pulse mit dem Empfangssignal korreliert. Stimmen Echo im Empfangssignal und Sendepuls überein, wird auf Basis dieser Laufzeit sowie der Schallgeschwindigkeit ( $c_w$ ) und den Einfallswinkeln des Sensors ( $\alpha$  und  $\beta$ ) die Position des Reflektors bestimmt (vgl. Kap. 3.3).

Unter Kenntnis dieser Reflektorpositionen wird anschließend deren Strömungsverlauf durch Objektverfolgungsverfahren bestimmt. Dabei werden Strömungslinien über eine längere Zeit verfolgt und hieraus die Geschwindigkeit bestimmt. Bei der Objektverfolgung wird auf eine etablierte Auswertearchitektur [Mäh09] zurückgegriffen und entsprechend auf diese Anwendung erweitert. Dieser Ansatz umfasst die Module einer Zustandsfilterung, einer Datenassoziation, einer Objektreduktion/-erweiterung und eines Speichers zur Verwaltung der Geschwindigkeiten entlang des Kanalquerschnittes. Die vier Module bilden dabei eine in sich geschlossene Schleife, bei der die Ergebnisse aus der vorhergehenden Filterung als



**Abb. 3.2:** Erweiterte Auswertearchitektur zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils mittels Objektverfolgung.

Initialisierungswerte für das neue Messintervall dienen. Die Module werden in Kap. 3.4 behandelt.

Liegen die Geschwindigkeiten der Strömungslinien über einem Großteil des Querschnittes vor, werden diese Informationen im Modul der räumlichen Filterung zur modellbasierten Parameteridentifikation verwendet. Einerseits findet unter den Messgrößen ein räumlicher Geschwindigkeitsausgleich und andererseits eine Extrapolation von Zonen, die durch den Sensor nicht erfasst werden, statt. Ausgangspunkt der Parameteridentifikation sind simulativ gewonnene mathematische Geschwindigkeitsmodelle (vgl. [NN93, Sol13]) aus der Sekundärdatenbank. Das Lösen der Parameteridentifikation und die dafür notwendigen Geschwindigkeitsmodelle werden in Kap. 3.5 erläutert.

Unter dem Begriff Sekundärinformationen wird das Umfeldwissen zusammengefasst, welches über das Messsystem nicht erfasst werden kann. Die Datenbank beinhaltet Informationen von Mess- und Prozessfehlern gemäß Kap. 2.5, aber auch mathematische Geschwindigkeitsmodelle entsprechend Kap. 3.5.

## 3.2 Sendesignalform

Es wird eine Signalcodierung vorgeschlagen, um die physikalische Entfernungsbegrenzung (vgl. Kap. 2.2) zu umgehen. Gleichzeitig gewinnt man mehr Informationen, da mehr Pulse in der gleichen Zeit ausgesendet werden können.

Das nachfolgende Codierverfahren beruht auf der Frequency Hopping Spread Spectrum (FHSS) Methode [SOSL02, GK42] und beschränkt sich auf wenige diskrete Frequenzzustände. Dies hat den Vorteil, dass diese Methode besonders für relativ schmalbandige Ultraschallwandler geeignet ist. Damit zusätzlich jeder Puls eine Dirac-förmige Autokorrelation mit sich selbst aufweist und alle Pulse nahezu orthogonal zueinander sind, werden in dieser Arbeit die Frequenzzustände der FHSS-Methode auf Basis einer Gold-Codierung kombiniert. Auf diese Weise lässt sich das SNR steigern. Zudem eignet sich dieses Codierverfahren zum Messen von inkohärenten Pulsen durch Korrelation und ist beliebig auf Pulsdauer, Informationsgehalt und Wandlereigenschaften skalierbar.

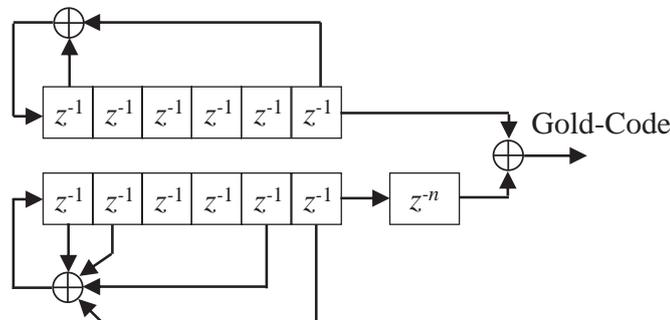
Vor Bestimmung der diskreten Frequenzzustände muss zunächst das Übertragungsverhalten bzw. der Frequenzgang des Ultraschallstrahlers bekannt sein. Der Durchlassbereich dieses Frequenzganges ist anschließend in  $2^b$  diskrete Frequenzzustände zu unterteilen ( $b \in \mathbb{N}$ ). Die Wahl der Frequenzabstände ist idealerweise äquidistant; zudem kann auch der Frequenzzustand *ground*=Signalpause mit in die Signalcodierung einbezogen werden. In Anlehnung an den bereits präsentierten Phased-Array-Ultraschallwandler nach Abb. 2.11 lässt sich dann der Durchlassbereich zwischen 0,8 MHz und 1,2 MHz in die 4 ( $b = 2$ ) Frequenzzustände 0,8 MHz, 1 MHz, 1,2 MHz und *ground* zerlegen. Jede dieser diskreten Zustände bestimmt letztlich die Frequenz für eine vordefinierte Sinus- oder Rechtecksignalform. Die Anzahl der Perioden hängt dabei von der Einschwingdauer des Wandlers ab.

In einem weiteren Schritt werden binäre Code-Folgen generiert, deren Autokorrelation mit sich selbst einen signifikanten Peak bei  $\tau = 0$  aufweisen und die zu allen anderen möglichst orthogonal sind. Während die erste Eigenschaft mit diversen Zufallsgeneratoren realisiert werden kann, ist die Bedingung der Orthogonalität mit solchen Generatoren nicht zwingend gegeben. Bei Codierverfahren wie der Walsh-Codierung [Wal23] ist die Bedingung einer strengen Orthogonalität erfüllt, d.h. für zwei binäre Code-Folgen ( $w_1$  und  $w_2$ ) der Länge  $k = 1, \dots, N$  gilt:

$$\sum_{k=1}^N w_1(k) \cdot w_2(k) = 0. \quad (3.3)$$

Jedoch müssen dazu beide Folgen zueinander synchronisiert sein, weshalb diese Codierung überwiegend in der Kanalcodierung ihre Anwendung findet [Kam04]. Aufgrund der stochastisch gegebenen Schallreflexion von Schwebstoffen ist der Empfang stets asynchron, sodass stattdessen auf die Gold-Codierung zurückgegriffen wird [PA05]. Dieses Codierverfahren [Gol67] erfüllt beide Eigenschaften dieser Anwendung. Die Generierung solch einer Code-Folge resultiert aus einer modulo-2-Addition zweier Zufallsgeneratoren, bestehend aus  $m$  Schieberegistern mit unterschiedlichen Abgriffen. Gold zeigt, dass durch die Addition beider Zufallsfolgen mit allen möglichen Zeitversätzen  $n$  weitere  $2^m - 1$  Code-Folgen abgeleitet werden können. Diese Folgen weisen dabei gleich günstige Orthogonalitätseigenschaften

auf. In Abb. 3.3 ist das Konzept der Gold-Code-Generierung für eine Schieberegisterlänge von  $m = 6$  ersichtlich.



**Abb. 3.3:** Gold-Code Generator mit  $m = 6$  Schieberegistern.

Sind die Frequenzzustände definiert und die binären Gold-Folgen generiert, gilt es nun die statistischen Eigenschaften der binären Gold-Folgen auf die der  $2^b$  diskreten Zustände zu übertragen. Um dies in Näherung zu erreichen, muss die Bedingung  $2^b \ll 2^m - 1$  erfüllt sein. Die Anzahl der Frequenzzustände muss also um ein Vielfaches kleiner sein als die Länge der binären Gold-Folge. Nur dann lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten von und zu jedem Zustand vollständig über die binäre Gold-Folge beschreiben.

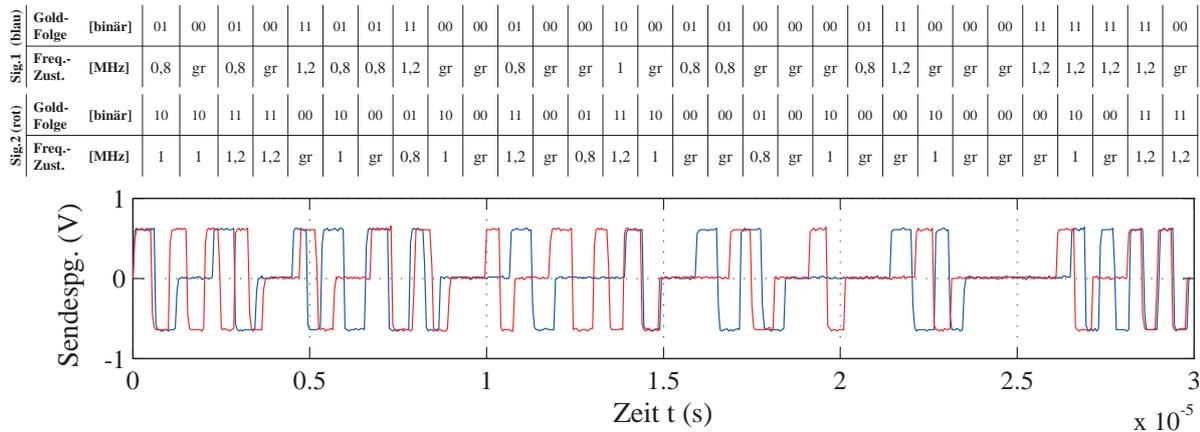
Zerlegt man nun die binäre Gold-Folge in Segmente der Länge  $b$  und assoziiert diese Binärsegmente über eine Assoziationstabelle mit den Frequenzzuständen, resultieren codierte Pulse, welche die geforderten Eigenschaften erfüllen. Für  $b = 2$  bildet somit die Assoziationstabelle 3.1 die 2-Bit-Segmente auf die 4 Frequenzzustände ab.

2-Bit-Segmente	Frequenzzustände
00	ground
01	0,8 MHz
10	1 MHz
11	1,2 MHz

**Tabelle 3.1:** Assoziationstabelle

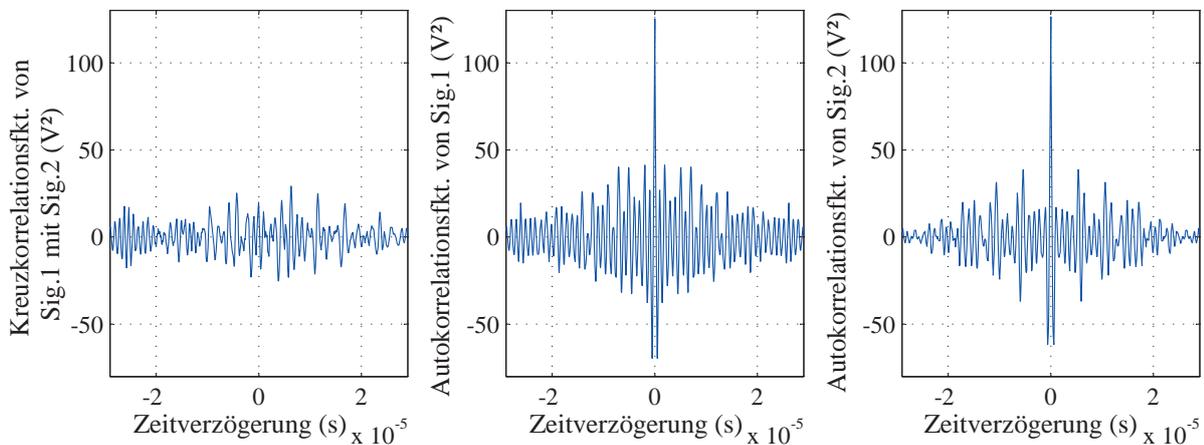
Die Anwendung dieser Tabelle auf die in Abb. 3.4 dargestellten zwei binären Gold-Sequenzen der Länge  $2^{(m=6)} - 1 = 63$  führt zu den darunterliegenden Sendesignalen. Die Sequenzen werden durch unterschiedliche Wahl von  $n$  aus Abb. 3.3 erzeugt. Die Wandler werden bei der Umsetzung der Codierung durch rechteckförmige Signale angesteuert.

Werden beide Signale miteinander verglichen, wird deutlich, dass diese nahezu orthogonal zueinander sind und eine annähernd Dirac-förmige Autokorrelationsfunktion besitzen (vgl. Abb. 3.5). Zur Steigerung dieser Eigenschaften, sowie dem SNR kann zudem eine längere Gold-Folge oder eine höhere Anzahl an Frequenzzuständen verwendet werden. Dies wird besonders dann notwendig, wenn die Echosignale und damit die Dirac-förmige



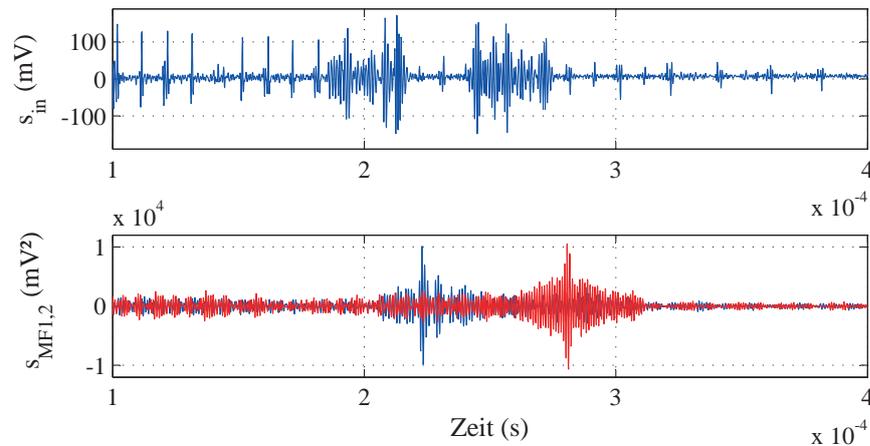
**Abb. 3.4:** Oben: Zwei nahezu orthogonale Gold-Folgen und deren zugewiesene Frequenzzustände. Unten: Resultierende Sendesignale Sig. 1  $\perp$  Sig. 2 in Rechtecksignalform. Führende und nachfolgende „0“-Binärstellen der Gold-Folgen wurden abgeschnitten.

Autokorrelation aufgrund der Schallabsorption in hohen Eindringtiefen von Rauschen oder von naheliegenderen orthogonalen Echos überdeckt werden (vgl. Kap. 5.1).



**Abb. 3.5:** Exemplarische Kreuz- und Autokorrelationsfunktionen codierter Signale.

In Abb. 3.6 werden zur Verdeutlichung dieser Eigenschaften die Signale nacheinander in einem Abstand von  $50\mu s$  in Richtung eines Drahtes gesendet. Nach der Digitalisierung und Bandpass-Filterung wird das Empfangssignal mit beiden codierten Sendesignalen korreliert. Die Ergebnisse finden sich in Abb. 3.6. Während das jeweils andere (orthogonale) Signal unterdrückt wird, hebt sich die Amplitude kurzzeitig beim gesuchten Echo deutlich ab.



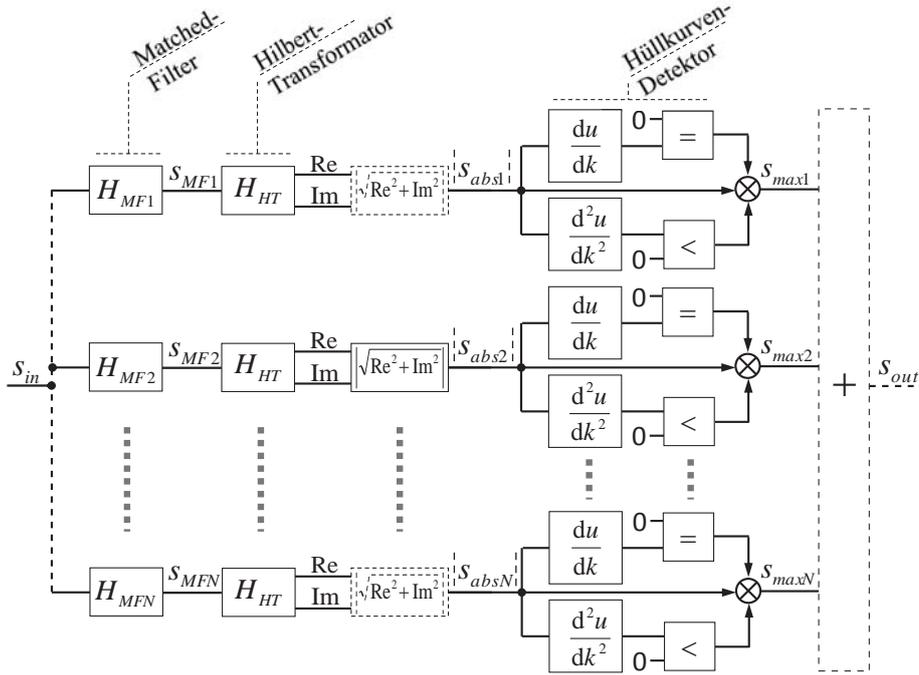
**Abb. 3.6:** *Oben: Echos zweier aufeinander folgender codierter Signale  $t_{PRI} = 50\mu s$ . Die führenden Störsignale bis  $0,18\text{ ms}$  bleiben ohne Einfluss. Unten: Korrelationsergebnisse des Empfangssignals mit dem ersten Sendesignal (blau) und zweiten Sendesignal (rot).*

### 3.3 Signalaufbereitung

Nachdem das Empfangssignal verstärkt, digitalisiert, phasenselektiv aufaddiert und bandpassgefiltert wurde, findet eine auf diese Auswertemethodik bezogene Signalaufbereitung statt. Basierend auf den Eigenschaften der codierten Sendesignale nach Kap. 3.2 bietet sich die Hüllkurvenauswertung der Korrelationsfunktion als besonders sinnvoll an. Hierbei werden die Echos im Empfangssignal identifiziert und die Laufzeiten zwischen Send- und Empfangssignalen bestimmt. Sind nun die Laufzeit sowie die Einstrahlwinkel in Azimuth- und Elevationsrichtung bekannt, lässt sich die Position der Reflektoren berechnen. Diese Art der Signalauswertung ist aus der Radartechnik [MW95, KBS96] bekannt und wird im Nachfolgenden näher erläutert.

Der hier verwendete korrelative Hüllkurvendetektor besteht im Wesentlichen aus einem Matched-Filter, einer Hilbert-Transformation und einem differenziellen Hüllkurvendetektor. Die Interaktion dieser Elemente ist in der Signalflosskette von Abb. 3.7 zusammengefasst.

Trifft das digitalisierte und vorgefilterte Empfangssignal auf die Signalflossketten, sind die einzelnen Echos im rauschüberlagerten Empfangssignal zu erkennen. Hierzu werden die codierten Sendesignale mit dem Empfangssignal korreliert. Stimmt ein Echo im Empfangssignal mit dem Sendesignal überein, ergeben sich Peaks im Korrelationsergebnis. An diesen Stellen ist die Signalenergie maximal. Zur echtzeitfähigen Umsetzung dieses Korrelationsprozesses wird ein Matched-Filter verwendet und als FIR-Filter im FPGA implementiert. Bei einem Matched-Filter handelt es sich um einen optimalen Suchfilter [Huf06, LO10, Sch05], dessen Filterkoeffizienten für jedes codierte Sendesignal nur einmal entworfen werden. Damit ist eine jede Signalflosskette auch nur für die Suche eines codierten Sendesignals zuständig. Um weitere codierte Signale im Empfangssignal zu identifizieren, muss die Signalflosskette mit den entsprechend angepassten Matched-Filtern



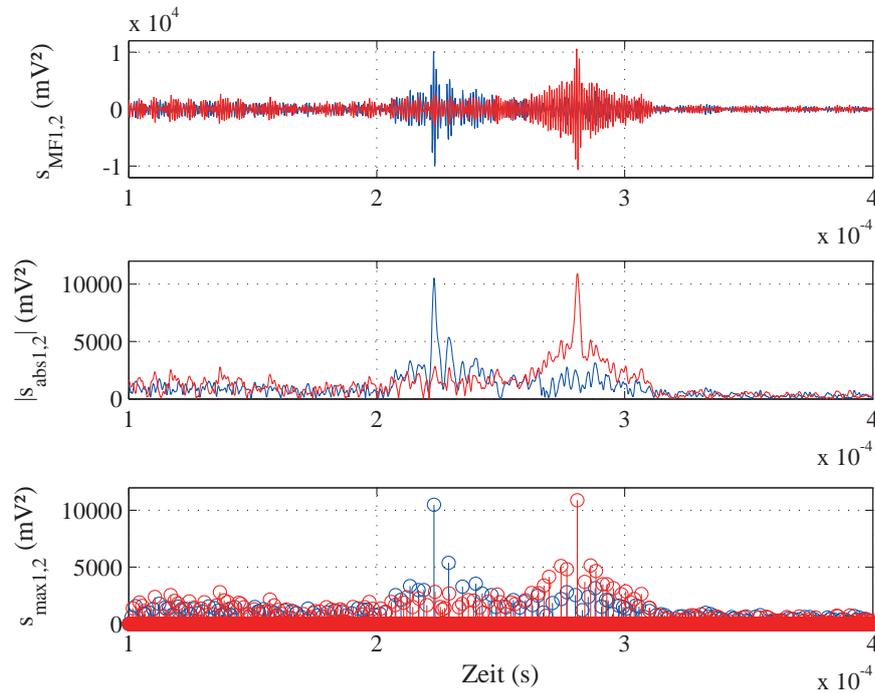
**Abb. 3.7:** Signalflussdiagramm zur Aufbereitung der codierten Empfangssignale durch die Hüllkurvendetektion.

( $H_{MF1}, H_{MF2}, \dots, H_{MFN}$ ) vervielfacht werden. Die ausführliche Herleitung zum Matched-Filter und die Bestimmung der Filterkoeffizienten sind im Anhang A.12 dargestellt.

Nach der Korrelation wird das Signal einer Hilbert-Transformation unterzogen, sodass die absolute Zeigerlänge zu jedem Abtastzeitpunkt berechnet werden kann. Hierzu spaltet der Hilbert-Transformator das Signal in einen Real- und einen Imaginärteil auf, um die absolute Zeigerlänge mit  $|\sqrt{Re^2 + Im^2}|$  zu bestimmen. Für die Transformation wird wie auch beim Matched-Filter ein FIR-Filter eingesetzt. Die Realisierung der filterbasierten Hilbert-Transformation wird im Anhang A.13 erläutert [KK09, Sch10, SH99, Bra78].

Ist die Zeigerlänge zu jedem Zeitpunkt bekannt, werden in einem letzten Schritt die Maximalstellen im Signal erfasst. Diese Hüllkurvenmaxima entsprechen der zeitlichen Position von Echos und dienen zur Schalllaufzeitbestimmung von Reflektoren. Damit die Maxima identifiziert werden können, wird die Hüllkurve auf zwei getrennte Signalpfade differenziert. Im ersten Signalpfad und folglich der 1. Ableitung werden die Minima und Maxima der Hüllkurve anhand von Nulldurchgängen ermittelt. Durchquert die Kurve den Nullpunkt, wird der Ausgang am logischen Vergleichsglied kurzzeitig auf „high“ bzw. „1“ geschaltet. Zur Unterdrückung der Minima wird zusätzlich ein zweites Mal abgeleitet. Am Ausgang des Multiplikators sind Dirac-Impulse an den Stellen der Maxima ersichtlich. Die Amplituden der Impulse stimmen mit denen der Hüllkurve überein.

Wird das in Abb. 3.8 betrachtete Empfangssignal zweier orthogonal codierter Sendesignale mit dem vorgestellten Signalflussplan aufbereitet, resultieren folgende Ergebnisse: Die Identifizierung der codierten Signale wird dabei auf getrennten Signalpfaden realisiert -eines

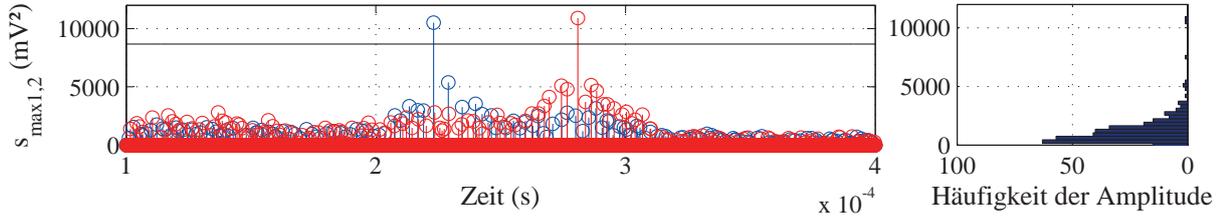


**Abb. 3.8:** Hüllkurvenauswertung für zwei codierte Signale. Oben: Ausgangssignale der Matched-Filter; Mitte: Ausgangssignale nach der Absolutwertbildung; Unten: Maximalpeaks nach der Hüllkurvendetektion. Zur besseren Vergleichbarkeit wurde die zeitliche Verschiebung der FIR-Filter herausgerechnet.

für jedes codierte Sendesignal- und im Diagramm mit unterschiedlichen Kennlinienfarben dargestellt. Dabei werden im ersten Diagramm die Ergebnisse nach der Matched-Filterung aufgezeigt. Deutlich zu erkennen ist dort, dass die Amplitude nur beim jeweils gesuchten Echo im Empfangssignal ansteigt, jedoch bei anderen Echos die Amplitude nicht signifikant ist. Im zweiten Diagramm ist das Signal nach der Absolutwertberechnung abgebildet. Die Dirac-Impulse im untersten Diagramm sind ein Resultat der differentiellen Hüllkurven-Detektion nach dem additiven Zusammenführen beider Signalfluspfade. In diesem Diagramm zeigt sich, dass neben den tatsächlich gesuchten Dirac-Impulsen beim Korrelationsmaximum auch noch eine Vielzahl an irrelevanten, lokalen Maxima existieren. Diese vom Rauschen erzeugten Maxima werden in einem letzten Verarbeitungsprozess durch eine Schwellwertselektion beseitigt. Damit diese Selektion unabhängig von der Empfangsverstärkung agiert, wird der Schwellwert adaptiv über die Amplitudenverteilung mit  $\mu_A$  =Mittelwert und  $\sigma_A$  =Standardabweichung gemäß der Gleichung

$$\varsigma_A = \mu_A + 6\sigma_A \quad (3.4)$$

bestimmt. Die Amplitudenverteilung, sowie der Schwellwert  $\varsigma_A$  sind in Abb. 3.9 ersichtlich.



**Abb. 3.9:** Links: Maxima der Hüllkurvendetektion mit Schwellwert  $\varsigma_A$ ; Rechts: Amplitudenverteilung.

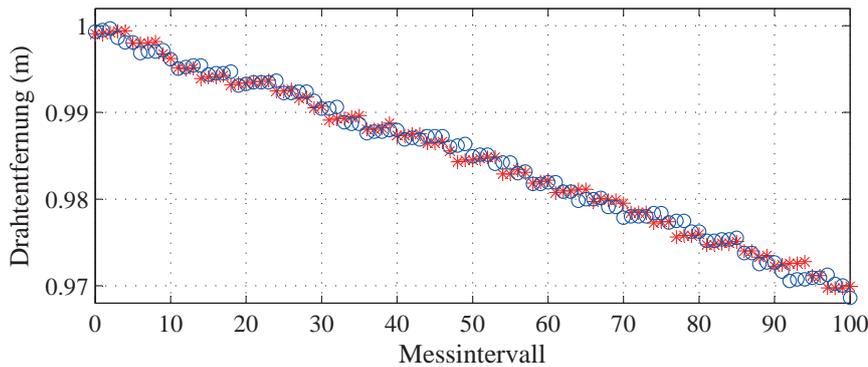
Basierend auf dieser Aufbereitung der Amplitudeninformationen lassen sich aus den Laufzeiten  $\tau$  der Dirac-Impulse die räumlichen Positionen von Reflektoren mit

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) \end{bmatrix} \frac{c_w \tau}{2} \tag{3.5}$$

berechnen. Für die Geschwindigkeitsauswertung ist lediglich die x-Position des Reflektors von Interesse. Die Geschwindigkeit in die Hauptflussrichtung ergibt sich durch die Laufzeitänderung:

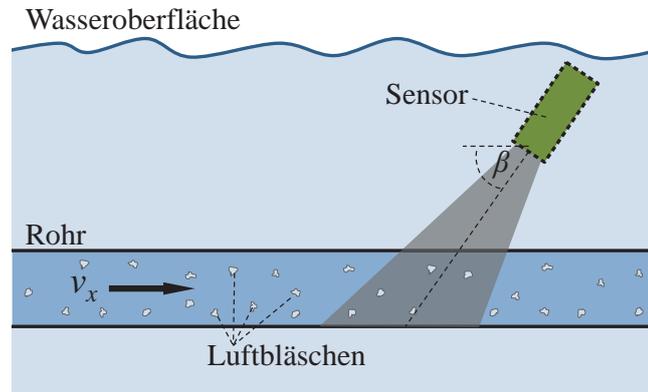
$$v_x = \frac{\Delta x}{\cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) t_{PRI}} \tag{3.6}$$

In Abb. 3.10 ist das Weg-Zeit-Diagramm eines Drahtes, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung des Sensors ( $\alpha = \beta = 0$ ) zubewegt und dabei schwingt, dargestellt. Deutlich sind in diesem Diagramm die Oszillationen des Drahtes zu sehen.



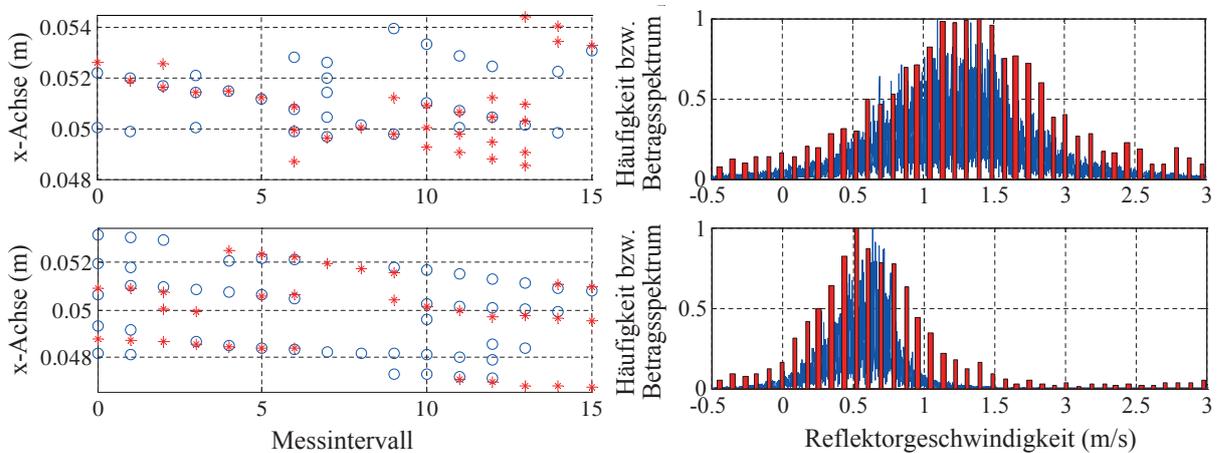
**Abb. 3.10:** Weg-Zeit-Diagramm eines oszillierenden Drahtes, welcher sich in Sensorrichtung bewegt. Reflektorposition aus erstem Sendesignal blau(o) und zweitem Sendesignal rot(\*).

Wird dieses Prinzip der Signalaufbereitung auf das Detektieren von Luftbläschen in einem vollgefüllten Rohr mit zirkulierendem Wasser angewendet, lassen sich die Geschwindigkeiten dieser Reflektoren statistisch auswerten. Hierzu wird eine Versuchsanordnung verwendet, bei der ein schalldurchlässiges Rohr mit einem Durchmesser von 30 mm vollständig unter Wasser getaucht ist (vgl. Abb.3.11).



**Abb. 3.11:** Prinzipbild des Versuchsaufbaus zur Geschwindigkeitsmessung von Luftbläschen in einem vollgefüllten Rohr.

Richtet man nun den Sensor unter einem Winkel von  $\beta = 60^\circ$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) auf das von zirkulierendem Wasser-Luft-Gemisch durchströmte Rohr, resultieren die Reflektorpositionen in den linken Diagrammen von Abb. 3.12. Wird auf zwei aufeinanderfolgende Reflektorpositionen durch Differenzieren die Geschwindigkeit berechnet und deren statistische Geschwindigkeitsverteilung über mehrere Messungen gebildet, ergeben sich die Ergebnisse auf der rechten Seite von Abb. 3.12.

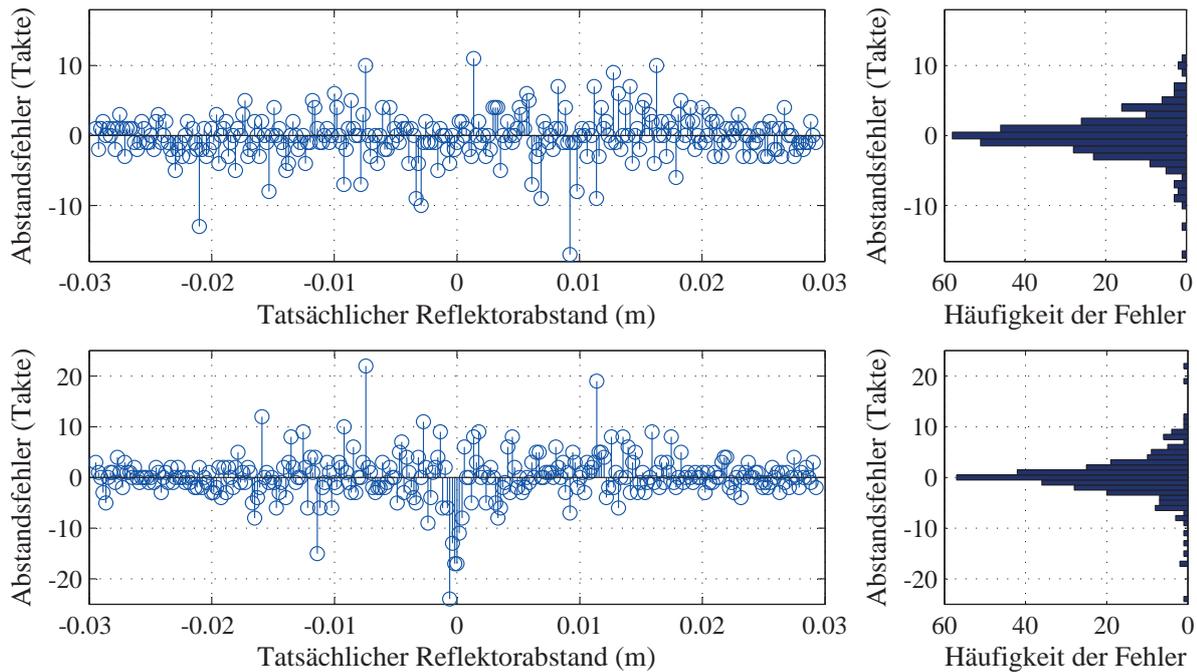


**Abb. 3.12:** Links: Gemessene Reflektorpositionen von Sig.1=\* und Sig.2=o für  $\bar{v}_{in} = 1,5$  m/s (oben) und  $\bar{v}_{in} = 0,6$  m/s (unten) bei  $t_{PRI} = 1$  ms; Rechts: Vergleich von Geschwindigkeitsverteilungen aus den Reflektorpositionen (rot) und der normierten Messung der Dopplerspektren (blau).

Zur Verifizierung der Verteilung wurden bei gleicher Fließgeschwindigkeit und gleicher Position eines bistatischen Sensors Dopplermessungen durchgeführt. Beide normierten Ergebnisse sind in Abb. 3.12 rechts dargestellt und weisen in ihrer Form die gleichen Charakteristika auf. Werden die vorgegebenen mittleren Fließgeschwindigkeiten mit den

Erwartungswerten der gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen verglichen, ergibt sich oben ein Fehler von 0,061 m/s und unten ein Fehler von 0,066 m/s.

Vor Abschluss dieses Kapitels wird ein in [WH69] angedeutetes Phänomen näher analysiert. Hier wird darauf hingewiesen, dass zeitgleich ankommende Echos von unterschiedlichen Reflektoren und unterschiedlicher Codierung miteinander interferieren können und somit zu einer fehlerhaften Reflektorlokalisierung führen. In Abb. 3.13 wird dieser Effekt der Überlagerung simulativ nachgebildet. Dabei wird der ausgewertete Abstand mit dem tatsächlichen verglichen und der Fehler dargestellt. Dem Simulationsmodell aus Kap. 2.3 liegt eine Abtastfrequenz von  $f_s = 10$  MHz zugrunde und das Signal-zu-Rausch-Verhältnis im Empfangssignal beträgt 6 dB. Man erhält eine Fehlerverteilung, die bei gleich codierten Signalen eine Standardabweichung von  $\sigma_{tr} = 5,6$  Takten und bei orthogonalen Signalen  $\sigma_{tr} = 3,2$  Takten verursacht. Folglich kann aufgrund von Interferenzen bei identischen Signalen ein Abstandsfehler von  $\frac{c_w \sigma_{tr}}{2f_s} = 0,4$  mm und bei orthogonalen Signalen ein Fehler von 0,24 mm auftreten.



**Abb. 3.13:** Untersuchung von Trennbarkeit zweier identisch codierter Signale (unten) und zweier orthogonaler Signale (oben) bei einem SNR von 6 dB.

### 3.4 Objektverfolgung

#### 3.4.1 Zustandsschätzung

Nach der Aufbereitung der Sensordaten werden auf Basis der Reflektorpositionen und unter Kenntnis der Sensoreigenschaften sowie des Systemverhaltens Reflektorspuren extrahiert.

Häufig werden zur Spurbildung zeitliche Objektverfolgungsverfahren eingesetzt, welche die Systemzustände aus unsicheren Messwerten schätzen.

Ist die Funktion des Messsystems bekannt und der Zustand eines Objektes vollständig durch Messungen beobachtbar, so lässt sich die Zustandsgröße  $x_k$  aus einer Menge zeitlich aufeinanderfolgender Messdaten  $\mathbf{z}_{1:k} = [z_1, z_2, \dots, z_k]$  bestimmen. Unterliegt nun der Messprozess einer Unsicherheit, kann der Zusammenhang nur noch durch eine statistische Abhängigkeit wiedergegeben werden. Durch die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x_k|\mathbf{z}_{1:k})$  lässt sich nun diese Zustandsgröße trotz Unsicherheiten abbilden. Ziel der nachfolgenden Zustandsschätzungen ist es diese Verteilungsdichte  $p(x_k|\mathbf{z}_{1:k})$  zu bestimmen, sodass sich die Zustandsgröße  $x_k$  zum Zeitpunkt  $k$  auf Basis vergangener Messdaten, Zustände sowie bekannter Modellansätze erschließt. In der Literatur wird die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x_k|\mathbf{z}_{1:k})$  auch a-posteriori-Verteilungsdichte genannt. Grundlage dieser Schätzalgorithmen ist das Konzept der Bayes-Schätzung [Bay63, FHL<sup>+</sup>03].

### Bayes-Schätzung

Werden Verhaltensinformationen von Reflektoren in einem Bewegungsmodell nachgebildet, so lassen sich die Reflektorpositionen bzw. Objektzustände zu einem zukünftigen Zeitpunkt schätzen. Diese Zustandsschätzung kann im Allgemeinen über ein Bewegungsmodell mit der Funktion  $g$  und einer additiven, stochastischen Rauschquelle  $w$  definiert werden:

$$x_k = g(x_{k-1}) + w_k. \quad (3.7)$$

Die Rauschquelle repräsentiert dabei die Unsicherheit bei der nachfolgenden Positionsschätzung.

Vergleichbar mit Thrun und Fox [TBF06] wird im Folgenden der rekursive Lösungsansatz in zwei Stufen beschrieben. Grundsätzlich findet hierbei auf Basis des Bewegungsmodells in der ersten Stufe die Zustandsprädiktion und in der zweiten Stufe die Korrektur der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x_k|\mathbf{z}_{1:k})$  statt. Die Korrektur (Innovation) resultiert dabei aus der Zustandsprädiktion und der aktuellen Messung.

Bei der ersten Stufe und folglich der Prädiktion wird zunächst über das Bewegungsmodell  $g(x_{k-1})$  ein neuer Zustand  $x_k$  geschätzt. Basierend auf den Messungen  $\mathbf{z}_{1:k-1}$  und dem vorherigen Zustand  $x_{k-1}$ , lässt sich für den prädizierten Zustand die Übergangswahrscheinlichkeit  $p(x_k|x_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1})$  angeben. Aus der vorhergegangenen Zustandsschätzung  $p(x_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1})$  und der modellbasierten Übergangswahrscheinlichkeit  $p(x_k|x_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1})$  resultiert dann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Prädiktion bzw. die a-priori-Verteilungsdichte:

$$p(x_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1})p(x_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1})dx_{k-1}. \quad (3.8)$$

Wird davon ausgegangen, dass die Übergangswahrscheinlichkeit die Markov-Bedingung erster Ordnung erfüllt, bzw. die Messwerte  $\mathbf{z}_{1:k-1}$  beim Zustandsübergang von  $x_{k-1}$  auf  $x_k$  keine Informationen beitragen, dann gilt:

$$p(x_k | x_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}). \quad (3.9)$$

Der prädizierte Zustand hängt also ausschließlich vom vorherigen Zustand  $x_{k-1}$  ab.

Nach Eintreffen der aktuellen Messung findet in einem weiteren Schritt die Korrektur der Schätzung statt. Da der Messwert ebenfalls additiv von einer stochastischen Rauschquelle überlagert ist, lässt sich die Eigenschaft des Sensors in Form einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(z_k | x_k, \mathbf{z}_{1:k-1})$  modellieren. Unter der Voraussetzung, dass die Messhistorie ( $\mathbf{z}_{1:k-1}$ ) auch hier keinen Einfluss auf das Messmodell hat, vereinfacht sich die Dichtefunktion zu  $p(z_k | x_k)$ . Diese Funktion gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Messung  $z_k$  zutrifft unter der Bedingung, dass der Zustand  $x_k$  vorherrscht. Die Verteilung wird oft auch Likelihood-Funktion genannt [Kö5]. Mit Hilfe der Dichtefunktion zur Beschreibung der Messunsicherheit  $p(z_k | x_k)$  und der Prädiktionsdichte aus Gl. 3.8, resultiert die Funktion der Auftrittsdichte:

$$p(x_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{c} p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1}). \quad (3.10)$$

Die Variable  $c$  dient zur Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte über alle Zustände  $\int p(x_k | \mathbf{z}_{1:k}) dx_k = 1$  (vgl. [BSL93]). Sie ergibt sich aus der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} c &= p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx_k \\ &= \int p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx_k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit Gl. 3.10 und 3.11 resultiert die Formel des Bayes'schen Filters<sup>1</sup>:

$$p(x_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} = \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{\int p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) dx_k}. \quad (3.12)$$

### Standard-Kalman-Filter

Eine spezielle und zugleich die bekannteste Variante des Bayes-Filters ist der Kalman-Filter (KF) [HL64, Che14]. Er wurde im Jahre 1960 von Kalman vorgestellt und basiert auf einer Erweiterung der Theorie des Wiener-Filters [Kal60]. Der Ansatz verwendet System- und Rauschmodelle und zeichnet sich durch eine recheneffiziente Lösungsroutine aus.

Dieser Filtertyp und dessen Derivate gehören zu der Klasse der parametrisierbaren Verfahren. Dem Filter wird zur Beschreibung der Zustands- und Messwerte eine bekannte

<sup>1</sup>Oft wird für den Bayes-Satz folgende Äquivalenz genutzt:

$$\begin{aligned} p(x_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{p(z_k | x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} = \frac{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, x_k) p(x_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\mathbf{z}_{1:k-1}) p(x_k)}{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\mathbf{z}_{1:k-1}) p(x_k)} \\ &= \frac{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, x_k) p(\mathbf{z}_{1:k-1} | x_k) p(x_k)}{p(z_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\mathbf{z}_{1:k-1})} = \frac{p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{x}_k) p(x_k)}{p(\mathbf{z}_{1:k})} \end{aligned}$$

parametrisierbare Verteilungsfunktion zugrunde gelegt. Oftmals ist die Zustandsvariable  $x$  durch einen mehrdimensionalen Vektor  $\mathbf{x}$  gegeben und die parametrisierbare Verteilungsfunktion durch die multivariante Gauß-Verteilung<sup>1</sup> beschrieben. Die Vorteile dieser Verteilung liegen zum einen in ihrer Unimodalität und zum anderen in der eindeutigen Charakterisierung der Zufallsvariablen über die Parameter des Erwartungswertes  $\hat{\mathbf{x}}$  (Mittelwert) und der Kovarianz  $\mathbf{P}$ :

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{P})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.13)$$

Die Variable  $n$  beschreibt die Vektordimension  $\mathbb{R}^n$  bzw. die Dimension der Kovarianzmatrix  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Beim Standard-Kalman-Filter wird für die nachfolgende Beschreibung des linearen und zeitinvarianten Systems auf die Matrixnotation zurückgegriffen, sodass sich die Bewegungs- bzw. Prozessgleichung gemäß Gl. 3.7 folgendermaßen darstellen lässt:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k. \quad (3.14)$$

Die Variable  $\mathbf{w}_k$  definiert das weiße und gaußverteilte Prozessrauschen und die Matrix  $\mathbf{A}$  das Prozessmodell. Wird diese Notation auf die Messgleichung angewendet gilt:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.15)$$

$\mathbf{H}$  beschreibt das Messmodell und  $\mathbf{v}_k$  wiederum das weiße und gaußverteilte Messrauschen. Ferner sind beide Rauschquellen  $\mathbf{w}_k$  und  $\mathbf{v}_k$  voneinander statistisch unabhängig und mittelwertfrei. Die Kovarianzmatrizen sind definiert durch  $\mathbf{Q} = \mathbb{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T]$  und  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]$ .

In Anlehnung an den Bayes-Filter gliedert sich auch der Kalman-Filter in eine Prädiktions- und eine Innovationsstufe. Aufgrund der gaußverteilten Unsicherheiten beim Prozessmodell unterliegt auch die Prädiktion einer Gaußverteilung, welche mithilfe des Erwartungswertes und der Kovarianz definiert werden kann. Gemäß Gl. 3.8 setzt sich für die Prädiktion die gaußverteilte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  aus der vorhergegangenen Zustandsschätzung  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$  und der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  zusammen:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)} \underbrace{p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})} d\mathbf{x}_{k-1}.$$

Gemäß der Herleitung A.14 folgt aus dieser Gleichung für  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  der geschätzte Erwartungswert  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  und die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k^-$  mit:

<sup>1</sup>Die Annahme einer Gauß-Verteilung ist für einen linearen Kalman-Filter nicht zwingend (vgl. [Hän01]), ermöglicht aber eine Herleitung auf Basis der Bayes'schen Theorie.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})] &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} =: \hat{\mathbf{x}}_k^- \\ \text{Cov}[p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})] &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_k =: \mathbf{P}_k^-\end{aligned}\quad (3.16)$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$  proportional zu einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-)$  mit dem zu erwartenden Zustand  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  und dessen Unsicherheit  $\mathbf{P}_k^-$  zum Zeitpunkt  $k$ . Nach Eintreffen der Messung  $\mathbf{z}_k$  findet in einem zweiten Schritt die Korrektur bzw. Innovation auf Basis der neu dazugewonnenen Information statt. Die Korrektur des Zustandes erfolgt dabei unter Anwendung des Bayes-Satzes in Gl. 3.10, welcher die im Prädiktionsschritt ermittelte Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$  um die Messwahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  erweitert:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{c} \underbrace{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k, \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)} \underbrace{p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-)}.$$

Wird bei der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  davon ausgegangen, dass die Messungen gaußverteilt sind, kann diese mit dem Erwartungswert und der Kovarianz definiert werden. Der Erwartungswert zur Messung ergibt sich aus dem Messmodell  $\mathbf{H}$  mit dem geschätzten Zustand  $\mathbf{x}_k$  (vgl. Gl. 3.15<sup>1</sup>) und die Kovarianz aus dem Messrauschen  $\mathbf{R}_k$ . Um nun den optimalen Zustand bestimmen zu können, werden zunächst  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$  und  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$  in der oberen Gleichung über die multivariante Gaußverteilung formuliert

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{1}{c(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\mathbf{R}_k)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)\right]\right\} \cdot \\ &\quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\mathbf{P}_k^-)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T (\mathbf{P}_k^-)^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)\right]\right\}\end{aligned}$$

und anschließend der plausibelste Erwartungswert über die Maximum-Likelihood-Schätzung gesucht. Hierzu wird die Funktion logarithmiert, differenziert und gleich Null gesetzt:

$$\left.\frac{\partial \log p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_k}\right|_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_k} = \mathbf{0}.$$

Da der Maximalwert der Funktion gleich dem Erwartungswert ist, führt dieses Ergebnis zu einer Korrektur des geschätzten Erwartungswertes in Gl. 3.16 (Herleitung siehe Anhang A.15):

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \underbrace{\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}}_{\mathbf{K}_k} \underbrace{(\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-)}_{\mathbf{v}_k}. \quad (3.17)$$

Der Vektor  $\mathbf{v}_k$  entspricht dem Mess-zu-Prädiktionsfehler und der Term  $\mathbf{K}_k$  wird oft als Kalman-Faktor bezeichnet. Zusammen mit der Innovationskovarianz  $\mathbf{S}_k = \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$  kann der Kalman-Faktor auch wie folgt formuliert werden:

<sup>1</sup>Für das Messrauschen muss gelten  $\mathbf{R}_k = 0$ .

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1}. \quad (3.18)$$

Zur Bestimmung der korrigierten Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$ , wird die Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$  ein zweites Mal differenziert und gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_k^2} = \mathbf{0}.$$

Daraus folgt nach Umstellen der Gleichung die inverse Kovarianz (vgl. Anhang A.15):

$$\mathbf{P}_k^{-1} = (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}.$$

Durch Anwenden der Sherman-Morrison-Formel vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \left( (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \\ &= \left[ \mathbf{E} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \right] \mathbf{P}_k^- \\ \mathbf{P}_k &= [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_k^-, \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix definiert<sup>1</sup>.

Unter der Bedingung, dass Prozess- und Messmodell (vgl. Gl. 3.14, 3.15) linear sind, ist der Standard-Kalman-Filter ein effizientes Verfahren zur Schätzung von internen Systemzuständen. Bei starken Turbulenzen (Reynolds-Zahl  $Re > 2300$  vgl. Gl. 2.46) weisen die Reflektoren jedoch keine gleichförmige Bewegung auf, weshalb die linearen Modellansätze nur in erster Näherung verwendet werden können. Zur Verbesserung dieses Verfahrens ist daher die Kalman-Filtertheorie auf nichtlineare Modelle zu erweitern.

### Extended-Kalman-Filter

Eine Erweiterung des Standard-Kalman-Filters auf nichtlineare Modelle bietet der Extended-Kalman-Filter (EKF). Das Verfahren beruht auf der Grundidee des Standard-Kalman-Filters, ergänzt diesen allerdings durch eine Linearisierung der Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  um deren Arbeitspunkte.

<sup>1</sup>Oft wird die Kovarianz zusammen mit der Innovationskovarianz  $\mathbf{S}_k$  angegeben, dann gilt  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T = (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^-)^T \Leftrightarrow \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T = \mathbf{H} \mathbf{P}_k^-$  und eingesetzt in Gl. 3.19 folgt  $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T$ . Zu beachten ist, dass die Gleichung zur Aktualisierung der Kovarianz  $\mathbf{P}_k$  nur bei optimalem Kalman-Faktor ihre Gültigkeit besitzt. In der Praxis führen jedoch häufig numerische Effekte zu Rechenungenauigkeiten, sodass oft auf die rechenintensivere JOSEPH-Form ausgewichen wird:  $\mathbf{P}_k = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_k^- [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$ .

Für das Prozess- und Messmodell sind die nichtlinearen Zustandsbeschreibungen

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\quad (3.20)$$

gegeben. Die Approximation der nichtlinearen Funktion im Arbeitspunkt erfolgt über die Taylorreihenentwicklung, welche in der Regel nach der ersten Ableitung (EKF 1. Ordnung) abgebrochen wird. Somit entspricht die Zustandsbeschreibung für das Prozessmodell im Arbeitspunkt  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ :

$$\mathbf{x}_k \approx \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \bigg|_{\mathbf{x}_{k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}}}_{\mathbf{G}_k} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_k.$$

$\mathbf{G}$  ist die Jacobi-Matrix im  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , wobei  $n$  die Länge des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$  definiert. Vergleichbar mit dem Standard-Kalman-Filter wird nun die Dichte der Prädiktionswahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  über das approximierte Prozessmodell formuliert

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \mathbf{Q}_k)} \underbrace{p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})} d\mathbf{x}_{k-1},$$

sodass der Erwartungswert und die Kovarianz für die Zustandsprädiktion abgeleitet werden können:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}) \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{Q}_k.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Neben der Linearisierung des Prozessmodells, wird beim EKF auch das Messmodell auf gleiche Weise im Arbeitspunkt  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  approximiert:

$$\mathbf{z}_k \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \bigg|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-}}_{\mathbf{H}_k} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k.$$

Die Matrix  $\mathbf{H}$  gleicht auch beim Messmodell einer Jacobi-Matrix. Mit diesem approximierten Messmodell, den Prädiktionsinformationen und der aktuellen Messung  $\mathbf{z}_k$  resultieren die Korrekturkoeffizienten auf Grundlage der Bayes-Theorie:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{c} \underbrace{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{z}_k, \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-), \mathbf{R}_k)} \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-)}.$$

Äquivalent zum Standard-Kalman-Filter ergeben sich aus der ersten und zweiten Funktionsableitung die Koeffizienten zur Systemaktualisierung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \\
\mathbf{P}_k &= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-
\end{aligned} \tag{3.22}$$

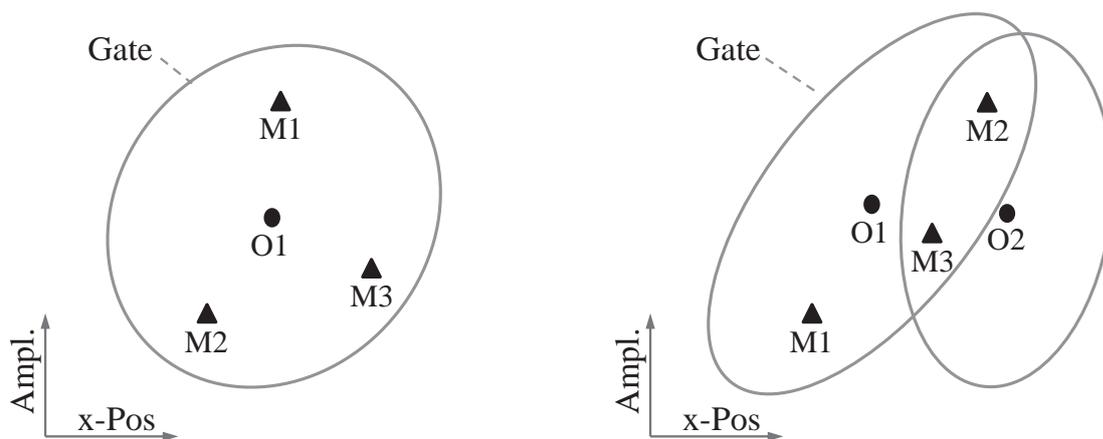
Aufgrund des vergleichsweise geringen Rechenaufwandes wird der EKF 1. Ordnung bei leicht nichtlinearen Modellansätzen häufig eingesetzt. Bei zunehmender Nichtlinearität der Modelle kann dieses Verfahren durch eine Taylorreihenentwicklung 2. Ordnung erweitert werden (EKF 2. Ordnung). Die Approximation der Taylorreihenentwicklung wird hierbei um den quadratischen Term ergänzt, sodass neben der Jacobi-Matrix im linearen Term noch zusätzlich die Hesse-Matrix im quadratischen Term notwendig wird. Die Hesse-Matrix führt jedoch wiederum zu einem höheren Rechenaufwand, sodass das EKF höherer Ordnung nur sehr selten Anwendung findet [KÖ5, FHL<sup>+</sup>03, BSLK01].

Eine weitere Filtermethode zur Lösung von nichtlinearen Problemen ist der Unscented-Kalman-Filter (UKF). Im Vergleich zum EKF besteht das Hauptaugenmerk beim UKF nicht in der Approximation der nichtlinearen Funktionen  $g$  und  $h$  über eine Taylorreihenentwicklung, sondern in der deterministischen Bestimmung von sog. Sigma-Punkten zur Repräsentation einer Normalverteilung. Dabei wird nach [JUDW95] die Idee verfolgt, dass es einfacher ist, eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über  $2n + 1$  Sigma-Punkte ( $\mathcal{X}$ ) anzunähern, als eine Taylorreihe an die tatsächliche nichtlineare Funktion. Die Variable  $n$  definiert in diesem Fall die Dimension des Zustandsraums  $\mathbf{x}$  bzw. die Dimension der Gaußverteilung. Ergänzend zu den parametrisierbaren Verfahren sei noch der Informationsfilter (IF) [BSL93, GDWH92, Mut98, Gro02] genannt. Identisch zum Kalman-Filter wird auch bei diesem Filter die Wahrscheinlichkeitsdichte über eine Gaußfunktion definiert. Die Schätzung findet allerdings im Informationsraum statt, sodass zur eindeutigen Beschreibung der Gaußfunktion nicht auf den Erwartungswert und die Kovarianz zurückgegriffen werden muss. Stattdessen wird die Gaußfunktion im Informationsraum über einen Informationsvektor  $\xi$  und eine Informationsmatrix  $\Sigma$  formuliert.

Neben den bisher erläuterten parametrisierbaren Filtern existieren weitere Filteransätze, welche auf nicht vordefinierte Dichtefunktionen zur Beschreibung von  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$  (vgl. Gl. 3.10) aufbauen. Einige Filter dieser Klasse nutzen statistische Verfahren und werden unter dem Sammelbegriff der Monte-Carlo-Methode (MC) zusammengefasst [DdFG01]. Die Filtertypen lassen sich ähnlich wie das EKF oder UKF auf nichtlineare Probleme anwenden, bieten allerdings in ihrer elementaren Konstellation einen relativ einfachen Formelapparat, der flexibel einsetzbar ist. Dabei wird beim sequentiellen Monte-Carlo-Filter (SMC-Filter) die Idee verfolgt, die nichtlineare Funktion über eine hinreichend große und breit gefächerte Anzahl an Samples zu approximieren. Je höher die Anzahl der Samples ist, desto genauer ist die Lösung. Ein Nachteil jedoch ist der höhere Rechenaufwand im Gegensatz zur Kalman-Filtertheorie [TBF06].

### 3.4.2 Datenassoziation

Unter der Annahme, dass jede der Reflektorspuren im Fluid durch einen Schätzfilter repräsentiert wird, entsteht mit Eintreffen neuer Reflektormessungen und demnach noch vor der Zustandsaktualisierung ein Zuordnungsproblem. Hierfür werden in den nachfolgenden Kapiteln sog. Datenassoziations-Verfahren vorgestellt, welche die Qualität der Spurverfolgung maßgeblich beeinflussen. Die Problemstellung lässt sich im Wesentlichen durch zwei Szenarien (vgl. Abb. 3.14) verdeutlichen.



**Abb. 3.14:** Qualitatives Assoziationsszenario mit  $M1, M2, M3$  = aktuelle Messung,  $O1, O2$  = Messprädiktion von Filter 1 bzw. 2 ( $\hat{=}$  Objekte, Reflektorspuren). Szenario links: Einfache Zielverfolgung; rechts: Mehrfachzielverfolgung, vgl. [SD08].

Existieren innerhalb des Vertrauens- bzw. Gating-Bereichs einer Messprädiktion ( $O1$ ) mehrere Reflektormessungen ( $M1$ - $M3$ ), stellt sich die Frage nach der korrekten Messpunkt-zu-Filter-Zuordnung (vgl. Abb. 3.14 links). Basierend auf dieser Fragestellung werden Algorithmen vorgestellt, welche unter einer Vielzahl von Reflektormessungen den nächsten bzw. wahrscheinlichsten Messpunkt auswählen. Während beim „Nearest Neighbour“-Verfahren eine eindeutige Zuweisungsentscheidung zur Lösung des Konfliktes bestimmt wird, werden beim „Probabilistic Data Association“-Verfahren Zuweisungstendenzen berechnet.

Analog zum Szenario in Abb. 3.14 rechts, treten mit zunehmender Dichte an Reflektorspuren Überschneidungen der Gating-Bereiche auf. Fällt nun einer oder mehrere Messpunkte einer Reflektorspur in den Gating-Bereich einer benachbarten Reflektorspur, so konkurrieren beide Filter ( $O1$  und  $O2$ ) um jene Messpunkte ( $M2$  und  $M3$ ). Neben dem Gesichtspunkt der Messpunkt-zu-Filter-Zuordnung muss somit beim Szenario der Mehrfachzielverfolgung noch zusätzlich das gesamtheitliche (globale) Zuordnungsproblem gelöst werden. Hierzu werden Lösungsverfahren wie das „Global Nearest Neighbour“ und das „Joint Probabilistic Data Association“ erläutert. Bei der Gegenüberstellung von diversen Objektverfolgungsarten wird jedoch auf das „Joint Probabilistic Data Association“-Verfahren als globaler Ansatz zurückgegriffen, da dieses mit gegebenen Rechenressourcen noch in adäquater Rechenzeit realisiert werden kann.

## Gating

Zur Reduktion der Rechenleistung findet vor der Datenassoziation eine Validierung der Messungen statt. Dabei wird nach jeder neu eingetroffenen Messung um den prädizierten Messzustand ( $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ) des Schätzfilters ein Suchbereich (sog. Gating-Bereich oder Validations-Region) aufgespannt. Nur Messpunkte, welche innerhalb dieses Suchbereichs liegen, werden als realistische Hypothesen des zu verfolgenden Objektes anerkannt. Die am häufigsten angewendeten Gating-Formen sind neben der einfachsten rechteckigen Gating-Technik die elliptische. Da bei den Schätzfiltern die Zustände des Messvektors auch in höherer Dimension (Positionen und Amplitude) vorliegen können, wird in dieser Arbeit eine elliptische Gating-Form verwendet.

Zur Bestimmung des elliptischen Gating-Bereichs, ist der Abstand zwischen prädiziertem und tatsächlichem Messpunkt über die skaleninvariante Mahalanobis-Distanz zu berechnen. Die Mahalanobis-Distanz ist wie folgt definiert:

$$d_{MH_k} = \sqrt{(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)^T \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)}. \quad (3.23)$$

Die Differenz  $\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  beschreibt den Mess-zu-Prädiktionsfehler und  $\mathbf{S}_k$  die Innovationskovarianz<sup>1</sup>. Unter Laborbedingungen konnte nachgewiesen werden, dass sowohl die Mess-zu-Prädiktionsfehler von x-Positionen, als auch die der Amplituden gaußverteilt sind (siehe Anhang Kap. A.17). Daraus folgt, dass das Quadrat der Mahalanobis-Distanz einer  $\chi^2$ -Verteilung entspricht. Um nun die Größe des Gating-Bereichs bestimmen zu können, gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten [WWY08, KM03]. Die einfachste und zugleich naheliegendste Methode berechnet sich aus der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $M$  Freiheitsgraden.

Hierbei wird die Gating-Wahrscheinlichkeit  $P_G$  eingeführt, welche die Fläche der  $\chi^2$ -Verteilung entlang der quadratischen Mahalanobis-Distanz bis zum Schwellwert  $k_G$  definiert:

$$P_G = P(d_{MH_k}^2 \leq k_G) = \chi^2(k_G). \quad (3.24)$$

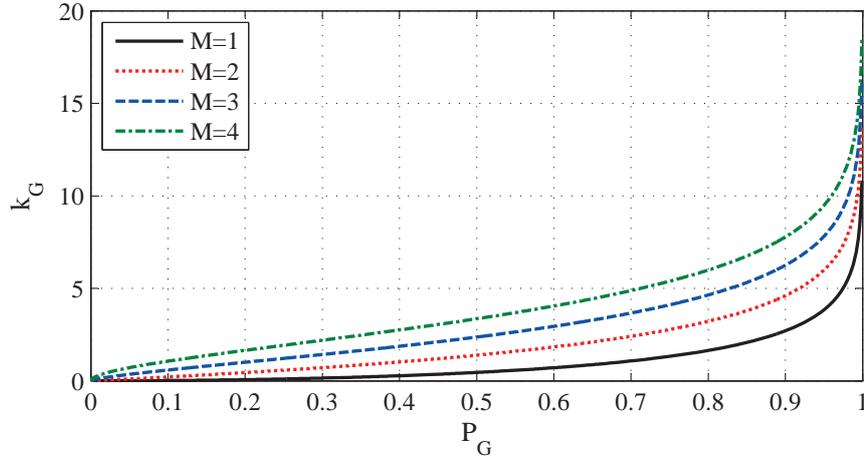
Wird nun davon ausgegangen, dass die Gating-Wahrscheinlichkeit und der Freiheitsgrad bzw. die Messvektordimension  $M$  gegeben sind, resultiert der Schwellwert aus der kumulativen inversen  $\chi^2$ -Verteilung ( $F^{-1}(\cdot|M)$ ):

$$k_G = F^{-1}(P_G|M). \quad (3.25)$$

Der Zusammenhang zwischen Schwellwert und Gating-Wahrscheinlichkeit bei gegebenem Freiheitsgrad ist in Abb. 3.15 ersichtlich. Für typische Wahrscheinlichkeiten kann der Schwellwert aus  $\chi^2$ -Verteilungstabellen in [BSMM01]<sup>2</sup> entnommen werden. Auf Basis

<sup>1</sup> $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$

<sup>2</sup>In der Tabelle ist die  $\chi^2$ -Verteilung über dem Schwellwert  $\alpha$  gegeben, welcher wie folgt zu interpretieren



**Abb. 3.15:** Zusammenhang zwischen der Gating-Wahrscheinlichkeit  $P_G$  und dem Schwellwert  $k_G$  für unterschiedliche Freiheitsgrade bzw. der Messvektordimensionen  $M$  [Mun11].

des Schwellwertes lässt sich nun die Anzahl der Messpunkte und damit der validen Hypothesen für ein Objekt reduzieren. Ist nun die quadratische Mahalanobis-Distanz zwischen prädiziertem und realem Messpunkt kleiner als der Schwellwert, so wird der Messpunkt für dieses Objekt im nachfolgenden Assoziationsverfahren weiterverwendet, ansonsten ausgeblendet. Für eine effiziente Weiterverarbeitung lassen sich die gewonnenen Informationen mithilfe einer binären Gating-Matrix beschreiben (vgl. z.B. [Rao96, Mun11]):

$$\mathbf{\Omega}_k = [\omega_{k,i,t}] \quad \text{mit} \quad \omega_{k,i,t} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } d_{MH_k}^2 \leq k_G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Dabei definiert  $t = 1, \dots, T$  den Objektindex und  $i = 1, \dots, m_k$  den Hypothesen- bzw. Messpunktindex der Gating-Matrix  $\mathbf{\Omega}_k$ .

Neben der Validation von Messpunkten, kann mit dem Schwellwert  $k_G$  auch das Volumen des Gating-Ellipsoids bestimmt werden. Zusammen mit der Innovationskovarianz des Zustandsfilters  $\mathbf{S}_k$ , dem Schwellwert  $k_G$  und einer Proportionalitätskonstante  $C_M$ , berechnet sich das Volumen im  $M$ -dimensionalen Freiheitsgrad (bzw. Messraum) gemäß:

$$V_k(M) = C_M \sqrt{\det(\mathbf{S}_k)} k_G^{M/2}. \quad (3.27)$$

Die Proportionalitätskonstante hängt dabei von der Dimension des Messraums ab. Sie ergibt sich aus der Gleichung  $C_M = \frac{\pi^{M/2}}{\Gamma(\frac{M}{2}+1)}$ , wobei  $\Gamma(\cdot)$  der Gamma-Funktion entspricht<sup>1</sup>.

ist:  $P_G = 1 - \alpha$ .

<sup>1</sup>Ein Messvektor der Dimension  $M = 1$  entspricht einer Konstante  $C_1 = 2$ ,  $M = 2 \Rightarrow C_2 = \pi$ ,  $M = 3 \Rightarrow C_3 = 4\pi/3$ ,  $M = 4 \Rightarrow C_4 = \pi^2/2$ , usw. (vgl. [KBS04]).

### Nearest Neighbour / Global Nearest Neighbour

Das trivialste Assoziationsverfahren ist das sog. Nearest Neighbour Verfahren (NN). Hierbei werden den Filtern stets jene Messpunkte zugeordnet, welche den Messprädiktionen der Filter am nächsten sind. Messpunkte außerhalb des Gating-Bereichs werden als Falschalarm gewertet und in der Zuordnungs-Matrix  $\mathbf{D}_{\omega_k}$  die Elemente  $d_{\omega_k,i,t}$  leer gelassen, wohingegen die Distanzen der Messpunkte innerhalb des Bereichs in der Matrix hinterlegt werden.  $t$  indiziert die Objekte und  $i$  die aktuellen Messpunkte, vgl. 3.14. Um zu gewährleisten, dass Filter mit hohen Prädiktionsunsicherheiten und fehlendem Messpunkt anderen Filtern den Messpunkt nicht wegnehmen, werden in [Bla86] die Elemente der Zuordnungs-Matrix nach folgender Funktion berechnet:

$$d_{\omega_k,i,t} = \sqrt{d_{MH_{k,i,t}}^2 + \ln(\det(S_{k,i,t}))}. \quad (3.28)$$

Messprädiktionen von Filtern mit hohen Unsicherheiten werden somit über die Erweiterung der Distanzfunktion durch die Innovationskovarianz  $S_{k,i,t}$  stärker bestraft. Der Messpunkt  $i$  mit dem geringsten Wert  $d_{\omega_k,i,t}$  in der Zuordnungs-Matrix wird somit dem Objekt  $t$  zugewiesen.

Trotz der Erweiterung können beim NN-Verfahren Konflikte auftreten, sofern derselbe Messpunkt zwei Objekten zugeordnet wird. Lösen lässt sich dieser Disput, indem nicht nur ein Objekt auf dessen nächste Messpunkte untersucht wird, sondern auch die Interaktion zwischen mehreren benachbarten Objekten und deren nächsten Messpunkten. Beim Global Nearest Neighbour Verfahren (GNN) wird diese Problematik mit einbezogen. Über eine binäre Matrix  $\mathbf{C}_k$  wird die Zuweisung von Objekt und Messpunkt wie folgt definiert:

$$c_{k,i,t} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Objekt } t \text{ der Messung } i \text{ zugewiesen wird} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fließt z.B. ein Reflektor aus dem Ultraschallstrahl heraus, kann dem Objekt kein weiterer Messpunkt zugewiesen werden. Um die Minimierungsanforderungen dennoch lösen zu können, ist die Matrix  $\mathbf{C}_k$  durch Objekt-„Platzhalter“ in der Zeile  $i = 0$  zu erweitern. Kann somit dem Objekt  $t$  kein Messpunkt  $i$  zugeordnet werden, dann entspricht dies in der Matrix  $c_{k,0,t} = 1$ . Umgekehrt müssen auch Messpunkt-„Platzhalter“ in der Matrix vorliegen, damit neu detektierte Reflektoren im Ultraschallstrahl abgebildet werden können. Folglich ist der Messpunkt  $i$ , welcher keinem Objekt zugeordnet werden kann, in der ersten Spalte  $t = 0$  der Matrix mit  $c_{k,i,0} = 1$  gekennzeichnet.

Zur Aufstellung einer Zielfunktion ist zusätzlich eine Gewichtung der Zuweisungen notwendig, welche über die Distanzen realisiert wird:

$$a_{k,i,t} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \text{ oder } t = 0 \text{ („Platzhalter“)} \\ k_G - d_{MH_{k,i,t}}^2 & \text{wenn } d_{MH_{k,i,t}}^2 < k_G \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist folgende Zielfunktion zu minimieren:

$$\min \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{t=0}^T a_{k,i,t} c_{k,i,t} \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \quad (3.29)$$

$$\sum_{i=0}^{m_k} c_{k,i,t} = 1, \quad i = 1, \dots, m_k$$

$$\sum_{t=0}^T c_{k,i,t} = 1, \quad t = 1, \dots, T.$$

Zur Lösung dieser Optimierungsaufgabe wurde 1986 von Jonker/Volgenant [JV87] und 1989 von Bertsekas [BC89, Ber91, Ber92] der sog. Auktions-Algorithmus vorgestellt. Vergleichbar mit einer Auktion gliedert sich dieser Algorithmus in eine Bieter- und eine Zuordnungs-Phase. In der Bieter-Phase gibt jedes Objekt für einen Messpunkt ein „Gebot“ ab. Bieten mehrere Objekte um einen Messpunkt, steigt der „Preis“ bis der Messpunkt mit dem „Gebot“ zufrieden ist. In der Zuordnungs-Phase findet die Zuweisung bzw. Abweisung des Objektes zum Messpunkt statt. Diese beiden Phasen werden iterativ wiederholt, bis eine optimale Zuordnung gefunden ist (vgl. [BP99]).

Nachdem das Zuordnungsoptimum zwischen den Objekten und Messpunkten über das NN- bzw. das GNN-Verfahren bestimmt ist, lassen sich auf Basis dieser Informationen die Zustandsfilter der jeweiligen Objekte aktualisieren. Für die nachfolgende Gegenüberstellung der Assoziationsverfahren findet lediglich das lokale NN-Verfahren Anwendung, da dieses im Gegensatz zum GNN-Verfahren einen wesentlich geringeren Rechenaufwand aufweist. In Hinblick auf die Realisierung ist das NN-Verfahren wegen seines geringen Rechenaufwands besonders geeignet für einen embedded Computer. Analysen nach [BST75, KBS04] belegen, dass mit zunehmender Dichte der Störmesspunkte das Verfahren instabil wird.

### Probabilistic Data Association Filter

Dieser Filtertyp basiert auf der PDA-Theorie (Probabilistic Data Association) nach [BST75, BSF88] und dient zur Spurverfolgung eines Objektes  $t$ . Im Gegensatz zum NN-Verfahren werden beim PDA-Filter (PDAF) alle validierten Nachbarn eines Objektes ausgewertet und mit Zuweisungswahrscheinlichkeiten versehen. Somit beruht die Aktualisierung des Zustandsfilters bei diesem Assoziationsverfahren nicht auf einer binären (harten) Zuweisungsentscheidung, sondern auf einer Verrechnung der Zuweisungswahrscheinlichkeiten mit ihren Mess-zu-Prädiktionsfehlern. Das Verfahren zählt daher aufgrund

der gesamtheitlichen Betrachtung aller Messpunkte und deren Zuweisungswahrscheinlichkeiten zur sog. Soft-Decision-Klasse. Neben den Zuweisungswahrscheinlichkeiten wird beim PDA-Verfahren auch der Wahrscheinlichkeit einer Fehlmessung Sorge getragen, sodass nach [KBS04, CLL<sup>+</sup>96, LBS93] eine sehr effiziente Zielverfolgung bei dichten Stördaten möglich ist.

Verfolgt der Filtertyp ein Objekt mit Namen  $t$ , kann dieses für einen Satz validierter Messpunkte  $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_{i,k}\}_{i=1}^{m_k}$  zum Zeitpunkt  $k$  eines der folgenden Zuweisungsereignisse einnehmen:

$$\epsilon_{i,k} = \begin{cases} \{\text{Der Messpunkt } \mathbf{z}_{i,k} \text{ stammt vom Objekt } t\}, & i = 1, \dots, m_k \\ \{\text{Keiner der Messpunkte in } \mathbf{Z}_k \text{ stammt vom Objekt } t\}, & i = 0. \end{cases}$$

Die Anzahl der im Gating-Bereich vorherrschenden Messpunkte ist hierbei mit  $m_k$  definiert. Sind nun sämtliche, validierte Messpunkte  $\mathbf{Z}_{1:k} = \{\mathbf{Z}_j\}_{j=1}^k$  bis einschließlich dem Zeitraum  $k$  bekannt, resultiert die Zuweisungswahrscheinlichkeit  $p_{i,k}$  aus:

$$p_{i,k} = P\{\epsilon_{i,k} | \mathbf{Z}_{1:k}\} = P\{\epsilon_{i,k} | \mathbf{Z}_k, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}.$$

Unter Verwendung der Bayes-Formel für ein kombiniertes Modell der Auftretenswahrscheinlichkeit  $P\{\cdot\}$  und der Verteilungsdichte einer kontinuierlichen Zufallsvariable  $p(\cdot)$ , lässt sich die Zuweisungswahrscheinlichkeit nach [BSL93] definieren:

$$\begin{aligned} p_{i,k} &= P\{\epsilon_{i,k} | \mathbf{Z}_k, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\} \\ &= \frac{p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{\epsilon_{i,k} | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}}{p(\mathbf{Z}_k | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{\epsilon_{i,k} | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}}{\sum_{j=0}^{m_k} p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{j,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{\epsilon_{j,k} | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}} \quad i = 0, 1, \dots, m_k. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zur Bestimmung der Verteilungsdichte  $p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1})$  müssen zwei Annahmen getroffen werden (vgl. [KBS04]). Zum einen wird davon ausgegangen, dass der vom Objekt stammende Messpunkt stets normalverteilt ist und zum anderen die Störmesspunkte innerhalb des Gating-Bereichs einer räumlichen Gleichverteilung mit  $\frac{1}{V_k}$  genügen. Das Volumen  $V_k$  berechnet sich für einen  $M$ -dimensionalen Messraum nach Gl. 3.27.

Unter Verwendung der Messprädiktion  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  und Innovationskovarianz  $\mathbf{S}_k$  der Zustandsfilterung nach Kap. 3.4, lässt sich die erste Annahme, dass der Messpunkt  $(\mathbf{z}_{i,k})$  zum Zeitpunkt  $k$  von dem Objekt  $t$  stammt, durch die Gl.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_{i,k} | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) &= \frac{1}{P_G} \mathcal{N}(\mathbf{z}_{i,k}, \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k) \\ &= \frac{1}{P_G} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,k}, 0, \mathbf{S}_k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

darstellen. Der Faktor  $P_G$  definiert hierbei die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der korrekte Messpunkt innerhalb des zuvor festgelegten Gating-Bereichs liegt<sup>1</sup> und der Faktor  $\mathbf{v}_{i,k}$  entspricht dem Mess-zu-Prädiktionsfehler gemäß Gl. 3.17. Zusammen mit der zweiten Annahme einer gleichförmigen räumlichen Verteilung für Störmesspunkte resultiert die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1})$  aus:

$$p(\mathbf{Z}_k | \epsilon_{i,k}, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \begin{cases} V_k^{-m_k+1} P_G^{-1} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,k}, 0, \mathbf{S}_k), & i = 1, \dots, m_k \\ V_k^{-m_k}, & i = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Die Auftretens- bzw. die a-priori Zuweisungswahrscheinlichkeit  $P\{\epsilon_{i,k} | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}$  in Gl. 3.30 lässt sich nach [BST75, BSF88, KBS04] über die Anzahl der validierten Messpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} P\{\epsilon_{i,k} | m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\} &= P\{\epsilon_{i,k} | m_k\} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{m_k} P_D P_G}{\left[ P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k-1)} \right]}, & i = 1, \dots, m_k \\ \frac{(1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k-1)}}{\left[ P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k-1)} \right]}, & i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Der Faktor  $P_D$  beschreibt hierbei die Wahrscheinlichkeit mit der der korrekte Messpunkt detektiert wird und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mu_F(\cdot)$  spiegelt die Anzahl an Falschmessungen im Gating-Bereich wieder. Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichung ist im Anhang A.16 beigefügt.

Auf Grundlage der diskreten binominalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mu_F(\cdot)$ , haben sich in der praktischen Umsetzung zwei zweckdienlichere Ansätze durchgesetzt [BSL95, Bre10, KBS04]. Die erste und zugleich realistischste Näherung zur Ermittlung der Anzahl an Fehlmessungen im Volumen  $V_k$ , wird mithilfe eines räumlichen Poisson-Modells

$$\mu_F(m_k) = e^{-\lambda V_k} \frac{(\lambda V_k)^{m_k}}{m_k!} \quad (3.34)$$

realisiert. In der oberen Gl. charakterisieren die beiden Faktoren  $\lambda V_k$  die zu erwartende Anzahl an Fehlmessungen im Gating-Bereich. Die Herausforderung bei der Implementierung dieses Modellansatzes besteht in der Schätzung des Intensitätsparameters  $\lambda$ , sodass die modellierte und wahre Fehlalarmrate sowohl räumlich, als auch zeitlich miteinander übereinstimmen. Um diese Problematik zu lösen, werden in [LL00, MSMM05] Methoden zur Schätzung von  $\lambda$  vorgestellt. Ist jedoch der Informationsgehalt über die Störmessdaten begrenzt, wird oftmals auf ein nicht parametrisierbares Modell zurückgegriffen. Dabei wird davon ausgegangen, dass jede Anzahl an detektierten Stördaten gleich wahrscheinlich sein kann:

$$\mu_F(m_k - 1) = \mu_F(m_k) = \mu_F(m_k + 1) = \varpi. \quad (3.35)$$

<sup>1</sup>Oft wird der Faktor  $P_G \cong 1$  gesetzt, siehe [Bre10].

Basierend auf diesem Modellansatz für  $\mu_F(\cdot)$  wird im Weiteren die Zuweisungswahrscheinlichkeit bestimmt<sup>1</sup>. Hierzu werden Gl. 3.35, 3.33, 3.13 und 3.32 in 3.30 eingesetzt und umgeformt:

$$p_{i,k} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{v}_{i,k})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{v}_{i,k})}}{\frac{(1-P_D P_G)^{m_k}}{P_D V_k} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{S})} + \sum_{j=1}^{m_k} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,k})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{v}_{j,k})}} & i = 1, \dots, m_k \\ \frac{\frac{(1-P_D P_G)^{m_k}}{P_D V_k} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{S})}}{\frac{(1-P_D P_G)^{m_k}}{P_D V_k} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{S})} + \sum_{j=1}^{m_k} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{v}_{j,k})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{v}_{j,k})}} & i = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Der Faktor  $n$  entspricht, wie auch in Gl. 3.13, der Dimension des Zustandsvektors im  $\mathbb{R}^n$ . Eine zusätzliche Verbesserung der Zuweisungswahrscheinlichkeit lässt sich nach [LL00, MSMM05] über eine sinnvollere Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mu_F$  für nicht parametrisierbare Modelle erzielen.

Auf Basis dieser Zuweisungswahrscheinlichkeiten lassen sich im Aktualisierungsschritt des Zustandsfilters die gewonnenen Informationen weiterverarbeiten. Beim Standard-Kalman-Filter findet die Zustandsaktualisierung durch Gl. 3.17 statt. Übertragen auf den PDAF resultiert nun die Korrektur des geschätzten Erwartungswertes  $\hat{\mathbf{x}}_k$  aus:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \bar{\mathbf{v}}_k.$$

Der erweiterte Mess-zu-Prädiktionsfehler  $\bar{\mathbf{v}}_k$  berechnet sich dabei aus dem Skalarprodukt der dazugewonnenen Zuweisungswahrscheinlichkeiten und den einzelnen Messresiduen gemäß

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \sum_{i=1}^{m_k} p_{i,k} (\mathbf{z}_{i,k} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \sum_{i=1}^{m_k} p_{i,k} \mathbf{v}_{i,k}.$$

Zusätzlich ist die Aktualisierungsgleichung zur Bestimmung der Kovarianzmatrix zu erweitern:

$$\mathbf{P}_k = p_{0,k} \mathbf{P}_k^- + (1 - p_{0,k}) \mathbf{P}_k^* + d\mathbf{P}_k. \quad (3.37)$$

Hierbei ist die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k^-$  bereits aus Gl. 3.16 bzw. 3.21 bekannt. Zudem beschreibt die Variable  $\mathbf{P}_k^*$  identisch zu Gl. 3.19 die korrigierte Kovarianzmatrix mit dem Kalman-Faktor

$$\mathbf{P}_k^* = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_k^- \quad (3.38)$$

und  $d\mathbf{P}_k$  nach [BSDH09, BSLK01] die Änderung der Zuweisungswahrscheinlichkeiten von Messpunkten, welche von einem Objekt stammen, mit:

$$d\mathbf{P}_k \hat{=} \mathbf{K}_k \left[ \sum_{i=1}^{m_k} p_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k}^T - \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T \right] \mathbf{K}_k^T. \quad (3.39)$$

<sup>1</sup>Der Wert des Parameters  $\varpi$  für das nicht-parametrisierbare Modell kürzt sich im weiteren Verlauf der Herleitung.

### Joint Probabilistic Data Association Filter

Der Joint Probabilistic Data Association Filter (JPDAF) stellt eine Erweiterung des PDA-Filters dar. Während der PDA-Algorithmus lediglich einen Lösungsansatz für eine Einfachzielverfolgung darstellt, werden beim JPDA-Algorithmus Mehrfachzielverfolgungen gelöst. Bei diesem Filtertyp werden somit die Zuweisungswahrscheinlichkeiten  $p_{i,t,k}$  der Messpunkte  $i = 1, \dots, m_k$  zum Zeitpunkt  $k$  nicht nur für ein Objekt  $t$  berechnet, sondern gesamtheitlich über alle Objekte  $t = 1, \dots, T$ . Dieser gesamtheitliche Zusammenhang von Messpunkten M und Objekten O wird unter der Betrachtung des Mehrfachzielszenarios in Abb. 3.14 deutlich. Wird davon ausgegangen, dass M3 mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit zu O1 gehört, dann steigt zwangsläufig die Zuordnungswahrscheinlichkeit von M2 auf O2. Vergleichbar zum GNN-Verfahren, wird auch beim JPDA-Verfahren das „globale“<sup>1</sup> Zuordnungsproblem betrachtet. Basierend auf [BSF88, FBSS83, Bla86] werden nun die Zuweisungswahrscheinlichkeiten nach der JPDA-Filtertheorie vorgestellt.

Der JPDA-Algorithmus definiert die Zuweisungsereignisse zum Zeitpunkt  $k$ :

$$\epsilon_{i,t_i,k} = \{\text{Der Messpunkt } i \text{ stammt vom Objekt } t_i\}, \quad i = 1, \dots, m_k \\ \text{für } t_i = 0, 1, \dots, T.$$

Zur besseren Übersicht wird der Zeitindex  $k$  beim Zuweisungsereignis  $\epsilon_{i,t_i,k}$  zunächst vernachlässigt. Der Index  $t_i$  kennzeichnet dabei die Objektnummer und  $i$  die zugeordnete Messpunktnummer. Um die Herleitung der Zuweisungswahrscheinlichkeiten beim JPDA-Verfahren zu vereinfachen, wird im Gegensatz zu den bereits vorgestellten Assoziationsverfahren die Sichtweise der Zuordnung getauscht. Aus Sicht der Messpunkte erhält somit das Objekt den Index  $t_i = 0$ , sofern der Messpunkt  $i$  keinem Objekt  $t_i$  zugeordnet werden kann. Zusammenfassend lassen sich alle Assoziationsereignisse in einer Matrix darstellen, welche gegeben ist durch

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,0} & \epsilon_{1,1} & \cdots & \epsilon_{1,T} \\ \epsilon_{2,0} & \epsilon_{2,1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{m_k,0} & \epsilon_{m_k,1} & \cdots & \epsilon_{m_k,T} \end{bmatrix}.$$

Auf Grundlage dieser Ereignismatrix lässt sich systematisch jedem Messpunkt (bzw. jeder Zeile) ein Objekt zuweisen und zu einem Verbundereignis zusammenfassen. Dabei wird das Ziel verfolgt, sämtliche Zuweisungsmöglichkeiten in Form von Verbundereignissen gemäß

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{m_k} \epsilon_{i,t_i} \quad n = 1, \dots, N \quad (3.40)$$

<sup>1</sup>Im Sinne aller validierten Messpunkte mehrerer Objekte.

zu beschreiben. Der Index  $n$  kennzeichnet die Verbundnummer aus  $N$  Ereigniskombinationen. Für den Objektindex gilt  $0 \leq t_i \leq T$ . Zudem muss für  $t_i$  und  $t_l = 1, \dots, T$  die Bedingung  $t_i \neq t_l$  eingehalten werden, denn letztlich kann nur ein Messpunkt von einem Objekt stammen. Eine weitere Plausibilitätsbedingung ist, dass im Verbund von Ereignissen gleich mehrere Messpunkte von keinem Objekt stammen können und somit  $t_i = 0$  mehrfach vorliegt. Obwohl die Ereigniskombinationen durch die Plausibilitätsbedingungen reduziert werden, steigt dennoch mit zunehmender Anzahl an Messpunkten und Objekten die Menge an möglichen Verbundereignissen. Als Folge dessen nimmt auch der Aufwand zur Berechnung der Zuweisungswahrscheinlichkeiten zu. Um diesen Rechenaufwand möglichst gering zu halten, kann die binäre Gating-Matrix zum Ausschließen von unrealistischen Zuweisungsereignissen verwendet werden. Hierzu muss die Gating-Matrix  $\Omega$  in Gl. 3.26 um eine weitere Spalte  $\omega_{1:m_k,0}$  mit Einsen erweitert werden, sodass für beide Matrizen  $\epsilon, \Omega \in \mathbb{R}^{m_k \times (T+1)}$  gilt. Durch elementweises Ausmultiplizieren der beiden Matrizen  $\epsilon$  und  $\Omega$  werden jene Zuweisungsereignisse ausgeblendet, welche aufgrund ihrer Distanz zwischen Messpunkt und Objekt außerhalb des Gating-Bereichs liegen. Durch diese Reduktion an Assoziationen in Matrix  $\epsilon$  wird die Anzahl an möglichen Verbundereignissen  $E_n$  und letztlich die Rechenleistung eingegrenzt. Bezugnehmend auf das Szenario in Abb. 3.14, vermindert sich demnach die Anzahl an Verbundereignissen durch die Gating-Matrix und die Plausibilitätsbedingungen von 27 auf 10:

$$\left\| \begin{array}{l} E_1 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,0} \\ E_2 = \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,0} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,0} \\ E_3 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,0} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,0} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,0} \\ E_4 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,0} \\ E_5 = \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,0} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} E_6 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,1} \\ E_7 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,1} \\ E_8 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,1} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} E_8 = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,2} \\ E_9 = \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,0} \cap \epsilon_{3,2} \\ E_{10} = \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,1} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,0} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,1} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,2} \\ \quad \epsilon_{1,2} \cap \epsilon_{2,2} \cap \epsilon_{3,2} \end{array} \right\|.$$

Auf Basis der aufgestellten Verbundereignisse wird in einem weiteren Schritt eine Logik vorgestellt, mit welcher die Zuweisungswahrscheinlichkeit  $p_{i,t,k}$  zwischen den Messpunkten und Objekten dynamisch berechnet werden kann (vgl. [BSF88]). Hierfür wird jede der Ereigniskombinationen in eine binäre Matrix  $\hat{\Omega}(E_n) \in \mathbb{R}^{m_k \times (T+1)}$  zerlegt:

$$\hat{\Omega}(E_n) = [\hat{\omega}_{i,t}(E_n)] \quad \text{mit} \quad \hat{\omega}_{i,t}(E_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \epsilon_{i,t} \subset E_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$n = 1, \dots, N.$$

Mit dieser Matrix lassen sich nun mehrere Indikatoren zur Berechnung der Zuweisungswahrscheinlichkeiten extrahieren. Um feststellen zu können, ob ein Objekt im Verbund auf einen Messpunkt referenziert, gilt:

$$\delta_t(E_n) \triangleq \sum_{i=1}^{m_k} \hat{\omega}_{i,t}(E_n) \leq 1 \quad t = 1, \dots, T \quad n = 1, \dots, N.$$

Umgekehrt lässt sich aus der Matrix  $\hat{\Omega}(E_n)$  auch ein Indikator  $\tau_i$  bestimmen, welcher die Existenz eines Objektes  $t$  für einen Messpunkt  $i$  angibt:

$$\tau_i(E_n) \triangleq \sum_{t=1}^T \hat{\omega}_{i,t}(E_n) \leq 1 \quad i = 1, \dots, m_k \quad n = 1, \dots, N.$$

Durch Erweiterung des Objektindex  $t = 0$  zeigt sich, dass die hier definierte Plausibilitätsbedingung der Matrix mit  $\sum_{t=0}^T \hat{\omega}_{i,t}(E_n) = 1$  für alle  $i = 1, \dots, m_k$  gilt. Die Anzahl nicht zuweisbarer Messpunkte  $\phi$  (Falschmesspunkte) eines Verbundereignisses resultieren aus der Matrix  $\hat{\Omega}(E_n)$ :

$$\phi(E_n) = \sum_{i=1}^{m_k} (1 - \tau_i(E_n)) \quad n = 1, \dots, N.$$

In Bezug auf das in Abb. 3.14 dargestellte Szenario ergeben sich in Tab. 3.2 für alle  $N$  Verbundereigniskombinationen die beschriebenen Indikatoren aus den binären Matrizen  $\hat{\Omega}(E_n)$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $P\{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\}$  mit der ein Verbundereignis unter Betrachtung aller Messpunkte eintritt, lässt sich auf Basis des Bayes-Theorems ableiten. Ein Satz Messpunkte zum Zeitpunkt  $k$  wird mit  $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_{i,k}\}_{i=1}^{m_k}$  definiert und sämtliche Messpunkte bis zum Zeitpunkt  $k$  mit  $\mathbf{Z}_{1:k} = \{\mathbf{Z}_l\}_{l=1}^k$ . Vergleichbar zum PDAF in Gl. 3.30 resultieren die Zuweisungsereignisse zum Zeitpunkt  $k$  aus:

$$\begin{aligned} P\{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\} &= P\{E_n(k)|\mathbf{Z}_k, m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\} \\ &= \frac{p(\mathbf{Z}_k|E_n(k), m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{E_n(k)|m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}}{p(\mathbf{Z}_k|m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{Z}_k|E_n(k), m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{E_n(k)|m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}}{\sum_{l=1}^N p(\mathbf{Z}_k|E_l(k), m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) P\{E_l(k)|m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\}} \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die totale Wahrscheinlichkeit im Nenner lässt sich, wie auch in Gl. 3.10, in einer Normierungskonstante  $c$  zusammenfassen. Ferner kann die Bedingung der Messpunktanzahl  $m_k$  in den Wahrscheinlichkeiten entfallen, da die Messpunktanzahl bereits im Verbundereignis nach Gl. 3.40 enthalten ist. Die Zuweisungswahrscheinlichkeit lässt sich somit für alle Verbundereignisse  $n = 1, \dots, N$  darstellen:

$\hat{\Omega}(E_1)$	$T0$	$T1$	$T2$		$\hat{\Omega}(E_2)$	$T0$	$T1$	$T2$	
$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$	$M1$	0	1	0	$\tau_1=1$
$M2$	1	0	0	$\tau_2=0$	$M2$	1	0	0	$\tau_2=0$
$M3$	1	0	0	$\tau_3=0$	$M3$	1	0	0	$\tau_3=0$
		$\delta_1=0$	$\delta_2=0$	$\phi=3$			$\delta_1=1$	$\delta_2=0$	$\phi=2$
$\hat{\Omega}(E_3)$	$T0$	$T1$	$T2$		$\hat{\Omega}(E_4)$	$T0$	$T1$	$T2$	
$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$	$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$
$M2$	0	1	0	$\tau_2=1$	$M2$	0	0	1	$\tau_2=1$
$M3$	1	0	0	$\tau_3=0$	$M3$	1	0	0	$\tau_3=0$
		$\delta_1=1$	$\delta_2=0$	$\phi=2$			$\delta_1=0$	$\delta_2=1$	$\phi=2$
$\hat{\Omega}(E_5)$	$T0$	$T1$	$T2$		$\hat{\Omega}(E_6)$	$T0$	$T1$	$T2$	
$M1$	0	1	0	$\tau_1=1$	$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$
$M2$	0	0	1	$\tau_2=1$	$M2$	1	0	0	$\tau_2=0$
$M3$	1	0	0	$\tau_3=0$	$M3$	0	1	0	$\tau_3=1$
		$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\phi=1$			$\delta_1=1$	$\delta_2=0$	$\phi=2$
$\hat{\Omega}(E_7)$	$T0$	$T1$	$T2$		$\hat{\Omega}(E_8)$	$T0$	$T1$	$T2$	
$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$	$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$
$M2$	0	0	1	$\tau_2=1$	$M2$	1	0	0	$\tau_2=0$
$M3$	0	1	0	$\tau_3=1$	$M3$	0	0	1	$\tau_3=1$
		$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\phi=1$			$\delta_1=0$	$\delta_2=1$	$\phi=2$
$\hat{\Omega}(E_9)$	$T0$	$T1$	$T2$		$\hat{\Omega}(E_{10})$	$T0$	$T1$	$T2$	
$M1$	0	1	0	$\tau_1=1$	$M1$	1	0	0	$\tau_1=0$
$M2$	1	0	0	$\tau_2=0$	$M2$	0	1	0	$\tau_2=1$
$M3$	0	0	1	$\tau_3=1$	$M3$	0	0	1	$\tau_3=1$
		$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\phi=1$			$\delta_1=1$	$\delta_2=1$	$\phi=1$

**Tabelle 3.2:** Verbundereigniskombinationen gemäß Abb. 3.14.

$$\begin{aligned}
 P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\} &= \frac{1}{c} p(\mathbf{Z}_k|E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1}) P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k-1}\} \\
 &= \frac{1}{c} p(\mathbf{Z}_k|E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1}) P \{E_n(k)\}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Äquivalent zum PDAF in Gl. 3.33 kann die Auftrittswahrscheinlichkeit  $P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k-1}\}$  auch unabhängig von den Messpunkten  $\mathbf{Z}_{1:k-1}$  beschrieben werden, sodass diese durch  $P \{E_n(k)\}$  ersetzt werden kann (vgl. auch Gl. 3.9). Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{Z}_k|E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1})$ , und damit der erste Term in Gl. 3.42, setzt sich für das Verbundereignis  $E_n(k)$  über alle Messpunkte  $m_k$  gemäß

$$p(\mathbf{Z}_k | E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \prod_{i=1}^{m_k} p(\mathbf{z}_{i,k} | \epsilon_{i,t_i,k}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) \quad (3.43)$$

zusammen. Unter der Annahme, dass auch beim JPDA-Verfahren die Mess-zu-Prädiktionsfehler  $\mathbf{v}_{i,t,k}$  von Messpunkt  $i$  und Objekt  $t$  mit einer Unsicherheit der Innovationskovarianz  $\mathbf{S}_{t,k}$  normalverteilt ist, gilt (vgl. 3.31):

$$p(\mathbf{z}_{i,k} | \epsilon_{i,t_i,k}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,t,k}, 0, \mathbf{S}_{t,k}). \quad (3.44)$$

Bei dieser Betrachtung wird unterstellt, dass der korrekte Messpunkt stets im Gating-Bereich liegt und demnach  $P_G = 1$  ist. Wird bei Zuordnungen von Objektprädiktionen und Störmesspunkten von einer gleichförmigen Verteilung ausgegangen, kann diese über das gesamte Beobachtungsvolumen mit  $V_k^{-1}$  nach Gl. 3.27 beschrieben werden. Zusammen mit Gl. 3.44 und der gleichförmigen Verteilungsdichte für Störmesspunkte resultiert eine Fallunterscheidung<sup>1</sup>:

$$p(\mathbf{z}_{i,k} | \epsilon_{i,t_i,k}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,t,k}, 0, \mathbf{S}_{t,k}), & \text{wenn } \tau_i(E_n) = 1 \\ V_k^{-1}, & \text{wenn } \tau_i(E_n) = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Unter Anwendung des binären Indikators  $\phi(E_n)$  (vgl. Tab. 3.2) kann nun die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{Z}_k | E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1})$  durch Einsetzen von Gl. 3.45 in 3.43 entsprechend vereinfacht werden:

$$p(\mathbf{Z}_k | E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1}) = V_k^{-\phi(E_n)} \prod_{i=1}^{m_k} [\mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,t_i,k}, 0, \mathbf{S}_{t_i,k})]^{\tau_i(E_n)}. \quad (3.46)$$

Zur Beschreibung der Auftrittswahrscheinlichkeit  $P\{E_n(k)\}$  in Gl. 3.42 ist vorab ein Vektor  $\boldsymbol{\delta}(E_n) = [\delta_1(E_n), \delta_2(E_n), \dots, \delta_T(E_n)]$  zu definieren. Da dieser Vektor  $\boldsymbol{\delta}(E_n)$  und der Indikator zur Bestimmung der Falschmesspunkte  $\phi(E_n)$  Abbildungen des Verbundereignisses  $E_n$  darstellen gilt nach [BSF88]<sup>2</sup> für

$$P\{E_n(k)\} = P\{E_n(k), \boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\}.$$

<sup>1</sup>Beim PDAF in Gl. 3.32 ist  $V_k$  das Beobachtungsvolumen eines einzelnen Gates. Im Gegensatz hierzu können beim JPDA-Verfahren gleich mehrere Objekte mit jeweils unterschiedlichen Gates bzw. Beobachtungsvolumina auftreten. Unter Betrachtung eines einzelnen Objektes in Gl. 3.45, lässt sich nach Aufmultiplizieren von  $p(\mathbf{z}_{i,k} | \epsilon_{i,t_i,k}, \mathbf{Z}_{1:k-1})$  über alle Messpunkte die Äquivalenz zu Gl. 3.32 nachweisen.

<sup>2</sup>In dieser Literatur werden alle Verbundereignisse in dem Vektor  $\mathbf{E}(k) = [E_1(k), E_2(k), \dots, E_N(k)]$  zusammengefasst, sodass  $P\{\mathbf{E}(k)\} = P\{\mathbf{E}(k), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{E}), \phi(\mathbf{E})\}$  gilt.

Mit dem Multiplikationssatz kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu

$$P \{E_n(k)\} = P \{E_n(k)|\boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\} P \{\boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\}. \quad (3.47)$$

Hierbei charakterisiert der erste Term mit welcher Wahrscheinlichkeit das Verbundereignis  $E_n$  eintreten kann, wenn der Indikator zur Bestimmung der Falschmesspunkte  $\phi(E_n)$  und der Vektor  $\boldsymbol{\delta}(E_n)$  zur Identifizierung der Objekte mit zugewiesenen Messpunkten eine bestimmte Konstellation aufweisen. Bei einer definierten Anzahl an Messpunkten  $m_k$  und Falschmesspunkten  $\phi(E_n)$  sowie der Kenntnis, dass die Differenz aus  $m_k - \phi(E_n)$  die Objektanzahl mit zugeordneten Messpunkten ist, errechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $E_n$  eintritt, aus:

$$P \{E_n(k)|\boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\} = \frac{\phi(E_n)!}{m_k!}. \quad (3.48)$$

Bezugnehmend auf das Szenario in Abb. 3.14 mit 3 Messpunkten  $m_k = 3$  und 2 Objekten, lässt sich die Ereigniswahrscheinlichkeit  $P \{E_n(k)|\boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\}$  anhand der Verbundereigniskombinationen in Tab. 3.2 näher erläutern. Für  $P \{E_3(k)|\boldsymbol{\delta}(E_3), \phi(E_3)\}$  mit den Bedingungen  $\boldsymbol{\delta}(E_3) = [\delta_1 = 1, \delta_2 = 0]$  und  $\phi(E_3) = 2$  resultiert gemäß oberer Gl. eine Ereigniswahrscheinlichkeit von  $\frac{\phi(E_n)!}{m_k!} = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$ . Vergleicht man diese Erkenntnis mit Tab. 3.2 wird deutlich, dass neben dem Verbundereignis  $E_3$  dieselben Bedingungen und folglich dieselben Ereigniswahrscheinlichkeiten auch in  $E_2$  und  $E_6$  vorliegen.

Der zweite Term in Gl. 3.47 berechnet sich über alle Objekte nach:

$$P \{\boldsymbol{\delta}(E_n), \phi(E_n)\} = \prod_{t=1}^T (P_{D,t})^{\delta_t(E_n)} (1 - P_{D,t})^{1-\delta_t(E_n)} \mu_F(\phi(E_n)). \quad (3.49)$$

Wie auch beim PDAF kennzeichnet der Faktor  $P_{D,t}$  die Wahrscheinlichkeit, mit welcher das Objekt  $t$  den wahren Messpunkt erfasst. Zur Eingrenzung der Informationsvielfalt, werden die Detektionswahrscheinlichkeiten aller Objekte gleichgesetzt  $P_{D,t} = P_D \forall t$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mu_F(\cdot)$  bildet das Störmesspunktmodell und damit die Anzahl an Falschmessungen im Beobachtungsbereich ab. Äquivalent zum PDAF wird zur Nachbildung der Anzahl an Falschmessungen auf ein nicht parametrisierbares (diffuses) Modell nach Gl. 3.35 zurückgegriffen.

Durch Einsetzen von Gl. 3.48 und 3.49 in 3.47, sowie das Zusammenführen von Gl. 3.47 und 3.46 in 3.42 resultiert:

$$P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\} = \frac{\phi(E_n)! \varpi}{c m_k! V_k^{\phi(E_n)}} \prod_{i=1}^{m_k} [\mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,t,k}, 0, \mathbf{S}_{t,k})]^{\tau_i(E_n)} \prod_{t=1}^T (P_D)^{\delta_t(E_n)} (1 - P_D)^{1-\delta_t(E_n)} \quad n = 1, \dots, N.$$

Durch eine geeignete Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichtekonstante  $\varpi$  für Störmesspunkte, kürzen sich  $\varpi$  aus Gl. 3.35 und  $m_k$ !:

$$P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\} = \frac{\phi(E_n)!}{c V_k^{\phi(E_n)}} \prod_{i=1}^{m_k} [\mathcal{N}(\mathbf{v}_{i,t,k}, 0, \mathbf{S}_{t,k})]^{\tau_i(E_n)} \prod_{t=1}^T (P_D)^{\delta_t(E_n)} (1 - P_D)^{1-\delta_t(E_n)} \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.50)$$

Wird dieser dynamische Gleichungsansatz auf die Verbundereignisse  $E_n$  im Szenario Abb. 3.14 angewendet, resultieren für die  $N$  Ereigniskombinationen entsprechende Berechnungsvorschriften:

$E_n$	$P \{E_n(k) \mathbf{Z}_{1:k}\} \quad c = p(\mathbf{Z}_k E_n(k), \mathbf{Z}_{1:k-1}) P \{E_n(k)\}$
$E_1$	$\frac{6}{V_k^3} (1 - P_D)^2$
$E_2$	$\frac{2}{V_k^2} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{1,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) (P_D) (1 - P_D)$
$E_3$	$\frac{2}{V_k^2} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{2,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) (P_D) (1 - P_D)$
$E_4$	$\frac{2}{V_k^2} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{2,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) (P_D) (1 - P_D)$
$E_5$	$\frac{1}{V_k} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{1,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) \mathcal{N}(\mathbf{v}_{2,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) (P_D)^2$
$E_6$	$\frac{2}{V_k^2} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{3,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) (P_D) (1 - P_D)$
$E_7$	$\frac{1}{V_k} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{2,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) \mathcal{N}(\mathbf{v}_{3,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) (P_D)^2$
$E_8$	$\frac{2}{V_k^2} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{3,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) (P_D) (1 - P_D)$
$E_9$	$\frac{1}{V_k} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{1,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) \mathcal{N}(\mathbf{v}_{3,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) (P_D)^2$
$E_{10}$	$\frac{1}{V_k} \mathcal{N}(\mathbf{v}_{2,1,k}, 0, \mathbf{S}_{1,k}) \mathcal{N}(\mathbf{v}_{3,2,k}, 0, \mathbf{S}_{2,k}) (P_D)^2$

Wie bereits in Gl. 3.41 erläutert, setzt sich die Normierungskonstante  $c$  aus der Summe aller Verbundwahrscheinlichkeiten zusammen.

Die Zuweisungswahrscheinlichkeit  $p_{i,t,k}$  zwischen einem Objekt  $t$  und einem Messpunkt  $i$  ergibt sich zu einem Zeitpunkt  $k$  aus der Summe jener Verbundwahrscheinlichkeiten  $P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\}$ , welche das Assoziationsereignis  $\epsilon_{i,t,k}$  beinhalten. Da die Identifizierung der Assoziationsereignisse für sämtliche Verbundkombinationen  $E_n$  bereits durch die binären Matrizen  $\hat{\Omega}(E_n)$  und deren Elemente  $\hat{\omega}_{i,t}(E_n)$  erfolgt ist, lassen sich nun auf Grundlage dieser Elemente die Zuweisungswahrscheinlichkeiten bestimmen:

$$p_{i,t,k} \triangleq P \{\epsilon_{i,t,k}|\mathbf{Z}_{1:k}\} = \sum_{n=1}^N P \{E_n(k)|\mathbf{Z}_{1:k}\} \hat{\omega}_{i,t}(E_n) \quad i = 1, \dots, m_k \quad (3.51)$$

$$t = 0, 1, \dots, T.$$

In Hinblick auf das obere Szenario resultieren die einzelnen Zuweisungswahrscheinlichkeiten aus folgenden Summationen:

$$p_{1,0,k} = P \{E_1(k), E_3(k), E_4(k), E_6(k), E_7(k), E_8(k), E_{10}(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{2,0,k} = P \{E_1(k), E_2(k), E_6(k), E_8(k), E_9(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{3,0,k} = P \{E_1(k), E_2(k), E_3(k), E_4(k), E_5(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{1,1,k} = P \{E_2(k), E_5(k), E_9(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{2,1,k} = P \{E_3(k), E_{10}(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{3,1,k} = P \{E_6(k), E_7(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{1,2,k} = 0$$

$$p_{2,2,k} = P \{E_4(k), E_5(k), E_7(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}$$

$$p_{3,2,k} = P \{E_8(k), E_9(k), E_{10}(k) | \mathbf{Z}_{1:k}\}.$$

Basierend auf diesen Zuweisungswahrscheinlichkeiten lassen sich äquivalent zum PDAF in Kap. 3.4.2 die Zustände, Kovarianzmatrizen und die Distanz zwischen Mess- und Prädiktionsfehler beim Kalman-Filter aktualisieren.

### 3.4.3 Modellansatz

Bedingt durch die in Tab. 2.2 zusammengefassten Standardabweichungen der Strömungsbeschleunigung und des geringen Pulswiederholintervalls von maximal  $t_{PRI} = 1$  ms, wird den Reflektoren eine gleichförmige Bewegung unterstellt und deren Beschleunigungen in Form von Modellrauschen abgebildet. Aufgrund dieses Bewegungsverhaltens wird nachfolgend die Notation für einen Standard-Kalman-Filter diskutiert, dessen Messwerte im konstanten Intervall  $t_{PRI}$  aktualisiert werden. Zur besseren Übersicht findet die Erläuterung ohne den Index  $k$  statt.

Der Zustandsvektor aller Reflektoren ist gegeben durch

$$\mathbf{x} = [x, v_x, \phi]^T, \quad (3.52)$$

wobei  $x$  die Position des Reflektors in Fließrichtung und  $v_x$  dessen Geschwindigkeit beschreibt. Zur Initialisierung der Fließgeschwindigkeit  $v_x$  eines Filters muss die Differenz der ersten zwei Reflektorpositionen durch  $t_{PRI}$  dividiert werden. Der Zustand  $\phi$  wird durch den Maximalwert der Hüllkurvendetektion oberhalb des Schwellwertes  $\varsigma_A$  definiert (vgl. Abb. 3.9) und entspricht damit der korrelativen Amplitude. Diese Amplitude ist äquivalent zur rückgestreuten Schallintensität eines Reflektors und folglich eine weitere Informationskomponente im Empfangssignal. Die zugehörige Prozess- bzw. Transitionsmatrix  $\mathbf{A}$  zur deterministischen Vorhersage ist charakterisiert durch die gleichförmige Bewegung und konstante Amplitude mit:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & t_{PRI} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Da die Ungenauigkeiten der Prozessgleichung 3.14 durch die Strömungseigenschaften wie Reflektorbeschleunigungen oder Sekundärgeschwindigkeiten, aber auch das Rückstreuverhalten von Reflektoren gekennzeichnet sind, werden diese additiv in der Kovarianzmatrix des Prozessrauschens  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_{y,z} + \mathbf{Q}_\phi$  berücksichtigt. Wie bereits in Kap. 2.5 analysiert, handelt es sich bei den Reflektorbeschleunigungen um ein weißes, mittelwertfreies und gaußverteiltes Rauschen. Demnach gilt für die Rauschquelle mit der Beschleunigung  $a_x$  und dessen Änderung:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a &= \left[ \frac{1}{2} a_x t_{PRI}^2, a_x t_{PRI}, 0 \right]^T \\ \Delta \mathbf{w}_a &= \frac{d\mathbf{w}_a}{da_x} \Delta a_x. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Da die Kovarianzmatrix mit  $\mathbf{Q} = \mathbb{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T]$  definiert ist, folgt

$$\mathbf{Q}_a = \frac{d\mathbf{w}_a}{da_x} \Delta a_x \Delta a_x^T \frac{d\mathbf{w}_a^T}{da_x} = \frac{d\mathbf{w}_a}{da_x} \sigma_a^2 \frac{d\mathbf{w}_a^T}{da_x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} t_{PRI}^4 \sigma_a^2 & \frac{1}{2} t_{PRI}^3 \sigma_a^2 & 0 \\ \frac{1}{2} t_{PRI}^3 \sigma_a^2 & t_{PRI}^2 \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

wobei sich die Beschleunigungsvarianz  $\sigma_a^2$  aus der in Tab. 2.2 zusammengefassten Strömungsanalyse erschließt. Um die Ungenauigkeiten der Sekundärgeschwindigkeiten nach Kap. 2.5 in die Filtertheorie einfließen lassen zu können, wird das Prozessrauschen

$$\mathbf{w}_{y,z} = [v_{y,z} t_{PRI}, v_{y,z}, 0]^T \quad (3.56)$$

nach  $v_{y,z}$  differenziert und deren Kovarianzmatrix

$$\mathbf{Q}_{y,z} = \frac{d\mathbf{w}_{y,z}}{dv_{y,z}} \sigma_{v_{y,z}}^2 \frac{d\mathbf{w}_{y,z}^T}{dv_{y,z}} = \begin{bmatrix} t_{PRI}^2 \sigma_{v_{y,z}}^2 & t_{PRI} \sigma_{v_{y,z}}^2 & 0 \\ t_{PRI} \sigma_{v_{y,z}}^2 & \sigma_{v_{y,z}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

bestimmt. Im Gegensatz zum Beschleunigungs- und Sekundärrauschen ist das Rückstreuverhalten von Schall aufgrund der inkonsistenten Form und Zusammensetzung des Mediums der Reflektoren sowohl simulativ als auch messtechnisch nur sehr schwer bestimmbar, weshalb das Amplitudenrauschen empirisch erfasst wird. Als Grundlage dienen hierbei die Amplitudenwerte<sup>1</sup> der Reflektormessung von Abb. 3.12, bei welchen ein Wasser-Luft-Gemisch unter Laborbedingungen analysiert wurde. Für eine Kalman-PDA-Filterkonstellation erwies sich beim Amplitudenrauschen ein Verhältnis der Standardabweichungen zwischen Prozess- und Messrauschen von  $\frac{\sigma_{\mathbf{w},\phi}}{\sigma_{\mathbf{v},\phi}} = \frac{1}{2}$  als geeignet. Für den später zu realisierenden Messaufbau wurde  $\sigma_{\mathbf{w},\phi}$  empirisch bestimmt. Man erhält somit:

<sup>1</sup>Der Amplitudenwert bezieht sich auf das Korrelationsergebnis zwischen Sende- und Empfangssignal.

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\mathbf{w},\phi}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Nachdem die Eigenschaften der Strömung bzw. Reflektoren über die Prozessgleichung beschrieben sind, erfolgt die Charakterisierung der Sensoreigenschaften über die Messgleichung 3.15. Der Messvektor ist definiert mit:

$$\mathbf{z} = [x, \phi]^T, \quad (3.59)$$

und dessen Messmodell:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Bei der Bestimmung der Messkovarianzmatrix  $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]$  wird auf die Analysen aus Kap. 2.5 zurückgegriffen. Die Kovarianz setzt sich kumulativ aus einem Fehler durch die Halbwerts- und Einstrahlwinkel des Strahlers  $\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$ , einem Abtastrauschen  $\mathbf{R}_s$  und einem Amplitudenrauschen durch die Schallreflexion  $\mathbf{R}_\phi$  zusammen. Für den in dieser Arbeit verwendeten Sensor resultiert nach Abb. 2.21 ein Worst-Case-Geschwindigkeitsfehler von  $\Delta v_{\alpha,\beta} = 0,1 \text{ m/s}$  bei  $\beta = 60^\circ$ . Beschreibt nun  $\mathbf{v}_{\alpha,\beta} = [v_{\alpha,\beta} \ t_{PRI} \ 0]^T$  die Rauschquelle der Messgleichung, erschließt sich die Fehlerkovarianzmatrix für den Halbwerts- und Einstrahlwinkel des Strahlers aus:

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta} = \frac{d\mathbf{v}_{\alpha,\beta}}{dv_{\alpha,\beta}} \Delta v_{\alpha,\beta} \Delta v_{\alpha,\beta}^T \frac{d\mathbf{v}_{\alpha,\beta}^T}{dv_{\alpha,\beta}} = \frac{d\mathbf{v}_{\alpha,\beta}}{dv_{\alpha,\beta}} \sigma_{\alpha,\beta}^2 \frac{d\mathbf{v}_{\alpha,\beta}^T}{dv_{\alpha,\beta}} = \begin{bmatrix} t_{PRI}^2 \sigma_{\alpha,\beta}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Da der Abtastfehler in Gl. 2.45 bereits als Positionsrauschen mit  $\sigma_s$  festgelegt wurde, gilt für dessen Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Das bereits oben festgelegte Amplitudenrauschen der Richtcharakteristik  $\sigma_{\mathbf{v},\phi}$  führt zur Messkovarianzmatrix:

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\mathbf{v},\phi}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

### 3.4.4 Objektreduktion/ -erweiterung

Bisher betrachtete Wechselwirkungen zwischen Zustandsfilterung und Datenassoziation berücksichtigen weder ausbleibende noch neu eintreffende Reflektorpositionen bzw. Objekte. Bedingt durch den Öffnungswinkel der Richtcharakteristik werden diese Szenarien jedoch überaus häufig von neu in den Sichtwinkel hinein- oder aus ihm hinausfließenden Reflektoren

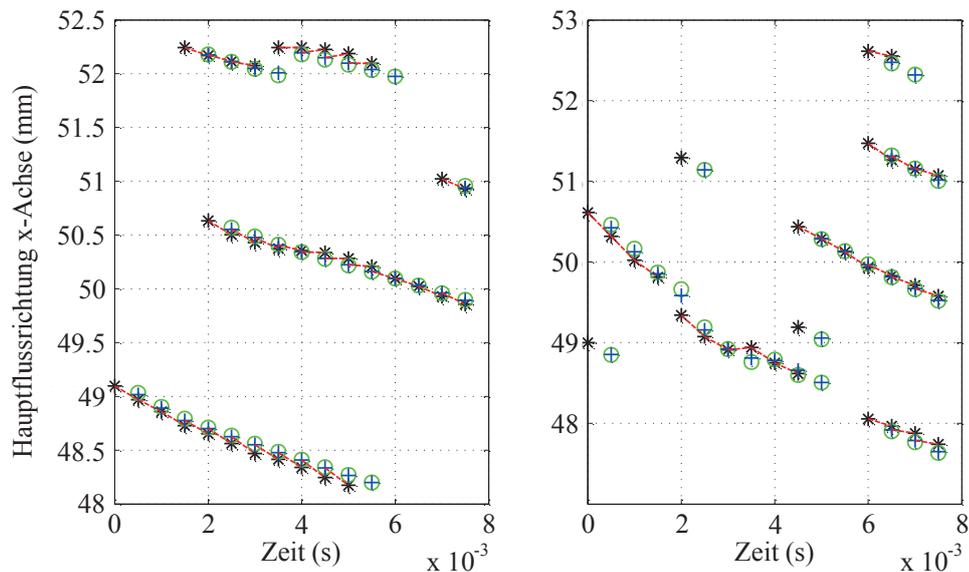
ren hervorgerufen. Unabhängig von der Qualität der Datenassoziation ist daher nach jedem Messintervall eine Validierung von bereits existierenden Filtern und nicht assoziierbaren Objekten vorzunehmen. Filter bzw. Spuren, bei welchen keine Reflektorzuweisung möglich ist, werden terminiert und Reflektoren, welche keiner Filterassoziation unterliegen, werden als neue Objekte identifiziert. Neue detektierte Objekte führen somit im nächsten Messintervall zur Geburt eines neuen Zustandsfilters. Untersuchungen anhand realer Messungen an einem Klärwerk zeigen, dass aufgrund der Vielzahl an Reflektoren im Fluid -auch unter Berücksichtigung des Rechenaufwandes- eine Strategie des rechtzeitigen Abbruches von ungeeigneten Spuren sinnvoll ist, weil genügend gut auswertbare Spuren vorhanden sind. D.h. die Kriterien an das Fortbestehen eines Filters werden streng gehandhabt.

### 3.4.5 Geschwindigkeitsextraktion

Empirische Untersuchungen ergeben, dass das Einschwingen des Filters und damit auch der Zeitpunkt zur Auswertung des Geschwindigkeitszustandes stark vom Turbulenzgrad des Mediums abhängt. Während sich bei laminaren Strömungen der Reflektor relativ geradlinig fortbewegt und sich somit der Filter bereits nach drei Reflektorpositionen im Intervall von  $t_{PRI} = 0,5$  ms auf die Spur eingependelt hat, benötigt der Filter bei zunehmenden Verwirbelungen der Reflektoren entsprechend länger. Als Ergebnis der nachfolgenden Messungen und Analysen werden daher die Geschwindigkeitszustände erst ab einer Detektionsanzahl von mindestens vier Reflexionen entnommen und zur Profilbildung verwendet.

In Abb. 3.16 sind Strömungsverläufe von Reflektoren dargestellt, welche an einem vollgefüllten Rohrprüfstand (Durchmesser  $d=3$  cm) mit einem zirkulierenden Luft-Wasser-Gemisch durchgeführt wurden [Hai13]. Der Einstrahlwinkel betrug  $\beta = 60^\circ$  und der Volumenstrom im linken Bild  $0,41$  l/s und rechts  $11$  l/s. Als Auswerteverfahren diente eine Kalman und PDA-Filterkonstellation. Zur Bestimmung einzelner Reflektorgeschwindigkeiten sei auf Gl. 3.6 verwiesen.

Verfolgt ein Filter über mehrere Messintervalle einen Reflektor und stabilisiert sich dabei, so wird in diesem Modul der Geschwindigkeitszustand des Filters abgegriffen und entsprechend dessen Reflektorposition auf die  $yz$ -Ebene projiziert. Die Berechnung der Reflektorposition in  $y$ - und  $z$ -Richtung erschließt sich aus der Signalaufbereitung gemäß Gl. 3.5. Erfolgt dieser Vorgang über sämtliche Azimutwinkel des Phased-Array-Strahlers, nimmt die Messabdeckung über den Kanal- bzw. Rohrquerschnitt zu. Die gewonnenen Geschwindigkeitsinformationen lassen sich dann einerseits im nächsten Iterationsschritt zur Initialisierung neuer Filter verwenden und andererseits zur Geschwindigkeitsprofilbildung durch die Parameteridentifikation nutzen.



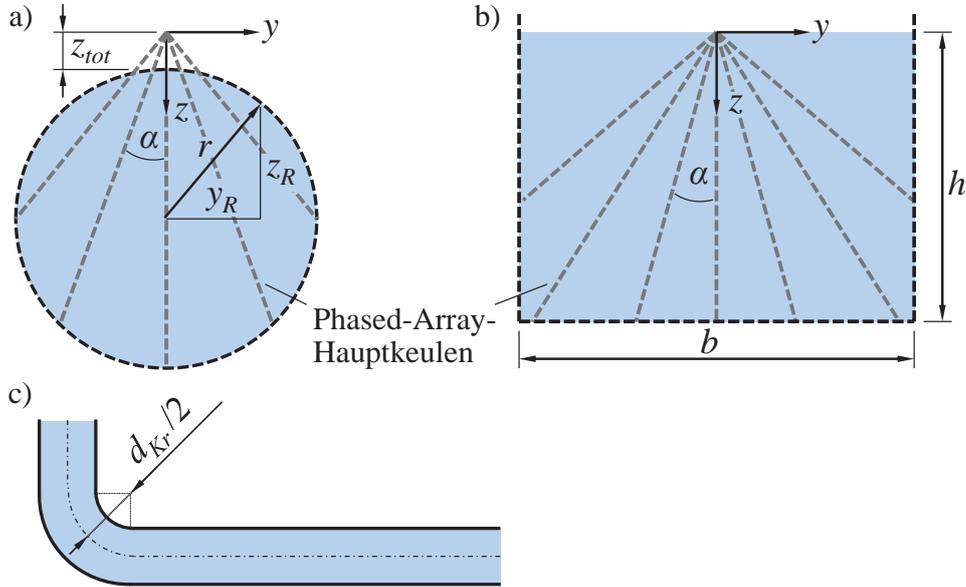
**Abb. 3.16:** Strömungslinien von verfolgten Luftbläschen bei einem Durchfluss von 0,41/s (links) und 11/s (rechts). Die Luftbläschen sind im Diagramm mit „\*“, die Zustandsprädiktionen des Kalman-Filters mit „o“ und die aktualisierten Filterzustände mit „+“ dargestellt.

## 3.5 Räumliche Geschwindigkeitsfilterung

Unter Kenntnis der räumlichen Reflektorgeschwindigkeiten und Modellinformationen über das Strömungsprofil der gemessenen Kanalform, lässt sich eine Parameteridentifikation durchführen. Hierbei werden messfreie Zonen über Sekundärinformationen erschlossen und die gemessenen Geschwindigkeiten über das komplette Profil -meist durch das Fehlerquadrat- ausgeglichen. Dieses Vorgehen ist besonders bei Monostrahl Durchflusssensoren weit verbreitet [Sol13, Sul01, NN93, BMVW08], wobei Störungen wie asymmetrische Geschwindigkeitsprofile oder Turbulenzen zu Messfehlern führen. Um dem entgegenzuwirken ist eine Steigerung der Messstellenanzahl quer über den kompletten Querschnitt unerlässlich. Mit der Phased-Array-Technologie ist diese Bedingung ohne höheren Installationsaufwand erreichbar. Im Nachfolgenden werden auf Basis von CFD-Simulation und Literaturstellen, Strömungsprofile für einen offenen Kanal und ein vollgefülltes Rohr hergeleitet und vorgestellt. Die Ausrichtung des Koordinatensystems für beide Formen gemäß Kap. 2.1 sowie deren Abmaße sind in Abb. 3.17 nochmals für die y-z Ebene visualisiert.

### 3.5.1 Vollgefüllte Rohrströmung

Das Geschwindigkeitsprofil von vollgefüllten Röhren und laminaren Strömungen lässt sich durch ein Polynom zweiter Ordnung (vgl. [Tru96]) oder eine auf Ostwald und de Waele aufbauende Funktion gemäß [Han03] definieren. Für Röhre mit Krümmer (vgl. Abb. 3.17c),



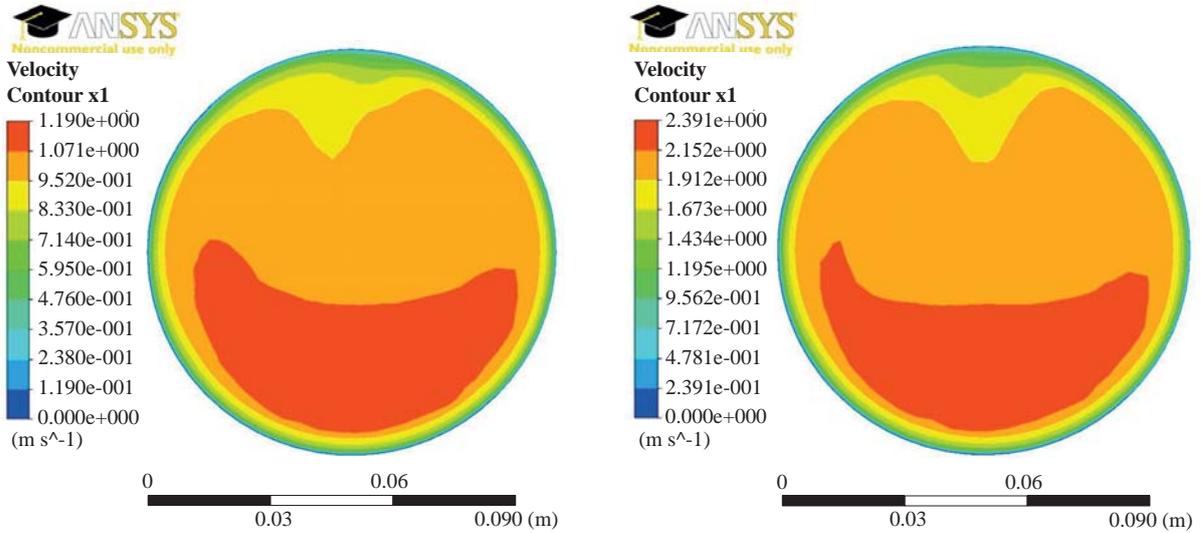
**Abb. 3.17:** Geometrie des Rohr- a) und Kanalquerschnittes b) sowie deren Ausleuchtung durch den Phased-Array-Sensor. c) Rohr mit Krümmer.

und damit auch für den in dieser Arbeit verwendeten Prüfstand, gilt diese Bedingung erst ab einem Messabstand von mindestens  $10 \cdot d_{Kr}$  vom Krümmer [DHW04, BLJ07]. Bei einem Krümmungsdurchmesser von  $d_{Kr} = 20$  cm ist folglich eine Messung unter annähernd beruhigten Strömungsverhältnissen ab 2 m nach dem Krümmer zu erwarten. Da diese Messdistanz am Prüfstand und oft auch in der Realität nicht gewährleistet werden kann, beinhaltet Kap. 2.3.1 CFD-Simulationen zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils. Das Geschwindigkeitsprofil lässt sich durch ein Polynom der vierten Ordnung

$$v_{x,R} = a z_R^4 + b z_R^2 + c z_R + d y_R^4 + e y_R^2 + f y_R + g \quad (3.64)$$

bei einer Distanz von  $3 \cdot d_{Kr}$  hinreichend genau beschreiben. Aus der oberen Geometrie gilt  $z_R = z - z_{tot} - r$ . Bei geeigneter Wahl der Variablen  $a$  bis  $g$  ist eine Anpassung der Funktion an das Vektorfeld der Simulationsergebnisse auch bei unterschiedlichen Einlaufgeschwindigkeiten möglich. Bei achssymmetrischen Strömungsprofilen kann die obere Gleichung um die linearen Terme reduziert werden. Bei der verwendeten Prüfstandsanordnung, verdeutlichen die Profile in Abb. 3.18 eine Symmetrie entlang der y-Achse, sodass der Term mit der Variable  $f$  aus der Gleichung eliminiert werden kann.

Die Parameteridentifikation ist in den Grenzschichten zur Rohrwand mit einer Geschwindigkeit von Null nicht realisierbar [BMVW08]. In der Regel sind keine Reflektoren nahe der Grenzschichtzone vorhanden, sodass eine Anpassung nicht möglich ist. Oft werden daher Randbereiche definiert, welche zur Ausgleichsrechnung der Funktionen nicht beitragen, jedoch unter Kenntnis der Grenzschichtgeschwindigkeit interpoliert werden können (vgl. [Mor10]). Bei diesem Vorgehen stellt sich allerdings die Frage nach der Größe und



**Abb. 3.18:** Geschwindigkeitsprofil von vollgefüllten Rohrströmungen mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1 m/s (links) und 2 m/s (rechts).

Form aber auch der Interpolationsmethode innerhalb der Randbereiche. Im Gegensatz hierzu wird in dieser Arbeit die Gl. 3.64 mit einer Fensterfunktion beaufschlagt, um das Wissen über die Grenzschicht in die Ausgleichsrechnung einfließen lassen zu können. Die Fensterfunktion ist gegeben durch

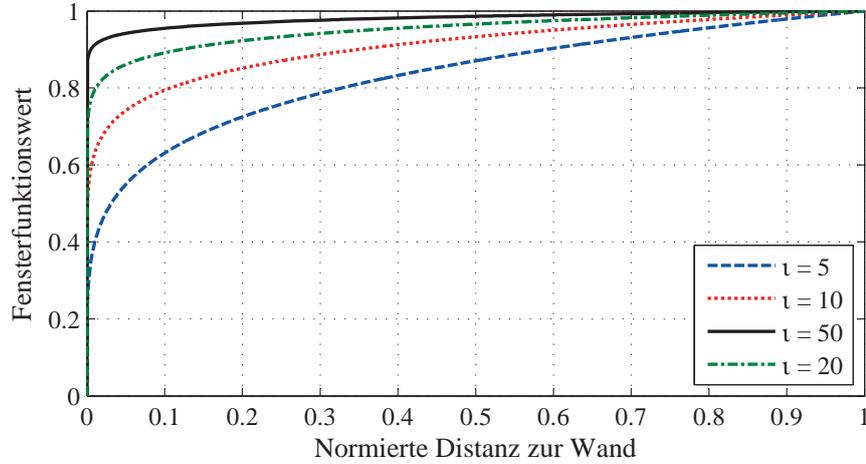
$$w_{FR} = \sqrt[\iota]{\left(r - \sqrt{y_R^2 + z_R^2}\right) / r}, \quad (3.65)$$

wobei durch Variieren der Variable  $\iota$  die Steigung der Grenzschicht beeinflusst werden kann. In Abb. 3.19 ist in Abhängigkeit von  $\iota$  der Zusammenhang zwischen der normierten Distanz zur Wand  $\left(r - \sqrt{y_R^2 + z_R^2}\right) / r$  und der Fensterfunktion  $w_{FR}$  abgebildet.

Durch Multiplikation des Geschwindigkeitsprofils aus Gl. 3.64 mit der Fensterfunktion resultiert:

$$v_{x,RW} = w_{FR} \left( a z_R^4 + b z_R^2 + c z_R + d y_R^4 + e y_R^2 + g \right). \quad (3.66)$$

Damit die Fensterfunktion nur die Randbereiche des Rohres und nicht das komplette Geschwindigkeitsprofil beeinflusst, wird für die nachfolgende Auswertung  $\iota = 10$  gewählt. Um die Parameter  $a - e$  und  $g$  der Gleichung bestimmen zu können, muss diese in Matrixnotation für die Geschwindigkeits- und Positionswerte  $1..N$  vorliegen:



**Abb. 3.19:** Verhalten der Fensterfunktion  $w_{FR}$  beim Variieren von  $\nu$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_{x,RW,1}/w_{FR} \\ v_{x,RW,2}/w_{FR} \\ v_{x,RW,3}/w_{FR} \\ \vdots \\ v_{x,RW,N}/w_{FR} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_{R,1}^4 & z_{R,1}^2 & z_{R,1} & y_{R,1}^4 & y_{R,1}^2 & 1 \\ z_{R,2}^4 & z_{R,2}^2 & z_{R,2} & y_{R,2}^4 & y_{R,2}^2 & 1 \\ z_{R,3}^4 & z_{R,3}^2 & z_{R,3} & y_{R,3}^4 & y_{R,3}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{R,N}^4 & z_{R,N}^2 & z_{R,N} & y_{R,N}^4 & y_{R,N}^2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (3.67)$$

Nach Umformen zur Normalgleichung und Minimierung der Fehlerquadrate  $\|\mathbf{r}_{res}\|_2^2$  gemäß

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6} \|\mathbf{D}\mathbf{b} - \mathbf{v}_x\|_2^2 \quad (3.68)$$

erschließt sich der gesuchte Vektor  $\mathbf{b}$ , wobei die Summe der normierten Fehlerquadrate

$$r_{LSQ} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N r_{res,i}^2}{N}} \quad (3.69)$$

als Gütemaß der Messabweichung zum Profil verwendet wird.

Für eine effiziente und stabile Identifizierung der Parameter  $a - e$  und  $g$  durch einen Mikrocontroller mit geringer Rechenleistung, wird die Optimierungsaufgabe mithilfe einer  $QR$ -Zerlegung gelöst, deren Matrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{Q}$  durch die Householder-Transformation bestimmt werden. Dabei wird die Matrix  $\mathbf{D}$  in Gl. 3.68 zunächst durch  $\mathbf{QR}$  substituiert und anschließend durch  $\mathbf{Q}^T$  erweitert:

$$\|\mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{v}_x)\|_2^2 = \|\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_x\|_2^2. \quad (3.70)$$

Da die Matrix mit  $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{0}]^T$  definiert ist,  $\mathbf{R}_1$  eine obere Dreiecksmatrix im Raum  $\mathbb{R}^{N \times 6}$  beschreibt und der Geschwindigkeitsvektor mit  $\mathbf{Q}^T \mathbf{v}_x = \tilde{\mathbf{v}}_x = [\tilde{\mathbf{v}}_{x,1}, \tilde{\mathbf{v}}_{x,2}]$  gegeben ist, resultiert durch sukzessives Rückwärtseinsetzen von  $\mathbf{R}_1 \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{v}}_{x,1}$  die Lösung der Elemente des Vektors  $\mathbf{b}$ .

Die Eignung des Modells wird durch eine CFD-Simulation der Rohrströmung überprüft. Hierzu werden zunächst auf Basis der simulativ gewonnenen Geschwindigkeitsvektoren  $[v_{ist,x,1}, \dots, v_{ist,x,N}]^T$  Messwerte für die Azimutwinkel  $-30^\circ; -20^\circ; \dots; 30^\circ$  im Abstand von 10 mm entnommen. Diese Positions- und Geschwindigkeitswerte werden anschließend über die Notation in 3.67 zur Bestimmung der Parameter  $a - e$  und  $g$  verwendet. Ist die Funktion  $v_{x,RW}$  in Gl. 3.66 vollständig durch die Parameter beschrieben, berechnet sich der Geschwindigkeitsfehler aus der Differenz von Simulations- und Funktionswert an den Positionen  $(1, \dots, N)$  aus:

$$e_{Rohr} = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{|v_{ist,x,n} - v_{x,RW,n}|}{v_{ist,x,n}} \right) \cdot 100\%. \quad (3.71)$$

Die Fehler sind für die mittleren Einlaufgeschwindigkeiten von  $\bar{v}_{in} = 0,5 - 2 \text{ m/s}$  in Tab. 3.3 zusammengefasst. Horizontale und vertikale Schnittbilder von simulierten und berechneten Profilen sind für jede Geschwindigkeit im Anhang A.18 beigelegt.

$\bar{v}_{in}$	0,5 m/s	1 m/s	1,5 m/s	2 m/s
$e_{Rohr}$	0,33%	0,47%	0,58%	0,59%

**Tabelle 3.3:** Relativer Geschwindigkeitsfehler zwischen simuliertem Profil  $v_{ist,x}$  und adaptiertem Modell  $v_{x,RW}$  einer Rohrströmung.

### 3.5.2 Offene Kanalströmung

Im Gegensatz zum vollgefüllten Rohr existieren beim offenen Kanal bedingt durch dessen Komplexität mehrere, teils empirisch hergeleitete, mathematische Modelle zur Beschreibung von Geschwindigkeitsprofilen. Neben [Sul01, KV95, Köl04, ISO05] hat sich bei offenen Kanälen besonders das auf [Col56, NN93, LR97] basierende und anschließend in [BMVW08, BVM<sup>+</sup>07] erweiterte und analysierte Geschwindigkeitsmodell durchgesetzt (vgl. Abb. 3.17b):

$$\frac{v_x}{\bar{v}_x} = \left[ \left| a \cdot \ln \left( \frac{z}{h} \right) + b + c \cdot \sin \left( d \cdot \frac{z}{h} \right) \right| + e \cdot \left( \frac{y}{b} \right)^f \right]. \quad (3.72)$$

Auf Grundlage der Messwerte  $v_x$  und deren Positionen  $y$  und  $z$  lassen sich die Variablen  $a - f$  und damit das Geschwindigkeitsprofil des Kanals bestimmen. Die Ausgleichsrechnung für diesen Modellansatz ist allerdings aufgrund ihrer hohen Nichtlinearität aufwändig, weswegen in [ST10] eine Vereinfachung des Geschwindigkeitsmodells entlang der  $z$ -Achse vorgeschlagen wird. Der vereinfachte Modellansatz wird in dieser Arbeit durch CFD-Simulationen um eine Dimension erweitert, sodass das Geschwindigkeitsprofil in der Fläche beschrieben werden kann.

Untersuchungen anhand von Simulationsergebnissen zeigen, dass die Modellerweiterung entlang der Kanalbreite durch zwei gespiegelte ln-Funktionen erfolgen muss. Man erhält als Modell:

$$v_{x,Kln} = a \frac{h - |z|}{h} \ln \left( \frac{h - |z|}{h} \right) + b \frac{h - |z|}{h} + c \ln \left( \frac{b - |y|}{b} \right) + d \left( \frac{b - |y|}{b} \right)^4 + e. \quad (3.73)$$

Das Modell kann nur symmetrische Profile beschreiben, hat aber den Vorteil einer leichten Anpassbarkeit an die Messpunkte.

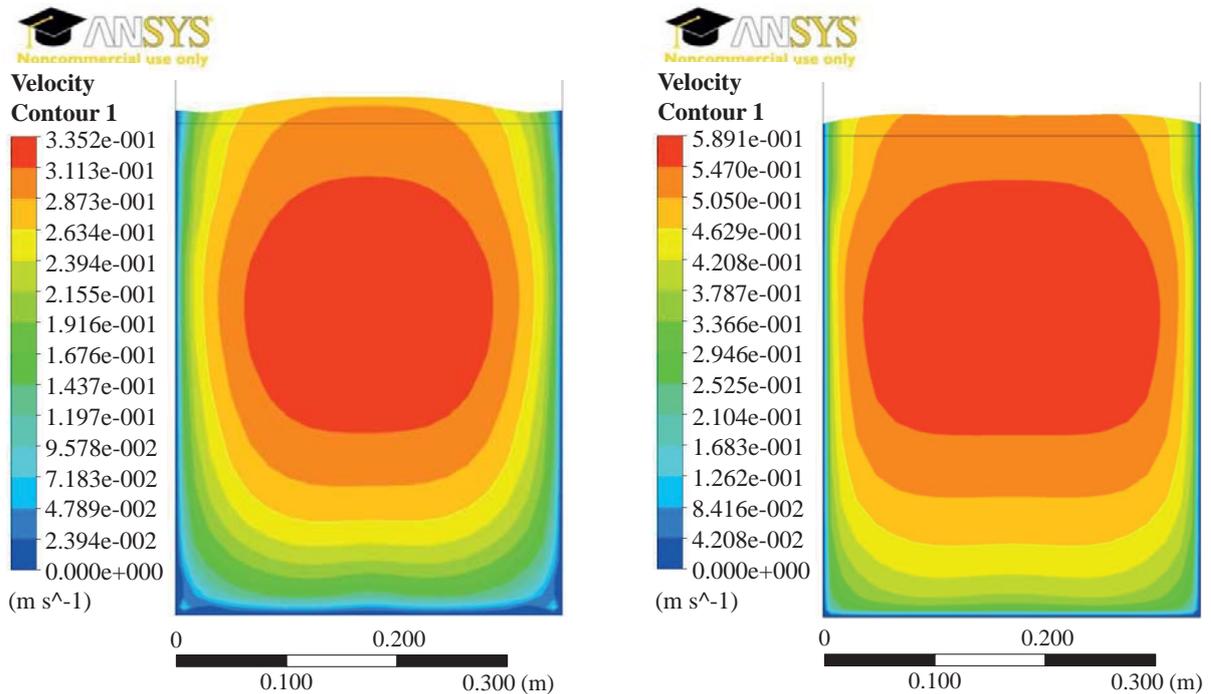
Neben der ln-Funktion wird zusätzlich ein Polynom-Ansatz untersucht. Vergleichbar zum vollgefüllten Rohr lassen sich somit auch asymmetrische Geschwindigkeitsprofile über das Modell identifizieren. Das Geschwindigkeitsmodell mit einer Fensterfunktion  $w_{FK}$  ist gegeben mit:

$$v_{x,KPo} = \underbrace{\sqrt[5]{1 - \left[ \left( \frac{h - |z|}{h} \right) \cdot \left( \frac{b/2 - |y|}{b/2} \right) \right]}}_{w_{FK}} \cdot (a z^2 + b z + c y^4 + d y + e). \quad (3.74)$$

Beide Modellansätze werden miteinander anhand eines symmetrischen Strömungsprofils verglichen. Dazu wird der lineare Term mit dem Parameter  $d$  in der oberen Gleichung gestrichen. Eine CFD-Simulation ergibt die Strömungsprofile nach Abb. 3.20.

Zur Bewertung der Gl. 3.73 und 3.74 werden -identisch zum Rohr- zunächst die winkelbezogenen Messwerte ( $\alpha = -30^\circ; -20^\circ; \dots; 30^\circ$ ) der Kanalsimulationen entnommen und die Parameter der beiden mathematischen Modelle über Gl. 3.68 bestimmt. Die daraus resultierenden Modelle werden anschließend mit den Simulationsergebnissen gemäß Gl. 3.71 verglichen. In Tab. 3.4 sind die relativen Durchflussfehler für mittlere Fließgeschwindigkeiten von 0,3 m/s und 0,5 m/s zusammengefasst. Horizontale und vertikale Schnittbilder sind dem Anhang A.18 beigelegt.

Die Fehleranalysen zum offenen Kanal als auch zum vollgefüllten Rohr machen deutlich, dass für einen Phased-Array-Sensor die Bildung des Geschwindigkeitsprofils durch einen Polynomansatz den geringsten Fehler aufweist. Zudem ist die Parameteridentifikation dieses Funktionsansatzes auch mit geringer Rechenleistung realisierbar.



**Abb. 3.20:** Geschwindigkeitsprofil einer offenen Kanalströmung mit einer mittleren Geschwindigkeit von 0,3 m/s (links) und 0,5 m/s (rechts).

	$v_{x,Kln}$		$v_{x,KPo}$	
	0,3 m/s	0,5 m/s	0,3 m/s	0,5 m/s
$\bar{v}_{in}$				
$e_{Kanal}$	3,21%	2,26%	0,054%	0,046%

**Tabelle 3.4:** Relativer Geschwindigkeitsfehler zwischen CFD simuliertem Profil  $v_{ist,x}$  und adaptiertem Modell  $v_{x,Kln}$  bzw.  $v_{x,KPo}$  einer Kanalströmung.

## 3.6 Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation

Untersuchungen zum Objektverfolgungsverfahren zeigten, dass die Zusammensetzung von Zustandsschätzung und Datenassoziationsverfahren die Eigenschaften des Auswerteverfahrens beeinflussen. Besonders großen Einfluss auf die Dynamik der Verfahren nimmt dabei die Wahl der Datenassoziation ein. In diesem Kapitel wird daher der Standard-Kalman-Filter mit dem erweiterten NN-Verfahren, dem PDA-Verfahren und dem JPDA-Verfahren kombiniert und hinsichtlich deren Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften untersucht. Ferner wird zu diesen Filterkonstellationen auch der Einfluss zusätzlicher Amplitudeninformationen im Zustands- und Messmodell untersucht. Durch Variieren des SNR und der Reflektoranzahl soll darüber hinaus eine weitere Bewertung des Auswerteverfahrens vorgenommen werden.

### 3.6.1 Konvergenz und Stabilität

Für die nachstehenden Analysen wird der Kalman-Zustandsfilter (KF) mit den Assoziationsverfahren:

- NN (Nearest Neighbour) mit gewichteter Innovationskovarianz  $\ln(\det(\mathbf{S}))$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,
- PDA-Verfahren (Probabilistic Data Association)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,
- PDAXa-Verfahren (PDA mit zusätzlicher Amplitudeninformation)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und
- JPDA-Verfahren (Joint Probabilistic Data Association)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

kombiniert. Ausgangspunkt der Gegenüberstellung bildet ein Datensatz an detektierten Reflektoren eines offenen Kanals (Höhe  $h=455$  mm), welcher unter den Einfallswinkeln  $\alpha = 0^\circ$  und  $\beta = 45^\circ$  über einen Zeitraum von 325 ms mit einer  $t_{PRI}=0,5$  ms aufgezeichnet wird. Der Füllstand wird in  $N_z = 10$  Elemente unterteilt, mit dem Mittelwert:

$$\bar{v}_{x,m} = \frac{\sum_{i=1}^{N_z} v_{x,i}}{N_z}. \quad (3.75)$$

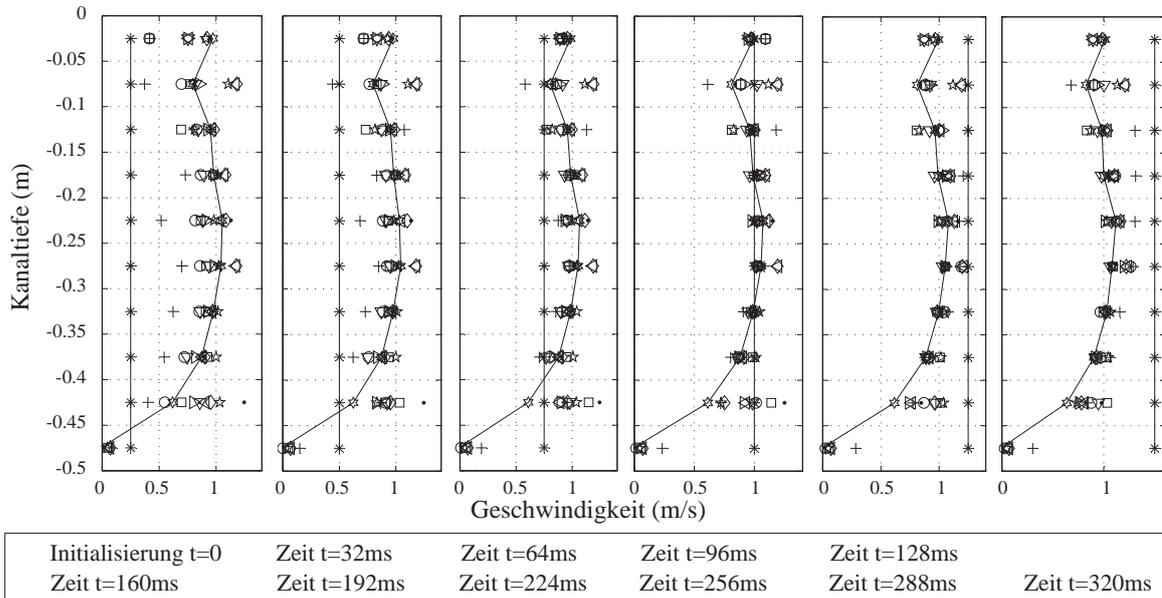
Mit

$$\bar{v}_{x,std} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_z} (v_{x,i} - \bar{v}_{x,325ms,i})^2}{N_z - 1}} \quad (3.76)$$

berechnet man die Standardabweichung. Die Variable  $\bar{v}_{x,325ms}$  in der Gleichung beschreibt das gemittelte Geschwindigkeitsprofil entlang der vertikalen Kanalachse bei  $y = 0$ , welches nach hinreichend langer Zeit (in Abb. 3.22 nach 325 ms) resultiert. (vgl. [NN93])

Um das Konvergenzverhalten der Filterkombinationen bewerten zu können, werden die Geschwindigkeiten des Zustandsvektors -entgegen des herkömmlichen Initialisierungsprozesses nach Kap. 3.4.3- zu Beginn mit einer über die Höhe durchgehend konstanten Geschwindigkeit initialisiert. Ausgehend von diesen Geschwindigkeiten, bildet sich während der Messdauer ein Geschwindigkeitsprofil aus. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 3.21 die räumliche Profilausbildung für die Initialisierungsgeschwindigkeiten von 0,25 m/s bis 1,5 m/s exemplarisch für eine KF-PDA-Filterkombination dargestellt. An den durchgehend miteinander verbundenen Profilpunkten zum Zeitpunkt  $t=0$  ms und  $t=320$  ms wird deutlich, dass sich die Endprofile unabhängig von der Initialisierung in allen Diagrammen gleichen.

Zur kompakten Beantwortung der Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität werden nun die Variablen  $\bar{v}_{x,m}$  und  $\bar{v}_{x,std}$  für alle Filterkombinationen im Intervall von 16 Messzyklen (8 ms) berechnet. Betrachtet werden hierfür zwei Szenarien mit Einlaufgeschwindigkeiten von  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s und 1 m/s. Ausgehend von den beiden Worst-Case-Initialisierungen 1,5 m/s und 0,25 m/s resultieren letztlich die Mittelwerte in Abb. 3.22. Dabei ist festzuhalten, dass unabhängig von den Filterkombinationen prinzipiell alle Mittelwerte gegen ihre Endzustände  $N_z^{-1} \sum_{i=1}^{N_z} \bar{v}_{x,325ms,i} = 0,52$  m/s bzw. 1,02 m/s streben; dort jedoch mit unterschiedlich starken Schwankungen verharren. Eine besonders schnelle Konvergenz



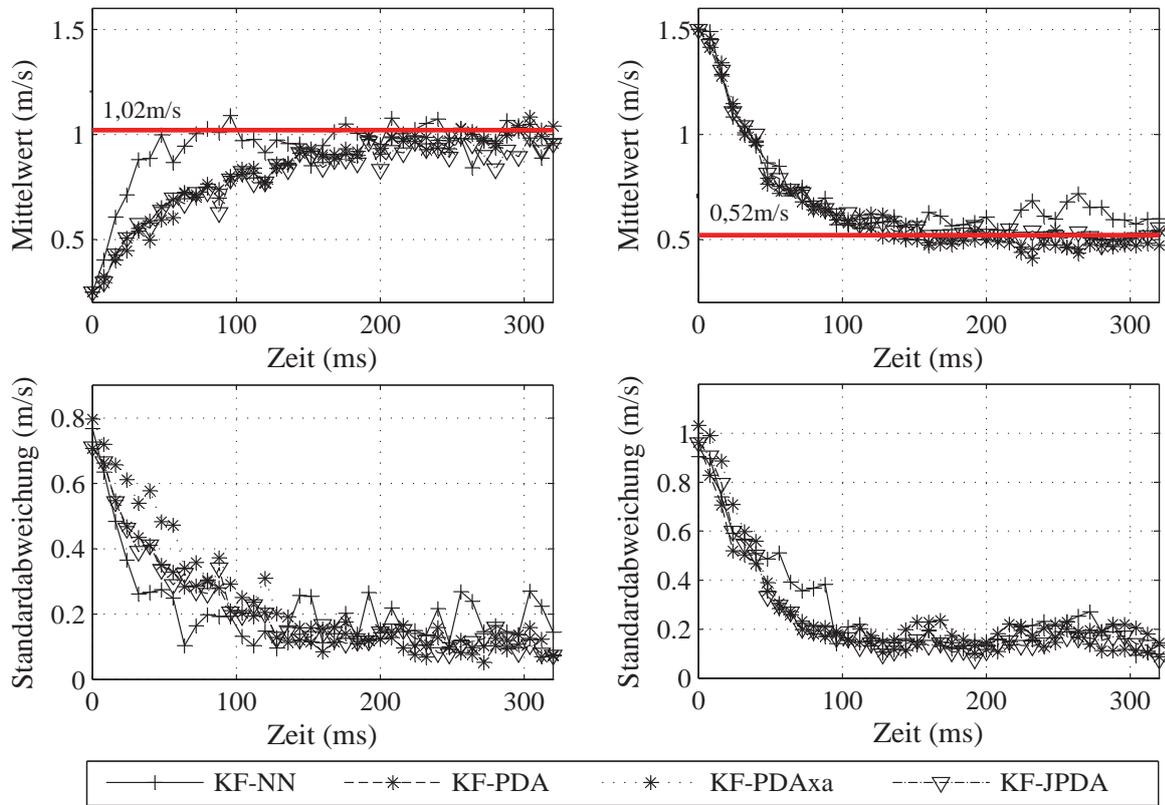
**Abb. 3.21:** Räumliche Konvergenzbetrachtung bei einer Filterkonstellation KF-PDA mit unterschiedlichen Initialisierungswerten.

ergibt sich bei der KF-NN-Filterkonstellation. Werden die Standardabweichungen  $\bar{v}_{x,std}$  nach einer Einschwingzeit von 150 ms näher betrachtet, wird zudem deutlich, dass besonders bei der hohen Geschwindigkeit ( $\bar{v}_{in} = 1$  m/s) die Filterkonstellation KF-NN stärkeren Schwankungen unterliegt.

Als Resultat lässt sich festhalten, dass der Assoziationsfilter einen wesentlich geringeren Einfluss auf die Auswertung übt. Einzig das NN-Verfahren stellt sich im Vergleich zu den anderen Filterkombinationen bei der hohen Geschwindigkeit als schlechter gedämpft heraus. Hinsichtlich des Rechenaufwandes sind allerdings das PDAXa-Verfahren aufgrund der Zustandserweiterung um die Amplitudeninformation und das JPDA-Verfahren aufgrund der globalen Assoziationsbetrachtung wesentlich aufwändiger als das NN- oder das PDA-Verfahren. Da der Rechenaufwand einer einzelnen Filterkombination proportional zur Reflektoranzahl in einem Messzyklus ist, wird für die nachfolgenden Auswertungen die KF-PDA-Filterkonstellation bevorzugt. Die Rechendauer dieser KF-PDA-Filterkonstellation wird in Kap. 6.1 an realen Kanalmessungen für eine Mikrocontroller-Implementierung ausführlich behandelt. Basierend auf dieser Kenntnis wird deutlich, warum der gesamtheitliche Ansatz eines Multi-Hypothesen-Trackers (MHT) für diese Anwendung nicht vertieft wurde.

### 3.6.2 Variation von SNR und Reflektoranzahl

Um die Auswirkungen von variierenden SNR und der Anzahl an Reflektoren auf das KF-PDA-Auswerteverfahren untersuchen zu können, werden in diesem Abschnitt auf

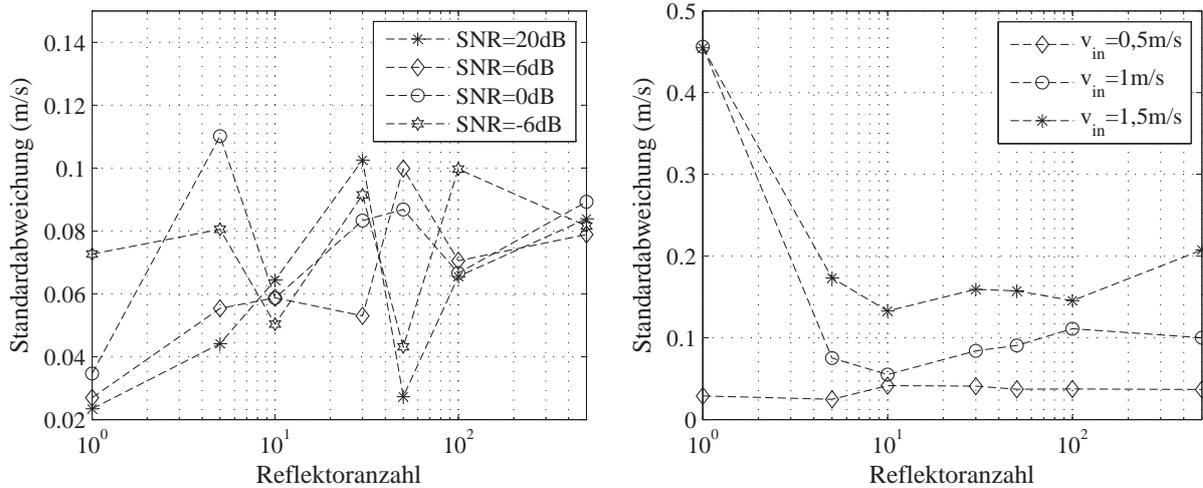


**Abb. 3.22:** Links: Auswerteszenario für eine Einflussgeschwindigkeit von  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$  und eine Initialisierungsgeschwindigkeit von  $0,25 \text{ m/s}$ , wobei die Mittelwerte  $\bar{v}_{x,m}$  (oben) und Standardabweichungen  $\bar{v}_{x,std}$  (unten) dargestellt sind; Rechts: Auswerteszenario für eine Einflussgeschwindigkeit von  $\bar{v}_{in} = 1 \text{ m/s}$  und eine Initialisierungsgeschwindigkeit von  $1,5 \text{ m/s}$ . Die roten Linien in den oberen Diagrammen kennzeichnen die Mittelwerte der theoretischen Endzustände.

Basis des Simulationsmodells in Kap. 2.3 Empfangssignale einer Gesamtdauer von 160 ms ( $16 \times 20 = 320$  Messintervalle bei  $t_{PRI} = 0,5 \text{ ms}$ ) generiert. Als Grundlage dienen CFD-Simulationen eines vollgefüllten Rohres ( $d = 0,1 \text{ m}$ ) mit den Geschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ m/s}$  und  $1,5 \text{ m/s}$ . Hierbei werden die Reflektormengen und damit die Anzahl an Echos im Empfangssignal in den Stufen 1, 5, 10, 30, 50, 100 und 500 verändert und deren Auswirkungen auf das Verfahren bewertet. Neben unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Reflektormengen wird auch der Einfluss von Rauschen im Empfangssignal auf das Auswerteverfahren untersucht. Die Bewertung erfolgt für jedes Auswerteszenario nach Ablauf der 160 ms ( $= 320$  Messintervalle) über die Gl. 3.76.

In Abb. 3.23 (links) sind für die Einlaufgeschwindigkeit  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$  die Standardabweichungen in Abhängigkeit der Reflektormenge bei unterschiedlichem SNR dargestellt. Im rechten Diagramm sind für ein konstantes  $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$  die Standardabweichungen bei unterschiedlichen Einlaufgeschwindigkeiten aufgetragen.

Das Verfahren ist sehr robust gegen Rauschen und arbeitet ab einer geringen Reflektanzahl von fünf zuverlässig.



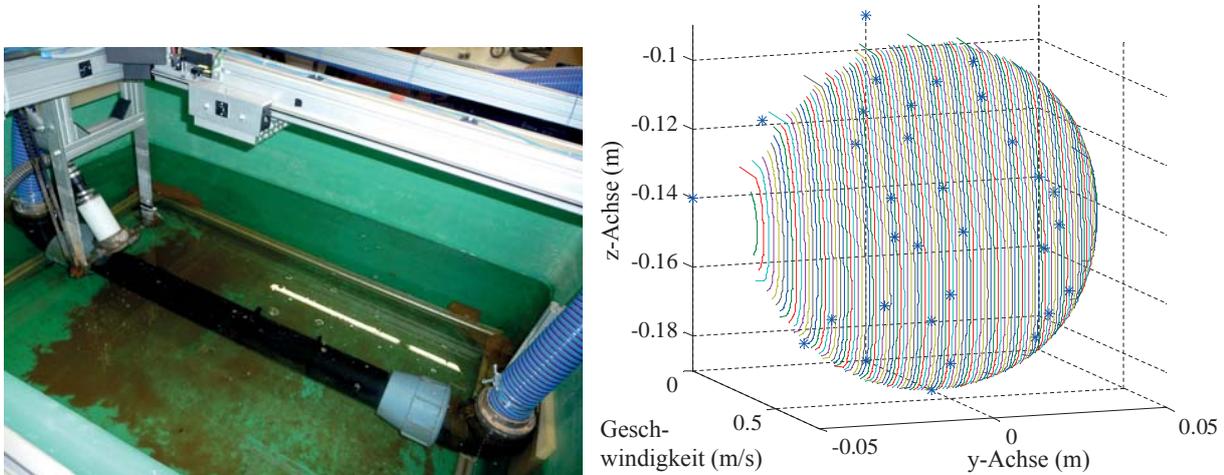
**Abb. 3.23:** Links: Fehleranalyse bei konstantem  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ , unterschiedlichem SNR und verschiedener Reflektoranzahl; Rechts: Fehleranalyse bei konstantem SNR=0 dB, unterschiedlichen Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in}$  und Reflektoranzahlen.

## 3.7 Messergebnisse zum Auswerteverfahren

Basierend auf dem korrelativen Auswerteverfahren und der Phased-Array-Technik werden Geschwindigkeitsverteilungen von vollgefüllten Rohrströmungen und offenen Kanälen vorgestellt. Während die Messungen in Kap. 3.7.1 und 3.7.2 noch unter Laborbedingungen stattfanden, erfolgte die Messung im letzten Kap. 3.7.3 im Klärwerk Ulm unter realen Bedingungen. Zur Verifizierung der Ergebnisse sind die tatsächlichen Volumenströme bei der vollgefüllten Rohrströmung durch Ausliterung und bei dem offenen Kanal im Labor bzw. Klärwerk durch einen MID-Sensor bekannt. Der MID-Sensor weist nach [Mor10] eine Ungenauigkeit von 1% auf.

### 3.7.1 Vollgefüllte Rohrströmung

Identisch zum CFD-Modell in Kap. 2.3.1 besteht der Prüfstand zur Verifizierung der vollgefüllten Rohrströmung aus zwei 90°-Krümmern ( $d_{Kr} = 20 \text{ cm}$ ) und einem Rohr mit dem Durchmesser 1 dm. Das Rohr ist mit einem durchströmenden Fluid gefüllt und ist vollständig in Wasser eingetaucht (Abb. 3.24 links). Der Sensor kann die Rohrströmung im Abstand von ( $z_{tot}$ ) messen, da das Rohr schalldurchlässig ist. Der Sensor ist zudem in einer Entfernung von  $4 \times d_{Kr}$  zum ersten Krümmer und  $1 \times d_{Kr}$  zum zweiten Krümmer installiert und weist einen Einstrahlwinkel von  $\beta = 60^\circ$  entgegen der Fließrichtung auf. Als Reflektoren dienen kleinste Luftbläschen (Durchmesser  $< 1 \text{ mm}$ ), welche von Diffusoren in das zirkulierende Fluid injiziert werden. Die Steuerung der Pumpenleistung und damit des Durchflusses erfolgt über einen Frequenzumrichter.



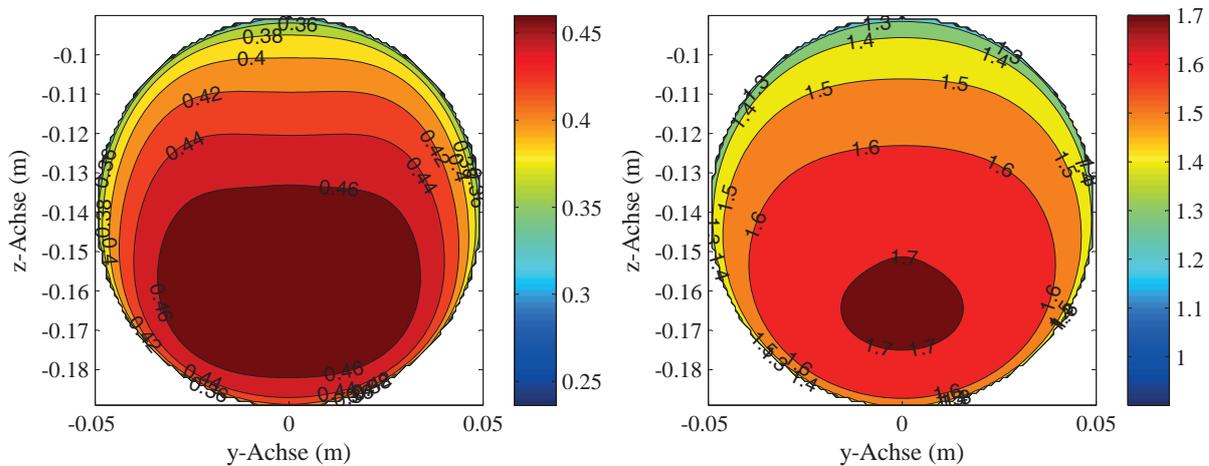
**Abb. 3.24:** Links: Prüfstand zur Messung einer vollgefüllten Rohrströmung. Rechts: Geschwindigkeit einzelner Strömungslinien sowie das daraus resultierende Profil des eingestellten Durchflusses 3,5 l/s.

In Abb. 3.24 rechts sind exemplarisch die gemessenen Geschwindigkeiten einzelner Strömungslinien quer über sämtliche Auslenkwinkel ( $\alpha = -30^\circ; -20^\circ; \dots; 30^\circ$ ) des Phased-Array-Sensors ersichtlich. Zusätzlich ist in diesem Diagramm das über die Parameteridentifikation bestimmte Geschwindigkeitsprofil abgebildet, sodass das normierte Fehlerquadrat  $r_{LSQ}$  nach Gl. 3.69 gebildet werden kann. In Abb. 3.25 sind entsprechend der Messungen und Ausgleichsrechnungen die Geschwindigkeitsverteilungen für die Durchflüsse 3,5 l/s und 12,5 l/s dargestellt. Bei einem Durchfluss von 3,5 l/s wurde  $Q=3,41$  l/s gemessen. Die gemessenen Geschwindigkeiten der Reflektoren streuen mit  $r_{LSQ}=0,122$  m/s um das ermittelte Geschwindigkeitsprofil. Bei 12,5 l/s resultierten ein Durchfluss von  $Q=12,41$  l/s und eine Streuung von  $r_{LSQ}=0,48$  m/s.

### 3.7.2 Offener Kanal

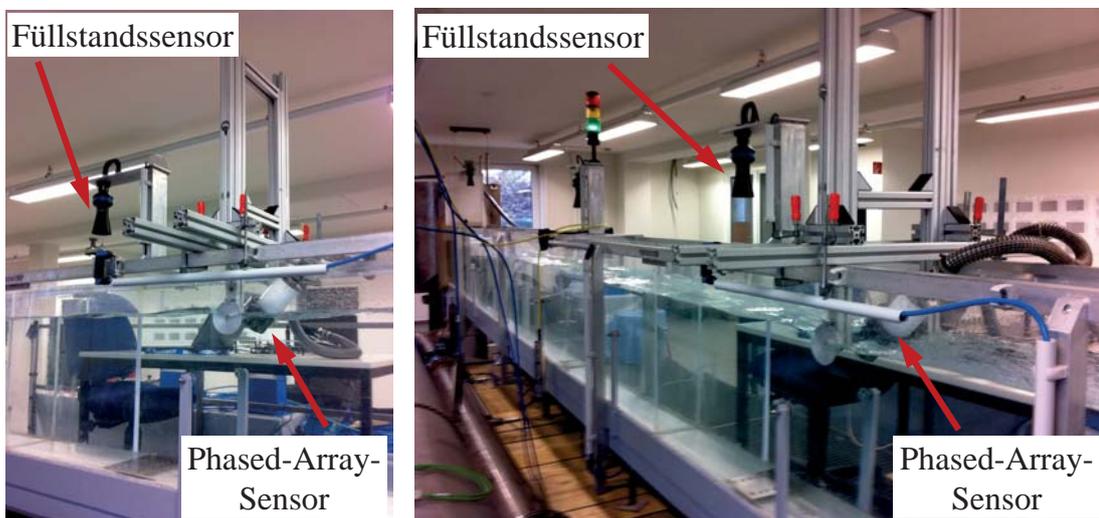
Für die Untersuchungen steht ein Experimentalkanal nach Abb. 3.26 zur Verfügung, der 350 mm breit, 600 mm hoch und 10 m lang ist. Die Neigung lässt sich einstellen. Darüber hinaus kann sowohl der Durchfluss, als auch der Füllstand eingeregelt werden. Als Fluid wird im Kanal destilliertes Wasser verwendet. Um realitätsnahe Bedingungen herbeizuführen, wird das Fluid über Diffusoren mit Schwebstoffen angereichert. Diese zerstäuben eingebrachte Druckluft in kleinste Bläschen (Durchmesser  $< 1$  mm). Gemessen werden somit schallreflektierende Partikel, welche sich schlupffrei mit der Strömung bewegen.

Der Aufbau besteht aus einem Sensor zur Füllstandsmessung und dem Phased-Array-Sensor zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit entgegen der Fließrichtung (siehe Abb. 3.26). Bei der Bestimmung des Durchflusses finden Messungen unter einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 45^\circ$  und bei einem gemittelten Füllstand  $\bar{h}$  statt. Die Ergebnisse resultieren jeweils



**Abb. 3.25:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen zur vollgefüllten Rohrströmung bei ausgeliterten Durchflüssen von  $Q_{Ist} = 3,51/s$  ( $\hat{=} \bar{v}_{in} = 0,45$  m/s) (links) und  $Q_{Ist} = 12,51/s$  ( $\hat{=} \bar{v}_{in} = 1,59$  m/s) (rechts). Die dazugehörigen Durchflüsse betragen  $Q = 3,41/s$  bei  $r_{LSQ} = 0,122$  m/s (links) und  $Q = 12,41/s$  bei  $r_{LSQ} = 0,48$  m/s (rechts). Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

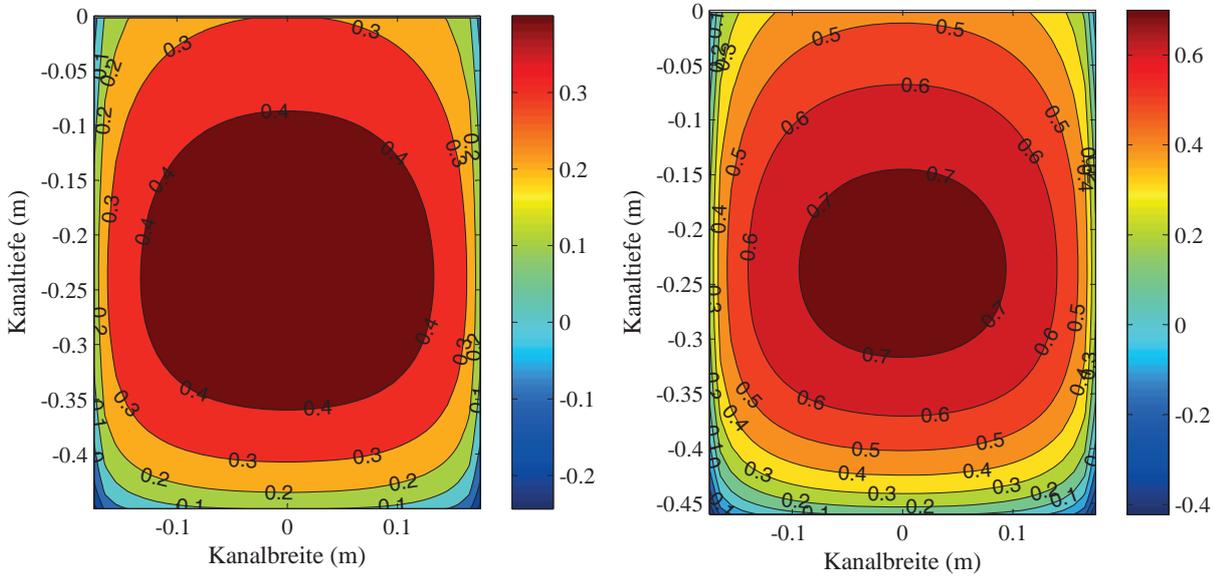
nach einer Messdauer von 40 ms, was 80 Messintervallen entspricht. Um den Einfluss des vertikalen Einstrahlwinkels näher untersuchen zu können, sind im Anhang unter Kap. A.20 weitere Messungen mit  $\beta = 30^\circ$  und den Durchflüssen ( $Q = 531/s$  bzw.  $1301/s$ ) ersichtlic.



**Abb. 3.26:** Strömungskanal mit eingebautem Füllstandssensor und Phased-Array-Sensor zur Messung der Fließgeschwindigkeit.

In Abb. 3.27 sind die Geschwindigkeitsverteilungen über den Kanalquerschnitt dargestellt, welche im Vergleich mit [NN93] oder ferner mit den CFD-Simulationen in Abb. 3.20, eine hohe Übereinstimmung miteinander aufweisen. Der Vergleich des eingestellten Durchflusses von  $531/s$  mit dem von der Sensorik ermittelten Durchfluss ergab einen Fehler

von 1,9%; bei 831/s betrug die Abweichung 1,2%. Für das Geschwindigkeitsprofil resultierte eine Streuung der Messwerte von  $r_{LSQ}=0,053$  m/s bei 531/s und  $r_{LSQ}=0,061$  m/s bei 831/s.



**Abb. 3.27:** Geschwindigkeitsverteilungen beim offenen Kanal bei  $\beta = 45^\circ$ , einem Füllstand von  $\bar{h}=455$  mm (links) und  $\bar{h}=456$  mm (rechts). Es wurde ein Durchfluss von 531/s bzw. 831/s eingestellt. Die Phased-Array-Messung ergab  $Q=541$ /s mit  $r_{LSQ}=0,053$  m/s (links) bzw.  $Q=821$ /s mit  $r_{LSQ}=0,061$  m/s (rechts). Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

### 3.7.3 Klärwerk Ulm

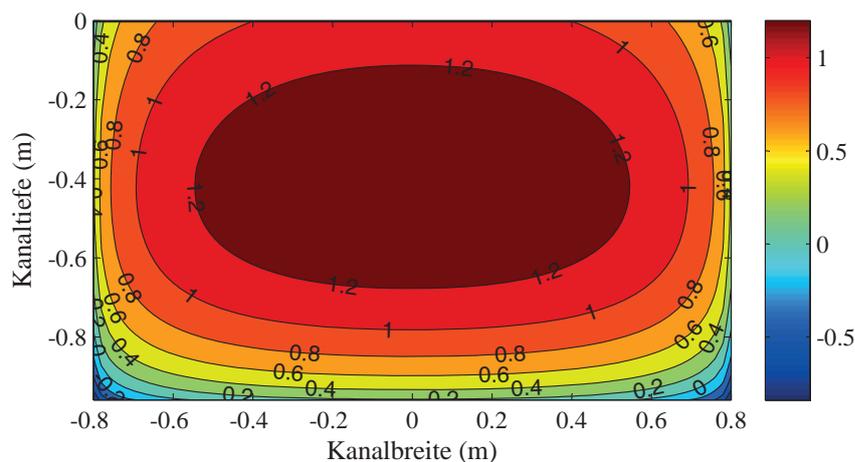
Um reale Bedingungen bei den Messungen mit dem Phased-Array-Sensor herbeizuführen, wurden Messungen im Klärwerk Ulm durchgeführt. Hierbei erfolgt die Installation des Sensors im Zulauf des Vorklärbeckens (siehe Abb. 3.28). Der Kanal hat an dieser Stelle eine Breite von  $b=1,6$  m und einen durchschnittlichen Füllstand von  $\bar{h}=0,96$  m. Zudem befinden sich in diesem Kanal eine extrem hohe Anzahl an Schwebstoffen, welche die Schallsignale reflektieren.

In Abb. 3.29 ist die gemessene Geschwindigkeitsverteilung bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 45^\circ$  und einem Sichtbereich des Sensors zwischen  $\alpha = -30^\circ$  und  $+30^\circ$  dargestellt. Bezogen auf die Messdauer von 8 ms konnten im Sichtbereich des Sensors über 2500 Reflektorspuren erfasst werden. Werden die Geschwindigkeiten dieser Spuren dauerhaft über die komplette Querschnittsfläche aufintegriert, resultiert hieraus ein Durchfluss von 1525 l/s und eine Streuung der Messwerte von  $r_{LSQ}=0,12$  m/s. Wird der Durchflusswert mit dem gemittelten Durchfluss des MID-Sensors am Zulauf des Vorklärbeckens (1460 l/s) verglichen, ergibt sich eine Messabweichung von 4,4%. Die entsprechenden Geschwindigkeiten der



**Abb. 3.28:** Zulauf zum Vorklärbecken im Klärwerk Ulm.

Strömungslinien, sowie deren extra- und interpolierte Profile finden sich im Anhang unter Kap. A.21.



**Abb. 3.29:** Geschwindigkeitsverteilung im Klärwerkskanal bei  $Q_{MID}=14601/s$  und gemessenem  $Q=15251/s$  mit  $r_{LSQ}=0,12\text{ m/s}$ . Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

## 3.8 Abschließende Bewertung

In diesem Kapitel wurde die Strömungsgeschwindigkeit durch zeitliches Verfolgen einzelner Reflektorspuren bzw. Strömungslinien bestimmt. Zur Verfolgung der Reflektoren erwies sich die Kombination, bestehend aus einem Kalman- und PDA-Filter, als geeignet. Basierend auf diesem Verfahren erfolgten Messungen mit einem Phased-Array-Strahler im Sichtbereich des Sensors zwischen  $\pm 30^\circ$ . Zur Bestimmung der Strömung außerhalb des Sichtbereichs wurden mathematische Modelle zur Beschreibung von Geschwindigkeitsprofi-

len für offene Kanäle und vollgefüllte Rohre vorgestellt und angewendet. CFD-Simulationen verifizierten die Modellgleichungen. Experimentell konnte die Eignung des hier vorgestellten laufzeitbasierten Auswerteverfahrens mit einem Phased-Array-Sensor auch unter Extrembedingungen im Zulauf des Klärwerks nachgewiesen werden. Ohne Kalibrierung resultierte aus der Klärwerksmessung ein Durchflussfehler von 4,4%. Im Vergleich zum bisherigen Stand der Technik ermöglicht die Reflektorverfolgung eine Stabilisierung der Messung und einen detaillierten Einblick in das Strömungsverhalten und die Anzahl von Reflektoren. Zudem erweitert die Phased-Array-Technologie den Sichtbereich auf das Geschwindigkeitsprofil, wobei nicht sichtbare Bereiche durch ein zweidimensionales Geschwindigkeitsprofil bestimmt werden.



# Kapitel 4

## Dopplerbasierte Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit

Eine weitere Kategorie von Auswerteverfahren zur Bestimmung der Reflektorgeschwindigkeiten basiert auf dem Dopplereffekt. Bei intermittierendem Senden und Empfangen kommt dabei dem Puls-Dopplerverfahren eine besondere Bedeutung zu. Auf dieser Grundlage werden etablierte und moderne Auswertungen im Nachfolgenden analysiert und hinsichtlich der vorliegenden Anwendung miteinander verglichen. Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel steht nicht die Ortsauflösung im Vordergrund, sondern vielmehr das Ziel, die Geschwindigkeit der Reflektoren auch unter hoher Rauschleistung möglichst präzise bestimmen zu können. Zu beachten ist, dass bei diesem Verfahren das Senden der Pulse mit konstanter Frequenz erfolgt und folglich eine Entfernung- und Geschwindigkeitseinschränkung nach Kap. 2.2 vorliegt. Diese Messeinschränkungen gilt es in diesem Kapitel einzuhalten, um Mehrdeutigkeiten ausschließen zu können.

### 4.1 Funktionsweise

Beim Puls-Dopplerverfahren werden kurze Pulse einer gleichbleibend konstanten Frequenz mit einem kurzen Pulswiederholintervall gesendet. Zusätzlich müssen die Pulse kohärent zueinander sein, d.h. eine durchgehende harmonische Signalform aufweisen. Wie auch beim korrelativen Ansatz findet der Empfang der Echosignale während den Pulspausen statt. In Anlehnung an die vom Systemdesign (Kap. 2.4) vorgegebene Signalaufbereitung, erfolgt nach der Digitalisierung, dem Beamforming und der Vorfilterung eine raumzonenbezogene Abtastung des Empfangssignals. Diese ist notwendig, um die Echosignale einer Raumzone zuweisen zu können. Die Auflösung der Raumzonen ist -wie bereits erwähnt- von der Pulsbreite abhängig und durch  $\Delta r = c_w t_{PW}$  gegeben [LS04]. Sind die Abtastwerte über einen kompletten Pulszug derselben Raumzone bekannt, erschließt sich hieraus unter Anwendung der jeweiligen Auswerteverfahren die Dopplerfrequenz. Untersucht werden Auswerteverfahren wie die DFT mit Zero-Padding und die eigenwertbasierte

Spektralanalyse [Kay88, SM97, KK09]. Unter Kenntnis der Dopplerfrequenz resultiert die Fließgeschwindigkeit eines Reflektors aus:

$$v_x = \frac{f_D c_w}{2f_0 + f_D} \frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}. \tag{4.1}$$

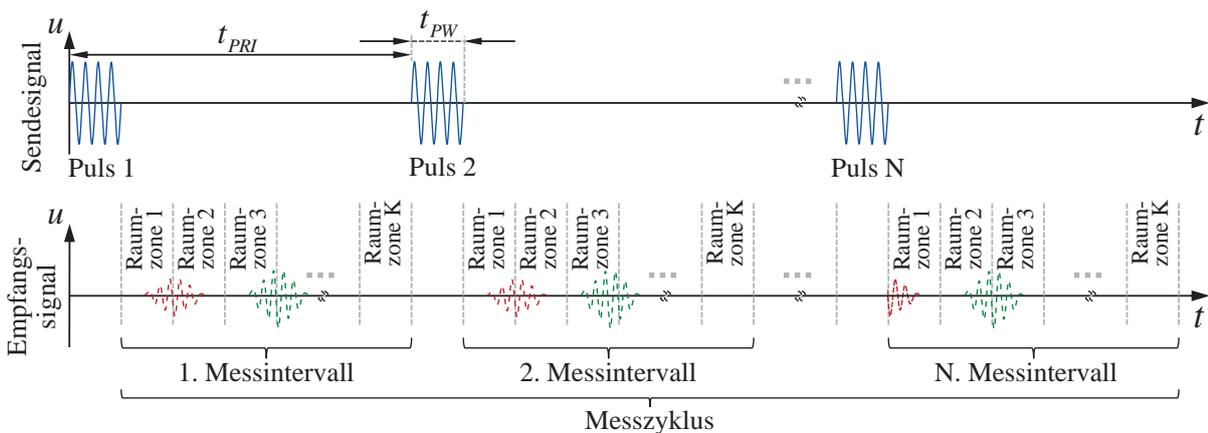
Da in dieser Anwendung  $f_0 \gg f_D$  ist, gilt näherungsweise:

$$v_x = \frac{f_D c_w}{2f_0 \cos(\alpha)\cos(\beta)}. \tag{4.2}$$

Sind die Geschwindigkeiten für sämtliche Raumzonen und Azimuthwinkel des Phased-Array-Strahlers bekannt, knüpft wie auch im vorhergehenden Kapitel eine räumliche Ausgleichsrechnung bzw. Filterung gemäß Kap. 3.5 an die Dopplerauswertung an. Um die Vergleichbarkeit mit den korrelativen Auswerteverfahren herzustellen, werden dieselben mathematischen Profilmodelle für vollgefüllte Rohre und offene Kanalströmungen herangezogen.

## 4.2 Sendesignalform und Signalaufbereitung

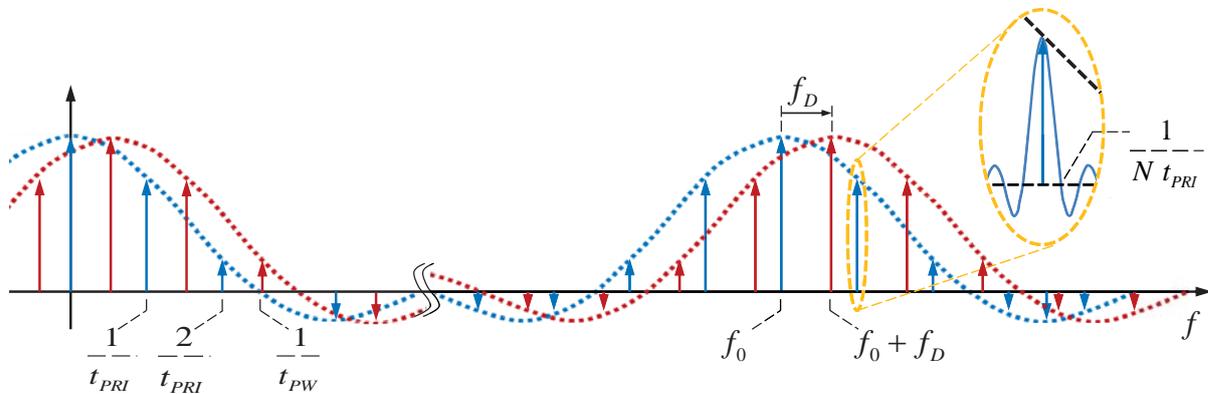
Das Sendesignal besteht aus  $N$  kurzen Pulsen, welche mit einem Pulswiederholintervall von  $t_{PRI}$  gesendet werden. Die Pulsdauer  $t_{PW}$  besteht aus  $L$  Perioden der Sinusfrequenz  $f_0$ . Damit die Echos im Empfangssignal einer Raumzone zugeordnet werden können, ist eine Unterteilung des Signals in  $K$  Zeitzonen der Dauer  $t_{PW}$  notwendig. Diese Zeitzonenunterteilung entspricht  $\Delta r = c_w t_{PW}$  proportional der Raumzonenauflösung. Die qualitativen Zusammenhänge der Sendepulse, Zeitzonenaufteilung und deren Nummerierung sind in Abb. 4.1 dargestellt.



**Abb. 4.1:** Empfangssignalunterteilung zur räumlichen Echozuordnung.

In Abb. 4.2 ist unabhängig von der Filterwirkung des Ultraschallstrahlers das Empfangssignal für gleiche Raumzonennummern im Frequenzbereich ersichtlich. Hier wird

deutlich, dass die Dopplerfrequenz eine Verschiebung des Spektrums bewirkt, welche es in den nachfolgenden Kapiteln zu identifizieren gilt.



**Abb. 4.2:** Frequenzspektren von Empfangssignalen mit (blau) und ohne (rot) Dopplerfrequenzverschiebung.

Um die Dopplerfrequenz bestimmen zu können, muss das mit 20 MHz abgetastete und gefilterte Empfangssignal nach Abb. 2.20 einer Signalaufbereitung zur Dopplerauswertung unterzogen werden. Hierzu existieren mehrere Möglichkeiten, wovon drei der folgenden Aufbereitungsmöglichkeiten für diese Anwendung näher untersucht wurden:

Das Empfangssignal wird ...

- mit den Grenzfrequenzen  $\pm \frac{1}{2t_{PRI}} + f_0$  bandpassgefiltert. Hierzu bedarf es eines Filterentwurfs mit hoher Flankensteilheit, welche selbst bei einem IIR-Filterdesign nur mit einer hohen Koeffizientenanzahl und folglich langer Einschwingzeit realisiert werden kann.
- über die Trägerfrequenz ( $f_0=1$  MHz) ins Basisband gemischt und anschließend einer Tiefpassfilterung unterzogen. Diese Aufbereitung findet insbesondere in der Radartechnik Anwendung und wird in der Regel über die Quadratur-Signalverarbeitung realisiert. Da in diesem Fall das analytische Empfangssignal auch nach der Aufbereitung noch mit einer Abtastfrequenz von 20 MHz vorliegt, führt dies zu einem erheblichen Rechenaufwand bei der nachträglichen Dopplerauswertung.
- zunächst über eine Hilbert-Transformation in ein analytisches Signal gewandelt und anschließend entsprechend dem Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  unterabgetastet. Zu beachten ist, dass in diesem Fall die Pulswiederholfrequenz  $1/t_{PRI}$  und folglich auch die Unterabtastfrequenz ein Vielfaches der Trägerfrequenz  $f_0$  sein muss, damit ohne Alias-Effekte ein exaktes Abmischen in das Basisband erfolgen kann. Die Vorteile dieser Aufbereitung sind, dass das Einschwingen des Hilbert-Transformators bei hoher Abtastfrequenz erfolgt und durch die Unterabtastung ein Abmischen entfällt. Zudem müssen lediglich  $N$  Abtastwerte entsprechend der Pulszahl in der nachträglichen Dopplerauswertung verarbeitet werden, was für diese Anwendung ausreichend ist.

Aufgrund der aufgeführten Vorteile wird für die nachfolgenden Frequenzanalyseverfahren die zuletzt genannte Signalaufbereitung verwendet.

Aus systemtheoretischer Sicht ist das unterteilte Empfangssignal mit gleicher Zonennummerierung im Zeit- und Frequenzbereich wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= e^{j2\pi f_0 t} e^{j2\pi f_D t} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{Nt_{PRI}}\right) \left[ \operatorname{rect}\left(\frac{t}{t_{PW}}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_{PRI}) \right] \\
 \mathcal{F}(s(t)) = S(f) &= \delta(f - f_0) \otimes \delta(f - f_D) \otimes Nt_{PRI} \operatorname{si}(\pi f Nt_{PRI}) \otimes \\
 &\quad \left[ t_{PW} \operatorname{si}(\pi f t_{PW}) \frac{1}{t_{PRI}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{t_{PRI}}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Gleichung im Frequenzbereich macht deutlich, dass durch die gewählte Signalaufbereitung mit der zentrischen Abtastung einer jeden gleichnamigen Zone mit dem Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$ , der Term  $\operatorname{si}(\pi f t_{PW})$  gegen eins konvergiert<sup>1</sup>. Der Dopplerfrequenzterm ( $\delta(f - f_D)$ ) wird somit durch die Kammfunktion ohne Dämpfung der  $\operatorname{si}$ -Funktion in das Basisband gefaltet.

### 4.3 Dopplerfrequenzbestimmung

Auf Grundlage von 16 Abtastwerten<sup>2</sup> einer jeden Raumzone, wird nun die Dopplerfrequenz im Basisband bestimmt. Hierzu werden die im Zeitbereich vorliegenden Abtastwerte entweder auf Basis der Phasenverschiebung analysiert, oder in den Frequenzbereich transformiert, um dort die Dopplerfrequenz zu identifizieren. Unter Kenntnis der Phasenverschiebung oder Dopplerfrequenz, resultiert die Fließgeschwindigkeit der jeweiligen Raumzone. Untersucht werden neben den klassischen Verfahren wie der DFT oder der Kovarianzmethode auch eigenwertbasierte Spektralanalyseverfahren, wie die Pisarenko-Methode oder MUSIC-Spektralschätzung. Es wird sich herausstellen, dass diese Frequenzschätzverfahren für diese Anwendung ausreichen. Folglich werden Frequenzschätzverfahren wie beispielsweise die „notch“ Filtermethode, die „Capon“- , die „Yule-Walker“- oder die „Burg“-Methode in dieser Arbeit nicht weiter vertieft; jedoch auf die Literatursammlung in [Sto93] verwiesen. Die Funktionalität aller Auswerteverfahren ist nur gegeben, sofern die gepulsten Sendesignale kohärent zueinander sind.

<sup>1</sup>Die Abtastung wird oft durch eine Dirac-Impulsfolge genähert, sodass durch  $t_{PW} \rightarrow 0$  die Rechteckfunktion  $\operatorname{rect}\left(\frac{t}{t_{PW}}\right)$  im Zeitbereich zu einem Dirac-Impuls konvergiert, welcher im Frequenzbereich einer eins entspricht.

<sup>2</sup>Hardwarebedingte Speicherressourcen begrenzen die Anzahl der Abtastwerte.

### 4.3.1 DFT mit Zero-Padding

Neben den sog. Nullstellen-Detektoren nach [Pro91, Bon89] oder Phase-Locked Loop Regelschleifen nach [Bes07, Ges87], nahm in der Vergangenheit mit steigender Rechenleistung die Bedeutung der Dopplerfrequenzbestimmung über die diskrete Fourier-Transformation (DFT) zu [Lhe73, Pin79]. Insbesondere bei gepulsten Sendesignalen mit geringer Anzahl an Abtastwerten und additivem Rauschen ist die DFT den genannten Auswerteverfahren hinsichtlich Stabilität und Genauigkeit überlegen.

Um das Spektrum bezüglich der Dopplerfrequenz zu analysieren, werden die  $N$  Abtastwerte des zeitbegrenzten Empfangssignals der Dauer  $T = N \cdot t_{PRI}$  mithilfe der DFT im Intervall  $0 \leq k \leq N - 1$  in den Frequenzbereich transformiert. Da sich das Spektrum eines zeitdiskreten Signals mit dem Abtastintervall  $\frac{1}{t_{PRI}}$  periodisch wiederholt, genügt zur Analyse die Betrachtung des Spektrums im Bereich von  $0 \leq f < \frac{1}{t_{PRI}}$ . Wird nun dieselbe Stützstellenanzahl  $N$  auch im Spektralbereich gewählt und dessen Laufzahl mit  $n$  definiert, beträgt die spektrale Stützstellenraasterung  $\frac{n}{N} \hat{=} \frac{nT}{t_{PRI}}$  und die DFT ist gegeben durch:

$$\text{DFT}(s(k)) = S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j2\pi k(n/N)}. \quad (4.4)$$

Ist das Spektrum  $S(n)$  aller  $N$  Stützstellen beschrieben, lässt sich zur Steigerung der Frequenzauflösung ein Zero-Padding durchführen. Hierbei wird die Folge der  $N$  Abtastwerte des Empfangssignals um weitere Nullen ergänzt, um eine fiktive Verlängerung des zu analysierenden Signals zu bewirken. Dieses Anfügen von Nullen führt letztlich im Frequenzbereich zu einer Zunahme der Stützstellenanzahl, welche sich in Form einer Interpolation der ursprünglichen Stützstellen widerspiegelt. Damit führt das Zero-Padding lediglich zu einer Interpolation des Spektrums, schließlich werden durch die Erweiterung keine weiteren Signalinformationen zugegeben. Von Vorteil ist, dass durch diese Methode das lokale Maximum im Spektrum und somit die Dopplerfrequenz genauer bestimmt werden können. Zur schnellen und effizienten Umsetzung der DFT auf einer digitalen Recheneinheit, wird die FFT (Fast Fourier-Transformation) verwendet. Weist die Anzahl der  $N$  Abtastwerte eine Zweierpotenz auf, reduziert sich beispielsweise unter Anwendung des Radix-2-Algorithmuses [CT65] die Anzahl der Operationen (Multiplikation und Addition) von  $N^2$  bei der DFT auf  $N \log_2(N)$  für die FFT. [KK09]

Kristallisiert sich aus dem Spektrum ein prägnantes Maximum heraus, liegt in der analysierten Raumzone mindestens ein Reflektor vor, welcher den Dopplereffekt und damit die Frequenzverschiebung des Trägersignals hervorruft. Empirische und simulative Untersuchungen für die betrachteten Anwendungsfälle ergaben, dass sich die Reflektorgeschwindigkeiten innerhalb der oben definierten Raumzone  $\Delta r$  -auch bei hoher Turbulenz- nur geringfügig voneinander unterscheiden. Folglich bildet sich im Spektrum stets nur ein Maximum heraus, welches sich mit einer Maximalwertdetektion identifizieren lässt. Hierzu muss zunächst die Nutzfrequenz durch einen Schwellwert von Rauschen selektiert werden,

um die Existenz eines Reflektors in der analysierten Raumzone belegen zu können [Sti98]. Der Schwellwert wird gewählt und definiert mit

$$\zeta_F = \mu_F + 3\sigma_F, \quad (4.5)$$

wobei  $\mu_F$  den Mittelwert der absoluten Spektralwerte und  $\sigma_F$  die Streuung beschreibt. Das Maximum dieser Nutzstützstellen wird als die vom Reflektor hervorgerufene Dopplerfrequenz angenommen.

Neben der einfachen Maximumdetektion besteht für symmetrische Dopplerspektren auch die Möglichkeit die Frequenz über den geometrischen Leistungsdichteschwerpunkt zu bestimmen. Auch bei dieser Methode muss zunächst sichergestellt sein, dass ein Reflektor in der Raumzone vorliegt, indem Stützstellen im Spektrum  $S(n)$  über dem definierten Schwellwert vorherrschen. Wird nun das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_{ss}(n)$  berechnet, lässt sich die Dopplerfrequenz mithilfe der spektralen Momentengleichung

$$M_m = \sum_{n=1}^N n^m \Phi_{ss}(n) \quad (4.6)$$

herleiten. Demnach resultiert das Moment nullter Ordnung aus  $M_0 = \sum_{n=1}^N \Phi_{ss}(n)$  und entspricht der Fläche unter dem Leistungsdichtespektrum. Das normierte zweite Moment und damit der gesuchte Erwartungswert bzw. die Dopplerfrequenz im Spektrum, berechnet sich aus:

$$M_1 = \frac{\sum_{n=1}^N n \Phi_{ss}(n)}{M_0} = f_D T. \quad (4.7)$$

Eine weitere Größe des Spektrums lässt sich zudem aus dem zweiten zentralen Moment bestimmen, da dieses die Standardabweichung des Spektrums wiedergibt und somit ein Maß für die Turbulenz bzw. das Rauschen in der Raumzone ist (vgl. [LS84, BGSW72, Nie02]). Die Standardabweichung des Leistungsdichtespektrums ist gegeben durch:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (n - M_1)^2 \Phi_{ss}(n)}{M_0 T}}. \quad (4.8)$$

Für eingehendere Analysen zur spektralen Momentenauswertung wird auf [MR70] verwiesen. Darüber hinaus werden weitere Auswerteverfahren auf Basis der Fourier-Transformation wie beispielsweise die Mittelung von Teilspektren (Averaged FFT = AFFT), die Korrelation mit Referenzspektren (Correlation Detection = CD) oder die Regression der FFT-Stützwerte (Regression of the FFT = RFFT) in [Jop94] behandelt, jedoch in dieser Anwendung als nicht zielführend weiterverfolgt.

### 4.3.2 Kovarianzmethode

Die Kovarianzmethode oder oft auch Puls-Paar-Methode genannt, ist neben der DFT mit Maximumdetektor eine der bekanntesten Auswerteverfahren zur Bestimmung von Dopplerfrequenzen. Die Vorteile des erstmals durch [Rum68, WH69, MR72, BGSW72] veröffentlichten Algorithmus bestand damals in der Implementierbarkeit auch auf leistungsschwachen Signalprozessoren. Nach ersten Anwendungsfällen in der Meteorologie zur Wettermessung durch Radar [Lhe73, Zrn77, Zrn79b, Zrn79a, DZS79] wurde das Verfahren auf die Fließgeschwindigkeitsmessung durch Sonar [Lhe81, LL84, Lhe83] angewendet. Zahlreiche Analysen zu dieser Methode folgten, sodass die Kovarianzmethode bis heute eine der weit verbreitetsten Auswerteverfahren in der Durchflussmessung ist [DZH12, VT98, ZHCL96, BCNT91].

Im Gegensatz zur Momentenschätzung des Leistungsdichtespektrums aus dem vorhergehenden Kapitel, erfolgt die Schätzung bei der Kovarianzmethode im Zeitbereich. Grundlage der Methode bildet der Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfunktion (AKF)  $\phi_{ss}$  und dem Leistungsdichtespektrum (LDS)  $\Phi_{ss}$ . Die AKF lässt sich aus den komplexen Abtastfolgen  $s(k)$  gemäß

$$\hat{\phi}_{ss}(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{k=0}^{N-\tau-1} s^*(k) s(k + \tau) \quad (4.9)$$

schätzen, wobei die Variable  $\tau$  eine Verschiebung der beiden zu korrelierenden Signale beschreibt. Um die Dopplerfrequenz und die Standardabweichung aus der AKF bestimmen zu können, muss zunächst die Beziehung zwischen der Ableitung einer Zeitfunktion  $g(t)$  und dessen Spektrum  $G(f)$  bekannt sein. Für die Ableitung erster Ordnung gilt durch die inverse Fourier-Transformation der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \\ \left. \frac{g(t)}{dt} \right|_{t=0} &= j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f G(f) df. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Weiter ist das  $m$ -te Moment einer Zufallsvariablen  $x$  mit der Dichtefunktion  $g(x)$  durch  $\int_{-\infty}^{\infty} x^m g(x) dx$  definiert. Angewendet auf Gl.4.10 resultiert durch Umformen das erste Moment gemäß:

$$M_{m=1} = \int_{-\infty}^{\infty} f^1 G(f) df = \frac{1}{j2\pi} \left. \frac{g(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (4.11)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch zwischen der AKF  $\phi_{ss}$  und dem LDS  $\Phi_{ss}$  [Pap62, Bra78]. Zur Bestimmung von Momenten höherer Ordnung lässt sich die allgemeingültige Gleichung mit

$$M_m = \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[m]}(0)}{(j2\pi)^m} \quad (4.12)$$

definieren [KP89], wobei die Variable  $[m]$  die Ordnung der Ableitung am Ursprung ( $\tau = 0$ ) der AKF wiedergibt.

Ist  $\hat{\phi}_{ss}(\tau)$  bei ungestörten Signalen durch die komplexe Funktion der Form

$$\hat{\phi}_{ss}(\tau) = A(\tau)e^{j2\pi\varphi(\tau)} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (4.13)$$

gegeben, erschließen sich das nullte Momente und das erste normierte Moment aus:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{\hat{\phi}_{ss}(0)}{(j2\pi)^0} = \hat{\phi}_{ss}(0) \\ f_D &= \frac{M_1}{M_0} = \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[1]}(0)}{\hat{\phi}_{ss}(0)(j2\pi)^1} = \frac{j2\pi \frac{d\varphi(0)}{d\tau} \hat{\phi}_{ss}(0)}{j2\pi \hat{\phi}_{ss}(0)} = \frac{d\varphi(0)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

sowie das zweite zentrale Moment aus:

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[2]}(0)}{\hat{\phi}_{ss}(0)} - \left( \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[1]}(0)}{\hat{\phi}_{ss}(0)} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4\pi^2 A(0)} \frac{d^2 A(0)}{d^2 \tau}. \quad (4.15)$$

Nach [MR72] resultiert für kleine zeitliche Verschiebungen  $\Delta T$  (Herleitung siehe Anhang Kap. A.22):

$$\begin{aligned} f_D = \dot{\varphi}(0) &\approx \frac{\varphi(\Delta T) - \varphi(0)}{\Delta T} = \frac{\varphi(\Delta T)}{\Delta T} = \frac{1}{2\pi\Delta T} \arctan \left( \frac{\text{Im} \left( \hat{\phi}_{ss}(\Delta T) \right)}{\text{Re} \left( \hat{\phi}_{ss}(\Delta T) \right)} \right) \\ \sigma_D &\approx \sqrt{\frac{2}{4\pi^2 \Delta T^2} \left[ 1 - \frac{A(\Delta T)}{A(0)} \right]} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\Delta T} \sqrt{1 - \frac{|\hat{\phi}_{ss}(\Delta T)|}{\hat{\phi}_{ss}(0) - \sigma_R}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hierbei wird deutlich, dass zur Bestimmung der spektralen Standardabweichung die Rauschleistung  $\sigma_R$  bekannt sein muss, was in der Realität nur schwer zu realisieren ist. Sofern es sich um weißes Rauschen handelt, wird das Schätzen der Störquelle in [DZ93] beschrieben.

In [Pap84, Bra78, WG74] wurde nachgewiesen, dass zur Momentenberechnung besonders die ersten paar Verschiebungswerte der AKF von Bedeutung sind. Um die Schätzqualität weiter zu steigern, wird in [Lee00] die „Poly-Puls Paar“ Methode vorgestellt, welche weitere Verschiebungswerte  $\tau = 0, 1, 2, \dots$  der AKF verwendet. Im Wesentlichen reduziert sich dabei die Schätzvarianz und verbessert folglich die Bestimmung des statistischen Mittelwertes der Dopplerfrequenz, sofern die Frequenzbreite des Dopplermaximums nur wenige Prozent der Abtastfrequenz beträgt [KP89]. Bei der Durchflussmessung hängt allerdings die Breite des Dopplermaximums im Wesentlichen von der Strömungsturbulenz ab, weswegen die „Poly-Puls Paar“ Methode nachfolgend nicht weiter analysiert wird.

### 4.3.3 Pisarenko

Der im Jahr 1973 veröffentlichte Artikel von Pisarenko [Pis73] führt die Frequenzschätzung von  $M$  reellen Sinussignalen mit überlagertem weißen Rauschen auf eine Eigenwertanalyse zurück. Dieses Eigenwertproblem wird in einem ersten Schritt hergeleitet, um deren Grundlagen und mögliche Schwachstellen aufdecken zu können. Basierend auf dem analytischen Lösungsansatz in [XT94] wird anschließend in einem zweiten Schritt die Methode auf eine Einzelfrequenzschätzung zurückgeführt.

Zur Nachbildung reeller Sinussignale  $x(k)$  unterschiedlicher Frequenzen  $f_{D,1:M}$  wird auf ein autoregressives (AR) Modell der Ordnung  $2M$  zurückgegriffen, dessen Pole symmetrisch im Winkel  $\pm 2\pi \frac{f_{D,1:M}}{f_s}$  entlang des Einheitskreises vorliegen<sup>1</sup>. Ist das Signal noch zusätzlich additiv von Rauschen  $n(k)$  überlagert, resultiert:

$$s(k) = x(k) + n(k) = \sum_{i=1}^{2M} a_i x(k-i) + n(k). \quad (4.17)$$

Wird nun die Variable  $x(k-i)$  in der Gleichung durch  $s(k-i) - n(k-i)$  substituiert folgt:

$$s(k) - \sum_{i=1}^{2M} a_i s(k-i) = n(k) - \sum_{i=1}^{2M} a_i n(k-i). \quad (4.18)$$

Dies ist ein ARMA-Modell, dessen Eingang durch den Rauschprozess definiert ist. Zudem weist sowohl der AR-Teil als auch der MA-Teil dieselben Parameter  $a_i$  auf, sodass in vektorieller Notation

$$\mathbf{s}^T \mathbf{a} = \mathbf{n}^T \mathbf{a} \quad (4.19)$$

gilt. Die Vektoren sind mit  $\mathbf{s} = [s(k), \dots, s(k-2M)]^T$ ,  $\mathbf{a} = [1, -a_1, \dots, -a_{2M}]^T$  und  $\mathbf{n} = [n(k), \dots, n(k-2M)]^T$  definiert. Wird die Gleichung nun um den Vektor  $\mathbf{s}$  erweitert und anschließend  $\mathbf{s}$  durch  $\mathbf{x} + \mathbf{n}$  ersetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{s}\mathbf{s}^T] \mathbf{a} &= \mathbb{E} [\mathbf{s}\mathbf{n}^T] \mathbf{a} \\ \mathbb{E} [\mathbf{s}\mathbf{s}^T] \mathbf{a} &= \mathbb{E} [(\mathbf{x} + \mathbf{n})\mathbf{n}^T] \mathbf{a} \\ \mathbf{R}_{ss} \mathbf{a} &= \mathbf{R}_{xn} \mathbf{a} + \mathbf{R}_{nn} \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Da es sich beim Störprozess  $\mathbf{n}$  um ein weißes, unkorreliertes Rauschen handelt, der sich zum Signalprozess  $\mathbf{x}$  statistisch unabhängig verhält, gilt für die Kreuzkorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{xn} = 0$  [PM96]. Folglich wird der unbekannte Parametervektor  $\mathbf{a}$  auf der rechten Seite lediglich durch die Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{nn}$  bestimmt, deren Diagonale die Rauschvarianz  $\sigma_n^2$  beinhaltet. Damit lässt sich die Gl. 4.20 wie folgt formulieren:

<sup>1</sup>Ein rekursives System der Ordnung 2 ( $M = 1$ ) entspricht der Differenzgleichung  $x(k) = 2 \cos(2\pi \frac{f_{D,1:M}}{f_s})x(k-1) - x(k-2)$ . Bei impulsförmiger Anregung mit den Anfangsbedingungen  $x(-1) = 1; x(-2) = 0$  resultiert ein Sinussignal der Frequenz  $2\pi \frac{f_{D,1:M}}{f_s}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{a} &= \sigma_n^2 \mathbf{E} \mathbf{a} \\ (\mathbf{R}_{ss} - \sigma_n^2 \mathbf{E}) \mathbf{a} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

$\sigma_n^2$  ist der Eigenwert des zugehörigen Eigenvektors  $\mathbf{a}$  der Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{ss}$  [Vas96].

Um diese Rauschvarianz bestimmen zu können, müssen zunächst sämtliche Eigenwerte  $\lambda_i \forall i = 1, \dots, 2M + 1$  über die charakteristische Gleichung  $\det(\mathbf{R}_{ss} - \lambda_i \mathbf{E}) = 0$  berechnet werden. Während nun der größte Eigenwert mit dem verrauschten Sinussignal in Verbindung gebracht werden kann, entspricht der geringste Eigenwert der gesuchten Rauschvarianz  $\min \{\lambda_{i=1, \dots, 2M+1}\} = \sigma_n^2$ . Diese eingesetzt in Gl. 4.21 ergibt den dazugehörigen Eigenvektor, welcher das AR-Modell aus Gl. 4.17 beschreibt. Mit der z-Transformation lässt sich dieses AR-Modell in die Übertragungsfunktion

$$H_{AR}(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{2M} a_i z^{-i}} \quad (4.22)$$

überführen, deren Pole alle auf dem Einheitskreis liegen und mit  $a_i = a_{2M-i}$  eine Symmetrie zueinander aufweisen. Zur Bestimmung der unbekanntenen Frequenz  $f_{D,1:M}$ , erfolgt eine Nullstellensuche des Nennerpolynoms

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{2M} z^{-2M} - a_{2M+1} z^{-2M+1} - z^{-2M} = 0. \quad (4.23)$$

Dabei ist der Zusammenhang zwischen den Nullstellen und Frequenzen durch die Beziehung  $z_i = e^{j2\pi f_{D,i}}$  gegeben.

Während im Gegensatz zu den vorhergehenden Frequenzschätzverfahren, mit diesem Lösungsansatz mehrere Frequenzlinien im Spektrum identifiziert werden können, treten Schwierigkeiten vor allem dann auf, wenn die Anzahl der Abtastwerte  $k = 1..N$  des Empfangssignals  $s(k)$  nur unwesentlich größer ist als  $2M$  der zu schätzenden Frequenzlinien. Grund hierfür ist die Schätzung der Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{ss} \in \mathbb{R}^{(2M+1) \times (2M+1)}$ :

$$\hat{\mathbf{R}}_{ss} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{ss}(0) & \hat{\phi}_{ss}(1) & \dots & \hat{\phi}_{ss}(2M) \\ \hat{\phi}_{ss}(1) & \hat{\phi}_{ss}(0) & \dots & \hat{\phi}_{ss}(2M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_{ss}(2M) & \hat{\phi}_{ss}(2M-1) & \dots & \hat{\phi}_{ss}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Zur erwartungstreuen Schätzung dieser Matrix könnte die Korrelationsfolge aus Gl. 4.9 verwendet werden, welche jedoch nicht zu der notwendigen Bedingung einer positiv definiten Matrix mit Eigenwerten größer Null führt. Stattdessen muss auf die nicht erwartungstreue Korrelationsfolge

$$\hat{\phi}_{ss}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-\tau-1} s^*(k) s(k + \tau) \quad (4.25)$$

zurückgegriffen werden, deren Fehler nur für  $N \gg 2M$  vernachlässigt werden kann [Mar79].

Eine andere Lösungsmöglichkeit der Pisarenko-Methode basiert darauf, dass sich bei den betrachteten Anwendungsfällen die Geschwindigkeiten der Reflektoren innerhalb einer Raumzone nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Demnach wird lediglich eine Frequenzlinie im Spektrum gesucht, woraus ein geschlossener Lösungsansatz auf Grundlage einer erwartungstreuen Schätzung resultiert [KS07, XT94]. Grundlage der Lösung bildet die Signalform von gestörten Sinussignalen der Korrelationsfolge, welche mit

$$\hat{\phi}_{ss}(\tau) = \sum_{i=1}^M \cos\left(2\pi \frac{f_{D,i}}{f_s} \tau\right) + \sigma_n^2 \delta(\tau) \quad (4.26)$$

gegeben ist und deren Korrelationswert  $\hat{\phi}_{ss}(\tau)$  sich aus der erwartungstreuen Folge nach Gl. 4.9 berechnen lässt. Dabei wird der Einfluss des weißen Rauschprozesses lediglich im Ursprung  $\tau = 0$  durch einen nahezu Dirac-förmigen Impuls bemerkbar und für alle weiteren Verzögerungen  $\tau = 1, \dots, N$  zu Null gesetzt. Für die ersten zwei Verzögerungen  $\tau = 1$  und  $2$  einer einzelnen Frequenzlinie  $M = 1$  ergeben sich die Gleichungen :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ss}(1) &\approx \frac{A^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_D}{f_s}\right) \\ \hat{\phi}_{ss}(2) &\approx \frac{A^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_D}{f_s} 2\right) = A^2 \left(\cos^2\left(2\pi \frac{f_D}{f_s}\right) - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Durch Elimination der Amplituden  $A$  folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\hat{\phi}_{ss}(1) \cos^2\left(2\pi \frac{f_D}{f_s}\right) - \hat{\phi}_{ss}(2) \cos\left(2\pi \frac{f_D}{f_s}\right) - \hat{\phi}_{ss}(1) \\ \hat{f}_D &= \arccos\left(\frac{\hat{\phi}_{ss}(2) + \sqrt{\hat{\phi}_{ss}^2(2) + 8\hat{\phi}_{ss}^2(1)}}{4\hat{\phi}_{ss}(1)}\right) / (2\pi f_s). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Im Gegensatz zu dem in Gl. 4.23 beschriebenen Lösungsansatz zur Bestimmung der Dopplerfrequenzen ist für diese Gleichung bei nur einer Dopplerfrequenz ein geringerer Rechenaufwand zu verzeichnen, da die Berechnung der charakteristischen Gleichung entfällt. Zudem ist für diese Anwendung die Frequenzschätzung durch die Identifikation einer einzelnen Dopplerfrequenz hinreichend gut beschrieben. Bei den nachfolgenden Analysen wird daher bei der Pisarenko-Methode auf Gl. 4.28 zurückgegriffen.

### 4.3.4 MUSIC

Das MUSIC (MUltiple Signal Classification) Schätzverfahren gehört, wie auch die Pisarenko-Methode, zur Klasse der eigenwertbasierten Spektralanalyse. Der wesentliche Unterschied ist, dass die Messsignale  $s(k)$  komplex vorliegen müssen und die Dimension der Korrelationsmatrix statt bisher  $(2M + 1) \times (2M + 1)$  nun  $I \times I$  aufweist, wobei  $I > (2M + 1)$  ist. Folglich wird im Gegensatz zu Pisarenko der Rauschprozess nicht nur durch einen Eigenwert der Matrix  $\mathbf{R}_{ss}$  nach Gl. 4.21 erfasst, sondern entsprechend der Dimensionserweiterung durch mehrere Eigenwerte.

Ausgangspunkt der Schätzung ist das Messsignal  $s(k)$ , bestehend aus  $M$  komplexen Sinussignalen und überlagertem weißen Rauschen:

$$s(k) = x(k) + n(k) = \sum_{i=1}^M A_i e^{j\varphi_i} e^{j2\pi k f_{D,i}/f_s} + n(k). \quad (4.29)$$

Demnach kann ein aus  $I$  Abtastwerten bestehendes Messsignal in Matrixnotation wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} s(k) \\ s(k-1) \\ \vdots \\ s(k-I+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j2\pi k f_{D,1}/f_s} & e^{j2\pi k f_{D,2}/f_s} & \dots & e^{j2\pi k f_{D,M}/f_s} \\ e^{j2\pi (k-1) f_{D,1}/f_s} & e^{j2\pi (k-1) f_{D,2}/f_s} & \dots & e^{j2\pi (k-1) f_{D,M}/f_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi (k-I+1) f_{D,1}/f_s} & e^{j2\pi (k-I+1) f_{D,2}/f_s} & \dots & e^{j2\pi (k-I+1) f_{D,M}/f_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 e^{j\varphi_1} \\ A_2 e^{j\varphi_2} \\ \vdots \\ A_M e^{j\varphi_M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(k) \\ n(k-1) \\ \vdots \\ n(k-I+1) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{s}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) = \mathbf{G}_f \mathbf{d}_A + \mathbf{n}(k).$$

Dabei wird deutlich, dass der Signalvektor  $\mathbf{x}(k)$  aus der Matrix  $\mathbf{G}_f \in \mathbb{C}^{I \times M}$  mit den gesuchten Frequenzen  $f_{D,1:M}$  und dem Amplitudenvektor  $\mathbf{d}_A \in \mathbb{C}^M$  besteht. Die Autokorrelationsmatrix des Messsignals  $\mathbf{R}_{ss}$  setzt sich somit aus einer Autokorrelationsmatrix des Rauschens  $\mathbf{R}_{nn}$  und eines sinusförmigen Nutzanteils  $\mathbf{R}_{xx}$  zusammen:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss} &= \mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{nn} \\ &= \mathbf{G}_f \mathbf{D}_A \mathbf{G}_f^H + \sigma_n^2 \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aufgrund des weißen Rauschprozesses lässt sich  $\mathbf{R}_{nn}$  (vgl. Gl. 4.21) durch  $\sigma_n^2 \mathbf{E}$  definieren. Werden zudem die Phasen  $\varphi_{1:M}$  im Intervall  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  als gleichverteilt und statistisch unabhängig voneinander vorausgesetzt [KK09], verschwinden die Kreuzterme; man erhält eine Einheitsmatrix. Demnach ist die Amplitudenmatrix lediglich durch das Amplitudenquadrat entlang der Diagonalen  $\mathbf{D}_A = \mathbb{E}[\mathbf{d}_A \mathbf{d}_A^H] = \text{diag}(A_1^2, A_2^2, \dots, A_M^2)$  formuliert. Bei

näherer Betrachtung der beiden Matrizen  $\mathbf{R}_{xx}$  und  $\mathbf{R}_{nn}$  wird die Trennbarkeit von Stör- und Signalraum deutlich. Die Nutzsalmatrix kann auch wie folgt definiert werden

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{G}_f \mathbf{D}_A \mathbf{G}_f^H = \sum_{i=1}^M A_i^2 \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^H \quad (4.32)$$

[Vas96], wobei der Vektor  $\mathbf{g}_i^H = [1, e^{j2\pi f_{D,i}/f_s}, \dots, e^{j2\pi(I-1)f_{D,i}/f_s}]$  ist. Diese Gleichung lässt sich nun -wie bei der Pisarenko-Methode- durch Eigenwerte  $\lambda_i$  und deren Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  der Nutzsalmatrix darstellen:

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \quad (4.33)$$

Die Reduktion der Summationsgrenze ist darauf zurückzuführen, dass die Matrix  $\mathbf{R}_{xx}$  der Dimension  $I \times I$  lediglich den Rang  $M$  besitzt. Somit wird der Nutzsalmatrix durch die orthogonalen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{1:M}$  ebenso aufgespannt, wie durch die Vektoren  $\mathbf{g}_{1:M}$  denen die Frequenzlinien  $f_{D,1:M}$  zugrunde liegen.

Identisch zur Nutzsalmatrix lässt sich auch die Rauschmatrix  $\mathbf{R}_{nn}$  und damit der Storraum durch Eigenwerte und deren Eigenvektoren beschreiben. Im Gegensatz zur Nutzsalmatrix besitzt jedoch die Matrix  $\mathbf{R}_{nn}$  mit der Dimension  $I \times I$  aufgrund des weißen Rauschprozesses den vollen Rang  $I$ :

$$\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{E} = \sigma_n^2 \sum_{i=1}^I \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \quad (4.34)$$

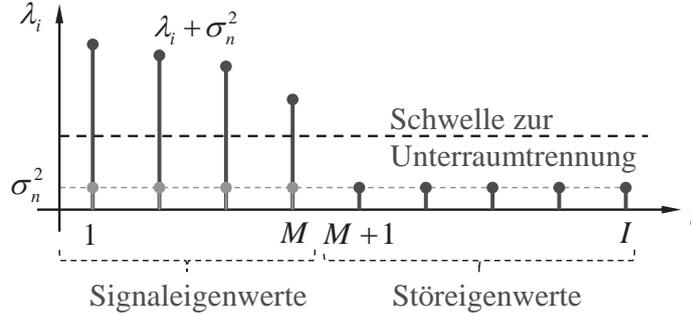
Demzufolge spannen die  $I$  orthogonalen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{1:I}$ , der jeweiligen gleich großen Eigenwerte  $\lambda_{1:I} = \sigma_n^2$ , den gesamten Raum und somit auch den Storraum auf. Da die Eigenwerte und deren Eigenvektoren aus Gl. 4.34 den kompletten Raum charakterisieren, jene aus Gl. 4.33 jedoch nur den Signalraum, gilt es nun durch Umstellen den Storraum der Messkorrelationsmatrix zu identifizieren. Dieser Storraum geht aus

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss} &= \mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{nn} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_n^2 \sum_{i=1}^I \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ \mathbf{R}_{ss} &= \underbrace{\sum_{i=1}^M (\lambda_i + \sigma_n^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H}_{\text{Signalunterraum}} + \underbrace{\sigma_n^2 \sum_{i=M+1}^I \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H}_{\text{Störunterraum}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

hervor.

Die in 4.35 hergeleitete Gleichung bildet die Grundlage des MUSIC-Verfahrens. Angewendet auf die Aufgabenstellung in dieser Arbeit, muss die Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{ss}$  geschätzt werden (vgl. Gl. 4.24). Wie bei Pisarenko, lassen sich anschließend über

die charakteristische Gleichung<sup>1</sup> die Eigenwerte  $\lambda_i$  und deren zugehörige Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  der Matrix  $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$  bestimmen. Diese Eigenwerte, sortiert nach der Größe, ermöglichen durch Einführung einer Schwelle die Trennung in Stör- und Signalunterraum, wie Abb. 4.3 verdeutlicht. Eigenwerte oberhalb dieser Schwelle werden dem Signalunterraum zugeordnet, wohingegen Eigenwerte unterhalb dieser Schwelle dem Störunterraum angehören.



**Abb. 4.3:** Unterteilung der Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{ss}$  in Signal- und Störunterraum durch eine Schwellwerttrennung der Eigenwerte  $\lambda_i$ .

Da die geschätzte Autokorrelationsmatrix hermitesch ist  $\hat{\mathbf{R}}_{ss} = \hat{\mathbf{R}}_{ss}^H$ , sind die zu den unterschiedlichen Eigenwerten  $\lambda_i$  gehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  orthogonal zueinander. Die Nutzsinalvektoren  $\mathbf{g}_i$  aus dem Modellansatz von Gl. 4.32 bilden Linearkombinationen der Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  im Signalraum  $\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^M \alpha_{i,k} \mathbf{g}_k$ . Folglich sind auch die Signalvektoren  $\mathbf{g}_{1:M}$  orthogonal zu sämtlichen Eigenvektoren im Störunterraum  $\mathbf{v}_{M+1:I}$  (vgl. [Mar79]). Somit gilt mit  $\mathbf{g}_i(e^{j2\pi f_D/f_s}) = [1, e^{j2\pi f_D \cdot i/f_s}, \dots, e^{j2\pi(I-1)f_D \cdot i/f_s}]^T$  und  $\mathbf{v}_l = [v_l(1), v_l(2), \dots, v_l(I)]^T \quad \forall l = M+1, \dots, I$ :

$$\mathbf{g}_i^H(e^{j2\pi f_D/f_s}) \mathbf{v}_l = \sum_{n=1}^I v_l(n) e^{j2\pi(n-1)f_D \cdot i/f_s} = 0 \quad 1 \leq i \leq M, \quad M+1 \leq l \leq I. \quad (4.36)$$

Identisch zur Pisarenko-Methode von Gl. 4.23, lassen sich nun die Dopplerfrequenzen  $f_{D,i}$  durch Nullstellensuche der Polynomfunktionen

$$\sum_{l=M+1}^I \mathbf{g}_i^H(e^{j2\pi f_D/f_s}) \mathbf{v}_l \Big|_{f_D=f_{D,i}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.37)$$

im Störunterraum bestimmen.

Bei der Ermittlung der Dopplerfrequenzen stellt sich die Frage nach der Definition des Schwellwertes zur Trennung der Räume (vgl. Abb. 4.3), um die notwendige Anzahl  $M$  der Eigenvektoren im Nutzsinalraum bestimmen zu können. Aufgrund der fehlerhaften Schätzung der Autokorrelationsmatrix  $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$  (vgl. Gl. 4.25), weisen die Störeigenwerte nicht

<sup>1</sup> $\det(\hat{\mathbf{R}}_{ss} - \lambda_i \mathbf{E}) = 0$ .

die gewünschte Konstanz  $\lambda_{M+1:I} = \sigma_n^2$  auf, als dass diese eindeutig dem Störunterraum zuzuweisen sind (vgl. [KK09]). Während in [WK85] die Anzahl der Eigenwerte  $M$  im Signalunterraum durch zwei Funktionen geschätzt und hinsichtlich ihrer Konsistenz analysiert werden, wird in dieser Arbeit ein naheliegenderer Lösungsansatz verfolgt. Dieser Ansatz ermöglicht die Detektion einer einzelnen Dopplerfrequenz im Spektrum, was für kleine Raumzonen bei dieser Messanwendung auch der Fall ist. Unter dieser Annahme besteht der Signalunterraum aus lediglich einem Eigenwert ( $M = 1$ ), sodass die Gl. 4.37 in Matrixnotation

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^H \mathbf{g}_1 (e^{j2\pi f_{D,1}/f_s}) &= \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_{M+1} & - \\ - & \mathbf{v}_{M+2} & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_I & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_{D,1}/f_s} \\ \vdots \\ e^{j2\pi(I-1)f_{D,1}/f_s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{M+1}(1) & v_{M+1}(2) & \cdots & v_{M+1}(I) \\ v_{M+2}(1) & v_{M+2}(2) & \cdots & v_{M+2}(I) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_I(1) & v_I(2) & \cdots & v_I(I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f_{D,1}/f_s} \\ \vdots \\ e^{j2\pi(I-1)f_{D,1}/f_s} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.38)$$

wie folgt umgeformt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -v_{M+1}(1) \\ -v_{M+2}(1) \\ \vdots \\ -v_I(1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_{M+1}(2) & v_{M+1}(3) & \cdots & v_{M+1}(I) \\ v_{M+2}(2) & v_{M+2}(3) & \cdots & v_{M+2}(I) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_I(2) & v_I(3) & \cdots & v_I(I) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j2\pi f_{D,1}/f_s} \\ e^{j2\pi(2)f_{D,1}/f_s} \\ \vdots \\ e^{j2\pi(I-1)f_{D,1}/f_s} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (4.39)$$

und durch Minimierung der Fehlerquadrate

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{I-2}} \|\mathbf{D}\mathbf{b} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (4.40)$$

gelöst werden kann. Die Matrix  $\mathbf{D}$  ist bei einer Einzelfrequenzsuche quadratisch und besitzt den vollen Rang. Der Vektor  $\mathbf{b}$  und ferner auch die Dopplerfrequenz  $f_{D,1}$  lassen sich beispielsweise durch Matrixinversion bestimmen, aber auch ressourcensparender durch eine QR-Zerlegung mittels Householder-Transformation (vgl. Gl. 3.70). Sind die gleichmäßig phasenversetzten Pole auf dem Einheitskreis durch Vektor  $\mathbf{b}$  gegeben, resultieren wie auch schon bei Pisarenko nach Umformen die  $I - 2$  Dopplerfrequenzen. Steigt das Signal-zu-Rausch-Verhältnis im Empfangssignal an, nimmt auch die Streuung um den Einheitskreis zu. Um dennoch die wahre Dopplerfrequenz aus dem Vektor  $\mathbf{b}$  zu wählen, wird in dieser Arbeit stets der Pol mit der geringsten Abweichung zum Einheitskreis ( $\|b_{1:I-1}\|_2 \stackrel{!}{=} 1$ ) verwendet.

Damit auch sichergestellt ist, dass tatsächlich ein Reflektor in der Raumzone existiert und nicht nur aus Rauschen besteht, wird neben dem Kriterium der Zeigerlänge auch das Größenverhältnis zwischen Signaleigenwert und Störeigenwerten herangezogen. Empirische Untersuchungen hierzu haben ergeben, dass der Eigenwert des Signals stets doppelt so groß sein sollte wie der höchste Eigenwert im Störunterraum. Kleinere Eigenwerte werden verworfen.

## 4.4 Analysen der Auswerteverfahren durch Simulation

Basierend auf dem Simulationsmodell von Kap. 2.3 werden die vorgestellten Frequenz- bzw. Phasenschätzverfahren zunächst miteinander verglichen, um eine Vorauswahl der Verfahren hinsichtlich ihrer Messgenauigkeit vornehmen zu können. Anschließend wird für diese Anwendung ein geeignetes Verfahren ausgewählt und sein Verhalten bei zunehmendem SNR bzw. steigender Reflektoranzahl untersucht.

### 4.4.1 Gegenüberstellung der Auswerteverfahren

Damit die Auswerteverfahren von Kap. 4.3 entsprechend ihrer Genauigkeit und Stabilität miteinander verglichen werden können, wird stets dieselbe Raumzone mit einem von Rauschen überlagerten Echosignal ausgewertet. Das Echosignal resultiert dabei aus dem in Kap. 2.3 vorgestellten Simulationsmodell eines einzelnen Reflektors. Da das Rauschen vor allem mit steigendem SNR einen großen Einfluss auf die Auswertung nimmt, werden für eine statistisch aussagekräftige Gegenüberstellung die Standardabweichung und der Mittelwert der Auswertefehler aus 100 Simulationsdurchläufen gewonnen.

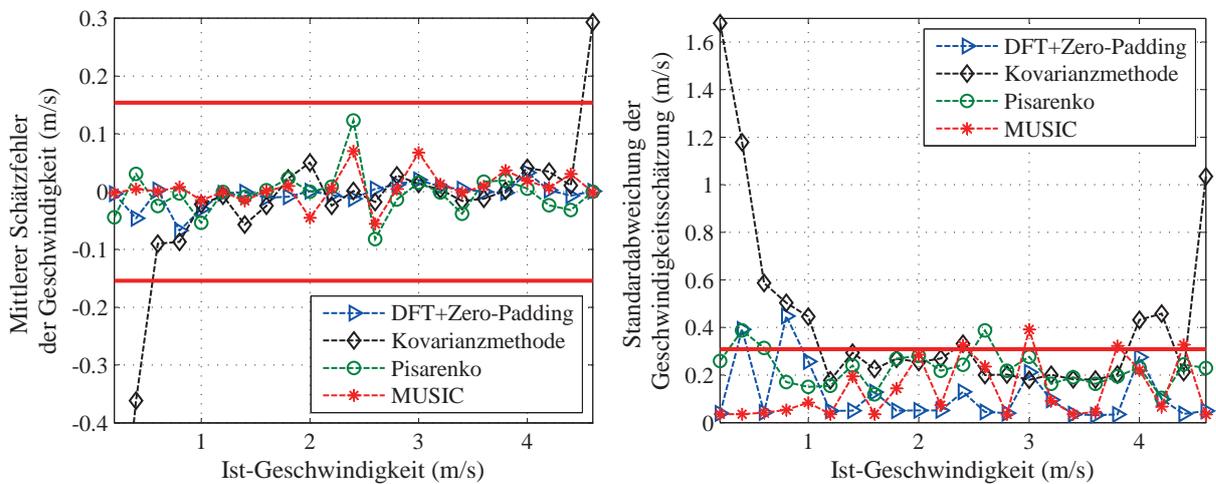
Für die Untersuchung eines möglichst breiten Dopplerfrequenzbandes, werden die kohärenten Pulse mit einer  $t_{PRI}$  von 0,15 ms und einer Sendefrequenz von  $f_0 = 1$  MHz gesendet. Die Pulsdauer  $t_{PW}$  beträgt  $20 \mu\text{s}$  und die Anzahl an Pulswiederholungen 16. Das empfangene Signal wird anschließend mit einem definierten SNR additiv von Rauschen überlagert und gemäß Kap. 4.2 der Signalaufbereitung zugeführt. Nach der Hilbert-Transformation und Unterabtastung, wird das Empfangssignal zur Bestimmung der Dopplerverschiebung mit den genannten Auswerteverfahren bestimmt. Mit der Dopplerverschiebung ist die Fließgeschwindigkeit aus Gl. 2.6 bekannt. Zur besseren Gegenüberstellung der Verfahren sind die Einstrahlwinkel mit  $\alpha = \beta = 0^\circ$  gegeben, sodass sich der Reflektor direkt in Sensorrichtung bewegt. Aus der Differenz zwischen tatsächlicher und ausgewerteter Reflektorgeschwindigkeit über 100 Simulationsdurchläufe erhält man für jedes Auswerteverfahren den Erwartungswert und die Standardabweichung zum Messfehler. Die Verfahren werden bei unterschiedlichen Reflektorgeschwindigkeiten zwischen 0,2 m/s und 4,6 m/s in 0,2 m/s Schritten bewertet.

In Abb. 4.4 sind für ein SNR von 0 dB die Erwartungswerte (links) und Standardabweichungen (rechts) der Messfehler für die jeweiligen Auswerteverfahren dargestellt. Die

DFT erreicht eine Frequenzauflösung von  $\frac{1}{16t_{PRI}}$  und entspricht damit einer Geschwindigkeitsauflösung  $v_{DFT} = \frac{c_w}{16t_{PRI}2f_0} = 0,308 \text{ m/s}$ . Dies ist als Referenz in Abb. 4.4 in rot eingezeichnet.

Bei näherer Betrachtung der Auswerteverfahren wird deutlich, dass

- die Kovarianzmethode den DFT- und eigenwertbasierten Spektralanalyseverfahren entsprechend ihrer Erwartungswerte und Standardabweichungen unterlegen ist.
- die Erwartungswerte bei der Pisarenko-Methode im Vergleich zum MUSIC-Verfahren nur geringfügig höhere Abweichungen aufweisen, sich jedoch bei der Standardabweichung markant unterscheiden.
- die DFT mit Zero-Padding überwiegend geringere Standardabweichungen als die Pisarenko-Methode aufzeigt.
- die Abweichungen der Mittelwerte um  $2,5 \text{ m/s}$  auf die trigonometrische Funktion  $\arctan(\varphi)|_{\varphi=Re/Im}$  zurückzuführen ist. Denn einerseits nimmt mit abnehmender Steigung der Funktion der Einfluss von Winkelrauschen bis  $\varphi = \pi$  zu und andererseits weist diese Funktion einen Winkelsprung an dieser Stelle auf<sup>1</sup>.
- bei der DFT mit Zero-Padding und dem MUSIC-Verfahren die geringsten Auswertefehler bei Erwartungswerten und Standardabweichungen vorliegen.



**Abb. 4.4:** Bewertung der Auswerteverfahren innerhalb einer Raumzone bei  $t_{PW} = 20 \mu\text{s}$ ,  $t_{PRI} = 150 \mu\text{s}$ ,  $f_0 = 1 \text{ MHz}$ , 16 Pulsreflexionen eines Reflektors und einem SNR von 0 dB.

#### 4.4.2 Variation von SNR und Reflektoranzahl

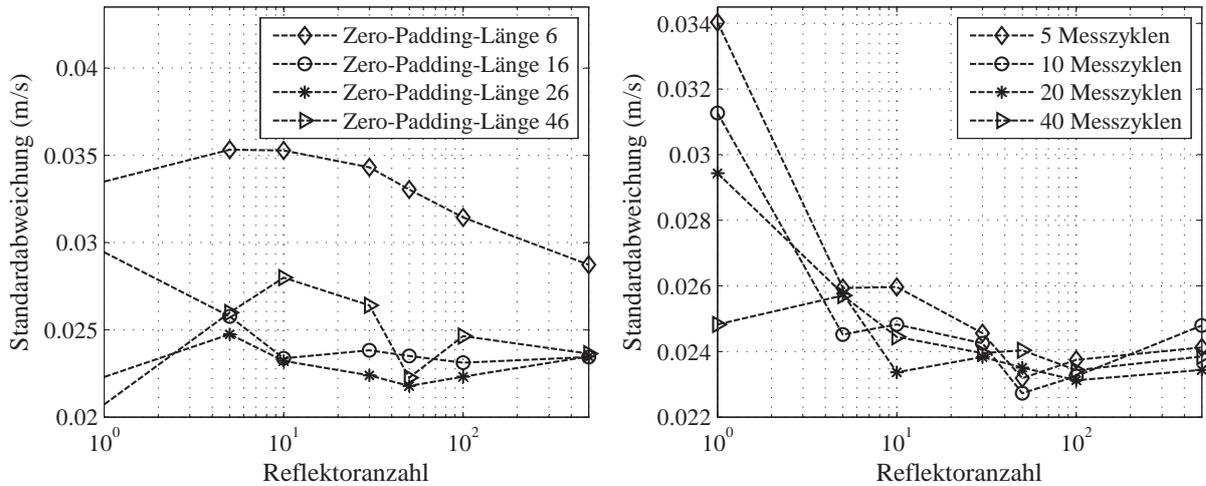
Aufgrund der vorangegangenen Ergebnisse wird nur das Auswerteverfahren der DFT mit Zerropadding und des MUSIC-Verfahrens hinsichtlich variierender Parameter, SNR

<sup>1</sup>Der Winkelsprung bei  $\pi$  ist äquivalent zur Hälfte der Maximaldopplerfrequenz bzw. -geschwindigkeit gemäß der Signalaufbereitung nach Kap. 4.2.

und Reflektormenge, weiteren simulativen Analysen unterzogen. Wie auch in Kap. 3.6.2 werden Reflektorströmungen aus dem CFD-Modell verwendet, sodass unter Kenntnis der Ausgangssituation ein möglichst realitätsnahes Messszenario entsteht. Untersucht werden CFD-Rohrströmungen der Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ m/s}$  und  $1,5 \text{ m/s}$  für einen Durchmesser von  $d = 0,1 \text{ m}$  gemäß der Geometrie in Abb. 2.6 und die Einstrahlwinkel  $\beta = 60^\circ$  und  $\alpha = 0^\circ$ . Die Anzahl der Reflektoren und folglich der Echos im Empfangssignal beträgt je nach Simulationsszenario 1, 5, 10, 30, 50, 100 und 500. Neben der Echodichte im Empfangssignal werden die Auswerteverfahren auf ihre Störfestigkeit für ein SNR von 20 dB bis  $-6 \text{ dB}$  analysiert. Für die folgende Analyse wird die  $t_{PRI}$  verdoppelt auf  $0,3 \text{ ms}$ , um bei dem Rohrdurchmesser von  $10 \text{ cm}$  entfernungs eindeutig zu sein. Zur Steigerung der Empfangsdauer wurde zudem die Pulsbreite auf  $10 \mu\text{s}$  halbiert. Die 16 Abtastwerte bzw. Messintervalle einer jeden Raumzone im Empfangssignal stellen einen einzelnen Messzyklus dar. Um die Ergebnisse mit den 320 Messintervallen aus den Analysen im KF-PDA-Auswerteverfahren vergleichen zu können, werden die Geschwindigkeiten einer jeden Raumzone über 20 Messzyklen ( $16 \times 20 = 320$  Messintervalle) arithmetisch gemittelt. Nach der Mittelung der Geschwindigkeiten einer jeden Raumzone findet gemäß Kap. 3.5.1 eine räumliche Ausgleichsrechnung der vorgestellten Profilkfunktionen statt. Durch Abgleich der Geschwindigkeitsprofile aus dem CFD-Modell mit den berechneten Profilen aus der Spektralanalyse wird nach Gl. 3.76 eine Fehlerbewertung möglich (vgl. Kap. 3.6).

Zur Ermittlung der optimalen Anzahl an Zwischenschritten zur Interpolation des Spektrums durch Zero-Padding wird für die DFT zunächst die zu ergänzende Vektorlänge aus Nullen analysiert. Die bereits vorliegenden 16 Abtastwerte werden um die Null-Vektoren der Länge 6, 16, 26 und 46 ergänzt und hinsichtlich der Reflektormenge untersucht. Zusätzlich findet die Auswertung bei einem SNR von  $0 \text{ dB}$ , einem  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$  und einer Anzahl von 20 Messzyklen statt. Die Ergebnisse zu dieser Untersuchung sind in Abb. 4.5 (links) zusammengefasst, wobei deutlich wird, dass das Zero-Padding mit einer Vektorlänge von 6 stärker vom tatsächlichen Geschwindigkeitsprofil abweicht. Da jedoch der DFT keine weiteren Informationen durch das Zero-Padding beigefügt werden, sondern lediglich die spektrale Auflösung erhöht wird, ist ab einer Erweiterung der Vektorlänge von 16 der Einfluss der Frequenzaufösung gegenüber den anderen Fehlereinflüssen vernachlässigbar. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird daher die ergänzte Null-Vektorlänge auf 16 festgelegt, sodass die Gesamtlänge der DFT eine Zweierpotenz von 32 besitzt. Zusätzlich zu diesem Parameter wird auch die Auswirkung der Messzyklenanzahl auf die Auswertung untersucht. Bei gleicher Einlaufgeschwindigkeit, gleichem SNR und einer Zero-Padding-Länge von 16, ist im rechten Diagramm von Abb. 4.5 die Fehleranalyse für die Messzyklenanzahl 5, 10, 20 und 40 über die Reflektoranzahl aufgetragen. Bei geringer Reflektoranzahl lässt sich der Profilfehler durch Vergrößerung der Messzyklen verringern. Werden in jedem Messzyklus mehr als 10 Reflektoren erfasst, wird der Mittelungseffekt vernachlässigbar.

Im Weiteren wird der Einfluss von Fließgeschwindigkeit und SNR auf das Auswerteverfahren DFT mit Zero-Padding näher betrachtet. Bei 20 Messzyklen, einer Zero-

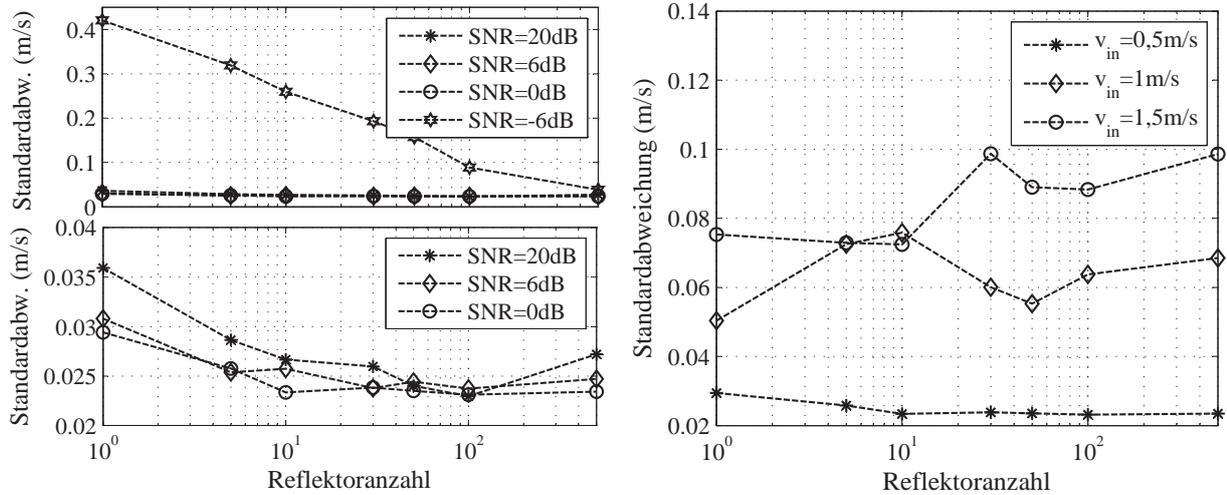


**Abb. 4.5:** Links: Auswertung zur Zero-Padding-Länge bei unterschiedlicher Reflektoranzahl, 20 Messzyklen, SNR von 0 dB und  $\bar{v}_{in}$  von 0,5 m/s; Rechts: Untersuchungen zur Messzyklenanzahl bei einer Zero-Padding-Länge von 16, einem SNR von 0 dB und  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s.

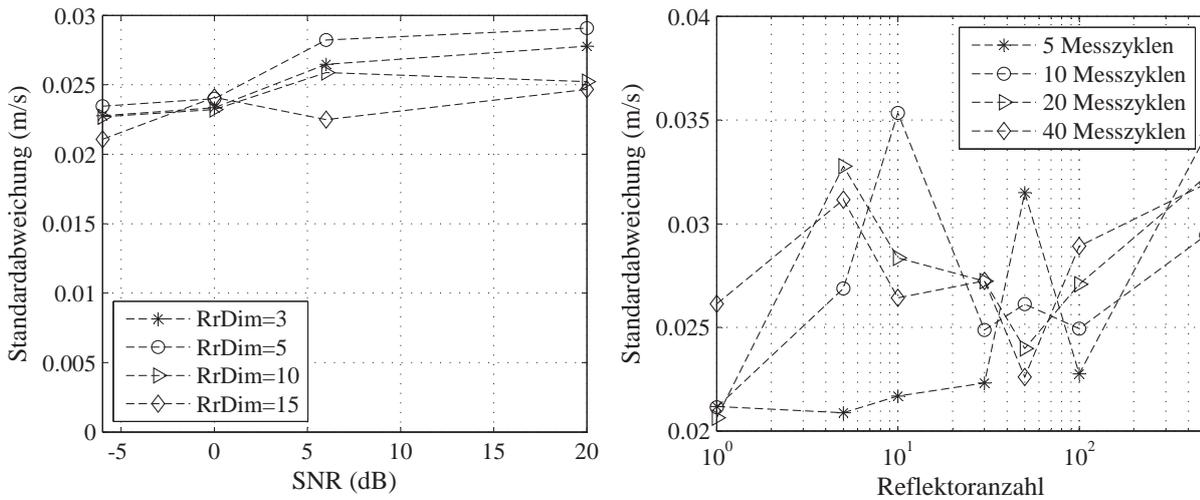
Padding-Länge von 16 und einer Einlaufgeschwindigkeit  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s ergeben sich die in Abb. 4.6 (links) dargestellten Standardabweichungen für die Signal-zu-Rausch-Verhältnisse von 20, 6, 0 und  $-6$  dB. Auffallend stark macht sich in diesem Diagramm der Einfluss der Reflektoranzahl bei hohem SNR ( $-6$  dB) bemerkbar. Zwar reduziert sich der Fehler mit zunehmender Reflektoranzahl, belegt aber eine mangelnde Störfestigkeit des Auswerteverfahrens. Im rechten Diagramm von Abb. 4.6 sind die Standardabweichungen für unterschiedliche Einlaufgeschwindigkeiten abgebildet. Die Reflektormenge nimmt in diesem Szenario keinen Einfluss auf die Auswertung, wohingegen der Fehler auch aufgrund zunehmender Turbulenzen mit der Geschwindigkeit ansteigt.

Neben der Vektorlänge der DFT mit Zero-Padding wird auch die Dimension der geschätzten Autokorrelationsmatrix  $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$  beim MUSIC-Verfahren untersucht. Während die Länge des Null-Vektors bei der DFT nur Auswirkungen auf den Interpolationsgrad im Spektrum hat, steigt durch die Dimensionserweiterung der Autokorrelationsmatrix auch tatsächlich der Informationsgehalt. In der linken Abb. 4.7 sind die Auswertungen zur Matrixdimension in Abhängigkeit zum Signal-zu-Rausch-Verhältnis bei einer Reflektoranzahl von 50, einer Messzyklenanzahl von 20 und einer Einlaufgeschwindigkeit von 0,5 m/s dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die Dimensionserweiterung bei dieser Anwendung keinen Einfluss auf die Auswertung nimmt. Die Analyse zur Messzyklenanzahl ist für eine Einflussgeschwindigkeit von 0,5 m/s, einem SNR von 0 dB und einer Matrixdimension von  $5 \times 5$  in Abb. 4.7 (rechts) zusammengefasst, wobei auch hier keine signifikanten Tendenzen ableitbar sind.

Wird zusätzlich das SNR in Abhängigkeit der Reflektoranzahl bei  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s, 20 Messzyklen und  $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$  der Dimension  $5 \times 5$  untersucht, wird in Abb. 4.8 eine Zunahme der



**Abb. 4.6:** Links: Gesamtauswertung (oben) und Zoom der unteren Kennlinien (unten) bei diverser Reflektoranzahl, 20 Messzyklen, SNR von 0 dB und  $\bar{v}_{in}$  von 0,5 m/s; Rechts: Geschwindigkeitsanalyse bei 20 Messzyklen, SNR=0 dB und Zero-Padding-Länge von 16.

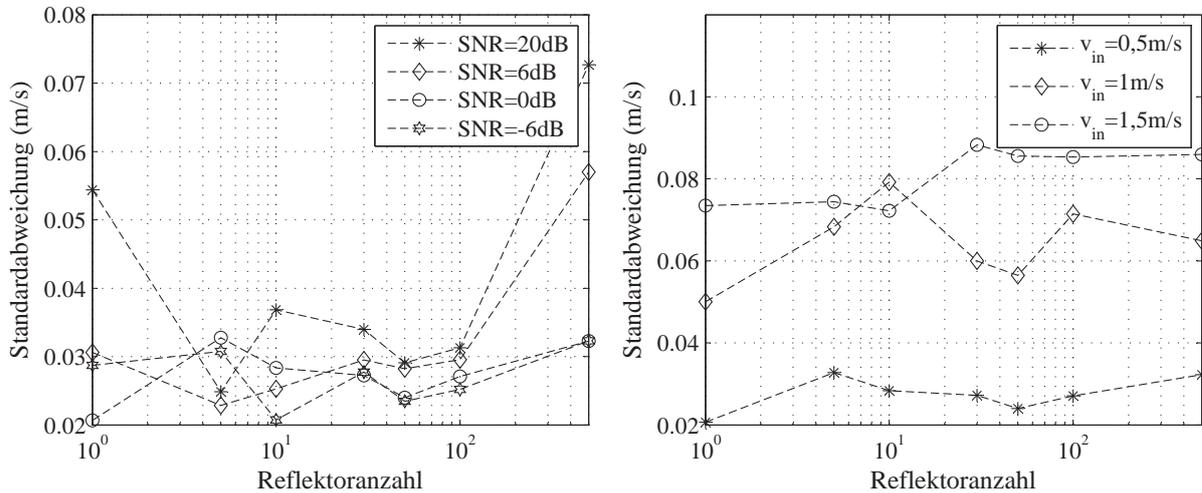


**Abb. 4.7:** Links: Einfluss der Autokorrelationsdimension auf die Auswertungen des MUSIC-Verfahrens bei unterschiedlichem SNR, gleichbleibender Reflektoranzahl von 50, 20 Messzyklen und  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s; Rechts: Analyse zur Messzyklenanzahl bei einem SNR von 0 dB,  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s und einer Matrixdimension von  $5 \times 5$ .

Fehler bei hoher Reflektoranzahl und geringem SNR deutlich. Dieser Fehleranstieg ist darauf zurückzuführen, dass die in Kap. 4.3.4 getroffene Annahme einer einzelnen Dopplerfrequenz im Empfangssignal (vgl. Gl. 4.38) und die Validierung des Signaleigenwertes durch die Bedingung -Signaleigenwert  $> 2 \times \max$  (Störeigenwert)- nicht länger gültig ist.

Unter gleichen Simulationsbedingungen, jedoch variierenden Geschwindigkeiten und konstantem SNR von 0 dB, sind im rechten Diagramm von Abb. 4.8 entsprechende Aus-

wertungen ersichtlich. Im Vergleich zum Auswerteverfahren DFT mit Zero-Padding (vgl. Kap. 4.6) konnten allerdings keine prägnanten Verbesserungen mit dem MUSIC-Verfahren erzielt werden.



**Abb. 4.8:** Links: Störfestigkeitsuntersuchung bei der Matrixdimension  $\hat{R}_{ss}$  von 5, 20 Messzyklen und  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s; Rechts: Fehlerbetrachtung bei drei Geschwindigkeiten, Matrixdimension von 5, 20 Messzyklen und einem SNR von 0 dB.

## 4.5 Messergebnisse zum Auswerteverfahren

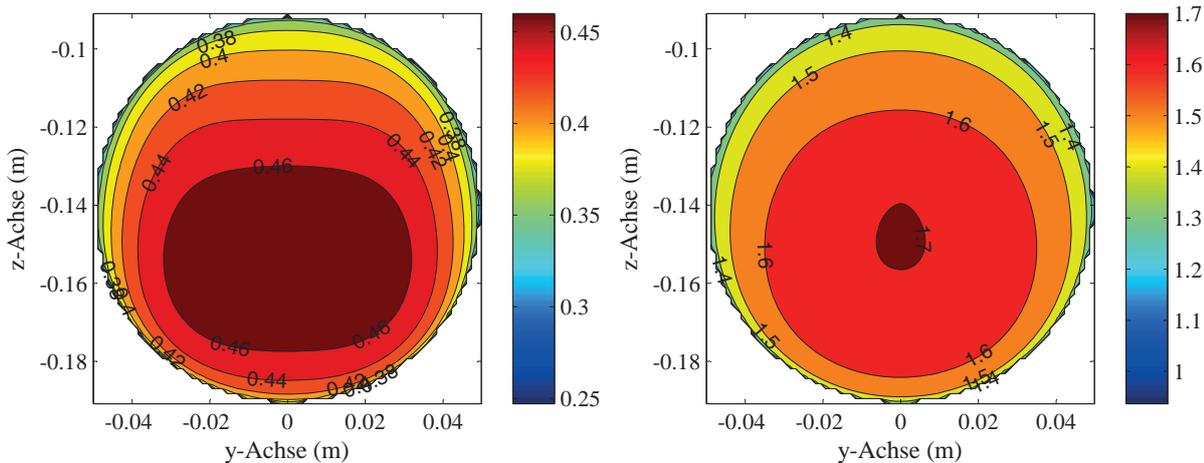
Der Nachweis realitätsnaher Messungen erfolgt identisch zum korrelativen Auswerteverfahren unter Laborbedingungen mit bekannten Volumenströmen. Im Gegensatz zu Kap. 3.7 wird mit dem Phased-Array-Sensor lediglich der Durchfluss des vollgefüllten Rohres (Durchmesser 0,1 m) gemäß Abb. 3.24 links gemessen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine Orts- und Geschwindigkeitseinschränkung beim dopplerbasierten Auswerteverfahren vorliegt. Basierend auf der Analyse in Kap. 2.2 beträgt bei einem Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  von  $300 \mu\text{s}$  die maximal zu messende Geschwindigkeit nach Gl. 2.6  $v_{max} = \pm 1,25$  m/s. Unter Vernachlässigung der negativen Geschwindigkeiten verschiebt sich, mit der in Kap. 4.2 vorgestellten Signalaufbereitung, der mögliche Messbereich auf 0–2,5 m/s. Mit dieser  $t_{PRI}$  und einer Pulsdauer von  $10 \mu\text{s}$  resultiert zudem aus Gl. 2.3 die Maximaleindringtiefe  $r_{max} = 0,215$  m, welche bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 60^\circ$  und einem Totbereich  $z_{tot} = 9$  cm (vgl. Abb. 3.17) für die vollgefüllte Rohrmessung ausreichend ist.

### 4.5.1 Vollgefüllte Rohrströmung

Gemessen werden im Nachfolgenden die Geschwindigkeitsprofile einer vollgefüllten Rohrströmung mit dem Phased-Array-Sensor. Dabei erfolgt die Auswertung zunächst durch die DFT mit Zero-Padding und anschließend mit dem MUSIC-Verfahren für unterschiedliche

Einlaufgeschwindigkeiten. Die Auswertungen jeder Raumzone führen durch Ausgleichsrechnung mit dem in Gl. 3.66 beschriebenen mathematischen Modell zum Profil. Der Auslenkungsbereich des Gruppenstrahlers beträgt  $\alpha = -30^\circ; -20^\circ; \dots; 30^\circ$  und die Messposition sowie die Rohrgeometrie stimmen mit jenen in Kap. 3.7.1 überein. Zur Generierung eines Mehrphasen-Fluids werden auch hier dem zirkulierenden Wasser kleinste Luftbläschen über Diffusoren beigemischt.

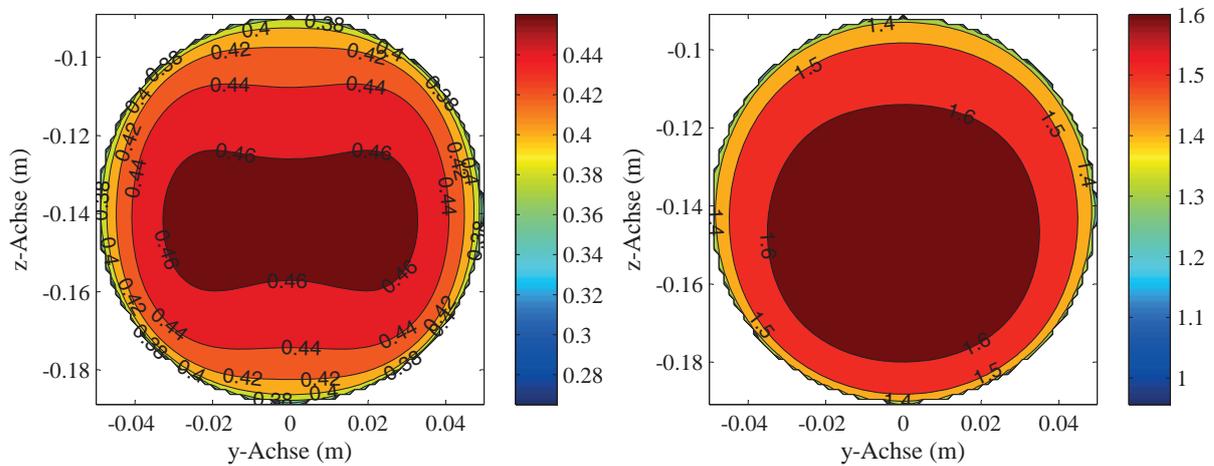
In Abb. 4.9 sind die gemessenen Geschwindigkeitsprofile für die eingestellten Durchflüsse 3,51/s (links) und 12,51/s (rechts) dargestellt, welche auf Grundlage der DFT mit Zero-Padding bestimmt wurden. Nach 20 Messzyklen, einer Zero-Padding-Länge von 16 resultiert aus der linken Geschwindigkeitsverteilung ein gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,137 \text{ m/s}$  und rechts ein gemessener Durchfluss von  $Q = 12,41/s$  mit  $r_{LSQ} = 0,159 \text{ m/s}$ . Demnach beträgt links der Durchflussfehler 2,9 % und rechts 0,8 %. Die jeweils dazugehörigen Geschwindigkeitsmesspunkte der Raumzonen und Profile sind dem Anhang unter Kap. A.23 beigelegt. Zusätzlich ist im Anhang die Messung für den Durchfluss von 91/s mit einem Fehler von 1,1 % abgebildet.



**Abb. 4.9:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen auf Basis einer DFT mit Zero-Padding. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  mit  $r_{LSQ} = 0,137 \text{ m/s}$  bei einem eingestellten Durchfluss von 3,51/s; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 12,41/s$  mit  $r_{LSQ} = 0,159 \text{ m/s}$  bei einem eingestellten Durchfluss von 12,51/s. Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

Die durch das MUSIC-Verfahren ausgewerteten Profilbilder nach 20 Messzyklen und einer Autokorrelationsmatrix von 5 sind in Abb. 4.10 ersichtlich. Bei gleichen Einlaufgeschwindigkeiten wie oben, wird im linken Diagramm ein Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  und im rechten ein Durchfluss von  $Q = 12,41/s$  gemessen. Zudem ergibt sich links eine Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,0574 \text{ m/s}$  und rechts von  $r_{LSQ} = 0,0995 \text{ m/s}$ . Die einzelnen Reflektorgeschwindigkeiten einer jeden Raumzonen sind auch bei diesem

Messzenario im Anhang unter Kap. A.24 zusammengefasst. Des Weiteren findet sich in diesem Kapitel auch die Geschwindigkeitsverteilung für einen Durchfluss von 9 l/s.



**Abb. 4.10:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen auf Basis des MUSIC-Verfahrens. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  mit  $r_{LSQ} = 0,0574 m/s$  bei einer Ausliterung von  $Q_{Ist} = 3,51/s$ ; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 12,41/s$  mit  $r_{LSQ} = 0,0995 m/s$  bei einer Ausliterung von  $Q_{Ist} = 12,51/s$ . Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.





# Kapitel 5

## Fusion von laufzeit- und dopplerbasierten Auswerteverfahren

Die Analysen der zuvor behandelten Auswerteverfahren lassen sich mit folgender Schlussfolgerung zusammenfassen: Die Simulationen in Abb. 3.23, 4.6 und 4.8 machen deutlich, dass in Bezug auf die Störfestigkeit das KF-PDA-Verfahren zwar mit zunehmendem Rauschen dem der DFT mit Zero-Padding überlegen ist, jedoch bei der Geschwindigkeitsanalyse -insbesondere bei geringer Reflektoranzahl und hohen Einlaufgeschwindigkeiten- den beiden dopplerbasierten Auswerteverfahren unterliegt. Das MUSIC-Verfahren und die DFT mit Zero-Padding weisen einen geringeren Rechenaufwand im Vergleich zum KF-PDA-Verfahren auf. Der große Nachteil der beiden Puls-Doppler-Verfahren liegt jedoch in ihrer Einschränkung des Messraums bzw. der Eindringtiefe unter Beibehaltung der Messeindeutigkeit (vgl. Kap. 2.2). Damit sind die Verfahren ohne Modifikation bei größeren Kanalabmaßen nicht geeignet.

Um nun die positiven Eigenschaften der geringen Messabweichung bei hohen Volumenströmen und geringer Reflektoranzahl mit jenen einer unbeschränkten Eindringtiefe zu verknüpfen, sollen das dopplerbasierte und das korrelative Auswerteverfahren miteinander kombiniert werden. Die Fusion dieser beiden Auswerteverfahren lässt sich grundsätzlich in zwei Klassen unterteilen. Beim ersten Lösungsansatz wird das Objektverfolgungsverfahren um die Informationen der Dopplerfrequenz und damit der Reflektorgeschwindigkeit erweitert. Das Ziel dieses Konzeptes ist darin begründet, dass durch die Erweiterung des Messvektors  $\mathbf{z}$  um die Reflektorgeschwindigkeit beim Kalman-Filter, die Messdefizite bei geringer Reflektoranzahl und hohen Volumenströmen verringert werden. Eine detaillierte Erläuterung zu diesem Verfahren findet im nachfolgenden Kap. 5.2 statt. Beim zweiten Lösungsansatz werden die dopplerbasierten Auswerteverfahren durch eine korrelativ bestimmte Ortsinformation ergänzt. Dabei wird das kohärente Signalformat um die Signalform aus Kap. 3.2 und deren korrelative Auswertung aus Kap. 3.3 erweitert, sodass die Raumzonenaufteilung durch die tatsächliche Ortsinformation des Reflektors ersetzt wird. Die Eindringtiefe ist damit ohne Mehrdeutigkeiten der Messung beliebig

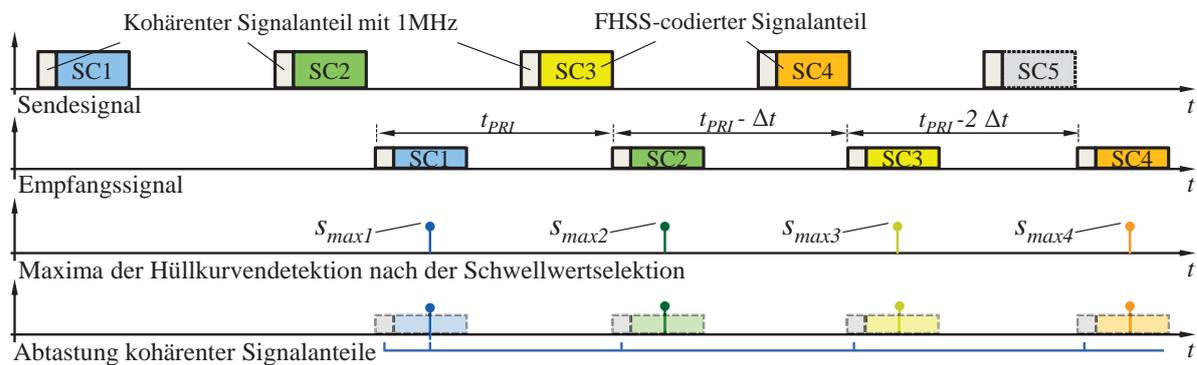
skalierbar. Dieser Ansatz wird in Kap. 5.3 behandelt und im weiteren Verlauf durch Simulationen untermauert. Grundvoraussetzung beider Verfahren stellt allerdings eine spezielle Signalcodierung dar, welche in Kap. 5.1 vorgestellt wird. Ziel ist es, die Kohärenz bei möglichst hoher Orthogonalität zwischen den Pulsen zu erhalten, wobei jeder Puls eine Dirac-förmige Autokorrelation aufweisen muss.

## 5.1 Sendesignalformen und Signalaufbereitung

Um die drei Eigenschaften einer möglichst Dirac-förmigen Autokorrelation zur Ortsbestimmung, maximaler Orthogonalität zur Vermeidung von Mehrdeutigkeit und zeitäquidistanter aber auch kohärenter Signalanteile zur Ermittlung der Dopplerverschiebung in einem Sendesignal zu vereinen, wurden in den letzten Dekaden mehrere Codierverfahren entwickelt. Bekannte dopplergestützte Codierverfahren sind die Phasencodierung beim Breitband-ADCP-Messgerät [BCDT91], aber auch die Pulspausencodierung beim Schmalband-ADCP [SO93]. Werden die Autokorrelationen beider Signalformen bei gleicher Signaldauer verglichen, wird deutlich, dass die Signalenergie ( $\tau = 0$ ) beim Breitband-ADCP-System stets größer ist als bei dessen schmalbandigem Pendant. Um den selben Informationsgehalt bei gleicher Signalenergie zu senden, muss die Sendedauer beim Schmalband-ADCP-Signal erheblich länger sein. Ein längeres Sendesignal bedeutet jedoch bei intermittierendem Senden und Empfangen einen größeren Totbereich im Nahfeld des Sensors. Bedingt durch Phasencodierung haben hingegen Breitband-ADCP-Messgeräte den Nachteil, dass diese -wie der Name schon sagt- einen breitbandigen Ultraschallwandler benötigen. Ein entsprechender Wandler mit einer Bandbreite von 70% der Mittenfrequenz wird in [CDBT87] präsentiert, ist jedoch komplex und aufwändig in der Herstellung. Zudem steht das breitbandige Abstrahlen der Sendesignale im Widerspruch mit dem fixen Einzelstrahlerabstand von  $\frac{\lambda}{2}$  des Phased-Array-Sensors, sodass eine Fokussierung der Hauptkeule stets mit einer Zunahme der Nebenkeulen einhergeht. Eine weitere Möglichkeit der Signalcodierung ist die nach [Zrn77] vorgeschlagene gestaffelte (staggered) Puls-Paar-Methode oder die zufallsorientierte Phasencodierung [ZM85, DZ93]. Beide Codierverfahren werden vorwiegend in der Wetterradartechnik eingesetzt und beruhen auf statistischen Auswertemethoden.

Ausgangspunkt der beiden nachfolgenden fusionierten Auswerteverfahren ist eine spezielle Sendesignalform, welche alle bisher behandelten Signaleigenschaften in sich vereint und zugleich für Phased-Array-Strahler geeignet ist. Die Sendesignalform kombiniert dabei die in Kap. 3.2 behandelten FHSS-codierten Pulse mit einem zeitäquidistanten und kohärenten Signalanteil der selben Frequenz. Bei der Wahl der kohärenten Signalfrequenz wird -wie bereits in Kap. 4.2 erwähnt- die Resonanzfrequenz des Gruppenstrahlers bei 1 MHz verwendet. In Abb. 5.1 sind die Sendeform, bestehend aus den beiden Signalanteilen, und das aus einem Reflektor resultierende Empfangssignal dargestellt. Der aus nur wenigen Perioden bestehende, kohärente Signalanteil wird durch einen FHSS-codierten Puls ergänzt. Das Senden der kohärenten Signalanteile erfolgt dabei mit jener Pulswiederholrate, die

nötig ist, um die gewünschte Maximalgeschwindigkeit von Reflektoren noch messen zu können. Soll beispielsweise eine Fließgeschwindigkeit im Bereich zwischen 0 und 2,5 m/s abgedeckt werden, müssen die kohärenten Signalanteile -unter Verwendung der in Kap.4.2 diskutierten Signalaufbereitung- mit einer  $t_{PRI} = \frac{c_w}{2f_0 v_{max}} \approx 300 \mu s$  gesendet werden. Die Anzahl der zueinander orthogonalen FHSS-codierten Pulse hängt dabei von der notwendigen Messentfernung ab. Bei der  $t_{PRI} = 300 \mu s$  und zwei unterschiedlichen FHSS-Codierungen ( $n = 2$ ) ist demnach ohne Mehrdeutigkeiten eine maximale Messentfernung von  $r_{max} = \frac{nt_{PRI}c_w}{2} = 0,44 \text{ m}$  möglich.



**Abb. 5.1:** Sendesignalform und Signalaufbereitung des fusionierten Auswerteverfahrens in quantitativer Form.

Um die Position des Reflektors bestimmen zu können, wird das Empfangssignal zunächst der Signalkette der Hüllkurvendetektion in Abb. 3.7 zugeführt. Die Koeffizienten eines jeden Matched-Filters müssen so gewählt werden, dass diese mit den gesendeten FHSS-codierten Signalen korrelieren. Um bei dieser Auswertung keine Laufzeitfehler zwischen den unterschiedlich codierten Pulsen zu erhalten, muss zudem die Koeffizientenanzahl aller Matched-Filter übereinstimmen<sup>1</sup>. Die Dirac-Impulse in Abb. 5.1 entsprechen den Maxima der Hüllkurvendetektion einer Filterkette  $s_{max1:M}$  nach der Schwellwertselektion, deren Laufzeitänderungen von Impuls zu Impuls ein Maß der Reflektorgeschwindigkeit ist (vgl. Gl. 3.5). Folglich stimmen die bisher gewonnen Informationen mit jenen in Kap. 3 überein. Um nun zusätzlich die Dopplerverschiebung aus den Echosignalen extrahieren zu können, ist eine Abtastung der kohärenten Signalanteile der Echos notwendig.

Zum Bestimmen der Dopplerfrequenz ist gemäß den beiden untersten Diagrammen von Abb. 5.1 ein Lösungsweg skizziert. Dieser sieht vor, die Positionsinformationen der Hüllkurvendetektion für eine Abtastung der kohärenten Signalanteile zu verwenden. Da innerhalb eines Echos der Abstand zwischen kohärentem Anteil und dem Korrelationsmaximum  $s_{max}$  wegen der konstanten Länge des Matched-Filters stets gleich ist und sich die kohärenten Echoanteile mit der  $t_{PRI}$  wiederholen, lässt sich das Abtastschema bei jedem Echo wiederkehrend anwenden. Der Vorteil eines derartigen Abtastschemas

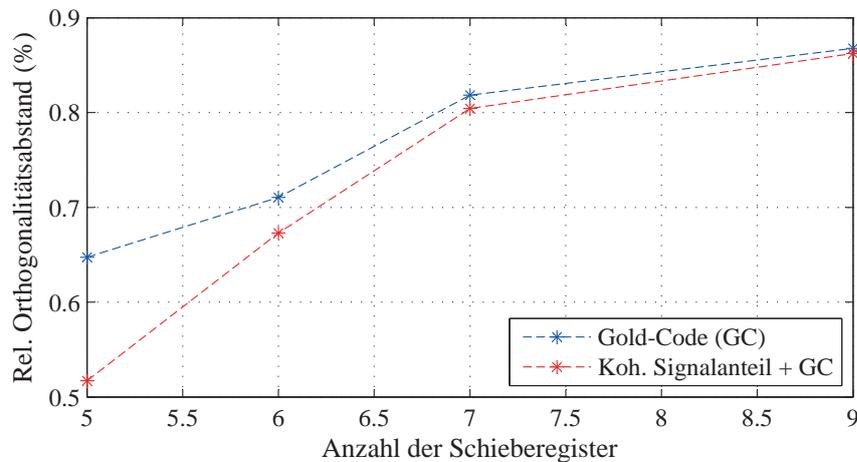
<sup>1</sup>Sollten die codierten Sendesignale unterschiedliche Breiten aufweisen, müssen diese durch Nullen aufgefüllt werden.

liegt in seiner vergleichsweise einfachen Umsetzung auf einem digitalen Signalprozessor (DSP) durch Erweiterung der Signalflosskette aus Abb. 3.7 um blockweises Abgreifen der Schieberegister. Basierend auf dieser Zusammenführung der Auswerteverfahren verdoppelt sich im Idealfall der Informationsgehalt innerhalb eines Messzyklus, denn neben den Reflektorpositionen erschließt sich auch deren Geschwindigkeit aus der Signalaufbereitung. Zusätzlich wird durch die echobezogene Detektion der Dopplerfrequenz die in Kap. 4.2 eingeführte Raumaufösung überflüssig. Ist die Dopplerfrequenz bekannt, ermittelt man die Reflektorgeschwindigkeit aus:

$$v_x = \frac{f_D c_w}{2 f_0 \cos(\alpha) \cos(\beta)}. \quad (5.1)$$

Durch das Hinzufügen von kohärenten Signalanteilen zu den FHSS-codierten Pulsen wird die Orthogonalitätseigenschaft der Signalcodierung verschlechtert. Um diese Aussage zu verifizieren, werden die Maximalwertunterschiede der Hüllkurven einmal mit und einmal ohne kohärentem Signalanteil untersucht. Im Detail wird hierbei die Maximalwertdifferenz der Korrelationsergebnisse aus einem FHSS-codierten Empfangssignal und dessen zugrundeliegendem Sendesignal (AKF) sowie das Ergebnis von Empfangssignal mit einem orthogonalen Sendesignal (KKF) gebildet. Dieser sog. Orthogonalitätsabstand wird ins Verhältnis zum Maximalwert der AKF gesetzt, sodass der relative Abstand aus  $\frac{\max(\text{AKF}) - \max(\text{KKF})}{\max(\text{AKF})}$  resultiert. Sind die relativen Orthogonalitätsabstände aller möglichen Gold-Sequenzen einer Schieberegisterlänge bekannt, wird deren Mittelwert in Abb. 5.2 zusammengefasst. Dabei basiert die Codierung auf den in Kap. 3.2 behandelten vier Frequenzzuständen; der kohärente Signalanteil besteht aus vier 1 MHz Perioden. Die Auswertung verdeutlicht, dass sich der kohärente Signalanteil zwar bei kurzen Gold-Sequenzen bzw. geringer Anzahl an Schieberegistern bemerkbar macht, sein Einfluss jedoch mit steigender Sequenzlänge und damit auch längeren Pulsbreiten abnimmt.

Eine weitere Frage, die sich bereits in Kap. 3.3 gestellt hat und sich bei der Verfahrensfusion aufgrund der höheren Pulswiederholrate verstärkt aufdrängt, ist die der entfernungsabhängigen Signaltrennung. In Abb. 5.3 (links) wird diese Problemstellung anhand einer Simulation, bestehend aus zwei Reflektoren der Entfernung 15 cm und 45 cm skizziert. Das frequenzcodierte Sendesignal setzt sich aus einer 7 Schieberegister langen Gold-Sequenz mit 4 Frequenzzuständen zusammen. Beide Sendesignale sind orthogonal zueinander, beinhalten einen vorgelagerten kohärenten Signalanteil aus 4 Perioden und werden mit einer Wiederholrate von  $t_{PRI} = 300 \mu\text{s}$  ausgestrahlt. Im Empfangssignal  $s_{in}$  wird das Auswerteproblem der entfernungsabhängigen Signaltrennung ersichtlich, denn die Echos der zweiten Reflexion sind aufgrund der hohen Schallabsorption erheblich geringer als die der naheliegenderen Reflexionen. Damit besteht die Gefahr, dass die AKF eines entfernten schwachen Echos geringer ist als die KKF mit einem anders codierten und näheren Echo. Entscheidend ist, dass die Absolutwerte der AKF des schwachen zweiten Echos größer sind als die Absolutwerte der KKF des andersartigen, stärkeren Echos des

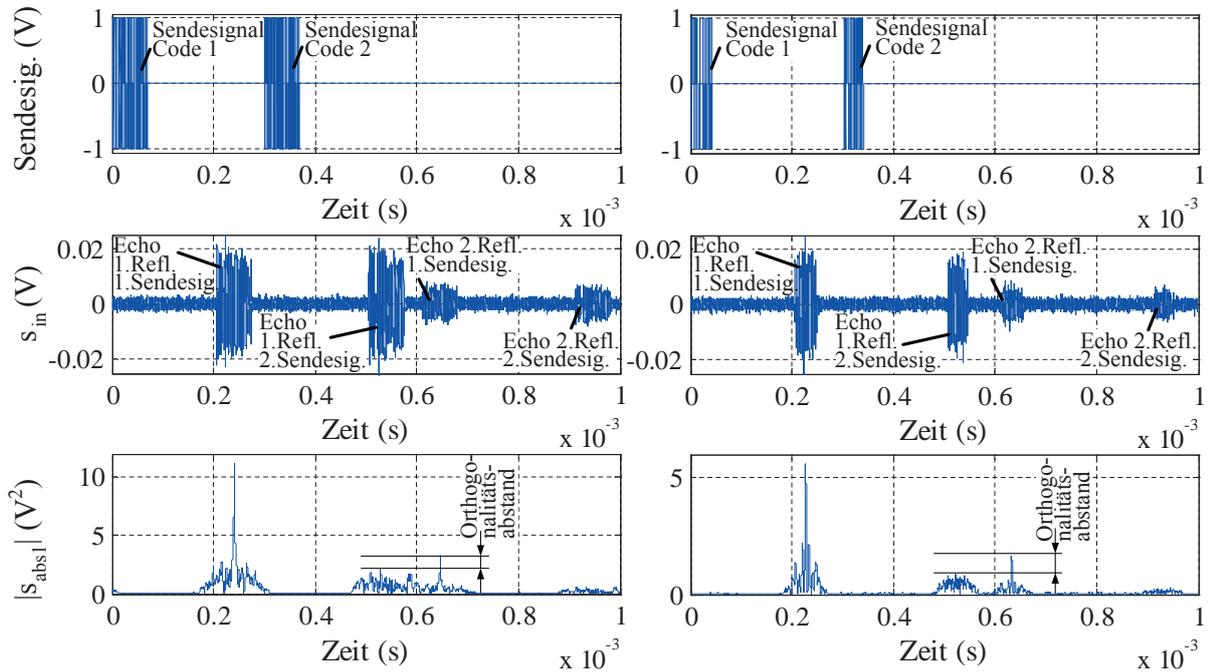


**Abb. 5.2:** Relativer Orthogonalitätsabstand gegeben durch  $\frac{\max(AKF) - \max(KKF)}{\max(AKF)}$ , wobei  $AKF \hat{=}$  Korrelation aus Empfangssignal mit dessen zugrundeliegendem Sendesignal und  $KKF \hat{=}$  Korrelation aus Empfangssignal mit orthogonalem Sendesignal definiert. Für jede Schieberegisterlänge 5, 6, 7 und 9 wird der Mittelwert über eine komplette Gold-Sequenzenreihe ausgewertet.

zweiten Sendesignals (vgl. Abb. 5.3 unten). Der Orthogonalitätsabstand muss bei größeren Distanzunterschieden möglichst groß sein, um eine räumliche Zuordnung der Signale gemäß der abschnittswisen Schwellwertdefinition von Gl. 3.4 durchführen zu können. Zur Steigerung dieses Abstands ist in der rechten Diagrammspalte von Abb. 5.3 das FHSS-codierte Sendesignal (mit kohärentem Signalanteil) um die nächste Zweierpotenz (von  $2^2$  auf  $2^3$ ) an Frequenzzuständen erhöht abgebildet, wobei die gleiche Gold-Sequenzlänge wie in der linken Diagrammspalte verwendet wird. Durch die Vermehrung der Frequenzzustände erhöht sich die Segmentierung der Gold-Sequenz von 2 auf 3 Bit, damit verringert sich die Anzahl der Signalsegmente und die Pulsbreite wird geringer. Es zeigt sich, dass sich mit einer Verdoppelung der Frequenzzustände der relative Orthogonalitätsabstand im Vergleich zum linken Diagramm um 39% vergrößert, obwohl die Pulsbreite von  $68,6 \mu\text{s}$  auf  $43 \mu\text{s}$  reduziert wurde. Weitere Steigerungen der Orthogonalitätsabstände lassen sich nicht nur mittels weiterer Frequenzzustände, sondern auch durch Erhöhung der Gold-Sequenzlänge mit weiteren Schieberegistern erreichen (vgl. Abb. 5.2).

Bedingt durch die höhere Pulswiederholrate, darf im Gegensatz zu Kap.3<sup>1</sup>, die Pulsbreite nicht unbegrenzt mittels Verlängerung der Gold-Sequenz gesteigert werden, da aufgrund des intermittierenden Sendens und Empfangens stets noch genügend Empfangszeit zum Auswerten vorliegen muss. Auch eine endliche Zunahme der Frequenzzustände ist aufgrund der festen Abstände der Einzelstrahler ( $\lambda/2$ ) beim Phased-Array-Sensor und der Schmalbandigkeit der Piezo-Strahler begrenzt. Folglich sind der Steigerung des Orthogonalitätsabstands zur räumlichen Signaltrennung Grenzen gesetzt. Um dennoch orthogonale von tatsächlichen Echos -auch bei hohen Eindringtiefen- unterscheiden zu können, lässt sich

<sup>1</sup>Beim korrelativen Auswerteverfahren beträgt die Maximale  $t_{PRI} \approx 2 \text{ ms}$  (vgl. Abb. 2.4 links).



**Abb. 5.3:** 1. Zeile: Links zwei orthogonale Sendesignale bestehend aus 4 Frequenzzuständen und rechts aus 8 Frequenzzuständen. 2. Zeile: Rückgestreute Echosignale des ersten (Sensorabstand 15 cm) und zweiten Reflektors (Sensorabstand 45 cm). 3. Zeile: Absolutwerte der Korrelation von Empfangssignal und dem jeweils ersten Sendesignal.

ein zweites Kriterium heranziehen. Die Abtastung der kohärenten Signalanteile wird mit dem Korrelationsmaximum gemäß Abb. 5.1 (unten) synchronisiert. Bei einer fehlerhaften Detektion findet die Abtastung außerhalb der Bereiche mit den kohärenten Signalanteilen statt und die Dopplerauswertung schlägt fehl. Damit wird die Signalinformation über die in den Frequenzanalysen definierten Kriterien als Störung identifiziert (vgl. Kap. 4.3) und verworfen.

Die Pulsbreite des kohärenten Signalanteils muss so lang sein, dass dieser Anteil trotz veränderter Laufzeit auch über die gesamte Signaldauer ( $N$ -Pulse) getroffen wird. Bei  $N$  Abtastungen, dem Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$ , dem Einstrahlwinkel  $\beta$  und der Reflektorgeschwindigkeit  $v_{x,max}$  berechnet sich die notwendige Pulsbreite aus:

$$t_{PW,koh} = \frac{2 \cos(\beta) v_{x,max} N t_{PRI}}{c_w}. \quad (5.2)$$

Hinzu kommt noch die Streuung der Abtastgenauigkeit, mit der das Hüllkurvenmaximum der Echos gemäß der Analyse in Kap. 3.3 detektiert werden kann. Untersuchungen für zwei gleiche Signale in Abb. 3.13 weisen eine Streuung von  $\pm 5,6$  Takten auf, was einer zusätzlichen Pulsbreite von  $\pm 0,56 \mu s$  entspricht. Der kohärente Signalanteil bildet sich nun aus der Summe der beiden Pulsbreiten, wobei sich der dominierende Anteil aus Gl. 5.2 ergibt.



## 5.2 Erweiterung der Objektverfolgung um die Dopplerfrequenz

Sind zu den Positionen der Reflektoren noch zusätzlich deren Geschwindigkeiten bekannt, lassen sich diese Informationen zur Erweiterung der Objektverfolgungsverfahren nutzen. Ziel ist insbesondere, die bereits angesprochenen Messfehler bei geringer Reflektoranzahl und hohen Fließgeschwindigkeiten zu verbessern.

### 5.2.1 Funktionsweise

Um die Geschwindigkeit eines Reflektors in die Spurbildung des Kalman-Filters einfließen zu lassen, ist der Messvektor aus Gl. 3.59 um die Geschwindigkeitsinformation

$$\mathbf{z} = [x, v_x, \phi]^T \quad (5.3)$$

zu erweitern. Diese Dimensionssteigerung geht zudem mit einer Messmodellerweiterung nach

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

einher. Eine weitere Änderung, die beim Kalman-Filter vorzunehmen ist, beschränkt sich auf die Messkovarianzmatrix  $\mathbf{R}$ , welche sich bisher additiv aus dem Fehler des Halbwerts- und Einstrahlwinkels  $\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$ , dem Abtastfehler  $\mathbf{R}_s$  und dem Amplitudenrauschen der Schallreflexion  $\mathbf{R}_\phi$  zusammensetzt. Diese Messkovarianzmatrix ist um die Komponente des Geschwindigkeitsmessfehlers  $\sigma_{Dv}$  zu ergänzen. Dieser Fehler erschließt sich aus dem Auswerteverfahren der Dopplerfrequenzbestimmung, deren frequenzgebundene Standardabweichung  $\sigma_D$  sich über Gl. 5.1 in den Geschwindigkeitsmessfehler  $\sigma_{Dv}$  umrechnen lässt. Beim klassischen Verfahren der DFT mit Zero-Padding und anschließender Maximalwertdetektion wird der Messfehler aus dem Pulswiederholintervall  $t_{PRI}$  sowie der Anzahl der Abtastwerte und deren Erweiterung durch das Zero-Padding  $N$  ermittelt. Der Kehrwert dieser Aufzeichnungsdauer  $T = t_{PRI}N$  entspricht der Frequenzauflösung, sodass bei gleichförmiger Dopplerfehlerverteilung die Standardabweichung  $\sigma_D$  aus Gl. 2.44 berechenbar ist. Weitere Standardabweichungen bei momentenbasierten Auswerteverfahren wie der Kovarianzmethode aber auch der DFT mit Zero-Padding wurden bereits in Gl. 4.8 bzw. 4.16 behandelt und für Auswerteverfahren wie Pisarenko und dem MUSIC-Verfahren empirisch bestimmt.

Zusammen aus den einzelnen Kovarianzmatrizen für den Geschwindigkeitsfehler  $\mathbf{R}_{Dv}$  und den bereits diskutierten  $\mathbf{R}_{\alpha,\beta}$ ,  $\mathbf{R}_s$  und  $\mathbf{R}_\phi$  kann die Messkovarianzmatrix für den Kalman-Filter berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{\alpha,\beta} + \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_\phi + \mathbf{R}_{Dv} \\
 &= \begin{bmatrix} t_{PRI}^2 \sigma_{\alpha,\beta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v,\phi}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Dv}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

### 5.2.2 Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation

Um das fusionierte mit dem korrelativen Auswerteverfahren aus Kap. 3 vergleichen zu können, werden die Analysen auf Grundlage des selben Simulationsszenarios durchgeführt. Dabei sind identisch zu Kap. 3.6.2 Reflektorströmungen eines vollgefüllten Rohres des Durchmessers 0,1 m aus der CFD-Simulation bei unterschiedlicher Einlaufgeschwindigkeit ( $\hat{v}_{in} = 0, 5; 1; 1,5$  m/s), Reflektoranzahl (1; 5; 10; 30; 50; 100; 500) und SNR (20; 6 ;0 ; -6 dB) auszuwerten. Gesendet werden Pulse bestehend aus einem kohärenten Signalanteil der Dauer  $4 \mu\text{s}$  bei 1 MHz Sendefrequenz und einem darauffolgenden FHSS-codierten Signalanteil, generiert aus vier Frequenzzuständen und einer aus sechs Schieberegistern hervorgehenden Gold-Sequenzlänge. Die Pulsbreite ist stets kleiner als  $30 \mu\text{s}^1$  und das Pulswiederholintervall beträgt  $t_{PRI} = 300 \mu\text{s}$ . Untersucht werden für jeden Parametersatz jeweils 20 Messzyklen, wobei jeder Messzyklus aus 16 Empfangssignalen im Abstand von  $t_{PRI} = 300 \mu\text{s}$  besteht und demnach bei  $16 \times 20 = 320$  Messintervallen zu einer Gesamtempfangsdauer von 96 ms führt.

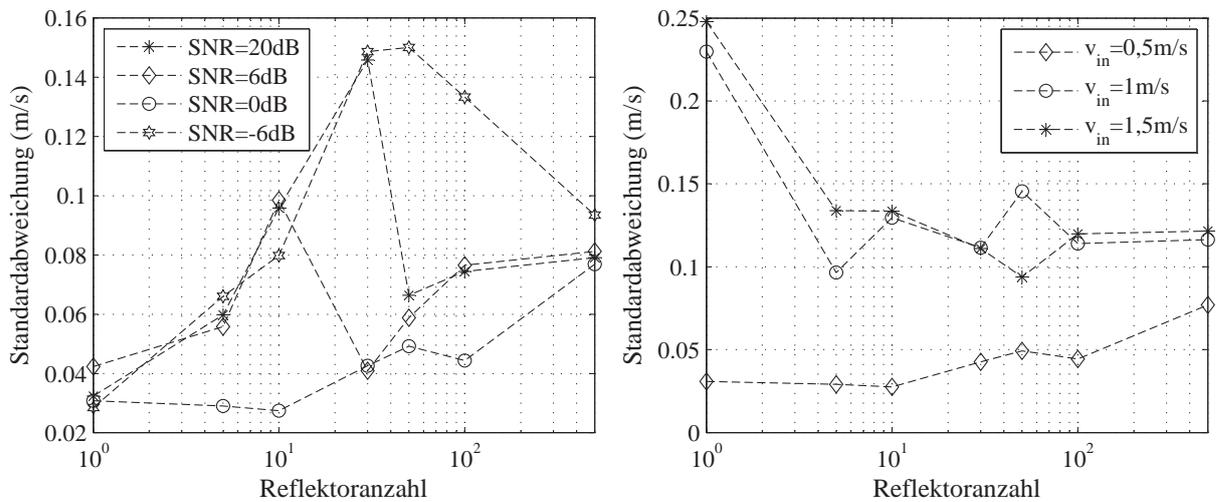
Zur Geschwindigkeitsbestimmung wird das KF-PDA-Verfahren verwendet und mit dem DFT mit Zero-Padding und der Maximalwertdetektion kombiniert, sodass der Rechenaufwand zur Dopplerfrequenzbestimmung möglichst gering ist. Die Simulationsergebnisse sind für diverse SNR im linken Diagramm von Abb. 5.4 und für unterschiedliche Einlaufgeschwindigkeiten rechts dargestellt.

Um eine Aussage über den Nutzen der Fusion treffen zu können, sind in Abb. 5.5 die Simulationsergebnisse aus den Auswerteverfahren mit und ohne (Kap. 3.6) Dopplerinformation dargestellt. Hier zeigt sich, dass die Verfahrensfusion bei höheren Einlaufgeschwindigkeiten geringere Standardabweichungen aufweist. Insbesondere konnte der Messfehler bei geringer Reflektoranzahl und hohen Durchflüssen stark reduziert werden.

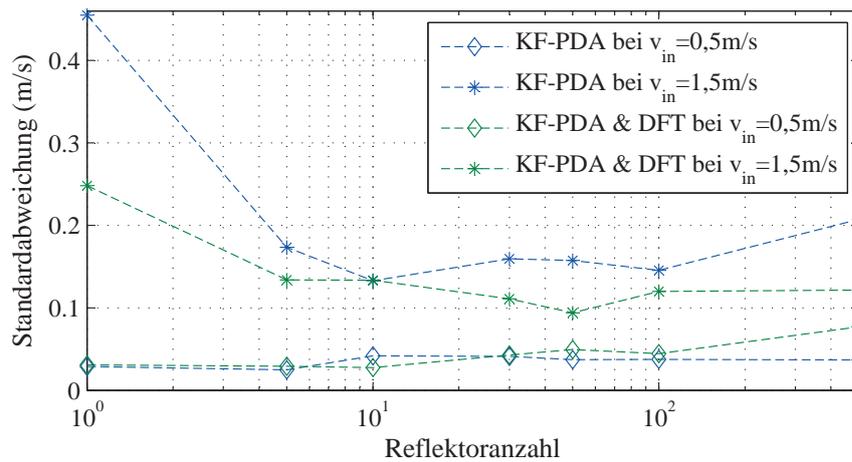
### 5.2.3 Messergebnisse zum Auswerteverfahren

Zusammen mit der Phased-Array-Technologie wird das vorgestellte fusionierte Verfahren zur Durchflussmessung eingesetzt. Unter Laborbedingungen werden dabei -identisch zu Kap. 3.7.1 und 4.5.1- ein vollgefülltes Rohr des Durchmessers 0,1 m und ein offener Kanal der Breite 0,35 m (vgl. Kap. 3.7.2) untersucht. Bei beiden Messzenarien sind die

<sup>1</sup>Der FHSS-codierte Signalanteil variiert aufgrund unterschiedlicher Frequenzkonstellationen geringfügig in der Pulsbreite.



**Abb. 5.4:** Links: Störfestigkeitsuntersuchung bei 20 Messzyklen und  $\bar{v}_{in} = 0,5$  m/s; Rechts: Fehlerbetrachtung bei diversen Geschwindigkeiten, 20 Messzyklen und einem SNR von 0 dB.



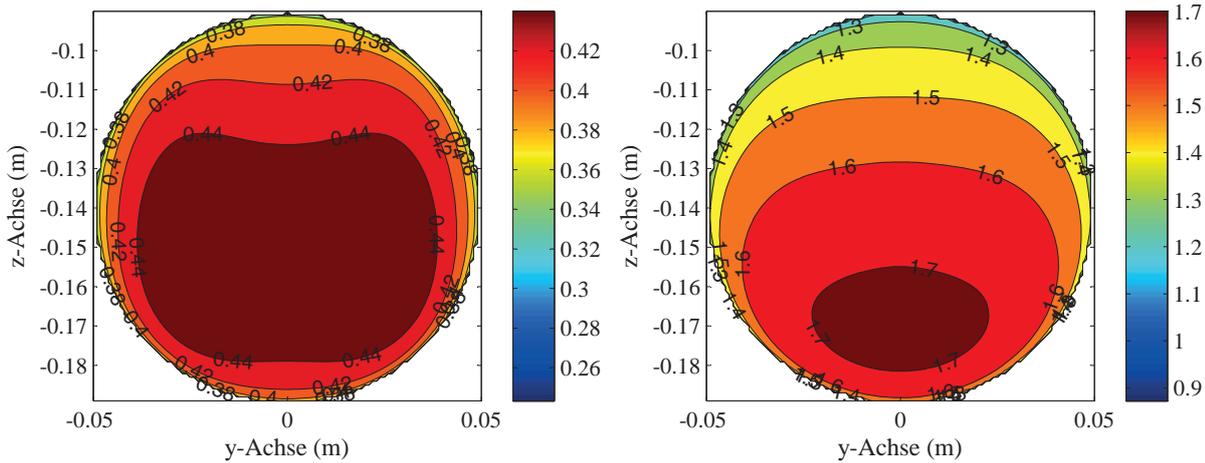
**Abb. 5.5:** Vergleich von laufzeitbasierten Auswerteverfahren mit und ohne Dopplerinformation. Simuliert wurden Einlaufgeschwindigkeiten von 0,5 m/s und 1,5 m/s, 20 Messzyklen und einem SNR von 0 dB.

Volumenströme bekannt. Zudem werden den zirkulierenden Fluiden über Diffusoren kleinste Luftbläschen (Durchmesser  $< 1$  mm) beigemischt, welche als Schallreflektoren dienen. Als Auswerteverfahren werden eine KF-PDA-Filterkombination zur Strömungslinienverfolgung und eine DFT mit Zero-Padding fusioniert.

### Vollgefüllte Rohrströmung

Für die Durchflüsse 3,5 l/s und 12,5 l/s sind in Abb. 5.6 die Geschwindigkeitsverteilungen dargestellt. Das zugrundeliegende Profil beruht auf dem in Kap. 3.5.1 behandelten mathematischen Modell für vollgefüllte Rohre, deren Ausgleichsrechnung und Messpunkte jeweils

im Anhang unter Kap. A.25 hinterlegt sind. Die aufintegrierten Volumenströme ergeben für die linke Geschwindigkeitsverteilung 3,41/s und für die rechte 12,51/s. Zusätzlich resultieren für die ausgelieterten Durchflüsse  $Q=3,51/s$  eine Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ}=0,143\text{ m/s}$  und für  $Q=12,51/s$  eine Streuung von  $r_{LSQ}=0,439\text{ m/s}$ . Ein weiteres Messergebnis für den Durchfluss 91/s befindet sich im Anhang unter Kap. A.25.

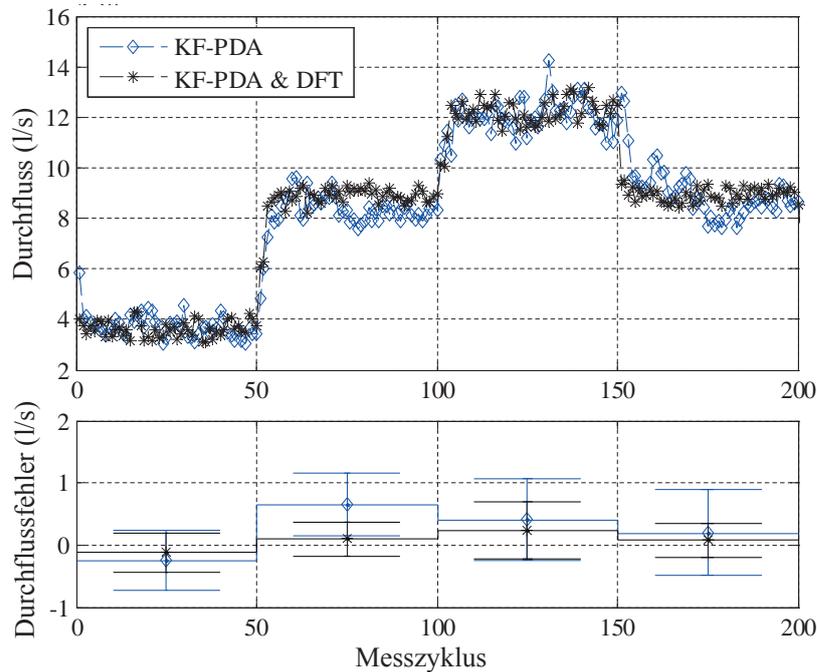


**Abb. 5.6:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen zur vollgefüllten Rohrströmung bei gegebenen Durchflüssen von 3,51/s (links) und 12,51/s (rechts). Die gemessenen Durchflüsse betragen  $Q=3,41/s$  (links) mit  $r_{LSQ}=0,143\text{ m/s}$  und  $Q=12,31/s$   $r_{LSQ}=0,439\text{ m/s}$  (rechts). Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

Um das dynamische Verhalten mit dem Korrelationsverfahren ohne Geschwindigkeitsinformation vergleichen zu können, werden in einer weiteren Messung stufenweise die Volumenströme der Pumpe über einen Frequenzumrichter von 3,5 auf 9 und 12,51/s erhöht und anschließend wieder auf 91/s gesenkt. Die Messung wird zunächst mit dem KF-PDA-Verfahren aus Kap. 3 und anschließend mit der Erweiterung um die Dopplerfrequenzbestimmung KF-PDA & DFT (DFT mit Zero-Padding und Maximalwertdetektion) durchgeführt. Der zeitliche Verlauf beider Messergebnisse findet sich in Abb. 5.7 (oben). Die Mittelwerte und Streuungen jeder Volumenstromstufe sind im unteren Diagramm von Abb. 5.7 zusammengefasst. Dabei zeigt sich, dass das erweiterte Auswerteverfahren mit der Dopplerinformation stets geringere Messabweichungen aufweist.

### Offener Kanal

Identisch zum Messzenario in Abb. 3.26 wird das fusionierte Auswerteverfahren auf die Messung am offenen Strömungskanal angewendet. Das Sendesignal setzt sich aus zwei orthogonalen Pulsformen mit jeweils kohärenten Signalanteilen zusammen, welche mit einer  $t_{PRI}$  von 0,45 ms gesendet werden. Die Maximalgeschwindigkeit in Fließrichtung beträgt somit  $v_{x,max} = 2,3\text{ m/s}$  und die maximale Eindringtiefe 0,65 m, sodass bei einem

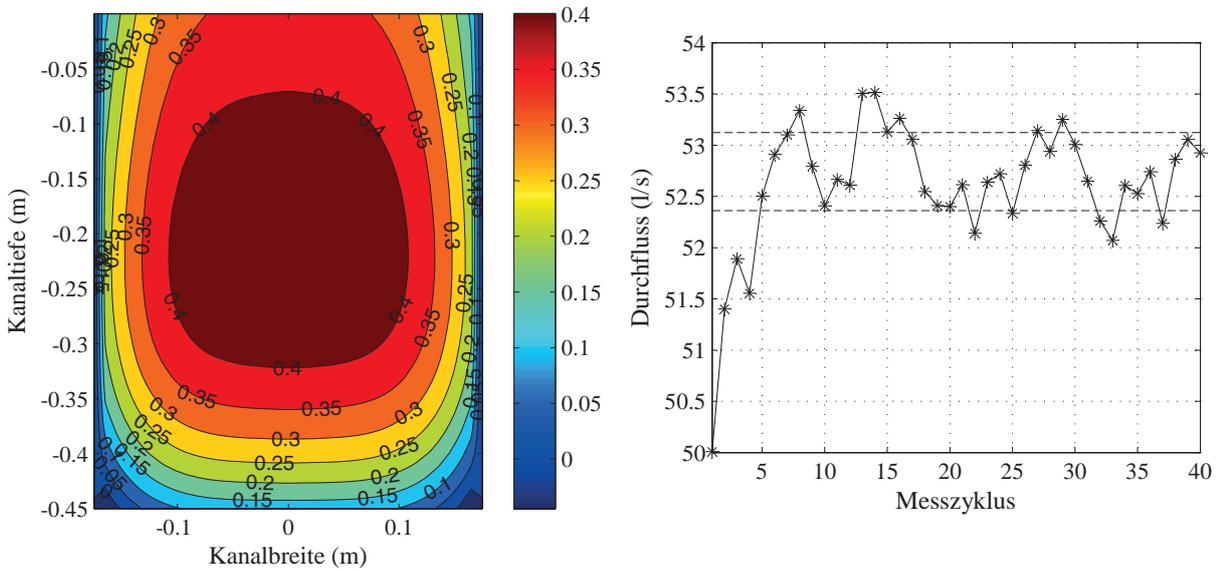


**Abb. 5.7:** Oben: Zeitlicher Verlauf der gemessenen Volumenströme bei stufenweiser Änderung der Pumpenleistung von 3,5 auf 9 sowie 12,5 und 91/s. Unten: Mittelwertabweichung der Messpunkte zur Pumpenleistung sowie die Standardabweichung der Messpunkte für jede Stufe. Verglichen werden die Messergebnisse der Filterkonstellation KF-PDA aus Kap. 3 und deren Erweiterung durch die DFT mit Zero-Padding.

durchschnittlichen Füllstand von 0,45 m, einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 45^\circ$  und einer Kanalbreite von 0,35 m, Durchflüsse bis zu  $3151/\text{s}^1$  gemessen werden können.

In Abb. 5.8 (links) ist für den voreingestellten Durchfluss 531/s die über den Phased-Array-Sensor gemessene Geschwindigkeitsverteilung nach dem 40-sten Messzyklus dargestellt. Im rechten Diagramm ist der zeitliche Messverlauf der Volumenströme ersichtlich. Die Standardabweichung der Durchflüsse nach dem Einschwingvorgang des Auswerteverfahrens beträgt  $\pm 0,381/\text{s}$  bei einem Mittelwert von  $52,741/\text{s}$ . Die Geschwindigkeiten der einzelnen Reflektoren sowie das dazugehörige Ausgleichsmodell sind im Anhang unter Kap. A.26 abgebildet.

<sup>1</sup>Nach [NN93] beträgt die mittlere Geschwindigkeit das 1,15 fache der Maximalgeschwindigkeit, sodass gilt:  $Q_{max} = A_{Kanal} \frac{v_{x,max}}{1,15}$ .



**Abb. 5.8:** Links: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit dem Phased-Array-Sensor nach 40 Messzyklen, bei gegebenem Durchfluss von 53 l/s und gemessenem Wert von  $Q=52,91$  l/s, sowie einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ}=0,0548$  m/s. Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen. Rechts: Zeitlicher Verlauf der Volumenströme über mehrere Messzyklen.

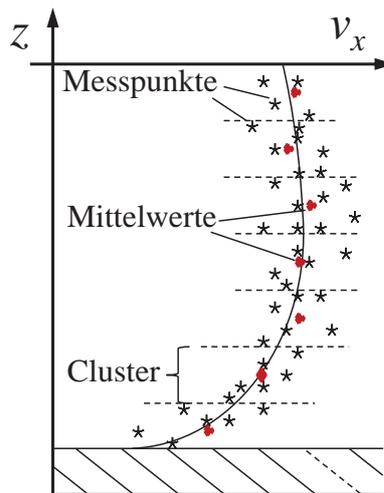
### 5.3 Erweiterung der Dopplerauswertung um die Ortsinformation

Die Signalfusionierung ermöglicht auch die Erweiterung des dopplerbasierten Auswerteverfahrens aus Kap. 4. Mit den zusätzlichen Positionsinformationen zu den Reflektoren lässt sich das Hauptproblem der Messraumbeschränkung für die Dopplerfrequenzauswertung lösen. Eine Unterteilung der Empfangssignale in Raumzonen innerhalb der Empfangszeit ist somit nicht zwingend notwendig (vgl. Abb. 4.1), da die Reflektorpositionen über die Hüllkurvendetektion zeitkontinuierlich erfasst werden können. Von Vorteil ist, dass damit die Einschränkung der Messraumaufösung durch die Pulsbreite entfällt.

#### 5.3.1 Funktionsweise

Die Geschwindigkeitsbestimmung kann bei dieser Auswertemethodik auf zwei Arten erfolgen. Die einfachste, jedoch rechenaufwändigste besteht darin, die gemessenen Geschwindigkeiten und Reflektorpositionen in die Ausgleichsrechnung zur Geschwindigkeitsprofilbildung einfließen zu lassen. Gemäß Gl. 3.67 führt dieses Vorgehen allerdings mit jedem neuen Messpunkt zu einer Dimensionserweiterung der Matrix  $\mathbf{D}$  und zu einer Zunahme des Rechenaufwandes bei der  $QR$ -Zerlegung. Damit der Rechenaufwand nicht mit jedem neuen Messpunkt um ein Vielfaches ansteigt, wird ein anderer Lösungsweg vorgeschlagen: Vor der

Ausgleichsrechnung wird ein Clustering der Messdaten durchgeführt (vgl. Abb. 5.9). Dieses sieht vor, die Messpunkte räumlich mit einer sinnvollen Rasterung zu mehreren Clustern zusammenzufassen, sodass anschließend deren Mittelwert zur Ausgleichsrechnung verwendet werden kann. Diese Komprimierung der Messdaten führt zu einem übersichtlichen Lösungsansatz der Normalgleichung und wird deshalb weiter verfolgt.

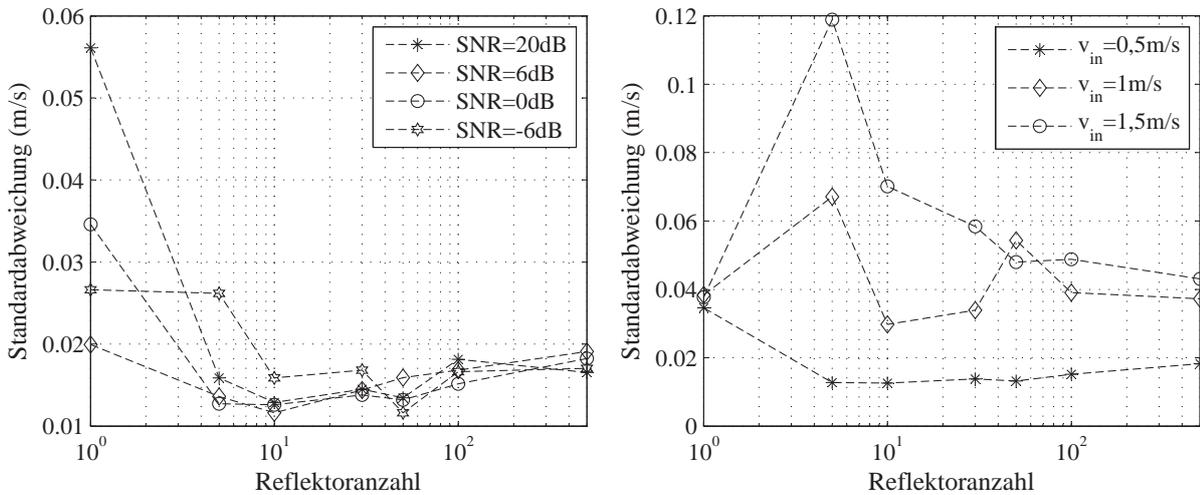


**Abb. 5.9:** Clustering der Geschwindigkeitsmesspunkte durch Mittelwertbildung für jede Raumzone an einem offenen Kanal. Die Mittelwerte einer jeden Raumzone bilden den Datensatz zur Ausgleichsrechnung.

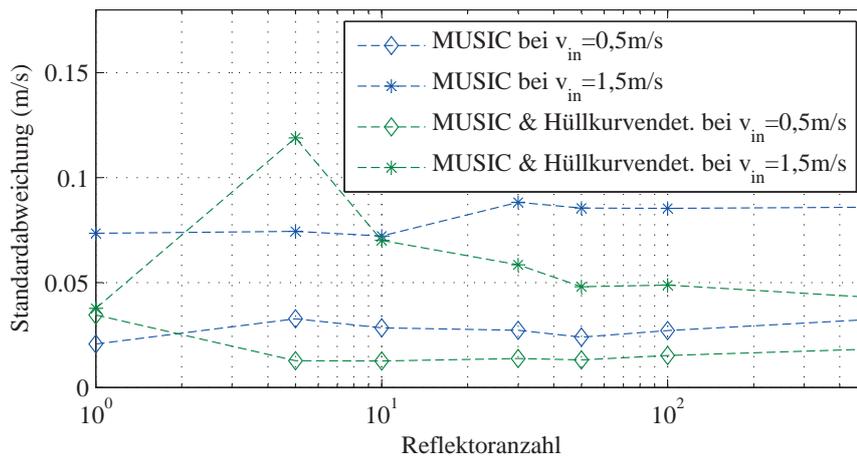
### 5.3.2 Analysen zum Auswerteverfahren durch Simulation

Unter denselben Simulationsbedingungen und Sendesignalen wie in Kap. 5.2.2 wird auch der Messfehler der erweiterten Dopplerauswertung hinsichtlich Störfestigkeit gegenüber Rauschen und Einlaufgeschwindigkeit, sowie der Anzahl an Reflektoren untersucht. Beim Clustering wird eine räumliche Fensterung von 1 cm verwendet. Zudem findet die Auswertung auf Basis der Hüllkurvendetektion zur Positionsbestimmung und des MUSIC-Verfahrens mit einer Autokorrelationsdimension von  $5 \times 5$  zur Dopplerfrequenzbestimmung statt. In Abb. 5.10 sind die Simulationsergebnisse für eine Messzyklenanzahl von 20 zusammengefasst.

In Abb. 5.11 werden die Simulationsergebnisse mit denen aus Abb. 4.8 verglichen. Dabei zeigt sich, dass durch die doppelte Signalverifikation, der Auswertefehler besonders bei hoher Reflektoranzahl reduziert werden kann. Die doppelte Signalverifikation ergibt sich einerseits aus der räumlichen Überprüfung der Echogültigkeit durch eine Schwellwertbetrachtung und andererseits durch die Gültigkeitsverifizierung der Dopplerfrequenz anhand der Eigenwerte sowie der Lage der Pole zum Einheitskreis (MUSIC).



**Abb. 5.10:** Links: Störfestigkeitsuntersuchung bei 20 Messzyklen und  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ ; Rechts: Fehlerbetrachtung bei diversen Geschwindigkeiten, 20 Messzyklen und einem SNR von 0 dB.



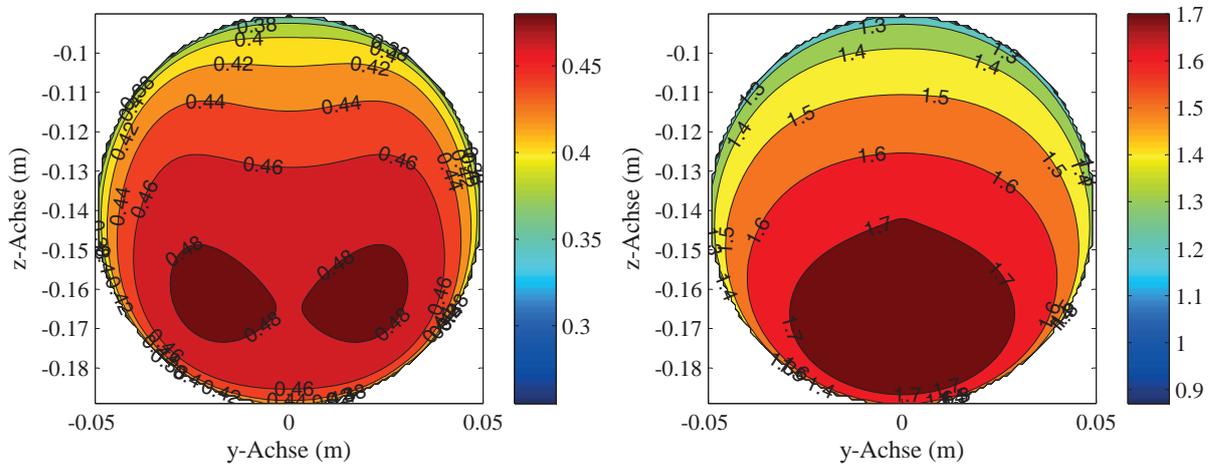
**Abb. 5.11:** Vergleich von MUSIC-Auswerteverfahren mit und ohne Hüllkurvendetelektion. Simuliert wurden Einlaufgeschwindigkeiten von 0,5 m/s und 1,5 m/s, 20 Messzyklen und einem SNR von 0 dB.

### 5.3.3 Messergebnisse zum Auswerteverfahren

#### Vollgefüllte Rohrströmung

Um die Funktionalität des Auswerteverfahrens unter Realbedingungen verifizieren zu können, wird wie auch in den vorhergehenden Kapiteln der Durchfluss einer vollgefüllten Rohrströmung mit dem Phased-Array-Sensor gemessen. Der Messaufbau gleicht dem in Abb. 3.24 links, wobei mit der erweiterten Dopplerauswertung die Durchflüsse 3,5l/s und 12,5l/s untersucht werden. Die Geschwindigkeitsverteilungen in Abb. 5.12 sind das Ergebnis einer Auswertung über 20 Messzyklen. Die räumlichen Geschwindigkeiten der

einzelnen Cluster für beide Messungen sowie eine weitere Durchflussmessung für 9 l/s sind dem Anhang unter Kap. A.27 beigelegt.

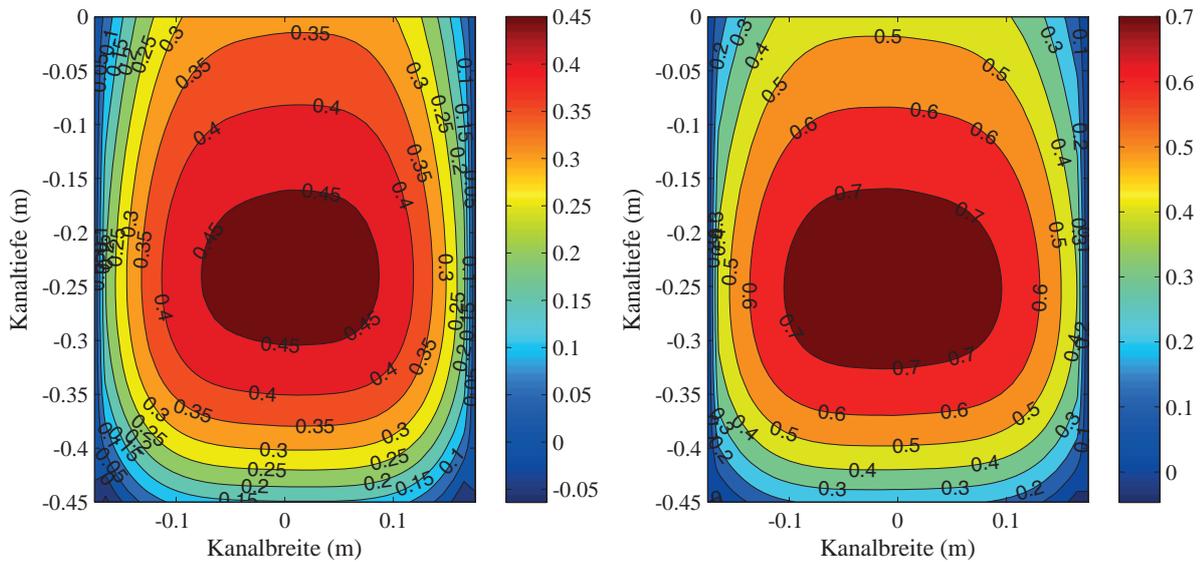


**Abb. 5.12:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen zur vollgefüllten Rohrströmung bei eingestellten Durchflüssen von 3,5 l/s (links) und 12,5 l/s (rechts). Die dazugehörigen Messungen mit dem Phased-Array-Sensor betragen  $Q=3,5$  l/s und  $r_{LSQ}=0,12$  m/s (links) bzw.  $Q=12,4$  l/s und  $r_{LSQ}=0,374$  m/s (rechts). Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.

### Offener Kanal

Neben der Messung am vollgefüllten Rohr ermöglicht die eingebettete FHSS-Codierung eine eindeutige Auswertung der Dopplerfrequenzen über die Entfernungsgrenzen von Gl. 2.7 hinaus. Demnach lässt sich die Messung der Strömungsgeschwindigkeiten auch bei höheren Eindringtiefen realisieren. Die Signalform, der Einstrahlwinkel und der Füllstand werden identisch zu Kap. 5.2.3 gewählt, jedoch bei der Auswertung auf das MUSIC-Verfahren zur Bestimmung der Reflektorgeschwindigkeiten und die Hüllkurvendetektion zur Positionsbestimmung zurückgegriffen. Beim Clustering wird ein Bereich von 2 cm definiert, dessen Mittelwerte direkt in die Ausgleichsrechnung zur Profilbildung einfließen.

In Abb. 5.13 sind die Messergebnisse des Phased-Array-Sensors in Form von Geschwindigkeitsverteilungen für den offenen Kanal nach 20 Messzyklen dargestellt. Im linken Diagramm beträgt der gemessene Durchfluss 52,3 l/s und im rechten 84 l/s, bei jeweils gegebenen Durchflüssen von 53 l/s und 83 l/s. Die dazugehörigen Streuungen von Reflektorgeschwindigkeiten betragen im linken Diagramm  $r_{LSQ}=0,0787$  m/s und im rechten  $r_{LSQ}=0,157$  m/s. Im Anhang unter Kap. A.28 sind zudem die einzelnen Cluster-Geschwindigkeiten, sowie das daraus resultierende mathematische Geschwindigkeitsmodell zusammengefasst.



**Abb. 5.13:** Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen zur offenen Kanalströmung bei bekannten Durchflüssen von 531/s (links) und 831/s (rechts). Die dazugehörigen, gemessenen Durchflüsse und Streuungen betragen  $Q=52,31/s$  mit  $r_{LSQ}=0,0787$  m/s (links) und  $Q=841/s$  mit  $r_{LSQ}=0,1568$  m/s (rechts). Die Farbcodierung ist in m/s aufgetragen.



# Kapitel 6

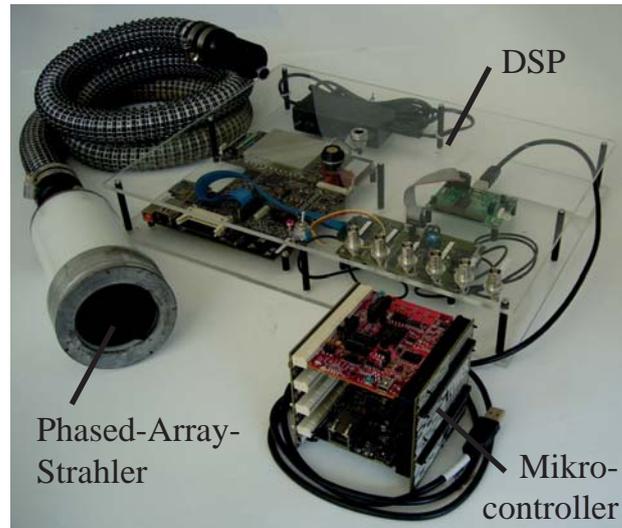
## Realisierung

Nachdem die Auswerteverfahren entwickelt wurden, stellt sich nunmehr die Frage nach ihrer Realisierung in einem Sensorsystem mit vertretbarem Aufwand. Zwar konnte die Funktionalität der Auswerteverfahren stets durch Messergebnisse diverser Kanäle und vollgefüllter Rohre nachgewiesen werden, jedoch fanden die Berechnungen vorwiegend auf einem leistungsstarken Arbeitsplatzrechner statt. Im Nachfolgenden wird daher der rechenintensivste Algorithmus auf einem Mikrocontroller implementiert und hinsichtlich benötigter Ressourcen analysiert.

### 6.1 Implementierung

Die bislang vorgestellten Verfahren und Analysen zur Volumenstrombestimmung beruhen auf der Auswertung eines stationären Arbeitsplatzrechners in Verbindung mit dem Softwarepaket MATLAB<sup>®</sup>. Die Verfahren müssen auf einer handelsüblichen Rechnerplattform implementiert werden. Vor allem dem korrelativen Auswerteverfahren soll besondere Aufmerksamkeit zukommen, da dieses im Vergleich zu den bisher bekannten Standardverfahren eine höhere Rechenleistung erfordert. Hierzu wird in diesem Abschnitt das in Kap. 3 vorgestellte KF-PDA-Verfahren mit der Ausgleichsrechnung implementiert und hinsichtlich dessen Performance untersucht. Der komplette Sensorprototyp bestehend aus dem Phased-Array-Strahler zur elektromechanischen Signalwandlung, dem DSP zur Signalaufbereitung und dem Mikrocontroller zur korrelativen Signalauswertung bzw. Ausgleichsrechnung ist in Abb. 6.1 veranschaulicht.

Während die hardwarenahe Signalaufbereitung (vgl. Abb. 2.20) bereits auf dem DSP implementiert vorliegt, erfolgt die Umsetzung des korrelativen Auswerteverfahrens (KF-PDA) in der Programmiersprache C auf dem Development-Kit K70F120M mit einem ARM Cortex-M4F Prozessor. Zur Ermittlung der Performance wird eine Messung am offenen Kanal der Abmaße  $35 \times 45$  cm ( $b \times h$ ) mit der Strahlerauslenkung von  $\beta = 45^\circ$  und in Azimuthrichtung  $\alpha = -30^\circ; -20^\circ; \dots; 30^\circ$  durchgeführt. Das Sendesignal besteht aus 16 Pulsen mit jeweils zwei orthogonalen FHSS-Codierungen, welche mit einem Pulswie-



**Abb. 6.1:** Sensorsystem, bestehend aus Phased-Array-Strahler, DSP und Mikrocontroller.

derholintervall von  $t_{PRI}=0,5$  ms ausgestrahlt werden. Nach der Signalaufbereitung von Kap. 3.3 resultieren aus den 7 Azimutwinkeln bei jeweils 16 Pulsen eine Gesamtanzahl von 11883 Reflektoren. Diese hohe Reflektoranzahl wurde dabei bewusst durch einen geringen Schwellwert, einhergehend mit einer hohen Fehldetektionsrate provoziert, sodass die Analyse unter erschwerten Bedingungen erfolgt. Verglichen wird die Rechenzeit in Tab. 6.1 bei gleichen Messdaten mit dem Arbeitsplatzrechner (Intel Core 2 Duo E8400 Prozessor 3.0 GHz mit zusätzlicher vPro Technologie, 6 MB L2 Cache, 4 GB Arbeitsspeicher, 1333 MHz FSB, 64 Bit Win7 und der MATLAB<sup>®</sup> -Version 2012b 64 Bit) und dem Mikrocontroller (K70F120M). Die implementierten Programme zur Auswertung der Messdaten unterscheiden sich lediglich in der Umsetzung der  $QR$ -Zerlegung mittels der Householder-Transformation [Opf94, GVC96]. Während die Berechnung der  $\mathbf{R}$ -Matrix und somit die Bestimmung der Modellparameter des Vektors  $\mathbf{b}$  gemäß Gl. 3.70 in MATLAB<sup>®</sup> durch einfache Vektor- und Matrixmultiplikation gelöst werden kann, muss dieser Ansatz bedingt durch den begrenzten Arbeitsspeicher auf dem Mikrocontroller- in mehrere Schleifen zerlegt werden. Dieser Umstand macht sich besonders im Vergleich der Rechenlaufzeiten bemerkbar.

Dabei zeigt sich, dass die Messdaten beim KF-PDA-Verfahren auf dem Mikrocontroller um 9,38 % langsamer verarbeitet werden als auf dem Arbeitsplatzrechner. Bei der Ausgleichsrechnung benötigt der Mikrocontroller im Vergleich zum Arbeitsplatzrechner hingegen 378,46 % länger. Betrachtet man allerdings die Gesamtzeitdifferenz, so wird deutlich, dass die Realisierung des korrelativen Auswerteverfahrens auf einem Mikrocontroller bei einer Rechenzeitverzögerung von nur 15,35 % durchaus umsetzbar ist.

Beim Ausführen des Programms wurde zudem offensichtlich, dass der Großteil der Programmlaufzeit auf die serielle Datenübertragung zwischen DSP und Mikrocontroller

	Arbeitsplatzrechner MATLAB <sup>®</sup> (s)	K70F120M mit C (s)	Differenz (%)
KF-PDA (7 Winkel)	3,776	4,130	+9,38
Ausgleichsrechnung	0,065	0,311	+378,46
Gesamt	3,850	4,441	+15,35

**Tabelle 6.1:** Analyse zur Rechendauer.

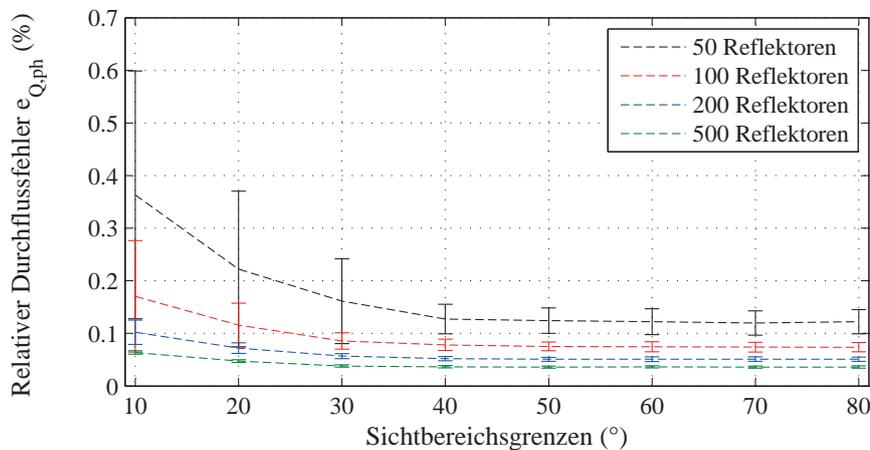
zurückzuführen ist. Bei den gegebenen 11883 Reflektoren betrug die UART (Universal Asynchronous Receiver Transmitter) Übertragungsdauer für eine Bitrate von 115200 bit/s 16,977 s. Hinsichtlich des Speicherbedarfs sind zur Umsetzung des Programms 22812 Byte im ROM (entspricht einer Speicherbelegung von 2,2 %) und 109188 Byte im RAM (entspricht einer Speicherbelegung von 85 %) notwendig.

## 6.2 Optimierung der Phased-Array-Strahler

Bisher durchgeführte Messungen beruhen auf einem 16-elementigen Phased-Array-Strahler der Abmaße 11,2×22,4 cm, dessen Ausgangsmaterial sich aus einer 1-3 Kompositsubstanz von Polymeren und einer piezoelektrischen PZT-Keramik zusammensetzt [WNR<sup>+</sup>08, WH09]. Wie bereits in Tab. 2.1 und A.2 verdeutlicht, beschränkt sich die Auslenkung dieses Strahlers entlang der Azimuthebene auf einen Winkelbereich von ±30°. Winkelauslenkungen über diese Grenzen hinaus weisen eine überproportionale Dämpfung der Hauptkeule auf, welche eine Einschränkung der Richtwirkung auf der Empfangsseite zur Folge hat (vgl. Abb. A.4). Nach [LSW09, Daß02, Smi89, Qi00] und eigens dafür aufgestellten Gruppenstrahlermodellen [Tob11] ist dieser Effekt darin begründet, dass ein mechanisches Übersprechen auf benachbarte Einzelstrahler stattfindet und somit die phasenselektive Ansteuerung verzerrt. Dieser Crosstalk-Effekt steigt dabei mit zunehmender mechanischer Verkopplung zwischen den einzelnen Strahlerelementen und führt bei steigender Auslenkung zu einer stetigen Abnahme der Richtwirkung. Um die Richtwirkung nun über den Winkelbereich von ±30° hinaus steigern zu können, muss das Ziel einer weitergehenden Entkopplung der Einzelstrahler verfolgt werden.

Bevor eine Optimierung des Phased-Array-Strahlers vorgenommen wird, muss geklärt werden, ob eine Steigerung der Winkelauslenkung und damit des Sichtbereichs auch zu einer Verbesserung der Durchflussmessung hinsichtlich Genauigkeit führt. Zur Beantwortung dieser Frage werden Simulationen auf Basis eines bereits gemessenen Geschwindigkeitsprofils  $v_{x,KPo,Mess}$  am offenen Kanal der Abmaße 35×45 cm durchgeführt. Hierfür wird eine unterschiedliche Anzahl an Reflektoren (10, 20, 40,..) quer über den Kanal verteilt und deren Geschwindigkeiten aus dem zugrundeliegenden Profilmodell entnommen. Wird nun dem Gruppenstrahler eine Halbwertsbreite von 2° der Hauptkeule unterstellt und der Kanalquerschnitt in Azimutrichtung in 10°-Schritten aufgelöst, steigt die Wahrscheinlichkeit

mit zunehmendem Auslenkungsbereich eine größere Anzahl an Reflektoren zu detektieren. Auf Grundlage dieser Reflektordetektionen innerhalb der  $10^\circ$ -Auflösung des Auslenkungsbereichs findet eine Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils  $v_{x,KPo,\alpha}$  gemäß Kap. 3.5.2 statt. Wird nun die Differenz zwischen dem Ausgangsprofil und dem resultierenden Geschwindigkeitsprofil aus den begrenzten Auslenkungs- bzw. Sichtbereichen gebildet, ergibt sich bei gleichbleibender Querschnittsfläche der relative Durchflussfehler aus  $e_{Q,ph} = \frac{v_{x,KPo,Mess} - v_{x,KPo,\alpha}}{v_{x,KPo,Mess}}$ . Um ein statistisch aussagekräftiges Ergebnis hinsichtlich der Reflektorverteilung zu erhalten, wird der relative Fehler für jeden Parametersatz aus 100 Simulationsdurchläufen gewonnen. In Abb. 6.2 sind die relativen Fehler für eine unterschiedliche Anzahl an Reflektoren und Begrenzungen der Auslenkungsbereiche dargestellt. Hier wird deutlich, dass der Fehler zwar stets mit zunehmender Anzahl an Reflektoren abnimmt aber auch durch eine Erweiterung des Auslenkungswinkels bzw. Sichtbereichs des Phased-Array-Strahlers. Zusammenfassend führt somit ein größerer Auslenkungswinkel und damit auch Sichtbereich bis etwa  $40^\circ$  durchaus zu einer Verringerung des Messfehlers bzw. Steigerung der Genauigkeit, sodass der Strahler von  $\pm 30^\circ$  ausreichend ist. Zu beachten ist ferner, dass ein zu großer Auslenkungswinkel ( $\geq 60^\circ$ ) einen Anstieg des Projektionsfehlers nach Abb. 2.21 zur Folge hat [HFG<sup>+</sup>11]. Weitere Verbesserungen des Phased-Array-Strahlers wurden in [HS13] vorgestellt, jedoch in dieser Arbeit nicht weiter vertieft.



**Abb. 6.2:** Simulative Fehleranalyse zum Sichtbereich des Phased-Array-Strahlers.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Auswerteverfahren zur Ultraschall-Durchflussmessung auf Grundlage der Phased-Array-Technologie entwickelt. Dabei sollten Einschränkungen existierender Verfahren durch die Fusion von laufzeit- und frequenz-basierter Informationen beseitigt, deren Auflösung gesteigert und anhand simulativer und realitätsnaher Messszenarien verifiziert werden. Zur Erhöhung der Messabdeckung entlang des Kanal-/Rohrquerschnittes wurden zusätzlich zweidimensionale Geschwindigkeitsmodelle entworfen, deren Parameter sich aus den Messdaten der Phased-Array-Strahler erschließen.

Auf Reflexion basierende Ultraschallsensoren nutzen zur Geschwindigkeitsbestimmung der Strömung die Echoinformationen von Schwebstoffen im Fluid. Bewegen sich diese Schwebstoffe schlupffrei mit der Strömung, ermöglichen Informationen wie die der Laufzeitdifferenz zwischen Sensor und Reflektor aber auch die der Frequenzänderung durch den Dopplereffekt Rückschlüsse auf die Fließgeschwindigkeit des Fluides. Die Aufgabe bestand darin unter Verwendung der Phased-Array-Technologie den Ort und die Geschwindigkeit der Reflektoren entlang des Querschnittes exakt und frei von Störeinflüssen zu detektieren, sodass präzise Durchflussmessungen möglich werden.

Einen Überblick des verwendeten Phased-Array-Sensorkonzepts und dessen Messprinzip zur Durchflussmessung gibt Kapitel 2, um anschließend die Einschränkungen bestehender Auswerteverfahren aufzuzeigen. Primär erfolgten eine Unterteilung der Auswerteverfahren in kohärente und inkohärente Signalformen und eine Analyse der Messkorridore hinsichtlich der Parameter: Reflektorgeschwindigkeit, Eindringtiefe, Pulswiederholintervall, Pulsbreite und Halbwertsbreite der Strahler. Die Erweiterung dieser Korridore führte zu der zwingenden Notwendigkeit, eine schmalbandige Signalcodierung für die Phased-Array-Technologie zu entwickeln. Um eine Verbesserung der Auswerteverfahren vornehmen zu können, wurde das Sensorkonzept und dessen Umfeld in Teilmodelle wie das Strömungsmodell, das elektromechanische Übertragungsmodell, das Ausbreitungs-, Reflexions- und Absorptionsmodell von Schall abgebildet. Durch Zusammenführen dieser Teilmodelle ließen sich, unter definierten Umfeld- und Sensoreigenschaften, Empfangssignale generieren und zur

nachfolgenden Entwicklung der Auswerteverfahren nutzen. Zudem fand auf Basis dieser Modellinformationen eine Untersuchung der sensor- und strömungsbedingten Fehlerquellen statt.

Ziel war es, ein fusioniertes Auswerteverfahren zu entwickeln, bestehend aus einer laufzeitbasierten Objektverfolgung und einer eigenwertbasierten Spektralanalyse zur Dopplereffrequenzbestimmung. Die Theorien beider Verfahren werden in dieser Ausarbeitung zunächst getrennt voneinander vorgestellt. So wird in Kapitel 3 erstmals zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit von Reflektoren die Objektverfolgungstheorie auf die Durchflussmessung angewendet. Grundlage dieses Verfahrens bildet eine speziell für diese Anwendung entwickelte schmalbandige Signalcodierung. Unter Beibehaltung der richtungsselektiven Abstrahlung von Ultraschallsignalen durch die Phased-Array-Technologie, erweitert die Codierung den Messkorridor, steigert den Informationsgehalt sowie das Signal-zu-Rauschverhältnis (SNR). Zudem ermöglicht die Codierung eine präzise zeit- und ortsgebundene Verfolgung einzelner Reflektoren im Fluid, sodass mithilfe von Zustandsfiltern und Assoziationsverfahren die Reflektorinformationen zu Strömungslinien zusammengefasst werden. Jede Strömungslinie eines Reflektors wird folglich durch einen Zustandsfilter beschrieben, dessen Geschwindigkeit als Zustandsgröße zu jedem Zeitpunkt verfügbar ist. Als Zustandsfilter findet die Kalman-Theorie mit gleichförmigem Bewegungsmodell Anwendung, für deren Mess- und Prozessunsicherheiten strömungs- und sensorbedingte Fehlerquellen ursächlich sind.

Durch die Kombination des Zustandsfilters mit diversen lokalen und globalen Assoziationsverfahren konnte zudem eine Aussage zum Konvergenzverhalten und zur Stabilität unterschiedlicher Filterkombinationen getroffen werden. Untersucht wurden die Kombinationen aus Kalman-Filter mit den Assoziationsfiltern Nearest Neighbour (NN), Probabilistic Data Association (PDA) und Joint Probabilistic Data Association (JPDA). Es stellte sich heraus, dass bei hohen Fließgeschwindigkeiten nur die Kombination aus Kalman-Filter und einem gewichteten NN-Assoziationsfilter hohe Messschwankungen im Endzustand aufweist. Trotz höheren Rechenaufwands konnten beim globalen JPDA-Verfahren keine signifikanten Verbesserungen erzielt werden, sodass sich der PDA-Filter für diese Anwendung als angemessene Lösung erwies.

Angewendet auf die Phased-Array-Strahlertechnologie, erschließen sich durch die Objektverfolgung Geschwindigkeitsinformationen quer über den Kanal bzw. Rohrquerschnitt. Um zusätzlich die Messpunkte zu stabilisieren und Geschwindigkeiten in nicht messbaren Sichtbereichen des Sensors zu bestimmen, wurden auf Grundlage simulativer CFD-Daten zweidimensionale Geschwindigkeitsmodelle für vollgefüllte Rohre und offene Kanäle entwickelt. Zusammen mit den Messinformationen aus der Objektverfolgung und den Modellansätzen lassen sich Geschwindigkeitsprofile berechnen.

Durch realitätsnahe Messungen an Strömungskanälen wurden die Verfahren verifiziert. Eine Messung bei einem Durchfluss von 1460 l/s am Klärwerk Ulm ergab beispielsweise einen Messfehler von 4,45% und eine Streuung der Geschwindigkeiten von  $r_{LSQ}=0,119$  m/s.

Analysen hinsichtlich variierender Reflektoranzahl, SNR und Einlaufgeschwindigkeiten mit der Kalman-PDA Filterkombination untermauerten die Leistungsfähigkeit dieses laufzeitbasierten Auswerteverfahrens.

Die Bestimmung der Dopplerfrequenz im Empfangssignal und die daraus resultierende Fließgeschwindigkeit wird in Kapitel 4 behandelt. Im Gegensatz zur laufzeitbasierten Auswertung müssen bei diesem Verfahren die Sendepulse kohärent zueinander ausgestrahlt werden, wobei der Messkorridor durch Geschwindigkeits- und Entfernungsmehrdeutigkeiten eine starke Einschränkung erfährt. Neben den klassischen Auswerteverfahren zur Dopplerfrequenzbestimmung, wie der diskreten Fourier-Transformation (DFT) mit Zero-Padding und der Kovarianzmethode, wurden die eigenwertbasierten Spektralanalysen Pisarenko-Methode und Multiple Signal Classification (MUSIC) Schätzverfahren auf diese Problemstellung angewendet und anhand ausgewählter Kriterien verglichen. Als besonders robust und genau erwiesen sich die DFT mit Zero-Padding und das MUSIC Verfahren. Identisch zur laufzeitbasierten Auswertung erfolgten Untersuchungen dieser zwei Verfahren hinsichtlich variierender Reflektoranzahl, SNR und Fließgeschwindigkeiten, sowie verifizierende Messungen am Strömungsprüfstand für vollgefüllte Rohre. Im Gegensatz zur Laufzeitauswertung verharteten bei diesen Untersuchungen die Streuungen der gemessenen Reflektorgeschwindigkeiten auch bei höheren Einlaufgeschwindigkeiten auf einem niedrigeren Niveau.

In Kapitel 5 werden Fusionsverfahren erläutert, die sowohl die Laufzeit- als auch die Dopplerauswertung miteinander kombinieren. Grundlage dieser Auswertung bildet eine Signalform, die die Signalcodierung aus Kapitel 3 mit der kohärenten Signalform aus Kapitel 4 zur Dopplerfrequenzbestimmung vereint. Diese Signalform erlaubt eine positionsorientierte Abtastung der dopplerverschobenen Echosignale im Empfangssignal, sodass zu jedem Reflektor sowohl Orts- als auch Geschwindigkeitsinformationen erfasst werden können. Diese Informationen ermöglichen einerseits die Erweiterung der Objektverfolgungsverfahren durch die Messgröße der Reflektorgeschwindigkeit und andererseits eine ortsspezifische Geschwindigkeitsmessung ohne Mehrdeutigkeiten bei der Dopplerauswertung.

Die Einbindung der Doppler- bzw. Geschwindigkeitsinformation in die Objektverfolgung erfolgte durch die Erweiterung von Messvektor, Messmodell und Messkovarianzmatrix um die Geschwindigkeitskomponente im Zustandsraum. Untersuchungen zur Messabweichung bei variierender Reflektoranzahl bewiesen durch die zusätzliche Dopplerinformation eine Verbesserung bei hohen Einlaufgeschwindigkeiten und niedriger Reflektoranzahl.

Wird die Ortsinformation zur Abtastung der dopplerverschobenen Echosignale genutzt, lässt sich die Mehrdeutigkeitsproblematik umgehen und der Messkorridor für Dopplerauswerteverfahren beliebig erweitern. Dabei wurde bei dieser fusionierten Auswertung die Reflektorposition über die Hüllkurvendetektion und die Dopplerfrequenz über das MUSIC Verfahren bestimmt. Über die Hüllkurvenschwelle und Eigenwertprüfung erfolgte somit eine doppelte Signalverifikation eines Echosignals, wodurch Auswertefehler besonders bei hoher Reflektoranzahl minimiert werden konnten.

Der Funktionsnachweis konnte durch die Implementierung der laufzeitbasierten Objektverfolgung auf einem dafür entwickelten Sensorsystem, bestehend aus einem Phased-Array-Strahler, digitalen Signalprozessor und Mikrocontroller, erbracht werden. Dabei zeigte sich bei einem Testsignal mit 11883 Reflektoren, dass der Rechenaufwand für die Objektverfolgung mit anschließender Ausgleichsrechnung zur Profilbildung mit einem Mikrocontroller durchaus in adäquater Zeit realisierbar ist. Der verwendete Mikrocontroller K70F120M benötigte zur Lösung der Durchflussmessung mit dem gegebenen Testsignal eine Rechendauer von 4,4 s.

In der vorgelegten Arbeit wurde ein Sensorkonzept entwickelt und mit einem Phased-Array-Strahler, digitalen Signalprozessor und Mikrocontroller realisiert. Durch die Implementierung der Auswerteverfahren zeichnet sich dieses Sensorkonzept durch folgende Merkmale aus:

- Verwendung der Phased-Array-Technologie zur Geschwindigkeitsmessung über weite Bereiche des Kanal-/Rohrquerschnittes.
- Erweiterung der Phased-Array-Messung durch ein zweidimensionales Strömungsmodell zur Extrapolation nicht messbarer Randbereiche.
- Generierung eines Sendesignals bestehend aus einem kohärenten und einem codierten inkohärenten Anteil. Die Erweiterung der Messentfernung, des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses und des Informationsgehaltes durch die Signalcodierung im erforderlichen Umfang.
- Positionsbestimmung von Reflektoren durch korrelative Auswertung der codierten Signalanteile. Geschwindigkeitsschätzung von Reflektoren durch die zeitliche Verfolgung von Reflektorspuren mithilfe von Objektverfolgungsverfahren.
- Dopplermessung mittels geeigneter Frequenzschätzmethoden unter Auswertung kohärenter Signalanteile.
- Kalman- und PDA-Filter oder eine räumliche Clustering-Methode ermöglichen die Fusion von Doppler- und Entfernungsmessung.



# Anhang A

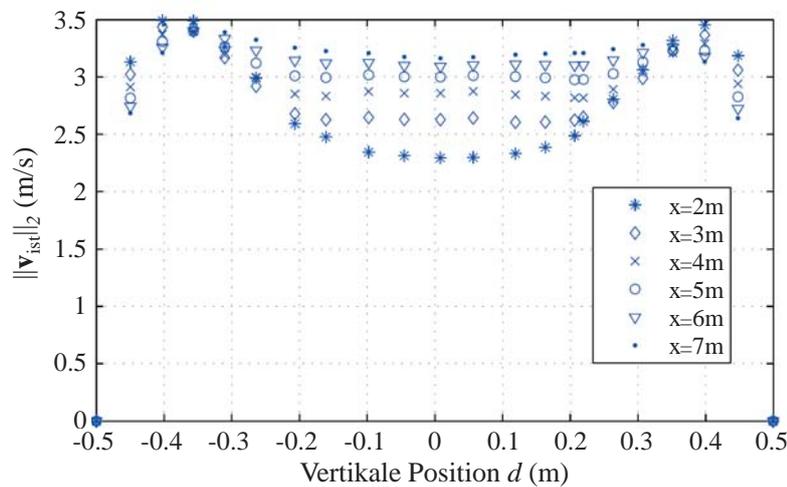
## Anhang

## A.1 Fehlerzuwachs Kreuzkorrelationsfunktion bei großem $t_{PRI}$

Ausgangspunkt der Auswertung ist eine CFD-Simulation einer vollgefüllten Rohrströmung, mit einer Einflussgeschwindigkeit von  $\bar{v}_{in} = 3 \text{ m/s}$  und einem Rohrdurchmesser von 1 m. Das Rohr besitzt eine horizontale  $90^\circ$  Krümmung, wobei die dazugehörigen Strömungsprofile nach dem Krümmer für die Entfernungen 1 m, 2 m, ..., 7 m entlang der vertikalen Achse in Abb. A.1 dargestellt sind. Werden zyklisch 5, 10, 15, ..., 100 Reflektoren entlang dieser vertikalen Achse gleichverteilt, deren Geschwindigkeit je nach Position aus dem Strömungsprofil entnommen und die Empfangspegel im Signal als normalverteilt ( $\mu = 500 \text{ mV}$ ,  $\sigma = 200 \text{ mV}$ ) angenommen, so lassen sich unter Verwendung der Kreuzkorrelationsfunktion die Empfangssignale nach unterschiedlichen  $t_{PRI}$  auswerten. Die Messzonen wurden zudem mit 10 cm vorgegeben, der Einstrahlwinkel mit  $\beta = 45^\circ$  definiert, der Sensor nach dem Krümmer bei 7 m positioniert und das Empfangssignal mit  $f_s = 10 \text{ MHz}$  abgetastet. In Abb. A.2 sind die relativen Messfehler  $\left(\frac{\bar{v}_{in} - \bar{v}_{KKF}}{\bar{v}_{in}}\right)$  für unterschiedliche Reflektordichten verdeutlicht, wobei die gestrichelte rote Linie die obere und untere Geschwindigkeitsauflösung mit

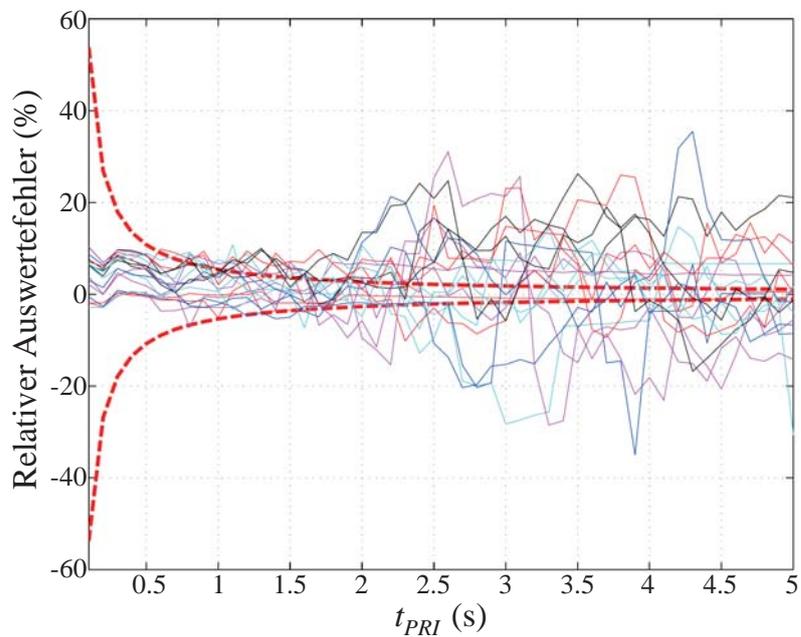
$$\Delta v = \frac{c_w}{f_s t_{PRI}}, \tag{A.1}$$

des Ausgangsprofils beschreibt.



**Abb. A.1:** Vertikale Geschwindigkeitsprofile eines L-förmigen Rohres bei unterschiedlichen Entfernungen nach der Krümmung mit Position 0 als Rohrzentrum.

Allen Kurven ist gemein, dass ab einer  $t_{PRI}=2$  ms die Auswertefehler aufgrund der Dekorrelation der Empfangssignale ansteigen.



**Abb. A.2:** Relativer Auswertefehler  $\left(\frac{\bar{v}_{in} - \bar{v}_{KKE}}{\bar{v}_{in}}\right)$  des Kreuzkorrelationsverfahrens als Funktion des Pulswiederholintervalls bei unterschiedlicher Reflektoranzahl. Die Anzahl ist in 5, 10, 15, ..., 100 Reflektoren gestaffelt und durch entsprechende Farbkennlinien gekennzeichnet.

## A.2 Navier-Stokes Gleichung

Die ausführliche Schreibweise der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung entspricht in:

x-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_{ist,x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,x}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

y-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_{ist,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,y}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

und z-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_{ist,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{ist,z}}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

wobei in Gl. (2.11) der Reibungsterm mit  $\Delta \mathbf{v}_{ist}$  zusammengefasst wird [Lj11]. In [Lec09] wird ein integrativer Lösungsansatz der Navier-Stokes-Gleichungen durch Diskretisierung behandelt. Im Vergleich hierzu wird der Reibungsterm bei der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichung ( $\varrho_0 \neq const$ ) mithilfe der reibungsbehafteten Normal- und Schubspannung  $\tau$  in alle drei Raumrichtungen beschrieben:

x-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 \tau_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

und z-Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial t} + \varrho_0 v_{ist,x} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial x} + \varrho_0 v_{ist,y} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial y} + \varrho_0 v_{ist,z} \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} = \\ - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho_0 \mathbf{g} + \eta \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten  $v_{ist,x}$ ,  $v_{ist,y}$ ,  $v_{ist,z}$  und den Spannungen lässt sich bei sog. Newton'schen Fluiden über die Stokes'schen Beziehungen definieren [Lec09, Spu96]:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{2}{3}\eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} \right) + 2\eta \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= -\frac{2}{3}\eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} \right) + 2\eta \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= -\frac{2}{3}\eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} \right) + 2\eta \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial y} \right) = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,x}}{\partial z} + \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial x} \right) = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \eta \cdot \left( \frac{\partial v_{ist,z}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ist,y}}{\partial z} \right) = \tau_{zy}. \end{aligned}$$

### A.3 Iterationsroutine zur Reflexionspunktbestimmung

In der Iterationsroutine definiert die Laufvariable  $k$  die Reflektornummer entlang der Strömungslinie, wobei diese Variable vor Iterationsstart mit einer beliebigen Reflektornummer „offset“ initialisiert werden kann. Zusätzlich wird die Hilfsvariable „dummy“ eingeführt, welche die verbleibende Zeitspanne formuliert, die ein Reflektor auf der Strömungslinie bis zur Reflexion zurücklegen muss. Bekannt ist zudem, dass sowohl die Reflektorpositionen auf der Strömungslinie  $\mathbf{r}_s$  als auch das Sendesignal zeitsynchron im Intervall  $\Delta t_{sim}$  vorliegen. Um nun alle Reflexionspunkte  $\mathcal{P}_R(k = 1 : K)$  zu erhalten, muss die Iterationsroutine über das komplette Sendesignal bzw. für jeden Zeitpunkt  $k$  erneut durchgeführt werden.

---

1	$m = 0;$	
2	$k = offset;$	Startpkt. festlegen denn $\mathbf{r}_s(k) = \mathcal{P}_S(k)$
3	$while(1)$	
4	$\mathbf{d} = \mathbf{r}_s(k) - \mathbf{r}_s(l + 1);$	Berechnung des Abstandsvektors
5	$\tau = Schalllaufzeit(\mathbf{r}_s(k), \mathbf{v}_{ist}(k), \mathbf{d});$	Schalllaufzeitberechnung nach Gl. 2.14
6	$dummy = \tau - (m \cdot \Delta t_{sim})$	Verbleibende Zeitspanne
7	$if(dummy < \Delta t_{sim})$	Abbruchbedingung
8	$\mathbf{r}_{ref} = \mathbf{r}_s(k) + dummy \cdot \mathbf{v}_{ist}(k);$	Gesuchter Reflexionspunkt $\mathcal{P}_R(k)$
9	$break;$	Beenden der Iteration
10	$end$	
11	$m = m + 1;$	Erhöhen der Reflektornummer
12	$end$	

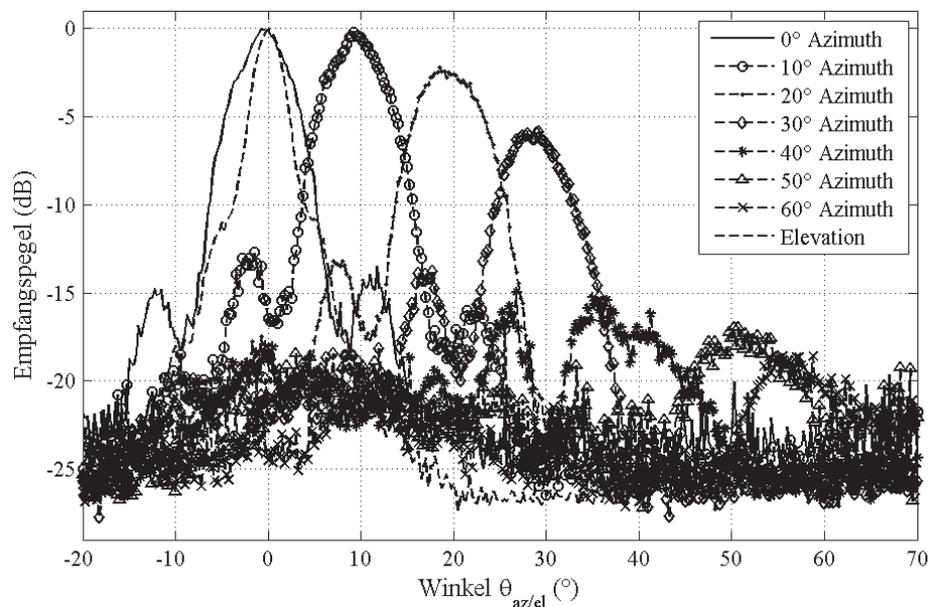
---

**Tabelle A.1:** Iterationsroutine zur Reflexionspunktberechnung entlang einer Strömungslinie.

## A.4 Messergebnisse: Phased-Array-Sensor

Zur Bewertung der empfangenen und gesendeten Richtcharakteristik des Phased-Array-Strahlers werden am Prüfstand in Abb. 2.14 (links) Schallintensitätsmessungen durchgeführt. Nach phasenselektivem Aussenden von kurzen Pulsen (10 Perioden) erfolgt der Empfang bzw. die Schallreflexion im Abstand von 200 mm zum Sensor. Anschließend wird die Sensorposition um einen weiteren Schritt in Azimuth- oder Elevationsrichtung weitergeschwenkt und eine weitere Messung durchgeführt. Als Schallreflektor dient ein senkrecht gespannter Draht mit dem Durchmesser 0,5 mm.

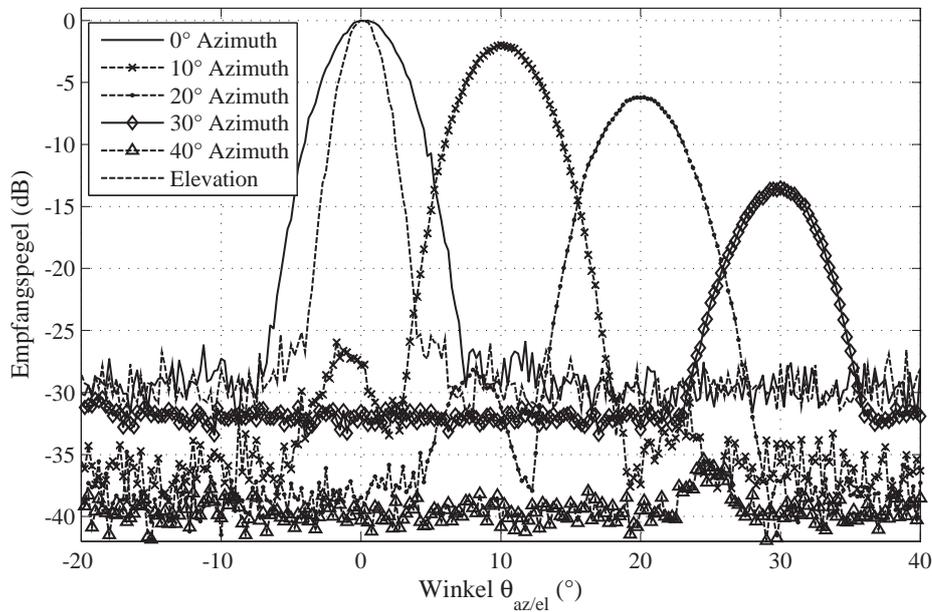
Bei der Vermessung der ausgestrahlten Richtcharakteristik in Abb. A.3 dient ein Hydrophon mit nachgeschaltetem Verstärker als Empfänger. Der Maximalwert des absoluten Empfangssignals ist Messwert für die gegebene Sensorposition.



**Abb. A.3:** Ausgestrahlte Richtcharakteristik in Azimuthrichtung zum Phased-Array-Sensorprototyp.

Die überlagerte Sende- und Empfangscharakteristik des Phased-Array-Sensors verdeutlicht Abb. A.4. Dabei wird der ausgestrahlte Puls am Draht reflektiert und anschließend wieder empfangen. Der Maximalwert des absoluten Empfangssignals dient auch hier wieder als Messwert.

Wesentliche Merkmale der reflektierten Richtcharakteristik sind in Tab. A.2 zusammengefasst.



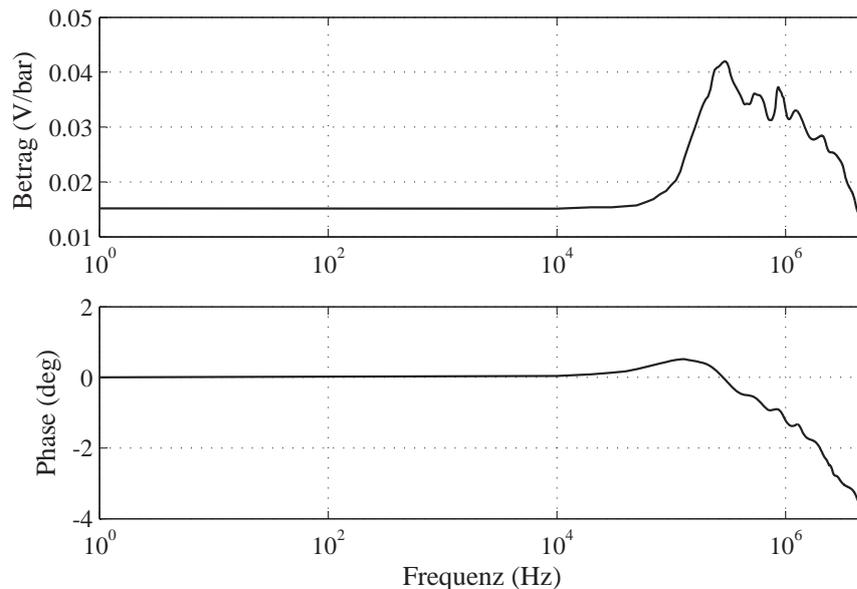
**Abb. A.4:** Reflektierte Richtcharakteristik und damit überlagerte Sende- und Empfangscharakteristik in Azimuthorichtung zum Phased-Array-Sensorprototyp.

Eigenschaften	$\theta_{el} = 0^\circ$	$\theta_{az} = 0^\circ$	$\theta_{az} = 10^\circ$	$\theta_{az} = 20^\circ$	$\theta_{az} = 30^\circ$	$\theta_{az} = 40^\circ$
Intensitätsabnahme	0 dB	0 dB	-2 dB	-6,2 dB	-13,5 dB	--
Haupt- zu Nebenmaximum	--	--	-24 dB	-22 dB	--	--
Halbwertsbreite	2,75°	5°	5,25°	5,5°	5,25°	--
Halbwertswinkel	1,5°	2,5°	2,75°	2,75°	2,75°	--

**Tabelle A.2:** Zusammenfassung von Messergebnissen zur empfangenen Richtcharakteristik des Phased-Array-Prototypensensors. Die halben Halbwertsbreiten  $\theta_{el,3dB}$  bzw.  $\theta_{az,3dB}$  entsprechen in erster Näherung den jeweiligen Halbwerts winkeln.

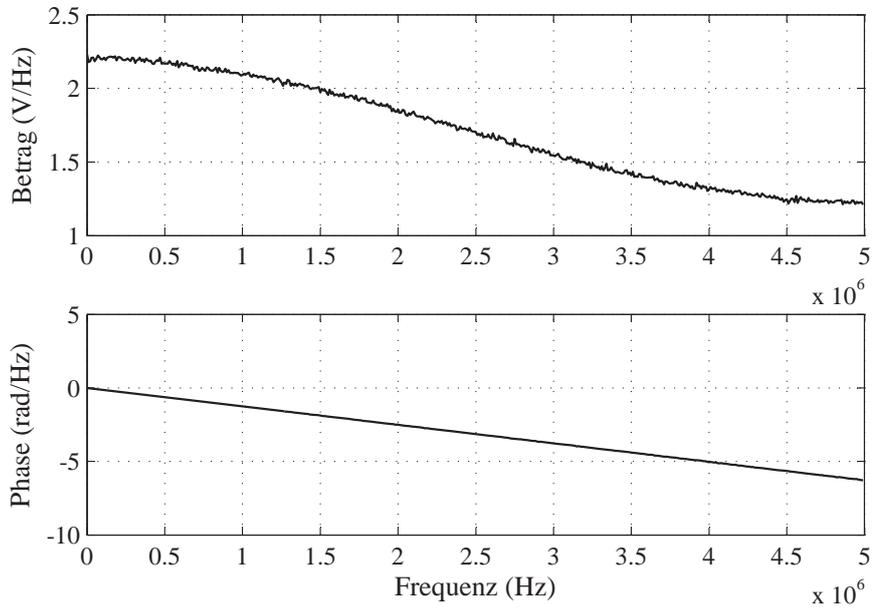
## A.5 Frequenzgänge zur Bestimmung der Piezo-Übertragungsfunktion

In Abb. A.5 ist das Übertragungsverhalten des PVDF-Hydrophons (RP 10l) der Firma RP. ACOUSTICS aus dem Datenblatt visualisiert.

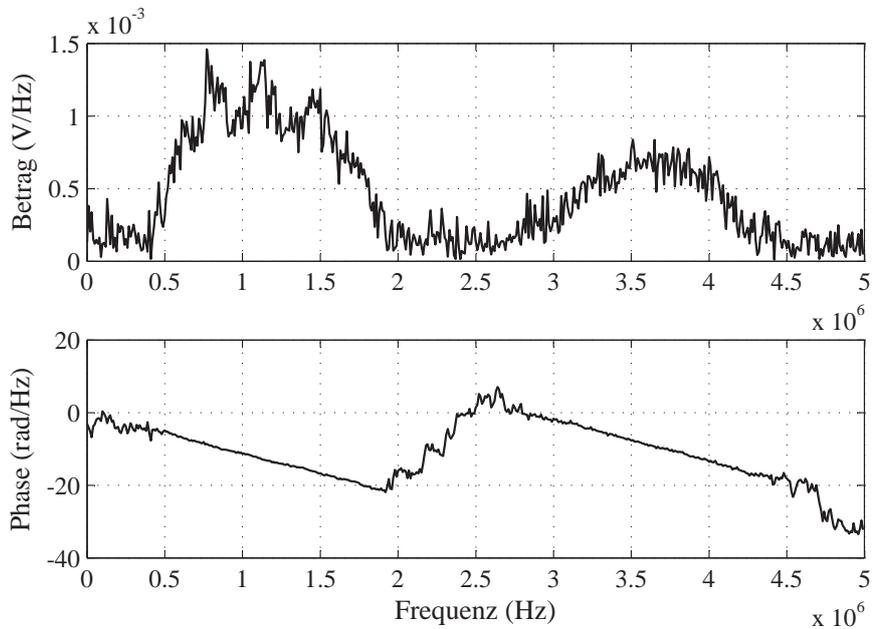


**Abb. A.5:** Frequenzgang des PVDF-Hydrophon.

Zur Bestimmung des Schalldrucks am Piezo-Kristall muss zunächst der Frequenzgang der kompletten Messkette ( $H_{Ges}(f)$ ) näher analysiert werden. Dies erfolgt durch das Einspeisen eines breitbandigen Zeitsignals, in Form eines Rechteckimpulses der Dauer 100 ns und der Amplitude 1,75 V, sowie dem Aufzeichnen der resultierenden Impulsantwort der Messkette. Werden diese Ein- und Ausgangssignale der Messkette mit einer Frequenz von 10 MHz und einer Messdauer von  $100\mu s$  im Zeitbereich abgetastet, entspricht dies im Frequenzbereich einer Auflösung von 10 kHz und einem Spektrum von  $\pm 5$  MHz. Die Fourier-Transformierte des rechteckimpulsförmigen Eingangssignals beschreibt Abb. A.6 und die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals der Messkette Abb. A.7.

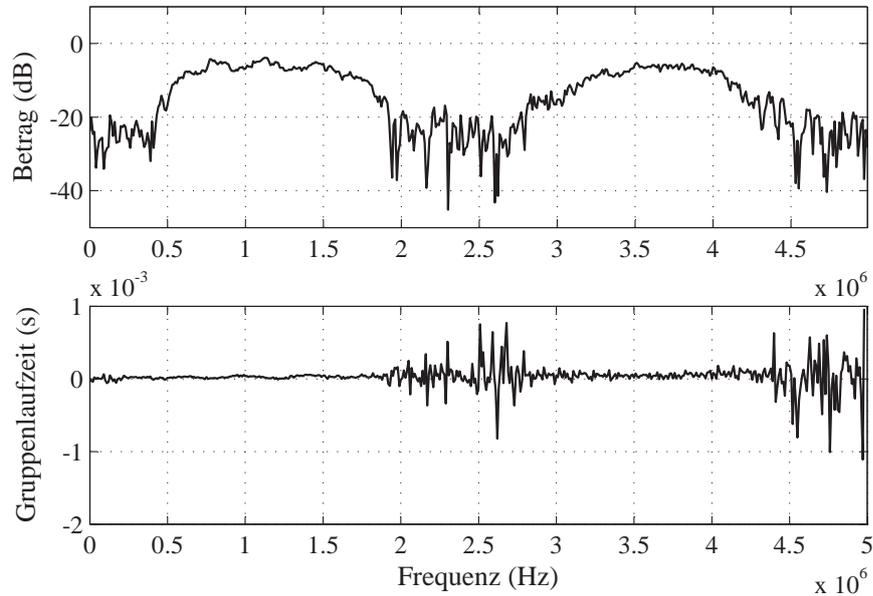


**Abb. A.6:** *Fourier-Transformierte des Eingangssignals am Piezo-Kristall; oben: Betrag des Frequenzgangs, unten: Phase des Frequenzgangs.*



**Abb. A.7:** *Fourier-Transformierte des Ausgangssignals des Gesamtsystems; oben: Betrag des Frequenzgangs, unten: Phase des Frequenzgangs.*

Für die Aussage über den Frequenzgang der kompletten Messkette muss der Quotient aus Ausgangs- und Eingangsspektrum gebildet werden. Das Ergebnis kann in Abb. A.8 abgelesen werden.



**Abb. A.8:** Übertragungsverhalten des Gesamtsystems mit Piezo, Hydrophon und Verstärker; oben: Amplitudenverstärkung, unten: Gruppenlaufzeit.

## A.6 Herleitung Wiener-Hopf-Gleichung

Ausgangssituation in einem stochastischen Prozess ist die Gleichung  $e(k) = p_0(k) - \hat{p}_0(k)$  der Dauer  $k = 0..(M-1)$ . Dabei resultiert der Schätzwert  $\hat{p}_0(k)$  aus dem Skalarprodukt gemäß:

$$\hat{p}_0(k) = \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L). \quad (\text{A.8})$$

Die Vektoren sind definiert mit  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T$  und  $\mathbf{p}_0(k-L) = [p_0(k-L), p_0(k-L-1), \dots, p_0(k-L-N+1)]^T$ . Gesucht wird nun nach den Koeffizienten  $\mathbf{b}$ , sodass das Betragsquadrat des Fehlers  $e(k)$  minimal ist:

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N} \mathbb{E} \left[ |p_0(k) - \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)|^2 \right]. \quad (\text{A.9})$$

Durch Auflösen der quadratischen Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{E} \left[ (p_0(k) - \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L))^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ p_0^2(k) - 2\mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)p_0(k) + \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)\mathbf{p}_0^T(k-L)\mathbf{b} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ p_0^2(k) \right] - 2 \mathbb{E} \left[ \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)p_0(k) \right] + \mathbb{E} \left[ \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)\mathbf{p}_0^T(k-L)\mathbf{b} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ p_0^2(k) \right] &= \sigma_p^2(k) \\ \mathbb{E} \left[ \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)p_0(k) \right] &= \mathbb{E} \left[ p_0(k) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} b_n p_0(k-L-n) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot \mathbb{E} \left[ p_0(k)p_0(k-L-n) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot r_{pp}(-L-n) \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{r}_{pp}(-L) \\ \mathbb{E} \left[ \mathbf{b}^T \mathbf{p}_0(k-L)\mathbf{p}_0^T(k-L)\mathbf{b} \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{n=0}^{N-1} b_n p_0(k-L-n) \right) \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1} b_l p_0(k-L-l) \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} b_n b_l \mathbb{E} \left[ p_0(k-L-n)p_0(k-L-l) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} b_n b_l r_{pp}(n-l) \\ &= \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b}, \end{aligned}$$

sodass die Funktion wie folgt zu interpretieren ist:

$$f(k) = \sigma_p^2(k) - 2\mathbf{b}^T \mathbf{r}_{pp}(-L) + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b}. \quad (\text{A.11})$$

Bei der Korrelation ergeben sich die Indizes in diesem Fall aus der Differenz beider Variablen z.B.  $p_0(k-L-1) \cdot p_0(k-L) = r_{pp}(k-L-1-(k-L)) = r_{pp}(-1)$ . Darüber hinaus gilt bei reellwertigen Signalen und einer symmetrischen Autokorrelationsmatrix  $r_{pp}(-1) = r_{pp}(1)$ .

Um nun das globale Minimum des Fehlers finden zu können, kann die Funktion partiell nach jeder Koordinate  $b_i$  abgeleitet werden. Nach der Produktregel gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial b_i}(k) = \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial b_i} \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{pp} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial b_i} - 2 \frac{\partial \mathbf{b}^T}{\partial b_i} \mathbf{r}_{pp}(-L). \quad (\text{A.12})$$

Da  $\partial \mathbf{b} / \partial b_i = \mathbf{e}_i = \left[ 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0 \right]$  ist, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b_i}(k) &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{e}_i - 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{r}_{pp}(-L) \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} + \mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} - 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{r}_{pp}(-L) \\ &= 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} - 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{r}_{pp}(-L). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Da  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{pp}$  die  $i$ -te Zeile der Matrix  $\mathbf{R}_{pp}$  ist, folgt:

$$\nabla f(k) = 2\mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} + 2\mathbf{r}_{pp}(-L). \quad (\text{A.14})$$

Damit gilt:

$$\nabla f(k) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{R}_{pp} \mathbf{b} = \mathbf{r}_{pp}(-L). \quad (\text{A.15})$$

Dieses quadratisch, lineare Gleichungssystem wird Normalgleichungssystem genannt. Weist die Korrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{pp}$  eine symmetrische Toeplitz-Form auf, also eine symmetrische Bandstruktur mit unabhängigen Spalten  $r_j$ , kann die  $(N, N)$  Matrix  $\mathbf{R}_{pp}$  invertiert werden. Damit ist eine eindeutige Lösung durch die Gleichung

$$\mathbf{b}_{opt} = \mathbf{R}_{pp}^{-1} \mathbf{r}_{pp}(-L) \quad (\text{A.16})$$

gegeben.

## A.7 Levinson-Durbin Rekursion

Der Levinson-Durbin-Algorithmus wird im Allgemeinen zur Lösung der stochastischen Normalgleichung der Form  $\mathbf{R}_{pp} \cdot \mathbf{b}_{opt} = \mathbf{r}_{pp}(-L)$  angewendet. Dabei werden nach jeder schrittweisen Erhöhung der Prädiktorordnung  $m$  neue Koeffizienten berechnet, bis die aktuelle Ordnung  $m$  mit der gewünschten Filterordnung  $N$  übereinstimmt. Im Gegensatz zur Matrixinversion wird nun auf diesem Weg das Modell ( $m$ )-ter Ordnung rekursiv aus dem Modell ( $m - 1$ )-ter Ordnung gelöst. Im Weiteren zeichnet sich der Algorithmus durch eine Vorwärts- und eine Rückwärtsprädiktion aus, sodass eine erweiterte Notation notwendig wird. Die nachstehende Herleitung findet in Anlehnung der Literatur [HS04] statt.

Für den einstufigen Vorwärtsprädiktor gilt somit:

$$\mathbf{R}_{pp}^{(m)} \mathbf{f} \mathbf{b}_{opt}^{(m)} = \mathbf{r}_{pp}^{(m)}(-1). \quad (\text{A.17})$$

Der Exponent  $m$  beschreibt die Ordnung des entsprechenden Prädiktors und das Argument  $(-1)$  kennzeichnet das erste Vektorelement, sodass der Korrelationsvektor wie folgt zu interpretieren ist:

$$\mathbf{r}_{pp}^{(m)}(-1) = [r_{pp}(-1), r_{pp}(-2), \dots, r_{pp}(-m)]^T. \quad (\text{A.18})$$

Die Notation des  $m$ -stufigen Rückwärtsprädiktors ( $L = -m$ ) stellt sich wie folgt dar:

$$\mathbf{R}_{pp}^{(m)} \mathbf{b} \mathbf{b}_{opt}^{(m)} = \mathbf{r}_{pp}^{(m)}(m), \quad (\text{A.19})$$

mit

$$\mathbf{r}_{pp}^{(m)}(m) = [r_{pp}(m), r_{pp}(m-1), \dots, r_{pp}(1)]^T. \quad (\text{A.20})$$

Die Autokorrelationsmatrix  $\mathbf{R}_{pp}^{(m)}$  ist bei beiden Verfahren identisch und aufgrund der Symmetrie bei komplexen Signalen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{pp}(m) &= [r_{pp}(m), r_{pp}(m-1), \dots, r_{pp}(1)]^T \\ &= [r_{pp}^*(-m), r_{pp}^*(-(m-1)), \dots, r_{pp}^*(-1)]^T = \mathbf{r}_{pp}^*(-m). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Ersetzt man nun  $\mathbf{r}_{pp}(m)$  in Gl. A.19 durch  $\mathbf{r}_{pp}^*(-m)$  und vergleicht diese mit Gl. A.17, wird folgender Zusammenhang deutlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \mathbf{b}_{opt}^{(m)} &= [\mathbf{f} b_{opt}^*(m-1), \mathbf{f} b_{opt}^*(m-2), \dots, \mathbf{f} b_{opt}^*(-1)]^T \\ &= \mathbf{f} \mathbf{b}_{opt, m-1-l}^{(m)*} \quad \text{für } l = 0, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Im Wesentlichen kann nun die Lösung für die Ordnung  $m$  aus der Lösung der Ordnung  $m - 1$  gefunden werden. Hierzu wird die letzte Zeile und Reihe der Autokorrelationsmatrix  $m$ -ter Ordnung separiert und in eine bestimmte Blockstruktur gebracht:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{pp}^{(m)} &= \left[ \begin{array}{cccc|c} r_{pp}(0) & r_{pp}(1) & \cdots & r_{pp}(m-2) & r_{pp}(m-1) \\ r_{pp}^*(1) & r_{pp}(0) & \cdots & r_{pp}(m-1) & r_{pp}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{pp}^*(m-2) & r_{pp}^*(N-3) & \cdots & r_{pp}(0) & r_{pp}(1) \\ \text{---} & \text{---} & \cdots & \text{---} & \text{---} \\ r_{pp}^*(m-1) & r_{pp}^*(N-2) & \cdots & r_{pp}^*(1) & r_{pp}(0) \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{pp}^{(m-1)} & \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(m-1) \\ \text{---} & \text{---} \\ \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) & r_{pp}(0) \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Wird die Aufspaltung der Koeffizienten beim Vorwärtsprädiktor nach Gl. A.17 weiterverfolgt, resultieren die Vektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{opt}^{(m)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt,0}^{(m)} \\ \mathbf{f}_{opt,1}^{(m)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{opt,m-2}^{(m)} \\ \text{---} \\ \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} \\ \text{---} \\ \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix} \hat{=} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt,0:m-2}^{(m)} \\ \text{---} \\ \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{r}_{pp}^{(m)}(-1) &= \begin{bmatrix} r_{pp}(-1) \\ r_{pp}(-2) \\ \vdots \\ r_{pp}(1-m) \\ \text{---} \\ r_{pp}(-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(-1) \\ \text{---} \\ r_{pp}(-m) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{A.24}$$

sodass die Normalengleichung wie folgt geschrieben werden kann:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{pp}^{(m-1)} & \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(m-1) \\ \text{---} & \text{---} \\ \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) & r_{pp}(0) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} \\ \text{---} \\ \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(-1) \\ \text{---} \\ r_{pp}(-m) \end{bmatrix}. \tag{A.25}$$

Diese Normalengleichung ist nun der Ausgangspunkt zur Herleitung der Levinson-Durbin-Rekursionsgleichungen. Das Gleichungssystem spaltet sich im Wesentlichen in eine Gleichung zur Bestimmung des neuen Filterkoeffizienten ( $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$ ) und eine darauf aufbauende Gleichung zur Aktualisierung der alten Filterkoeffizienten ( $\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}$ ) auf. Wobei wiederum der neue Koeffizient  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$  rekursiv aus einem System der Ordnung  $m-1$  gefunden wird.

Die Aktualisierungsgleichung wird durch die oberen  $m - 1$  Reihen der Autokorrelationsmatrix bzw. des Autokorrelationsvektors der Normalengleichung in A.25 definiert. Somit folgt

$$\mathbf{R}_{pp}^{(m-1)} \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} = \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(-1) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(m-1) \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \quad (\text{A.26})$$

und nach Umformen:

$$\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} = \mathbf{R}_{pp}^{(m-1)-1} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(-1) - \mathbf{R}_{pp}^{(m-1)-1} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)}(m-1) \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}. \quad (\text{A.27})$$

Da der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung mit der Ordnung  $m - 1$  durch  $\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}$  ersetzbar ist (vgl. A.17) und die ersten beiden Koeffizienten im zweiten Term durch  $\mathbf{b}_{opt}^{(m-1)}$  (vgl. A.19) gilt:

$$\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} = \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} - \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)} \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \hat{=} \mathbf{f}_{opt,0:m-2}^{(m)}. \quad (\text{A.28})$$

Mithilfe der Variablen  $\mathbf{b}_{opt}^{(m-1)}$  und  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$  lassen sich nun die Filterkoeffizienten  $\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}$  aus dem vorhergegangenen Modell der Ordnung  $m - 1$  auf  $m$  aktualisieren. Diese Gleichung wird Levinson-Durbin-Rekursion genannt. [Dur60] [Lev47]

In der Gleichung wird jedoch deutlich, dass die Aktualisierung nur auf Grundlage des neuen Koeffizientens  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$  berechnet werden kann. Zur Ermittlung dieses Koeffizienten wird die unterste Reihe aus der Normalengleichung in A.25 entnommen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) & | & r_{pp}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} \\ - \\ - \\ \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix} = r_{pp}(-m) \quad (\text{A.29})$$

und nach  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$  umgeformt:

$$\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} = \frac{1}{r_{pp}(0)} \left[ r_{pp}(-m) - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} \end{bmatrix} \right]. \quad (\text{A.30})$$

Durch zusätzliches Einsetzen der Gl. A.28 für die Variable  $\mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}$  und anschließendes Auflösen nach dem Koeffizienten  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$ , folgt:

$$\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} = \frac{r_{pp}(-m) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}}{r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)}}. \quad (\text{A.31})$$

Der Koeffizient  $\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}$  wird in der Literatur Reflexionskoeffizient oder auch PARCOR-Koeffizient (PARTIAL CORrelation-Koeffizient) genannt. [GH85]

Zur Vervollständigung der Rekursion wird die Initialisierung noch näher betrachtet.

Hierzu wird ohne weitere Beschränkung des Ergebnisses mit

$$r_{pp}(0) = 1 \quad (\text{A.32})$$

die Gleichung normiert. Darüber hinaus gilt bei  $m = 1$ :

$$\mathbf{f}b_{opt,0}^{(1)} = \mathbf{R}_{pp}^{(1)-1} r_{pp}(-1) = \frac{r_{pp}(-1)}{r_{pp}(0)}. \quad (\text{A.33})$$

In einem letzten Schritt müssen die Filterkoeffizienten der linearen Prädiktion um den Fehler bzw. die Quadratwurzel des MSE  $\mathbf{f}b_{opt}^{(m)} = \mathbf{f}b_{opt}^{(m)} / \sqrt{\mathbb{E}[|e^m(k)|^2]_{min}}$  normiert werden.

Um den MSE  $\mathbb{E}[|e^m(k)|^2]_{min}$  rekursiv bestimmen zu können, muss für diese Problemstellung zunächst die Gl. A.9 auf komplexe Signale angepasst werden:

$$\mathbb{E}[|e^m(k)|^2]_{min} = r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m)H}(-1) \mathbf{f}b_{opt}^{(m)}. \quad (\text{A.34})$$

Wird nun der Autokorrelationsvektor in einen Term der Ordnung  $m - 1$  und einen der Ordnung  $m$  zerlegt

$$\mathbb{E}[|e^m(k)|^2]_{min} = r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(-1) \mathbf{f}b_{opt,0:m-2}^{(m)} - r_{pp}^*(-k) \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \quad (\text{A.35})$$

und mithilfe der Aktualisierungs- bzw. Rekursions-Gleichung A.28 erweitert, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|e^m(k)|^2]_{min} &= r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(-1) \\ &\quad \left[ \mathbf{f}b_{opt}^{(m-1)} - \mathbf{b}b_{opt}^{(m-1)} \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \right] \\ &\quad - r_{pp}^*(-k) \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \\ &= r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(-1) \mathbf{f}b_{opt}^{(m-1)} \\ &\quad + \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(-1) \mathbf{b}b_{opt}^{(m-1)} \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \\ &\quad - r_{pp}^*(-k) \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \\ &= r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(-1) \mathbf{f}b_{opt}^{(m-1)} \\ &\quad + \left[ \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(k-1) \mathbf{f}b_{opt}^{(m-1)} - r_{pp}^*(-k) \right] \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Zu erwähnen ist, dass aufgrund der oben bereits beschriebenen Zusammenhänge in der letzten Zeile die Koeffizienten der Rückwärtsprädiktion und der Autokorrelationsvektor in eine Vorwärtsprädiktion geändert wurden. In einem letzten Schritt lassen sich nun die Variablen auf Basis der Gl. A.34 und A.31 wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|e^m(k)|^2]_{\min} &= \mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} \\
&\quad + \left[ \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(k-1) \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)} - r_{pp}^*(-k) \right] \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \\
&= \mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} \\
&\quad - \left[ r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(k-1) \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)} \right] \left( \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \right)^2 \\
&= \mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} - \mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} \left( \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \right)^2 \\
&= \mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} \left[ 1 - \left( \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Die in Gl. A.28 und A.30 erläuterten Zusammenhängen von Rückwärts- und Vorwärtsprädiktion führen zu der Gleichung in Zeile vier. Mit Gl. A.34 erschließt sich Zeile fünf. Bei der Initialisierung wird die Fehlerleistung mit  $\mathbb{E} [|e^{m-1}(k)|^2]_{\min} = r_{pp}(0)$  angegeben.

Das Lösen der Rekursion lässt sich nach [HS04] und [Wen05] in wenige Schritte zusammenfassen. Hierbei ist die Ordnung der nachstehenden Rekursion mit der Variablen  $m$  definiert.

### Initialisierung:

- Belegen des Autokorrelationsvektors an der Stelle  $\tau = 0$  mit  $r_{pp}(0) = 1$  und die Fehlerleistung mit  $\mathbb{E} [e^2(k)]_{\min} = r_{pp}(0)$ .
- Ermittlung der Koeffizienten des Vorwärtsprädiktors nach Gl. A.33 :

$$\mathbf{f}_{opt,0}^{(1)} = \frac{r_{pp}(-1)}{r_{pp}(0)}.$$

- Bestimmung der Filterkoeffizienten des Rückwärtsprädiktors nach Gl. A.22 :

$$\mathbf{b}_{opt,0}^{(1)} = \mathbf{f}_{opt,0}^{(1)*}.$$

### Rekursion:

- Berechnung des Reflexionskoeffizienten nach Gl. A.31:

$$\mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)} = \frac{r_{pp}(-m) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) \mathbf{f}_{opt}^{(m-1)}}{r_{pp}(0) - \mathbf{r}_{pp}^{(m-1)H}(m-1) \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)}}.$$

- Aktualisieren der Filterkoeffizienten für die Vorwärtsprädiktion nach Gl. A.28:

$$\mathbf{b}_{opt,0:m-2}^{(m)} = \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)} - \mathbf{b}_{opt}^{(m-1)} \mathbf{f}_{opt,m-1}^{(m)}.$$

- Zusammensetzen des neu berechneten Reflexions- und der aktualisierten Filterkoeffizienten:

$$\mathbf{f}b_{opt}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}b_{opt,0:m-2}^{(m)} \\ \text{---} \\ \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

- Zuweisung der Filterkoeffizienten für die Rückwärtsprädiktion nach Gl. A.22 :

$$\mathbf{b}b_{opt,l}^{(m)} = \mathbf{f}b_{opt,m-1-l}^{(m)*} \quad \text{für } l = 0, \dots, m-1.$$

- Bestimmung der Fehlerleistung nach Gl. A.37 :

$$\mathbb{E} [ |e^m(k)|^2 ]_{\min} = \mathbb{E} [ |e^{m-1}(k)|^2 ]_{\min} \left[ 1 - \left( \mathbf{f}b_{opt,m-1}^{(m)} \right)^2 \right].$$

### Abbruchbedingung/Normierung:

- Sollte der Betrag des Reflexionskoeffizienten  $> 1$  sein, ist die Rekursion abubrechen. In diesem Fall müssen die Koeffizienten des vorhergehenden Rekursionsschrittes genutzt werden.
- Sollte die Rekursion die gewünschte Filterlänge also  $m = N$  erreichen, ist die Rekursion ebenfalls abubrechen. In diesem Fall können die aktuellen Filterkoeffizienten verwendet werden.
- In einem letzten Schritt müssen die Filterkoeffizienten noch normiert werden:

$$\bar{\mathbf{f}}b_{opt}^{(m)} = \mathbf{f}b_{opt}^{(m)} / \mathbb{E} [ |e^m(k)|^2 ]_{\min}^{1/2}.$$

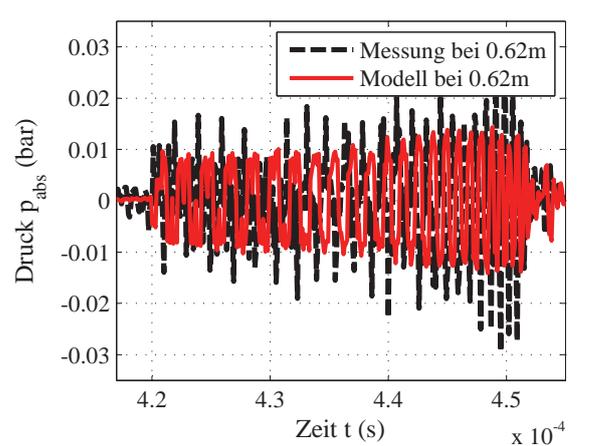
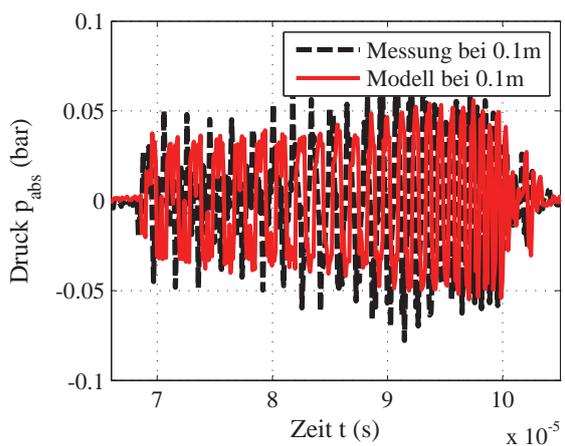
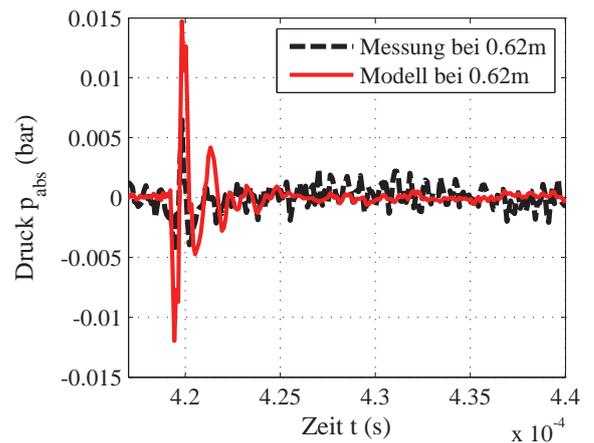
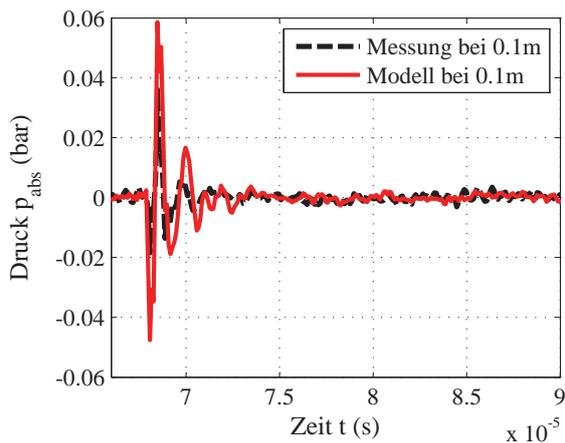
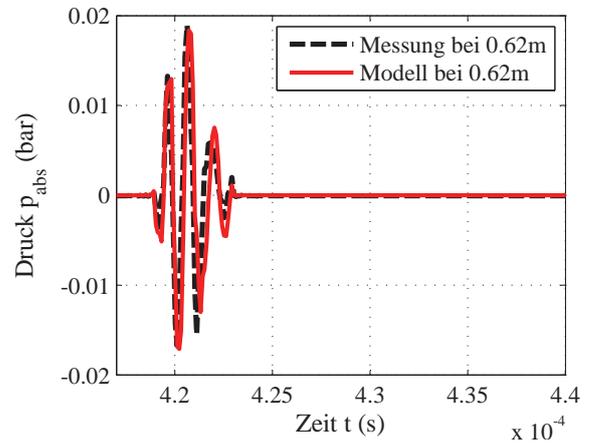
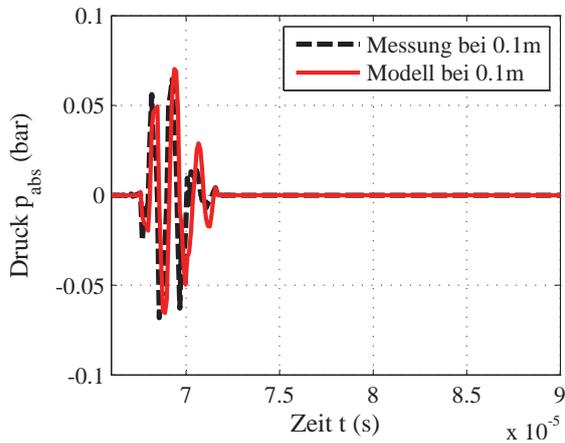
## A.8 Geschlossene Lösung zum Richtfaktor eines Einzelstrahlers

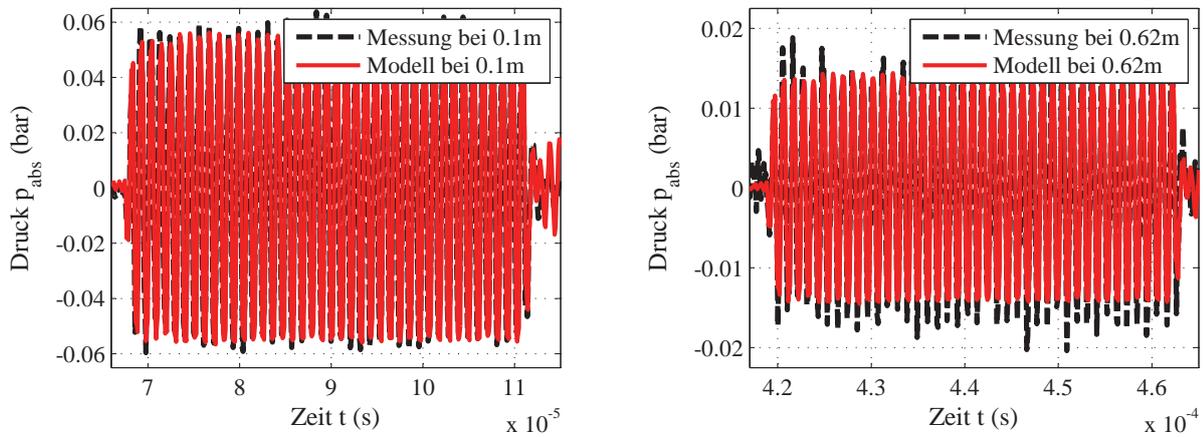
Der Richtfaktor  $\Gamma$  wird in der Regel zur Beschreibung der Richtcharakteristik angegeben. Neben dem diskretisierten Richtfaktor (vgl. 2.27) lässt sich das Abstrahlverhalten auch geschlossen über die komplette Einzelstrahlermembrane ableiten. Wird hierzu ein Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  und  $b \rightarrow 0$  für den Summationsterm in Gl. 2.24 vollzogen, sodass für die Einzelstrahlerlänge  $Nb = l$  gilt, ergibt sich der Richtfaktor entlang der Strahlerstrecke  $y$  aus:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-j \frac{\omega y}{c_w} \sin(\vartheta)} dy \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \cos\left(\frac{\omega y}{c_w} \sin(\vartheta)\right) - j \sin\left(\frac{\omega y}{c_w} \sin(\vartheta)\right) \right] dy \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\omega l}{2c_w} \sin(\vartheta)\right)}{\frac{\omega l}{2c_w} \sin(\vartheta)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin(\vartheta)\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} \sin(\vartheta)}.\end{aligned}\tag{A.38}$$

Dabei entfällt der Imaginärteil im Integral aufgrund der Symmetrie (cos-Funktion) in der Stammfunktion, sodass sich die Abstrahleigenschaft des Einzelstrahlers durch Zusammenfassen von  $a = \pi l \sin(\vartheta)/\lambda$  über eine si-Funktion  $\sin(a)/a$  charakterisieren lässt (vgl. [LSW09]).

## A.9 Vgl. gemessener und simulierter Schalldrucksignale

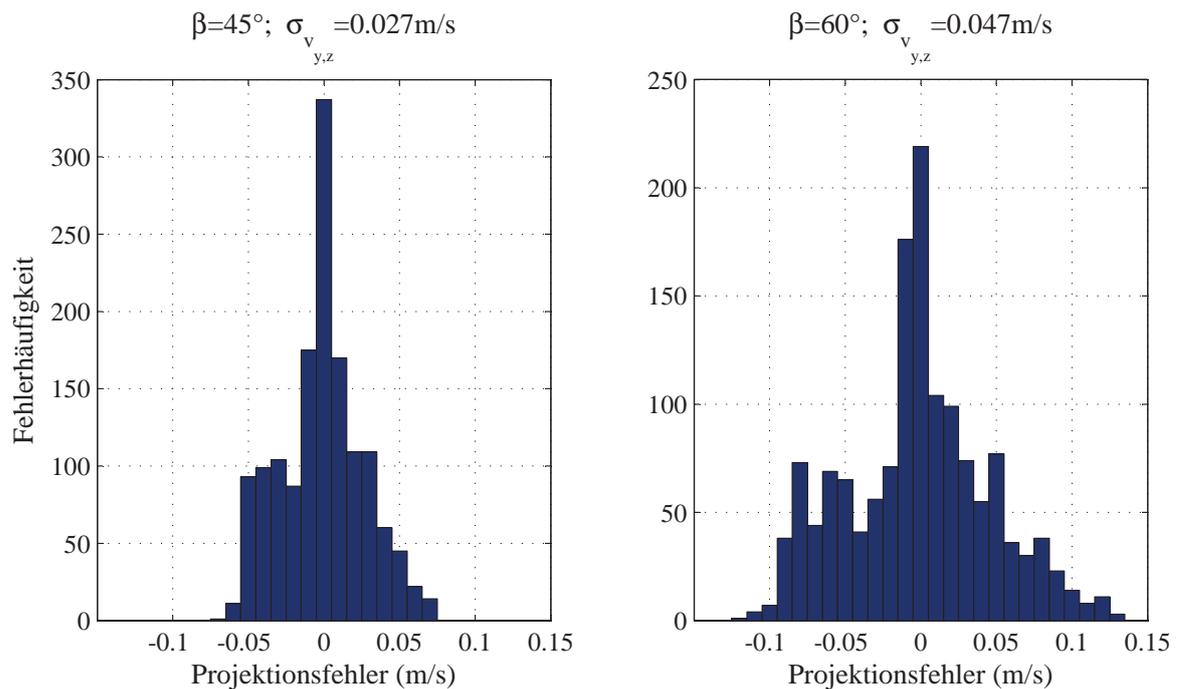




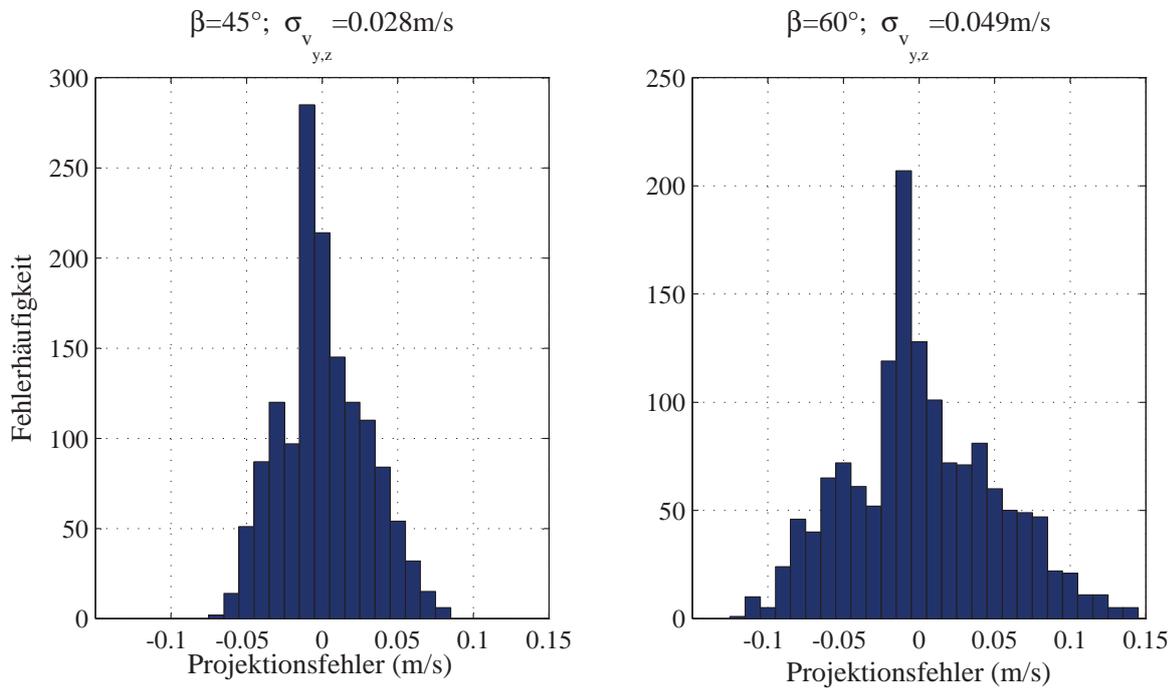
**Abb. A.9:** *Modellierte und gemessene Signale im Vergleich zueinander, bei einer Entfernung von 10 cm und 62 cm.*

## A.10 Messfehler Sekundärgeschwindigkeiten

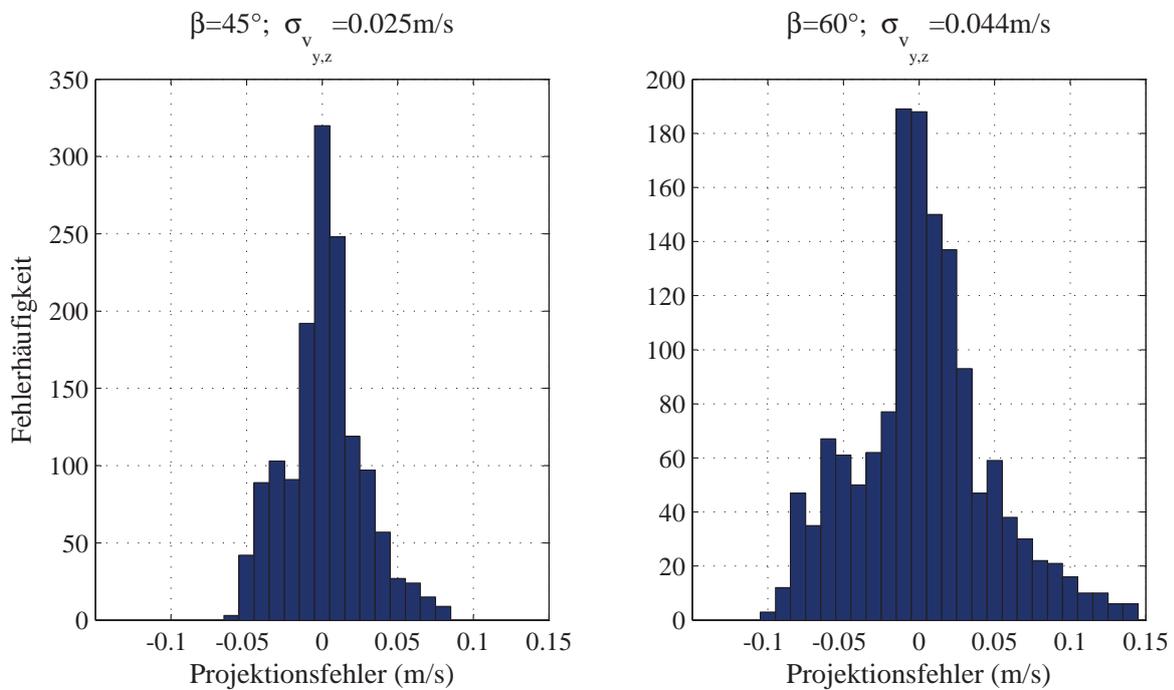
Im Nachfolgenden wird der Einfluss von Sekundärgeschwindigkeiten auf die Geschwindigkeitsprojektion untersucht. Nach Abb. 2.23 resultiert die Fehlerauswertung aus  $v_x - v_{ist,x}$  bei gegebenem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{ist}$  der Strömungssimulationen. Mit  $\sigma_{v_{y,z}}$  ist die Streuung von projizierten Messfehlern in Fließrichtung auf Basis von Sekundärgeschwindigkeiten (in  $z$  und  $y$  Richtung) einzelner Reflektoren definiert.



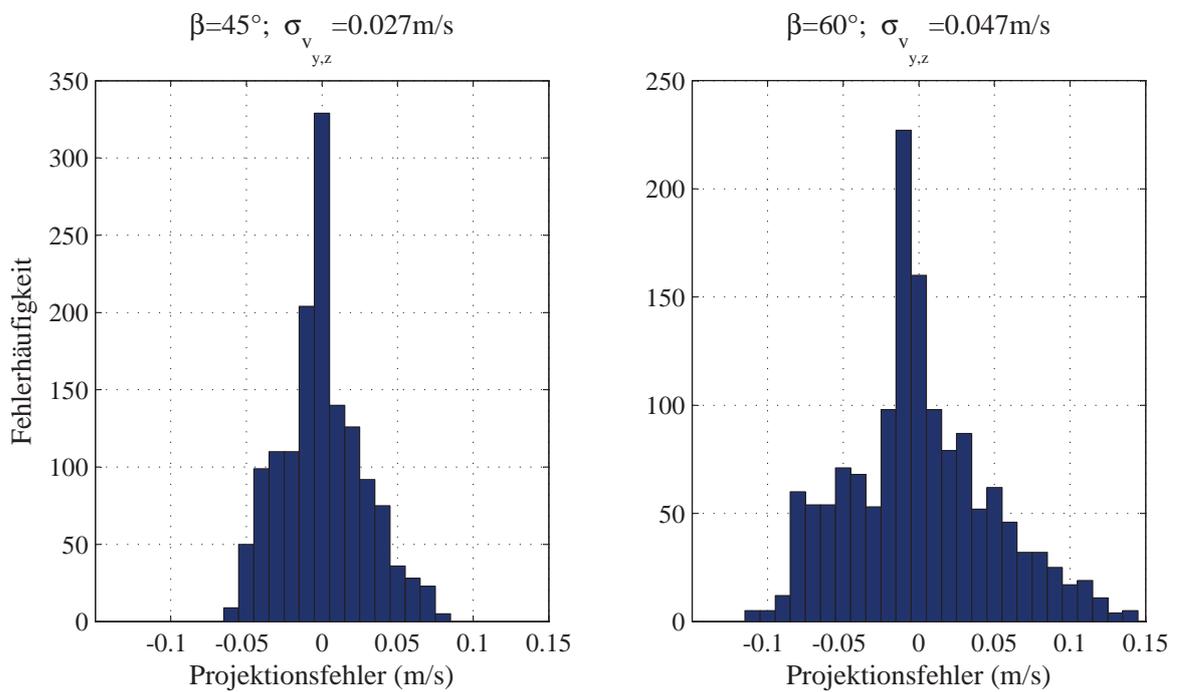
**Abb. A.10:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärgeschwindigkeiten einer vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in}=0,5\text{ m/s}$ .



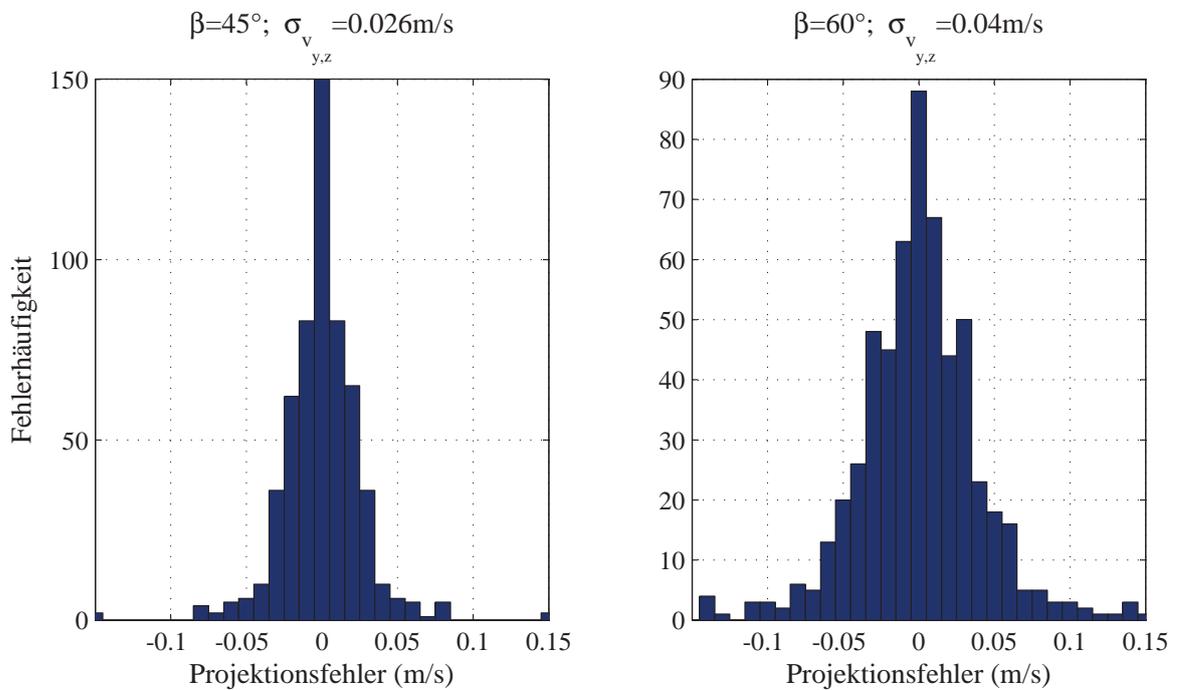
**Abb. A.11:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärge-  
schwindigkeiten einer vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in} = 1\text{ m/s}$ .



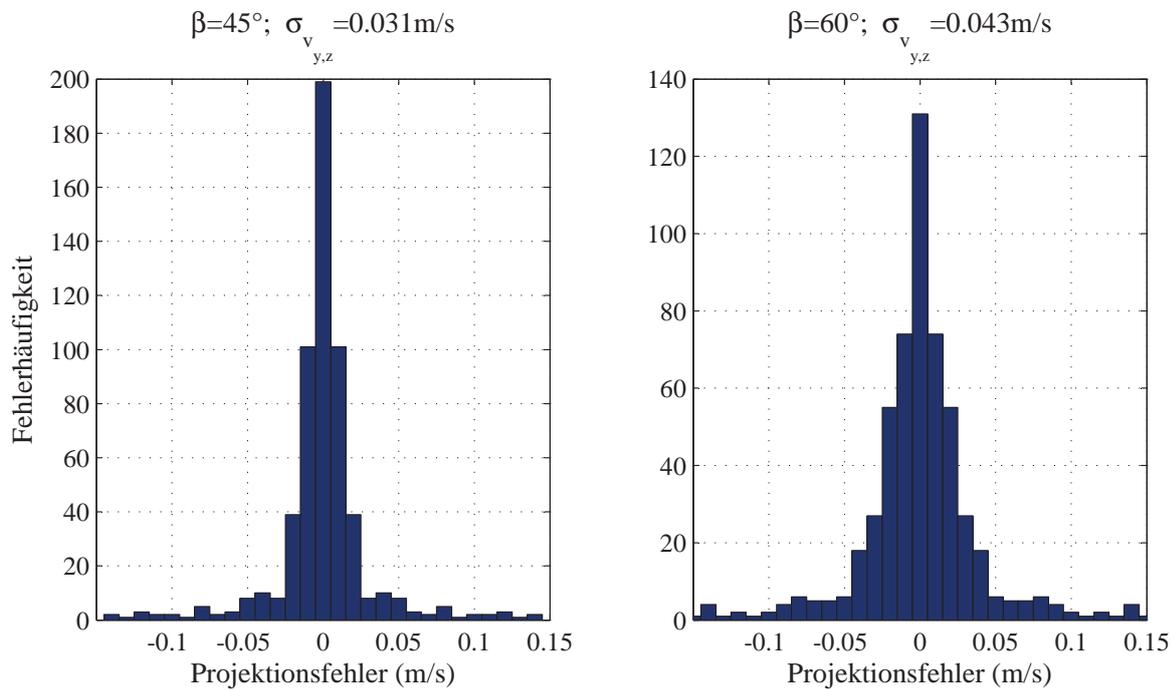
**Abb. A.12:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärge-  
schwindigkeiten einer vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in} = 1,5\text{ m/s}$ .



**Abb. A.13:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärgeschwindigkeiten einer vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in} = 2 \text{ m/s}$ .



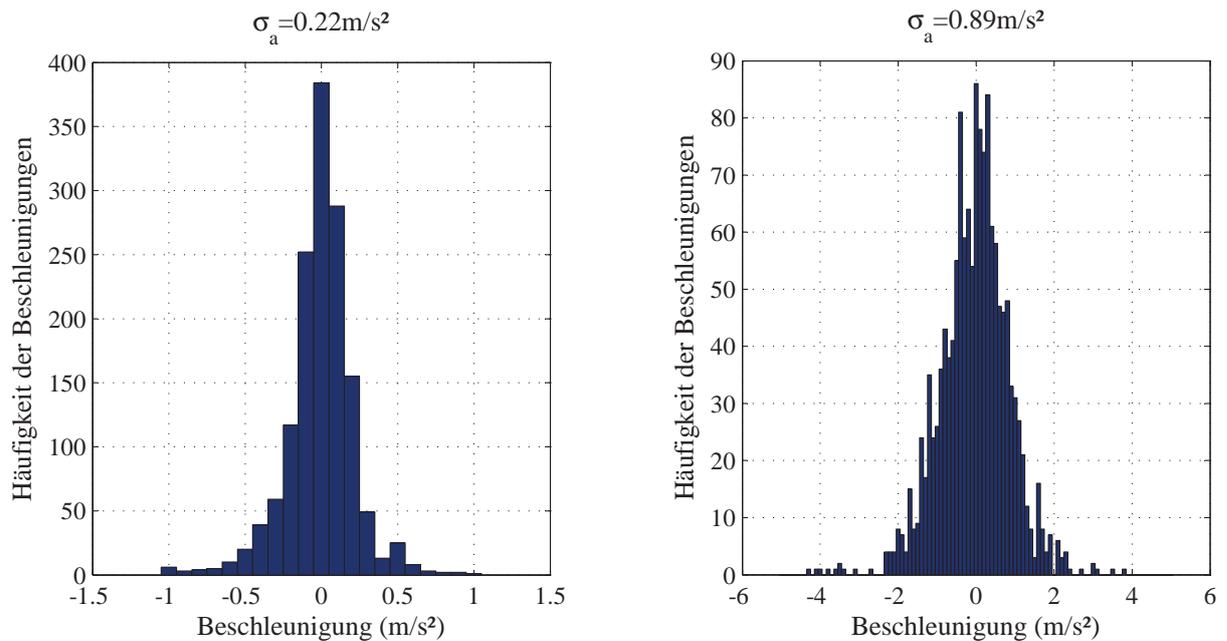
**Abb. A.14:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärgeschwindigkeiten einer offenen Kanalströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in} = 0,3 \text{ m/s}$ .



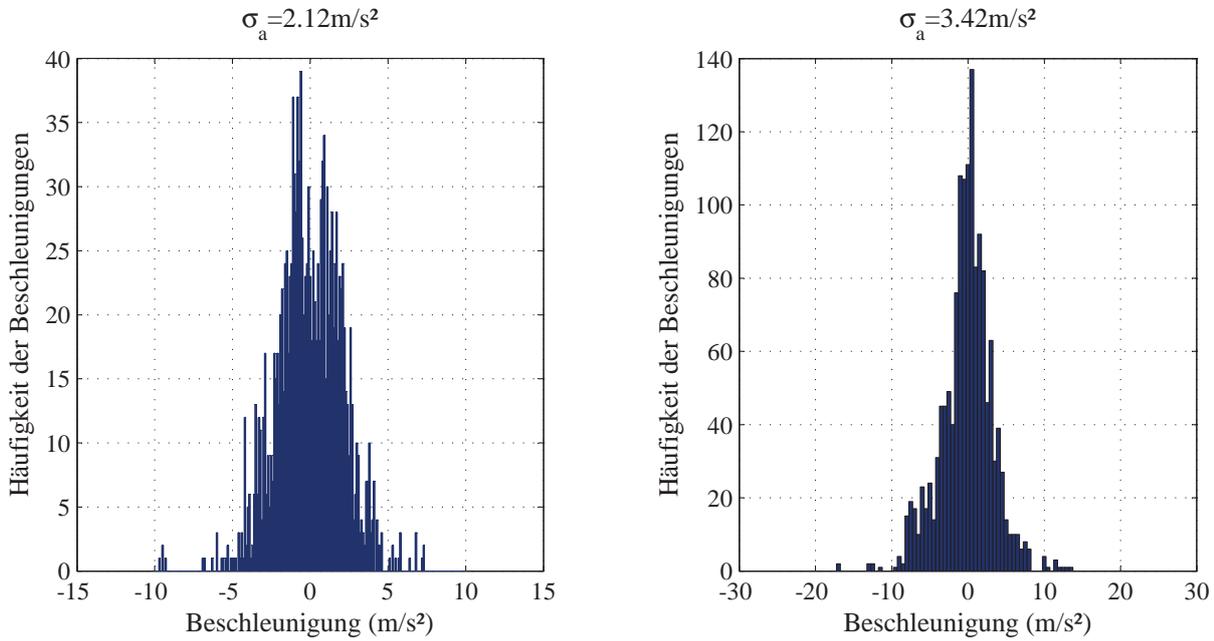
**Abb. A.15:** Auswertung der projizierten Messfehler bei gegebenen Sekundärgeschwindigkeiten einer offenen Kanalströmung (vgl. Abb. 2.6) mit  $\bar{v}_{in}=0,5\text{ m/s}$ .

## A.11 Auswertung Strömungsbeschleunigungen

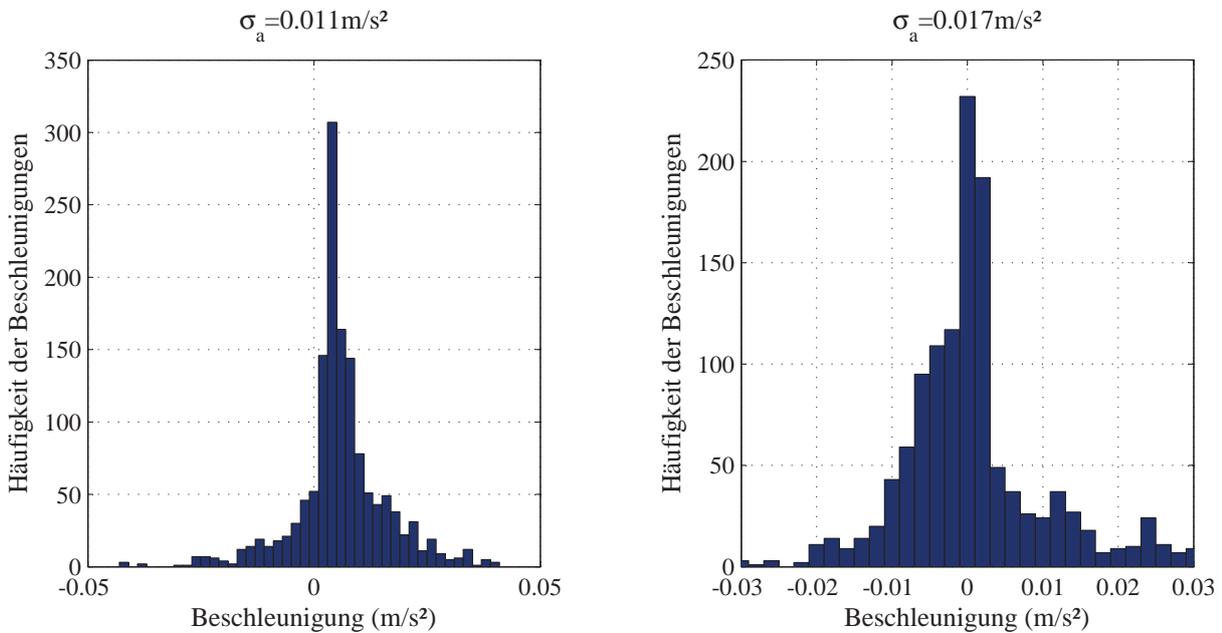
Im Nachfolgenden sind die statistischen Auswertungen zur Fluidbeschleunigung von Strömungssimulationen abgebildet.  $\sigma_a$  definiert die Streuung von Beschleunigungsschwankungen einzelner Reflektoren in Fließrichtung.



**Abb. A.16:** Beschleunigungsverteilung der vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6). Links:  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ ; rechts:  $\bar{v}_{in} = 1 \text{ m/s}$ .



**Abb. A.17:** Beschleunigungsverteilung der vollgefüllten Rohrströmung (vgl. Abb. 2.6). Links:  $\bar{v}_{in} = 1,5 \text{ m/s}$ ; rechts:  $\bar{v}_{in} = 2 \text{ m/s}$ .



**Abb. A.18:** Beschleunigungsverteilung der offenen Kanalströmung (vgl. Abb. 2.6). Links:  $\bar{v}_{in} = 0,3 \text{ m/s}$ ; rechts:  $\bar{v}_{in} = 0,5 \text{ m/s}$ .

## A.12 Matched-Filter-Design

Bei der Korrelation von Sende- und Empfangssignalen wird bei der Realisierung auf einen optimalen Suchfilter zurückgegriffen [Huf06, Sch05, LO10]. Da das Sendesignal stets gleich bleibt, genügt ein einmaliger Entwurf der Filterkoeffizienten. Wie in Gl. A.39 (oben) beschrieben, besteht das abgetastete Empfangssignal  $s(k)$  aus dem Nutzsinal  $x(k)$  und einem Rauschsignal  $n(k)$ . Das Ausgangssignal  $y(k)$  am Matched-Filter resultiert daher aus einer Faltung von Empfangssignal  $s(k)$  und Impulsantwort  $h_{MF}(k)$  des Filters:

$$\begin{aligned} s(k) &= x(k) + n(k) \\ y(k) &= s(k) \otimes h_{MF}(k) = \underbrace{x(k) \otimes h_{MF}(k)}_{g(k)} + \underbrace{n(k) \otimes h_{MF}(k)}_{n_D(k)}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Der Nutzanteil am Filterausgang wird mit  $g(k)$  und der Störanteil mit  $n_D(k)$  zusammengefasst. Die mittlere normierte Leistung des deterministischen Nutzsignals  $g(k)$  zum Abtastzeitpunkt  $k = k_0$  ergibt sich aus:

$$G(k = k_0) = g^2(k_0) = (x(k) \otimes h_{MF}(k))^2 = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h_{MF}(k_0 - m) \right)^2. \quad (\text{A.40})$$

Da weißes Rauschen auf den Störanteil  $n_D(k)$  einwirkt, lässt sich diese Zufallsvariable lediglich schätzen. Wird darüber hinaus von einem ergodischen Rauschprozess ausgegangen, so entspricht die mittlere Leistung zum Zeitpunkt  $k = k_0$ :<sup>1</sup>

$$N(k = k_0) = \mathbb{E} [n_D^2(k_0)] = P_n = N_0 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}^2(m). \quad (\text{A.41})$$

Die Variable  $N_0$  beschreibt die am Eingang des Filters vorliegende Leistungsdichte der weißen Rauschquelle, welche sich durch die AKF mit  $r_{nn}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$  erschließt.

Definiert man zum Abtastzeitpunkt  $k_0$  am Ausgang des Filters das Optimierungskriterium über das Signal-zu-Rausch-Verhältnis, dann folgt:

$$\left. \frac{G}{N} \right|_{k=k_0} = \frac{G(k_0)}{N(k_0)} = \frac{\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h_{MF}(k_0 - m) \right)^2}{N_0 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}^2(m)}. \quad (\text{A.42})$$

Unter der Voraussetzung, dass das Sendesignal  $x(k)$  zeitbegrenzt ist und somit eine endliche Energie (=Energiesignal) besitzt, gilt für normierte Energiesignale<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Die Herleitung lässt sich über das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des Filters mit  $\Phi_{nn}(f) = N_0 \cdot |H(f)|^2$  führen. Dabei resultiert die mittlere Leistung aus dem Integral der Leistungsdichte über alle Frequenzen gemäß  $P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(f) df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$ , wobei deren Leistung nach dem Parseval-Theorem auch im Zeitbereich über  $P_n = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$  bestimmt werden kann.

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(k_0 - m). \quad (\text{A.43})$$

Wird dieses Energiesignal zur Erweiterung der SNR-Gleichung in A.42 herangezogen, ist der Term in zwei Brüchen unterteilbar:

$$\left. \frac{G}{N} \right|_{k=k_0} = \frac{E}{N_0} \cdot \frac{\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}(m) \cdot x(k_0 - m) \right)^2}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}^2(m) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(k_0 - m)}. \quad (\text{A.44})$$

Der linke Bruch  $\frac{E}{N_0}$  in Gl. A.44 hängt lediglich vom Sendesignal  $x(k)$  und dem Rauschsignal  $n(k)$  ab (vgl. Gl. A.41 und Gl. A.43). Der rechte Bruch beeinflusst hingegen die Optimierungsaufgabe und wird daher näher untersucht. Aus dem Skalarprodukt folgt mit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ &= \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2 \cdot \cos(\alpha) \\ \text{für } \alpha \leq 90^\circ &\rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2^2. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Übertragen auf den rechten Bruch der Optimierungsaufgabe in A.44 entspricht dies folgender Ungleichung:

$$\left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}(m) \cdot x(k_0 - m) \right)^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{MF}^2(m) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^2(k_0 - m). \quad (\text{A.46})$$

Folglich ist der rechte Bruch in A.44 stets kleiner gleich eins. Der Maximalwert, also der Wert eins, für den rechten Bruch der Gl. A.44 wird genau dann erreicht, wenn das Gleichheitszeichen in Gl. A.46 gilt und somit das Sendesignal  $x(k_0 - m)$  proportional zu den Filterkoeffizienten  $h_{MF}(m)$  ist:

$$h_{MF}(m) = \pm K \cdot x(k_0 - m). \quad (\text{A.47})$$

Der Proportionalitätsfaktor  $K$  ist eine reelle Zahl und kann jeden beliebigen Wert annehmen.

Die Gl. A.47 verdeutlicht sehr anschaulich, dass die optimale Impulsantwort  $h_{MF}(k)$  des Filters bis auf den Faktor  $K$  eine gespiegelte und um  $k_0$  verschobene Kopie des Eingangssignals  $x(k)$  ist. Wird die optimale Impulsantwort in Gl. A.39 eingefügt, dann resultiert am Filterausgang  $s_{MF}$  das Signal:

<sup>1</sup>Wegen der konstanten Abtastperiode kann das Energiesignal auf diese normiert werden.

$$s_{MF}(m) = s_{in}(m) \otimes h_{MF}(m) = \pm k \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{in}(m) \cdot x(k_0 - m). \quad (\text{A.48})$$

Durch Substitution mit  $m = -k$  lässt sich die Faltung in eine Korrelation überführen [Fli91]

$$s_{MF}(k) = \pm K \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s_{in}(-k) \cdot x(k_0 + k), \quad (\text{A.49})$$

weshalb ein solcher Matched-Filter auch oftmals als Korrelationsfilter bezeichnet wird. Der Filter eignet sich somit für die hier notwendigen Korrelationsmethoden. Durch die einfache Realisierung über einen FIR-Filter mit den optimierten Koeffizienten  $h_{MF}$  lässt sich die Korrelationsauswertung in Kap. 3.3 effizient realisieren (vgl. [Sch05]).

## A.13 Filterdesign der Hilbert-Transformation

Nachstehend wird die Realisierung der Hilbert-Transformation durch einen FIR-Filter behandelt und die Bildung des analytischen Signals. Für die Grundlagen sei hier z.B. auf die Literatur [KK09, SH99, Sch10] verwiesen.

Der Frequenzgang des kontinuierlichen Hilbert-Transformators  $H_{HT}(f)$  ist gegeben durch:

$$H_{HT}(f) = -j \operatorname{sgn}(f). \quad (\text{A.50})$$

Für den idealen Hilbert-Transformator gilt für den Frequenzgang mit der Amplitude 1, der Betrag  $|H_{HT}(f)|$  und die Phase  $\varphi_{HT}(f)$ :

$$|H_{HT}(f)| = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| > 0 \\ 0 & \text{für } f = 0 \end{cases} \quad \varphi_{HT}(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{für } f > 0 \\ 0 & \text{für } f = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } f < 0. \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

Es zeigt sich, dass der Hilbert-Transformator nicht kausal ist. Bei der Realisierung dieses Frequenzganges durch ein diskretes System  $H_{HT}^*(\Omega)$ , wiederholt sich nun der auf  $\pm \frac{f_A}{2}$  bandbegrenzte Frequenzgang periodisch mit  $\Omega = 2\pi$  bzw. mit der Abtastfrequenz  $f_A$ .

Wird nun über die inverse Fourier-Transformation die Impulsantwort aus dem bandbegrenzten Frequenzgang  $H_{HT}^*(\Omega)$  gebildet

$$\begin{aligned} h_{HT}^*(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -j \operatorname{sgn}(\Omega) e^{jm\Omega} d\Omega \\ &= -\frac{j}{\pi} \int_0^{\pi} j \operatorname{sgn}(\Omega m) d\Omega = \frac{1 - \cos(\pi m)}{\pi m}, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

so kann zwischen geraden und ungeraden Koeffizientenpositionen  $m$  unterschieden werden:

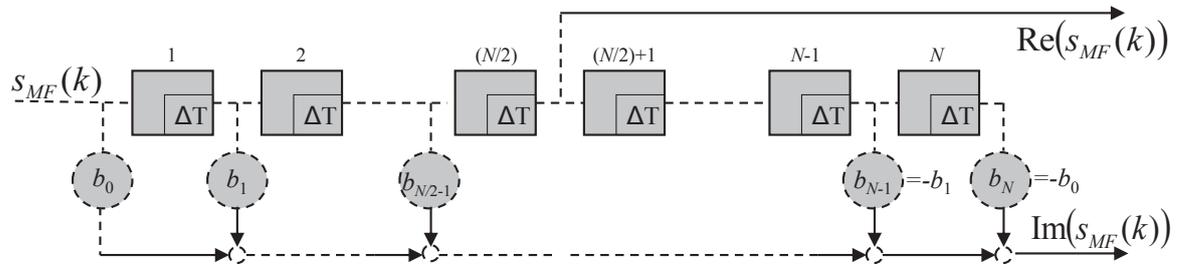
$$h_{HT}^*(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ \frac{2}{\pi m} & \text{für } m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

Für die Durchführung eignet sich ein FIR-Filter mit einer geraden Filterordnung  $N$  und punktsymmetrischen Koeffizienten ( $b_m$ ). Da der verwebdete Filter kausal, jedoch der Frequenzgang nicht kausal ist, müssen die Koeffizienten mit

$$b_m = h_{HT}^* \left( m - \frac{N}{2} \right) \quad \text{mit } 0 \leq m \leq N \quad (\text{A.54})$$

angepasst werden. Zwischen Filterausgang  $\operatorname{Im}(s_{MF})$  und -eingang  $s_{MF}$  herrscht eine Phasenverschiebung von  $\pi$ . Damit die für den Hilbert-Transformator geforderte Phasenverschie-

bung von  $-\frac{\pi}{2}$  zwischen Real- und Imaginärteil ( $\text{Re}(s_{MF})$  und  $\text{Im}(s_{MF})$ ) eingehalten werden kann, muss das reale Signal in der Filtermitte ( $\frac{N}{2}$ ) abgegriffen werden. Der Filterabgriff in der Mitte entspricht einer Verzögerung von  $\frac{N}{2}$  Abtastwerten, somit bilden  $\text{Re}(s_{MF})$  und  $\text{Im}(s_{MF})$  ein Hilbert-Paar (siehe Abb. A.19).



**Abb. A.19:** Realisierung des Hilbert-Transformators mit zwei gekoppelten FIR-Filtern.

## A.14 Herleitung Kalman-Filter - Prädiktionskoeffizienten

Für die folgende Betrachtung werden für die gaußverteilte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  der Erwartungswert  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  und die Kovarianz  $\mathbf{P}_k^-$  bestimmt. Die Herleitung dieser Koeffizienten findet dabei in Anlehnung an die Literatur [TBF06, RTS65] statt.

Die gaußverteilte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  nach Gl. 3.8 setzt sich zusammen aus der vorhergegangenen Zustandsschätzung  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})$  und der Übergangswahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_k, \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}_k)} \underbrace{p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})} d\mathbf{x}_{k-1}.$$

Unter Anwendung der multivariaten Gaußverteilung (vgl. 3.13) resultiert:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det(\mathbf{Q}_k) \det(\mathbf{P}_{k-1})}} \\ &\int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T (\mathbf{Q}_k)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \right] \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T (\mathbf{P}_{k-1})^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \right] \right\} d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \Lambda \int \exp \{ -L_k \} d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

mit der Vereinfachung  $\Lambda$  für den Vorfaktor und  $L_k$  für den Exponentialterm gemäß:

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T (\mathbf{P}_{k-1})^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T (\mathbf{Q}_k)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Auffallend ist, dass die Zustände  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}_{k-1}$  quadratisch in  $L_k$  eingehen. Damit das Integral in Gl. A.55 gelöst werden kann, muss  $L_k$  so zerlegt werden, dass lediglich ein Teil der Zerlegung vom Zustand  $\mathbf{x}_{k-1}$  abhängt. Eine Möglichkeit besteht darin, den Exponenten  $L_k$  aufzuteilen in:

$$L_k = L_{k1}(\mathbf{x}_k) + L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k). \quad (\text{A.57})$$

Wird der aufgeteilte Exponent in die Dichtefunktion von Gl. A.55 eingesetzt, resultiert daraus:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) &= \Lambda \int \exp \{-L_k\} d\mathbf{x}_{k-1} \\
&= \Lambda_1 \int \exp \{-L_{k1}(\mathbf{x}_k) - L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)\} d\mathbf{x}_{k-1} \\
&= \Lambda_1 \exp \{-L_{k1}(\mathbf{x}_k)\} \int \exp \{-L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)\} d\mathbf{x}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass die Konstanten vor und nach der Zerlegung nicht identisch sind:  $\Lambda \neq \Lambda_1$ .

Das Ziel ist es nun, in einem weiteren Schritt  $L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$  so zu wählen, dass das Integral den Zustand  $\mathbf{x}_k$  nicht beeinflusst. D.h. es muss eine Funktion  $L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$  gefunden werden, bei der das gesamte Integral zu einer Konstanten wird, die relativ zum Schätzproblem der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$  ist [TBF06]. Die Gleichung würde sich dann aufgrund der Konstante  $\Lambda_2$  vereinfachen zu:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \Lambda_1 \Lambda_2 \exp \{-L_{k1}(\mathbf{x}_k)\}. \quad (\text{A.58})$$

Die Lösung der Gleichung wäre somit ein normiertes Exponential einer quadratischen Funktion.

Vor Bestimmung der Funktion  $L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$  ist festzuhalten, dass bei der Aufteilung des Exponenten nach Gl. A.57 nur dieser Funktionsteil von  $\mathbf{x}_{k-1}$  quadratisch abhängt<sup>1</sup>. Folglich muss zur Ermittlung dieser Funktionskoeffizienten die Gesamtfunktion  $L_k$  nach  $\mathbf{x}_{k-1}$  differenziert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_k}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} &= -\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{P}_{k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\
\frac{\partial^2 L_k}{\partial \mathbf{x}_{k-1}^2} &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1} =: \Psi^{-1}.
\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt die zweite Ableitung die Krümmung der quadratischen Funktion mit  $\Psi$ . Durch Gleichsetzen der ersten Ableitung zu Null und anschließendem Umformen nach  $\mathbf{x}_{k-1}$  resultiert<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Die Abhängigkeit  $L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$  von  $\mathbf{x}_k$  kann bei dieser Betrachtung zunächst vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1}) &= \mathbf{P}_{k-1}^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\
\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k \\
(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1}) \mathbf{x}_{k-1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k \\
\Psi^{-1} \mathbf{x}_{k-1} &= \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k \\
\mathbf{x}_{k-1} &= \Psi [\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k].
\end{aligned}$$

Durch Zusammensetzen beider Koeffizienten zu einer quadratischen Funktion

$$\begin{aligned}
L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}_{k-1} - \Psi [\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k] \right\}^T \Psi^{-1} \\
&\quad \left\{ \mathbf{x}_{k-1} - \Psi [\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k] \right\}
\end{aligned} \tag{A.59}$$

und Erweiterung zu einer multivariaten Gaußverteilung, folgt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Psi)}} \exp \{-L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)\}.$$

Da nun das Integral über diese Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion den Wert 1 ergibt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Psi)}} \exp \{-L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)\} &= 1 \\
\int \exp \{-L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)\} &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Psi)},
\end{aligned}$$

wird durch Umformen deutlich, weshalb die Gl. A.58 über die Konstante  $\Lambda_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Psi)}$  vereinfacht werden darf.

Nachdem die Funktionen  $L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$  (Gl. A.59) und  $L_k$  (Gl. A.56) gegeben sind, lässt sich durch Differenzbildung der restliche Teil der Funktion  $L_{k1}(\mathbf{x}_k)$  bestimmen.

---

<sup>1</sup>Wird die erste Ableitung zu Null gesetzt, erhält man daraus das Maximum der Funktion auf der x-Achse. Dieses ist äquivalent zum Mittelwert einer Normalverteilung.

Hierzu muss lediglich die Gl. A.57 umgeformt und ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned}
L_{k1}(\mathbf{x}_k) &= L_k - L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) \Leftrightarrow L_k = L_{k1}(\mathbf{x}_k) + L_{k2}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k) \\
L_{k1}(\mathbf{x}_k) &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T (\mathbf{Q}_k)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T (\mathbf{P}_{k-1})^{-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\
&\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{k-1} - \Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)]^T \Psi^{-1} \\
&\quad [\mathbf{x}_{k-1} - \Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)] \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k + (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})] \\
&\quad + \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} - 2\mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1}] \\
&\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{k-1}^T \Psi^{-1} \mathbf{x}_{k-1} - 2\mathbf{x}_{k-1}^T \Psi^{-1} \Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k) \\
&\quad + (\Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k))^T \Psi^{-1} \Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)] \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-1}^T \Psi^{-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-1}^T (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)^T \Psi (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k).
\end{aligned}$$

Wird für  $\Psi = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1}$  eingesetzt, kürzen sich alle Terme welche von  $\mathbf{x}_{k-1}$  abhängig sind aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}
L_{k1}(\mathbf{x}_k) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} \\
&\quad + \mathbf{x}_{k-1}^T (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)^T \\
&\quad (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_{k-1} - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k)^T \\
&\quad (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k).
\end{aligned} \tag{A.60}$$

Durch Einsetzen der Funktion  $L_{k1}(\mathbf{x}_k)$  in Gl. A.58 wird deutlich, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})$  wiederum gaußverteilt ist. Zur Bestimmung des Erwartungswertes und der Kovarianz muss  $L_{k1}(\mathbf{x}_k)$  nur noch differenziert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{k1}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} &= \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k) \\
&= \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
&\quad - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{x}_k \\
&= \left[ \mathbf{Q}_k^{-1} - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \right] \mathbf{x}_k \\
&\quad - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Sherman-Morrison-Formel vereinfacht sich der erste Term der Ableitung zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{k1}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} &= (\mathbf{Q}_k + \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{x}_k \\
&\quad - \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}.
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Da der Erwartungswert äquivalent zum Funktionsmaximum ist, muss die Funktion nur noch zu Null gesetzt und nach  $\mathbf{x}_k$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Q}_k + \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{x}_k &= \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
\mathbf{x}_k &= (\mathbf{Q}_k + \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \mathbf{P}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
&= (\mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}) (\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
&= \mathbf{A} (\mathbf{E} + \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}) (\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\
&= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} =: \hat{\mathbf{x}}_k^-.
\end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Kovarianz muss Gl. A.61 ein weiteres Mal nach  $\mathbf{x}_k$  differenziert werden:

$$\frac{\partial^2 L_{k1}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} = (\mathbf{Q}_k + \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T)^{-1} =: (\mathbf{P}_k^-)^{-1}.$$

## A.15 Herleitung Kalman-Filter - Innovationskoeffizienten

Ausgangssituation zur Herleitung der optimalen Koeffizienten beim Kalman-Filter ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{1}{c(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{P}_k^-)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T (\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \right] \right\} \\ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{R}_k)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) \right] \right\}.$$

Gesucht wird dabei der optimale Erwartungswert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  und dessen Kovarianz  $\mathbf{P}_k^-$  nach Eintreffen des Messwertes  $\mathbf{z}_k$ . Die Zustandsprädiktion ist gegeben mit  $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ . Wird die Gleichung logarithmiert und nach  $\mathbf{x}_k$  differenziert folgt:

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_k} = (\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) \\ \frac{\partial^2 \log p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_k^2} = (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}. \quad (\text{A.62})$$

Da die zweite Ableitung der Verteilung der invertierten Kovarianzmatrix zum Zeitpunkt  $k$  entspricht, gilt:

$$\mathbf{P}_k^{-1} = (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}.$$

Unter Anwendung der Sherman-Morrison-Formel lässt sich die Kovarianzmatrix auflösen nach:

$$\mathbf{P}_k = \left( (\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \\ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \\ = \left[ \mathbf{E} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \right] \mathbf{P}_k^- \\ = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_k^-. \quad (\text{A.63})$$

Dabei beschreibt  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{K}_k$  den Kalman-Faktor:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1}. \quad (\text{A.64})$$

Um den optimalen Erwartungswert  $\hat{\mathbf{x}}_k$  berechnen zu können, wird die erste Ableitung in Gl. A.62 zu Null gesetzt, die Variable  $\mathbf{x}_k$  durch  $\hat{\mathbf{x}}_k$  ersetzt<sup>1</sup> und umgeformt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k) \\
(\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
(\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) &= \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} + (\mathbf{P}_k^-)^{-1}) (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) &= \mathbf{P}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \underbrace{\mathbf{P}_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1}}_{\mathbf{K}_k} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-).
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Die Matrizen  $\mathbf{P}_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1}$  entsprechen wiederum dem Kalman-Faktor in Gl. A.64. Der Beweis hierfür findet sich beispielsweise in [TBF06]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T) (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{R}_k + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T) (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T) (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k ((\mathbf{P}_k^-)^{-1} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T) (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k ((\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1} \\
&= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Da das Maximum der Normalverteilung gleichzeitig auch der Erwartungswert ist, lässt sich die Variable  $\mathbf{x}_k$  durch  $\hat{\mathbf{x}}_k$  ersetzen.

## A.16 Herleitung der a-priori Zuweisungswahrscheinlichkeit

Die Auftretenswahrscheinlichkeit des Ereignisses  $P\{\epsilon_{i,k}|m_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}\} = P\{\epsilon_{i,k}|m_k\}$  in Gl. 3.30 wird oft auch a-priori Zuweisungswahrscheinlichkeit genannt, da sie die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Ereignis  $\epsilon_{i,k}$  ohne Vorwissen der aktuellen Messpunkte  $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_{i,k}\}_{i=1}^{m_k}$  wiedergibt. Dabei sind die Ereignisse zum Zeitpunkt  $k$  definiert durch:

$$\epsilon_{i,k} = \begin{cases} \{\text{Der Messpunkt } \mathbf{z}_{i,k} \text{ stammt vom Objekt}\}, & i = 1, \dots, m_k \\ \{\text{Keiner der Messpunkte in } \mathbf{Z}_k \text{ stammt vom Objekt}\}, & i = 0. \end{cases}$$

In Anlehnung an [BSF88] findet im Nachfolgenden die Herleitung der Zuweisungswahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass die Anzahl an Messpunkten innerhalb eines validierten Gating-Bereichs  $m_k^D = m_k$  aufweist, statt. Wobei  $m_k^D$  die Zufallsvariable und  $m_k$  die erfasste Anzahl an Messpunkten darstellt. Darüber hinaus ist zu beachten, dass mindestens ein Messpunkt im Gating-Bereich vorliegen muss, also  $m_k^D > 0$ . Die Anzahl an Störmesspunkten (Falschmessungen) ist bei der Herleitung mit  $m_k^F$  gegeben, sodass für die Auftretenswahrscheinlichkeit folgender Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned} P\{\epsilon_{i,k}|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} &= P\{\epsilon_{i,k}|m_k^F = m_k - 1, m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &\quad \cdot P\{m_k^F = m_k - 1|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &\quad + P\{\epsilon_{i,k}|m_k^F = m_k, m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &\quad \cdot P\{m_k^F = m_k|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\}. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Aufgrund der oben aufgestellten Ereignisse ist eine Fallunterscheidung notwendig. Tritt das Ereignis  $\epsilon_{0,k}$  ein, ist die Anzahl an detektierten Messpunkten gleich der Anzahl an Störmesspunkten  $m_k^D = m_k^F$ . Folglich kann die Bedingung  $m_k^F = m_k - 1$  nicht eintreten, sodass sich die obere Gleichung reduziert zu:

$$\begin{aligned} P\{\epsilon_{i,k}|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} &= 0 \cdot P\{m_k^F = m_k - 1|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &\quad + 1 \cdot P\{m_k^F = m_k|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &= P\{m_k^F = m_k|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\}. \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Mihilfe dem Bayes-Theorem resultiert aus:

$$\begin{aligned} &P\{m_k^F = m_k|m_k^D = m_k, m_k^D > 0\} \\ &= \frac{P\{m_k^D = m_k|m_k^F = m_k, m_k^D > 0\} \cdot P\{m_k^F = m_k|m_k^D > 0\}}{P\{m_k^D = m_k|m_k^D > 0\}} \\ &= \frac{(1 - P_D P_G) \cdot \mu_F(m_k)}{P\{m_k^D = m_k|m_k^D > 0\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

$P_D$  definiert die Detektionswahrscheinlichkeit und  $P_G$  die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Messpunkt auch im Gating-Bereich liegt. Darüber hinaus wird die Anzahl an Störmesspunkten über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\mu_F(m_k)$  beschrieben.

Für alle weiteren Ereignisse  $i > 0$  ist die Anzahl an Störmesspunkten  $m_k^F$  stets um den einen wahren Messpunkt vom Objekt kleiner als die gesamte Anzahl an Messpunkten  $m_k$ . Aufgrund der Bedingung  $m_k^D > 0$  ist die Realisierung des Ereignisses  $m_k^F = m_k - 1$  immer gegeben. In Anlehnung an Gl. A.66 resultiert

$$\begin{aligned} P \{ \epsilon_{i,k} | m_k^T = m_k, m_k^D > 0 \} &= \frac{1}{m} \cdot P \{ m_k^F = m_k - 1 | m_k^D = m_k, m_k^D > 0 \} \\ &\quad + 0 \cdot P \{ m_k^F = m_k | m_k^D = m_k, m_k^D > 0 \} \\ &= \frac{1}{m_k} \cdot P \{ m_k^F = m_k - 1 | m_k^D = m_k, m_k^D > 0 \} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

und zusammen mit dem Bayes-Theorem:

$$\begin{aligned} &P \{ m_k^F = m_k - 1 | m_k^D = m_k, m_k^D > 0 \} \\ &= \frac{P \{ m_k^D = m_k | m_k^F = m_k - 1, m_k^D > 0 \} \cdot P \{ m_k^F = m_k - 1 | m_k^D > 0 \}}{P \{ m_k^D = m_k | m_k^D > 0 \}} \\ &= \frac{P_D P_G \cdot \mu_F(m_k - 1)}{P \{ m_k^D = m_k | m_k^D > 0 \}}. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Der Nenner in Gl. A.68 und A.70 lässt sich nun ersetzen durch:

$$P \{ m_k^D = m_k | m_k^D > 0 \} = P_D P_G \mu_F(m_k - 1) + (1 - P_D P_G) \mu_F(m_k). \quad (\text{A.71})$$

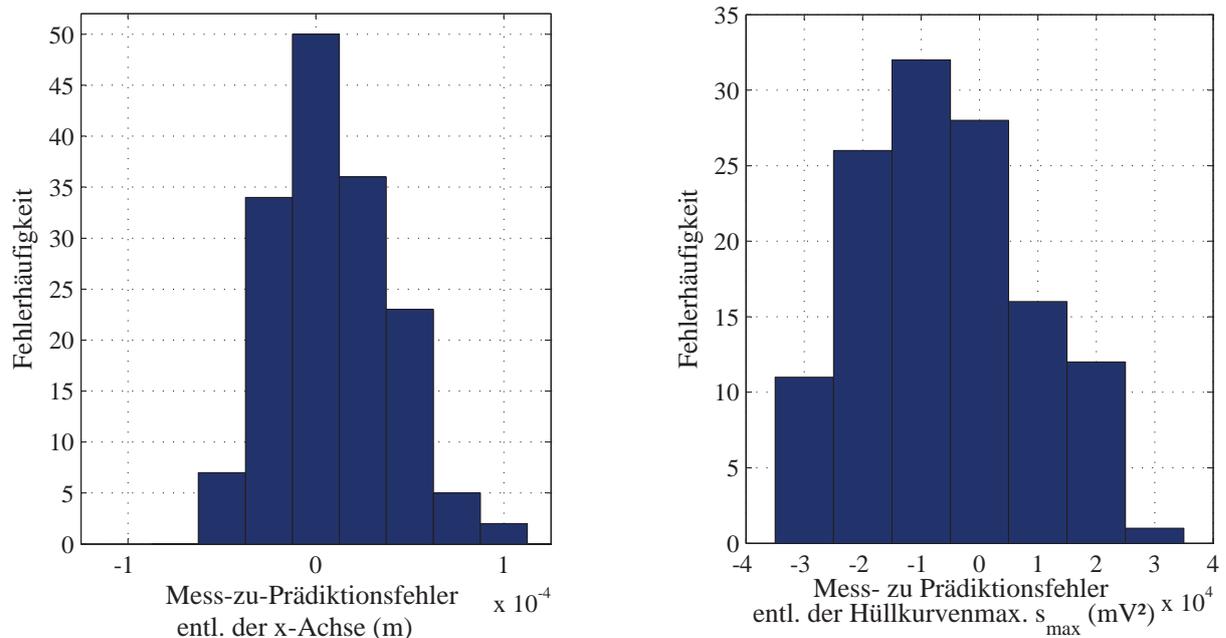
Der erste Summand charakterisiert die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der wahre Messpunkt im Gating-Bereich detektiert wird und die Anzahl an Störmesspunkten  $m_k^F = m_k - 1$  beträgt. Der zweite Summand beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der wahre Messpunkt weder detektiert wird, noch im Gating-Bereich liegt und zudem alle Messpunkte fehlerhaft sind:  $m_k^F = m_k$ .

Setzt man nun die Gleichungen A.71, A.70, A.69, A.68 und A.67 ineinander ein, folgt:

$$\begin{aligned} P \{ \epsilon_{i,k} | m_k^T = m_k, m_k^D > 0 \} &= P \{ \epsilon_{i,k} | m_k \} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{m_k} P_D P_G}{\left[ P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right]}, & i = 1, \dots, m_k \\ \frac{(1 - P_D P_G) \frac{\mu(m_k)}{\mu(m_k - 1)}}{\left[ P_D P_G + (1 - P_D P_G) \frac{\mu_F(m_k)}{\mu_F(m_k - 1)} \right]}, & i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

## A.17 Nachweis der Gaußverteilung bei Mess-zu-Prädiktionsfehlern

Um den Nachweis eines gaußverteilten Mess-zu-Prädiktionsfehlers zu erbringen, wurde ein einzelner Reflektor unter Laborbedingungen verfolgt. Der Laboraufbau entspricht dem aus Abb. 3.11 mit einem schalldurchlässigen Rohr des Durchmessers  $30\text{mm}$  (vgl. [HGST11]). Als Reflektor bzw. Objekt dient ein einzelnes Luftbläschen, welches in das wasserdurchströmende Rohr injiziert wurde. Gemessen wurde mit einem Ultraschallsensor. Bei der Prädiktion wird sowohl bei der Amplituden- als auch der Positionsauswertung ein Standard-Kalman-Filter verwendet. Das hier zugrundeliegende Modell unterstellt für die Prädiktion eine konstante Amplitude und eine unbeschleunigte Bewegung. In Abb. A.20 sind die Ergebnisse zu den jeweiligen Mess-zu-Prädiktionsfehlern dargestellt. Hier wird deutlich, dass der Fehler in  $x$ -Position und die Amplitude einer Gaußverteilung entspricht.

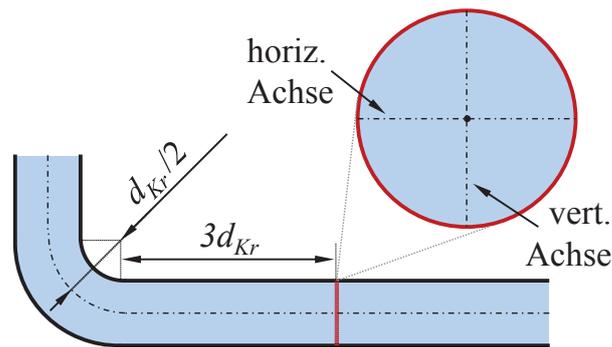


**Abb. A.20:** Links: Mess-zu-Prädiktionsfehler in  $x$ -Position bei einem Standard-Kalman-Filter mit linearem Bewegungsmodell. Rechts: Mess-zu-Prädiktionsfehler von empfangenen Amplituden nach der Hüllkurvenauswertung bei einer wertkonstanten Modellvorhersage.

## A.18 Simulierte und modellierte Geschwindigkeitsprofile

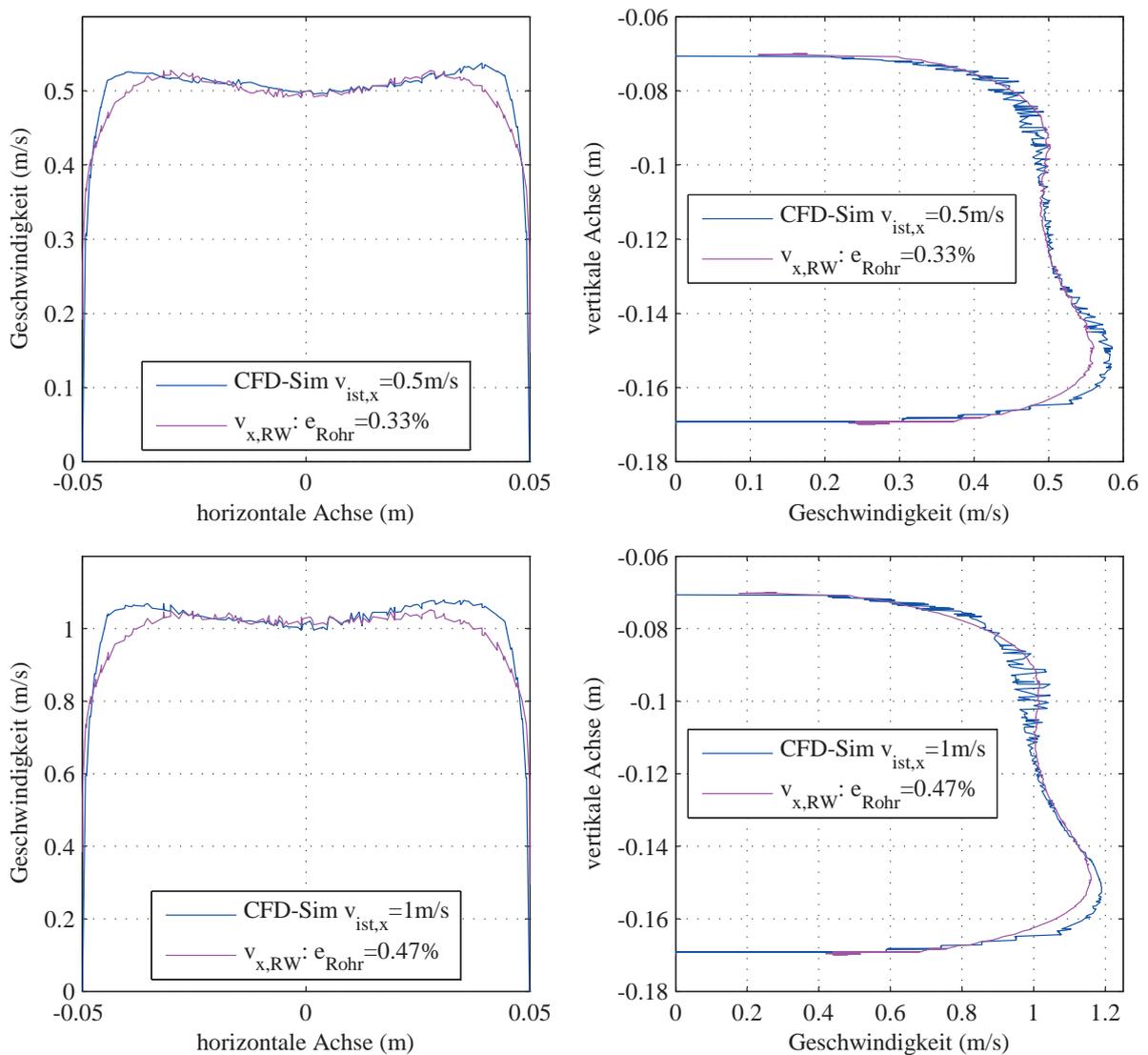
Die CFD-Modelle für das vollgefüllte Rohr und den offenen Kanal basieren auf den Geometrieangaben aus Abb. 3.17. Simuliert werden beim Rohr die mittleren Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 0,5; 1; 1,5$  und  $2$  m/s und beim offenen Kanal  $0,3$  und  $0,5$  m/s. Ziel ist es, die aufgestellten Funktionen zur Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile nach Gl. 3.66 bzw. 3.73 und 3.74 an die simulativ gewonnenen Profilwerte anzupassen. Der Fehler zwischen dem adaptierten und simulativen Geschwindigkeitsprofil ermittelt sich aus Gl. 3.71.

Die Achsenbeschriftung der nachfolgenden Auswertungen sind für das vollgefüllte Rohr gemäß Abb. A.21 festgelegt, wobei der Ursprung der z-Achse auf die Sensorposition verschoben wurde. Bei einem Einstrahlwinkel  $\beta = 45^\circ$  und einer Nahfeldlänge von ca.  $10$  cm, gilt für  $z_{tot} = 7,07$  cm. Der Krümmungsdurchmesser  $d_{KR}$  beträgt  $20$  cm.

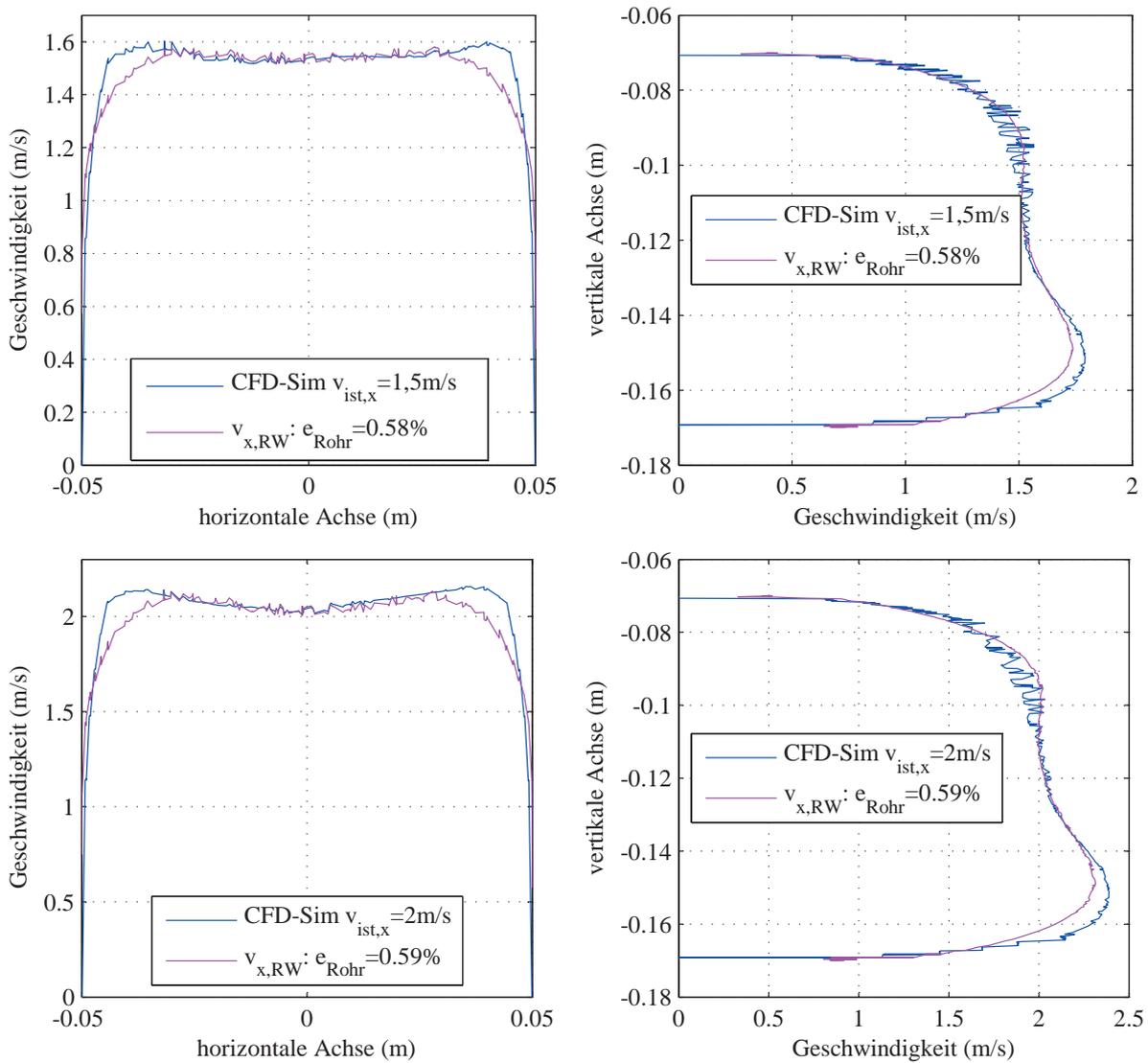


**Abb. A.21:** Achsenbeschriftung zur Auswertung von Geschwindigkeitsprofilen bei vollgefüllten Rohrströmungen.

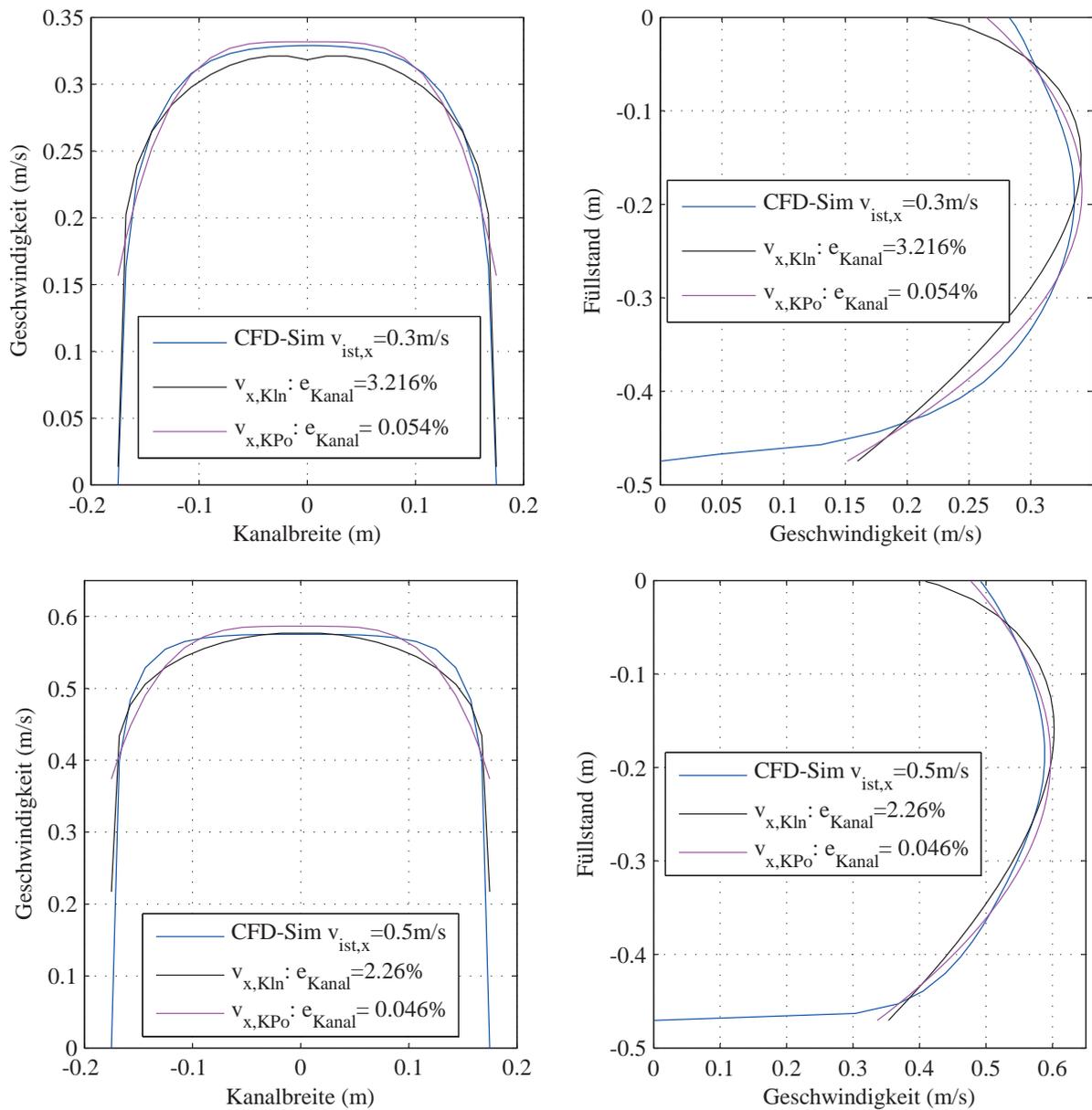
In Abb. A.22 und A.23 sind die Auswertungen für die vollgefüllte Rohrströmung veranschaulicht und in Abb. A.24 die Auswertungen einer offenen Kanalströmung mit den Abmaßen  $350 \text{ mm} \times 460 \text{ mm}$  ( $b \times h$ ).



**Abb. A.22:** Simulativ bestimmte Geschwindigkeitsprofile  $v_{ist,x}$  und die darauf angepassten Polynomfunktionen  $v_{x,RW}$  für die mittleren Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 0,5$  und  $1$  m/s. Der absolute Fehler zwischen beiden Profilen ist mit  $e_{Rohr}$  angegeben.

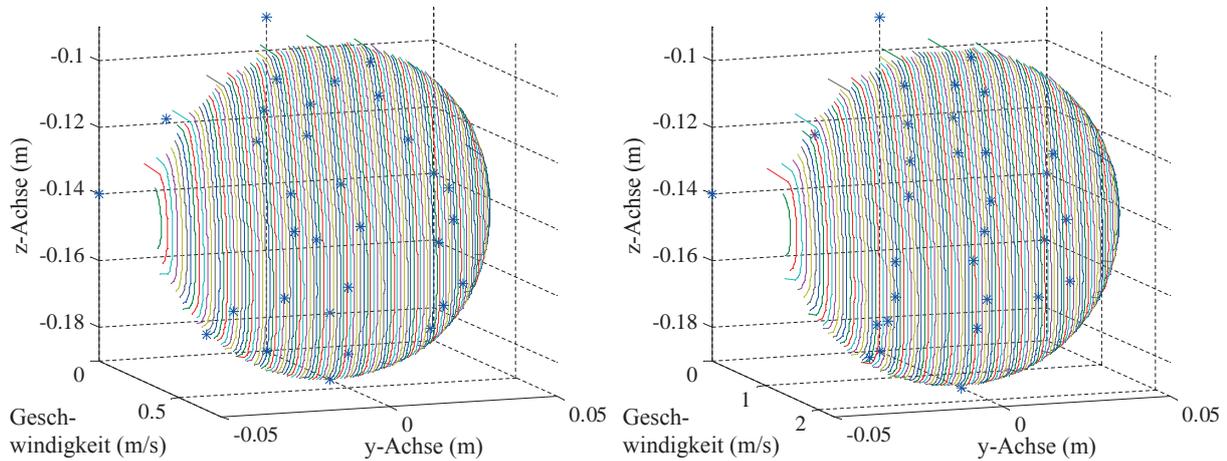


**Abb. A.23:** Simulativ bestimmte Geschwindigkeitsprofile  $v_{ist,x}$  und die darauf angepassten Polynomfunktionen  $v_{x,RW}$  für die mittleren Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 1,5$  und  $2 \text{ m/s}$ . Der absolute Fehler zwischen beiden Profilen ist mit  $e_{Rohr}$  angegeben.

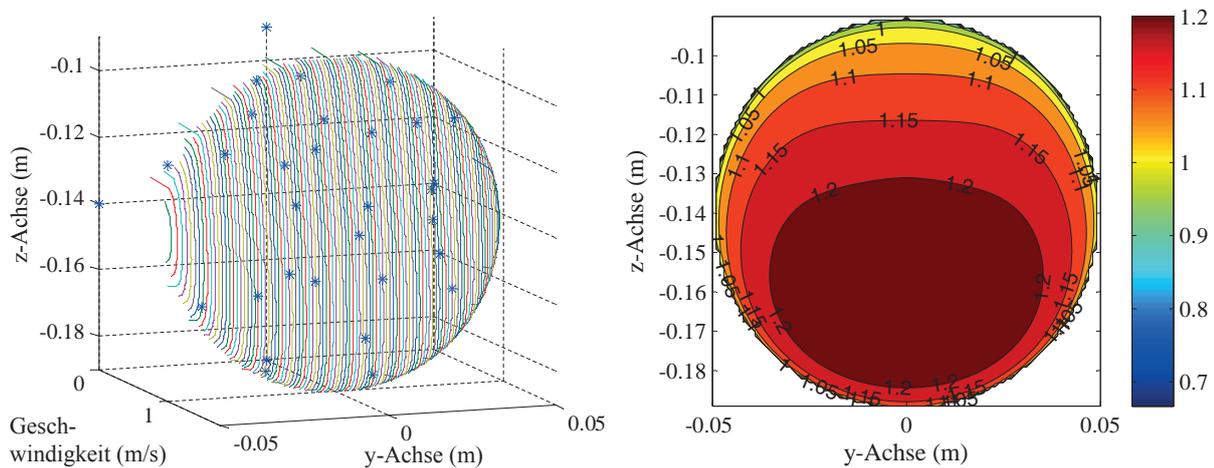


**Abb. A.24:** Simulativ bestimmte Geschwindigkeitsprofile  $v_{ist,x}$  und die darauf angepassten Polynomfunktionen  $v_{x,KPo}$  bzw.  $\ln$ -Funktionen  $v_{x,Kln}$  für die mittleren Einlaufgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{in} = 0,3$  und  $0,5 \text{ m/s}$ . Der absolute Fehler zwischen beiden Profilen ist mit  $e_{Kanal}$  angegeben.

## A.19 Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - vollgefülltes Rohr

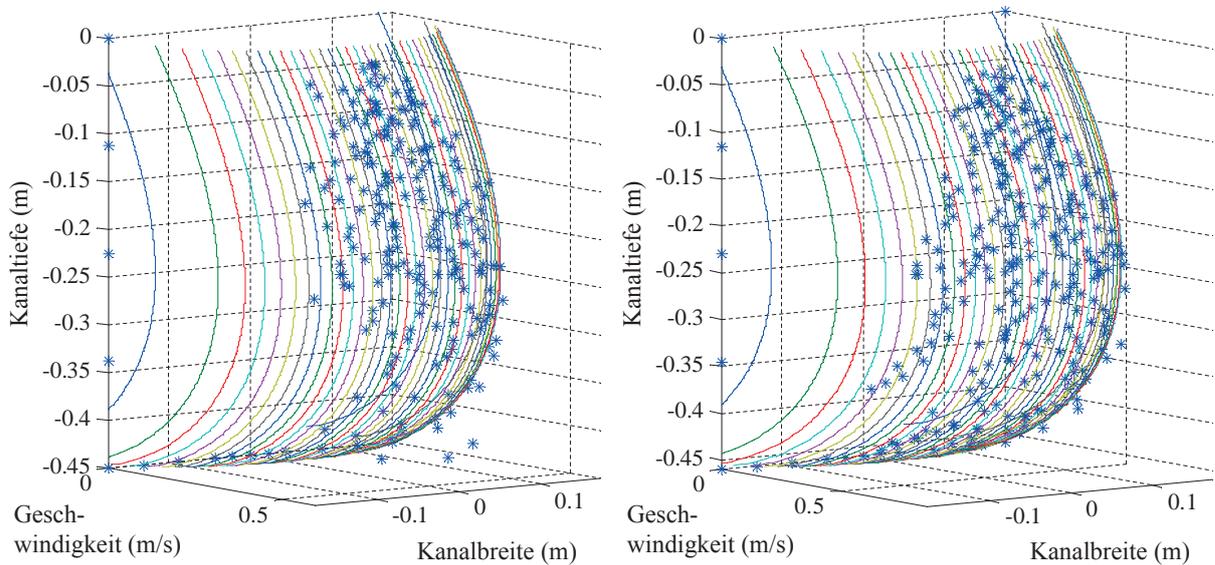


**Abb. A.25:** Geschwindigkeiten von Strömungslinien und deren Ausgleichsmodell für eine vollgefüllte Rohrströmung. Links: Eingestellter Durchfluss 3,51/s ( $\hat{=} \bar{v}_{in}=0,45$  m/s) bei gemessenem Durchfluss  $Q=3,41$ /s und einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ}=0,123$  m/s. Rechts: Eingestellter Durchfluss 12,51/s ( $\hat{=} \bar{v}_{in}=1,59$  m/s) bei gemessenem Durchfluss von  $Q=12,41$ /s und einer Streuung von  $r_{LSQ}=0,484$  m/s.

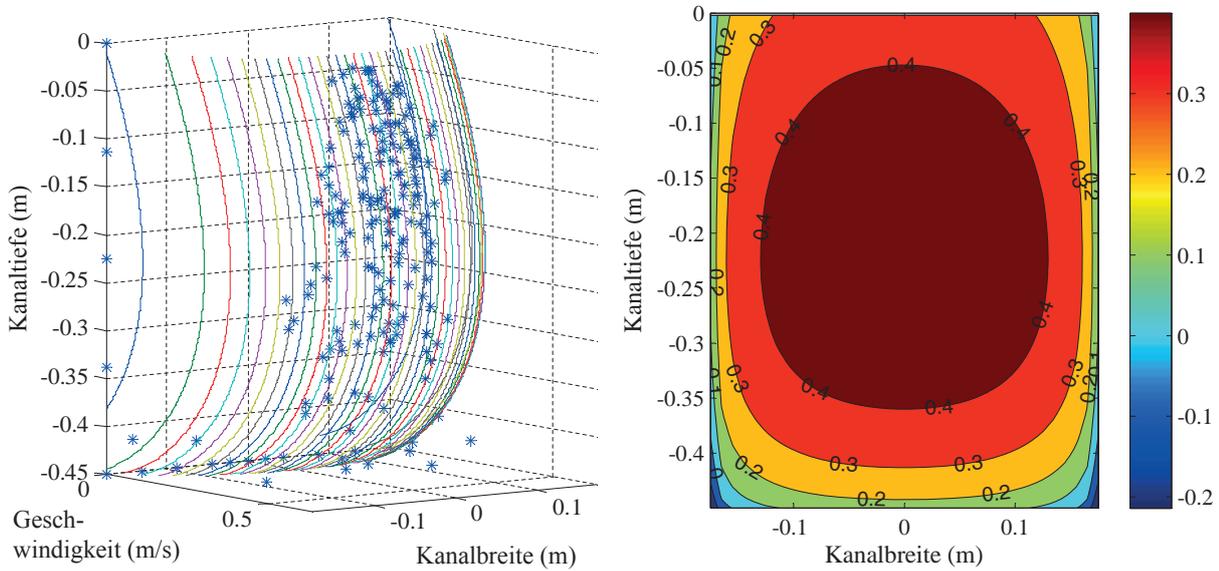


**Abb. A.26:** Messergebnisse zur vollgefüllten Rohrströmung bei einem gegebenen Durchfluss von 91/s ( $\hat{=} \bar{v}_{in}=1,15$  m/s) und einem gemessenen  $Q=91$ /s. Die Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten beträgt  $r_{LSQ}=0,349$  m/s. Links: Geschwindigkeiten von Strömungslinien und deren Ausgleichsmodell. Rechts: Geschwindigkeitsprofil mit Farbcodierung in m/s.

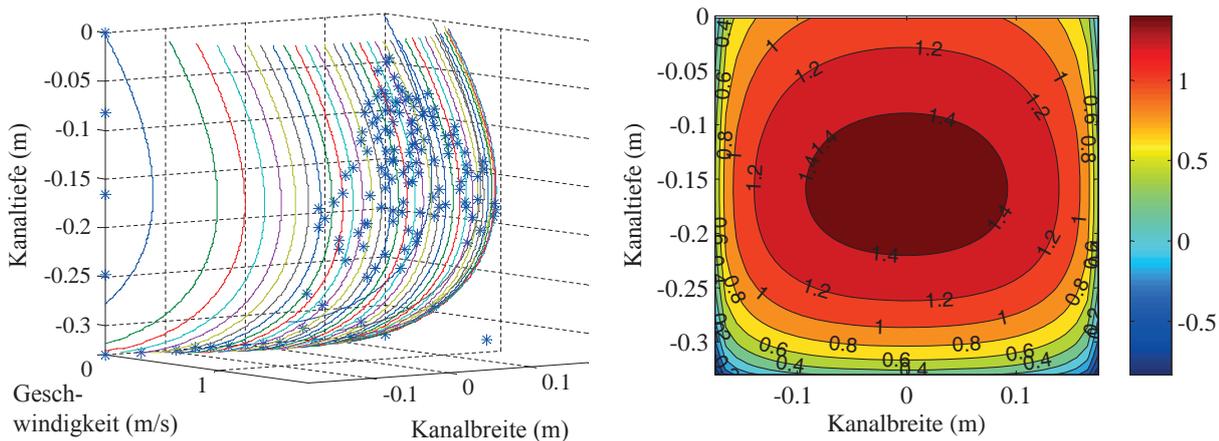
## A.20 Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - offener Kanal



**Abb. A.27:** Geschwindigkeiten von Strömungslinien und deren Ausgleichsmodell für einen offenen Kanal. Links: Gegebener Durchfluss aus der MID-Messung von 531/s und der gemessene Durchfluss von  $Q = 541/s$ . Die Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten beträgt  $r_{LSQ} = 0,0529$  m/s. Rechts: Gegebener Durchfluss von 831/s und der gemessene Durchfluss  $Q = 821/s$  mit einer Streuung von  $r_{LSQ} = 0,608$  m/s. Die Streuung  $r_{LSQ}$  wird anhand der Abweichung der Messwerte gegenüber dem Strömungsmodell bestimmt.

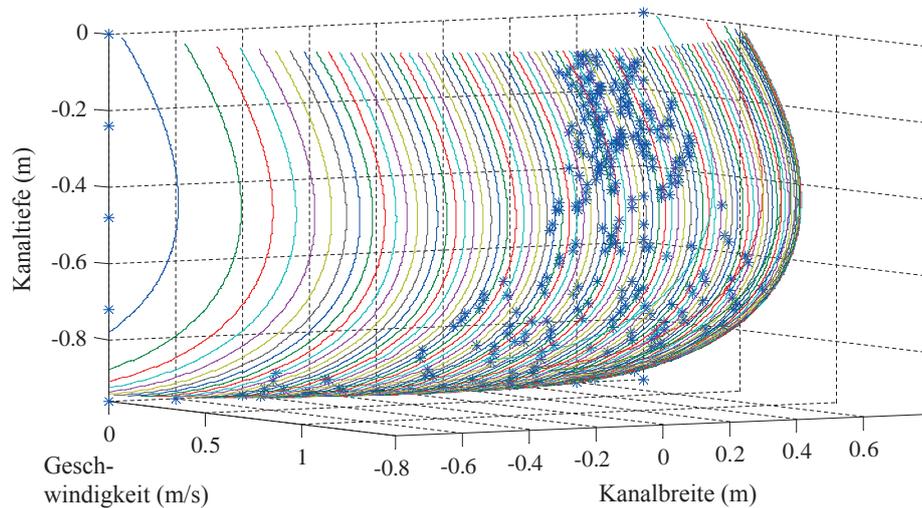


**Abb. A.28:** Messergebnisse im Kanal der Firma Nivus bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 30^\circ$ , einer Füllstandshöhe von  $\bar{h} = 455$  mm und einer Kanalbreite von  $b = 350$  mm. Der eingestellte Durchfluss beträgt 531/s und die Phased-Array-Messung ergibt  $Q = 531$ /s mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,0728$  m/s. Links: Geschwindigkeiten von Strömungslinien und deren Ausgleichsmodell. Rechts: Geschwindigkeitsprofil mit Farbcodierung in m/s.



**Abb. A.29:** Messergebnisse im Kanal der Firma Nivus bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 30^\circ$ , einer Füllstandshöhe von  $\bar{h} = 350$  mm und einer Kanalbreite von  $b = 350$  mm. Der eingestellte Durchfluss beträgt 1301/s und die Phased-Array-Messung ergibt  $Q = 1261$ /s mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,102$  m/s. Links: Geschwindigkeiten von Strömungslinien und deren Ausgleichsmodell. Rechts: Geschwindigkeitsprofil mit Farbcodierung in m/s.

## A.21 Messergebnisse: KF-PDA-Verfahren - Klärwerk Ulm



**Abb. A.30:** Messergebnisse im Kanal des Klärwerks bei einem Einstrahlwinkel von  $\beta = 45^\circ$ , einer Füllstandshöhe von  $\bar{h} = 960$  mm und einer Kanalbreite von  $b = 1600$  mm. Die MID-Messung ergab einen Durchfluss von 14601/s und die Phased-Array-Messung  $Q = 15251$ /s mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,119$  m/s. Die Streuung  $r_{LSQ}$  wird anhand der Abweichung der Messwerte gegenüber dem Strömungsmodell bestimmt.

## A.22 Herleitung Auswertestreuung der Kovarianz- methode

Um für die Kovarianzmethode die Standardabweichung bestimmen zu können, wird auf die allgemeingültige Gleichung zur Bestimmung von Momenten höherer Ordnung zurückgegriffen:

$$M_m = \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[m]}(0)}{(j2\pi)^m}. \quad (\text{A.73})$$

Dabei definiert die Variable  $[m]$  die Ordnung der Ableitung am Ursprung ( $\tau = 0$ ) der AKF  $\hat{\phi}_{ss}$ . Auf Basis dieser Gleichung lässt sich nun die Varianz wie folgt berechnen:

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[2]}(0)}{\hat{\phi}_{ss}(0)} - \left( \frac{\hat{\phi}_{ss}^{[1]}(0)}{\hat{\phi}_{ss}(0)} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.74})$$

Ist  $\hat{\phi}_{ss}(\tau)$  durch die komplexe Funktion  $A(\tau)e^{j2\pi\varphi(\tau)}$  gegeben, gilt für die erste und zweite Ableitung der AKF:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ss}^{[1]}(\tau) &= \frac{d\hat{\phi}_{ss}(\tau)}{d\tau} \\ &= \frac{dA(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} + A(\tau)j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} \\ \hat{\phi}_{ss}^{[2]}(\tau) &= \frac{d^2\hat{\phi}_{ss}(\tau)}{d^2\tau} \\ &= \frac{d^2A(\tau)}{d^2\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} + \frac{dA(\tau)}{d\tau} j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} + \\ &\quad \frac{dA(\tau)}{d\tau} j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} + A(\tau)j2\pi \frac{d^2\varphi(\tau)}{d^2\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} + \\ &\quad A(\tau) \left( j2\pi \frac{d^2\varphi(\tau)}{d^2\tau} \right)^2 e^{j2\pi\varphi(\tau)}. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Die Ableitungen eingesetzt in Gl. A.74 führt zu:

$$\begin{aligned}
\sigma_D^2 = \frac{1}{4\pi^2} & \left[ \frac{\frac{d^2 A(\tau)}{d^2 \tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)}} + \frac{\frac{dA(\tau)}{d\tau} j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)}} \right. \\
& + \frac{\frac{dA(\tau)}{d\tau} j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)}} + \frac{A(\tau) j2\pi \frac{d^2 \varphi(\tau)}{d^2 \tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)}} \\
& + \frac{A(\tau) \left( j2\pi \frac{d^2 \varphi(\tau)}{d^2 \tau} \right)^2 e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)}} - \frac{\left( \frac{dA(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} \right)^2}{(A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)})^2} \\
& \left. - \frac{2 \frac{dA(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} A(\tau) j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)}}{(A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)})^2} - \frac{\left( A(\tau) j2\pi \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} e^{j2\pi\varphi(\tau)} \right)^2}{(A(\tau) e^{j2\pi\varphi(\tau)})^2} \right]. \tag{A.76}
\end{aligned}$$

Da nun bei  $\tau = 0$  die Amplitude der AKF ihr Maximum besitzt, gilt für  $\left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0$ . Zudem schneidet die Phase  $\varphi(\tau)$  der AKF in einer Geraden die Abszisse im Koordinatenursprung, sodass auch für  $\left. \frac{d^2 \varphi(\tau)}{d^2 \tau} \right|_{\tau=0} = 0$  gilt. Damit kürzen sich sämtlich Terme in Gl. A.76 zu:

$$\sigma_D^2 = -\frac{1}{4\pi^2 A(0)} \left. \frac{d^2 A(\tau)}{d^2 \tau} \right|_{\tau=0}. \tag{A.77}$$

Die zweite Ableitung der Amplitude lässt sich durch die Differenzgleichung für kleine Verschiebungen  $\Delta T$  wie folgt

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 A(\tau)}{d^2 \tau} \right|_{\tau=0} & \approx \frac{A(0 + \Delta T) + A(0 - \Delta T) - 2A(0)}{\Delta T^2} \\
& = \frac{2(A(\Delta T) - A(0))}{\Delta T^2} = \frac{2}{\Delta T^2} \left( 1 - \frac{A(\Delta T)}{A(0)} \right) \tag{A.78}
\end{aligned}$$

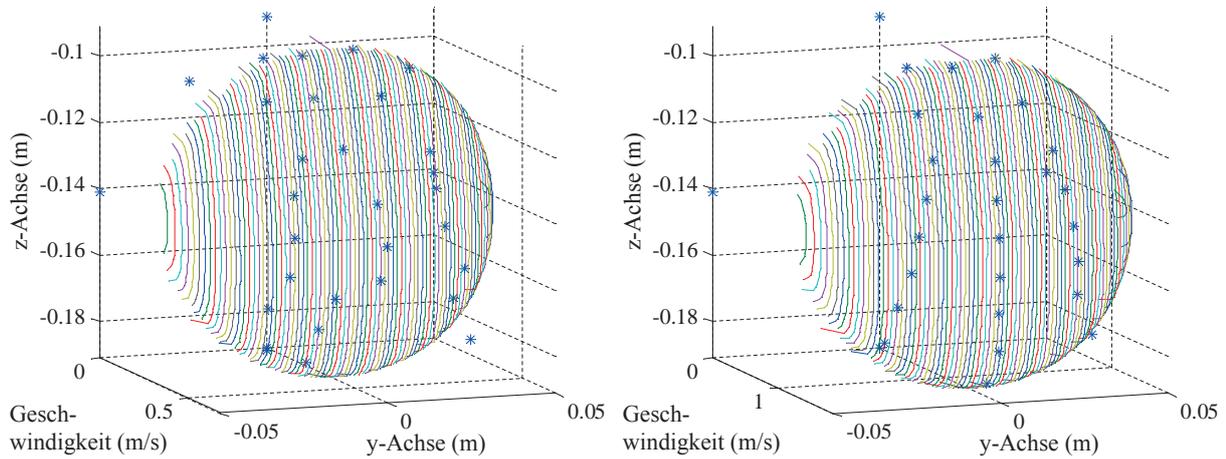
nähern, sodass eingesetzt in Gl. A.77 die Standardabweichung mit

$$\sigma_D \approx \frac{1}{\sqrt{2}\pi \Delta T} \sqrt{1 - \frac{A(\Delta T)}{A(0)}} \tag{A.79}$$

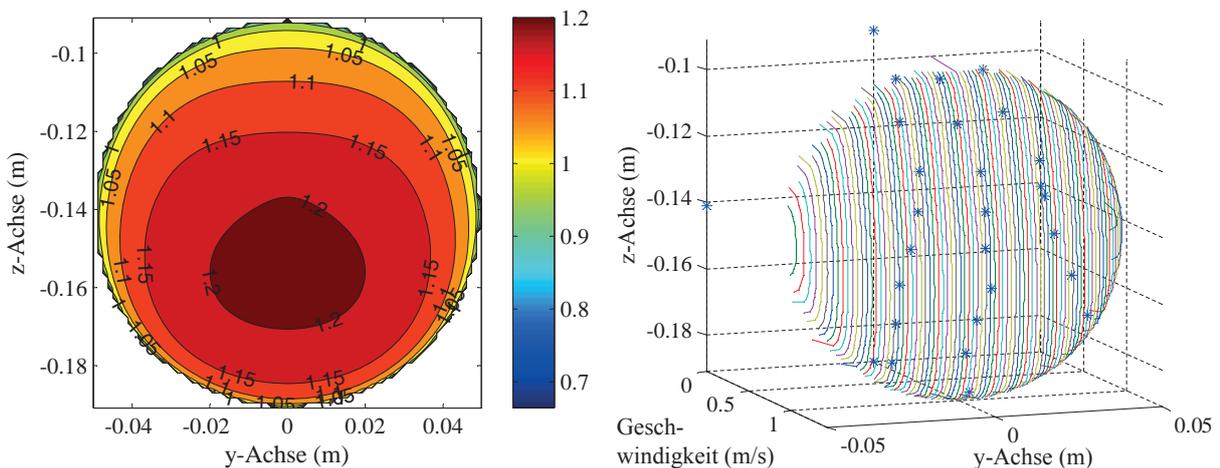
gegeben ist. Ist das Empfangssignal nun von weißem Rauschen überlagert, führt dies in der AKF zu einer Überlagerung des Nutzsignals mit einem Dirac-Impuls im Ursprung (vgl.[KP89]). Diese Rauschleistung  $\sigma_R$  gilt es im Ursprung der AKF zu eliminieren. Man erhält:

$$\sigma_D \approx \frac{1}{\sqrt{2}\pi \Delta T} \sqrt{1 - \frac{|\hat{\phi}_{ss}(\Delta T)|}{\hat{\phi}_{ss}(0) - \sigma_R}}. \tag{A.80}$$

### A.23 Messergebnisse: DFT mit Zero-Padding - voll-gefülltes Rohr

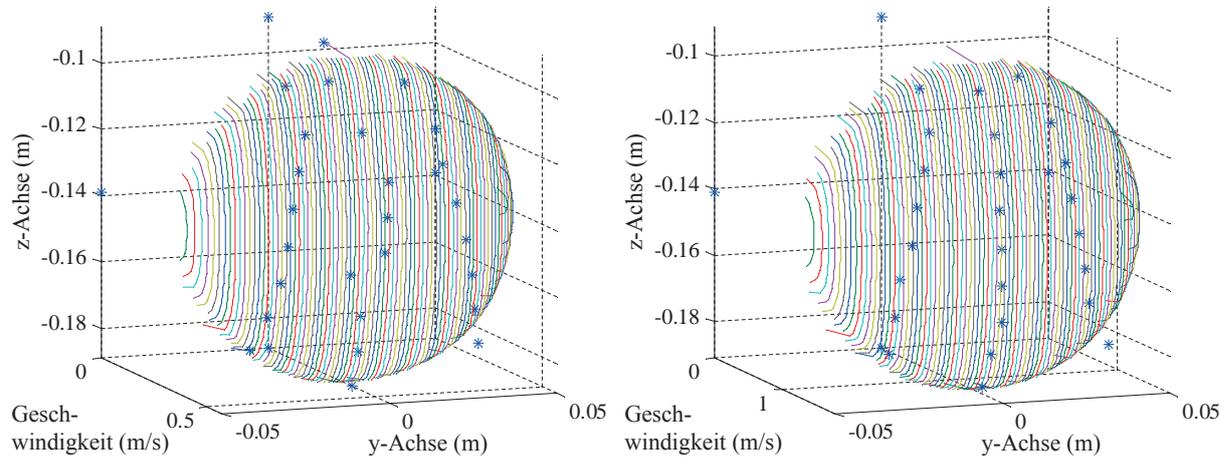


**Abb. A.31:** Durch die DFT mit Zero-Padding bestimmte Reflektorgeschwindigkeiten einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell für eine vollgefüllte Rohrströmung. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41$  l/s mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,137$  m/s bei einem gegebenen Durchfluss von  $3,51$  l/s; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 12,41$  l/s mit einer Streuung von  $r_{LSQ} = 0,159$  m/s bei einem gegebenen Durchfluss von  $12,51$  l/s.

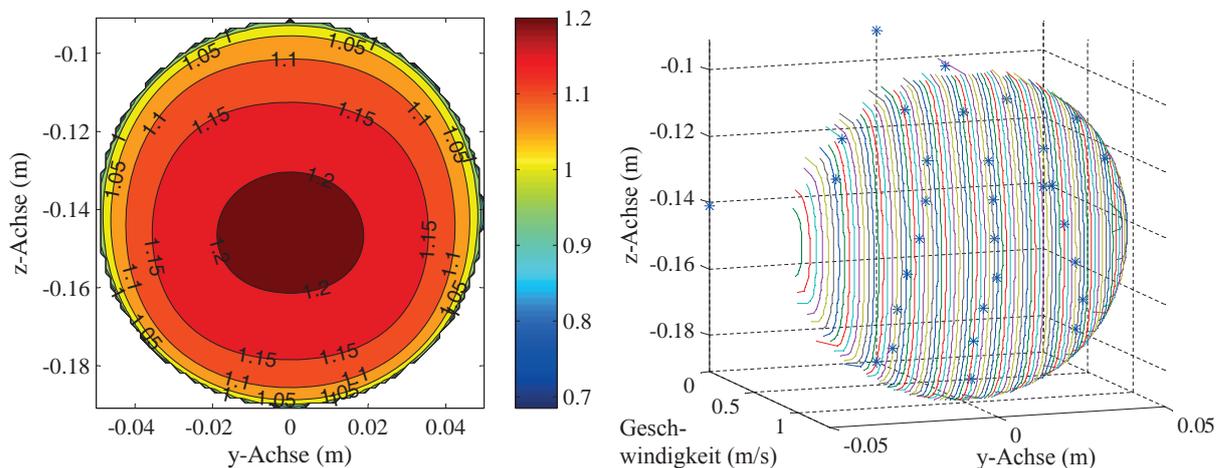


**Abb. A.32:** Links: Durch die DFT mit Zero-Padding gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit berechnetem  $Q = 8,91$  l/s und gegebenem Durchfluss von  $91$  l/s; Rechts: Reflektorgeschwindigkeit einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell bei  $Q = 8,91$  l/s und einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,151$  m/s.

## A.24 Messergebnisse: MUSIC-Verfahren - vollgefülltes Rohr

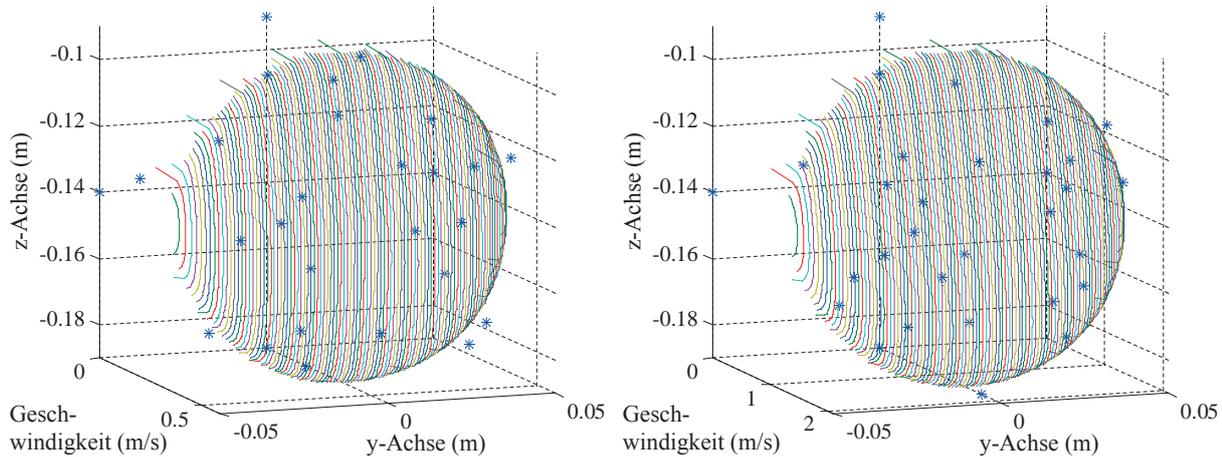


**Abb. A.33:** Durch das MUSIC-Verfahren bestimmte Reflektorgeschwindigkeiten einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell für eine vollgefüllte Rohrströmung. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,0574 m/s$  bei gegebenem Durchfluss von  $3,51/s$ ; Rechts: Gemessener Durchfluss  $Q = 12,41/s$  mit einer Streuung  $r_{LSQ} = 0,0995 m/s$  bei gegebenem Durchfluss von  $Q_{Ist} = 12,51/s$ .

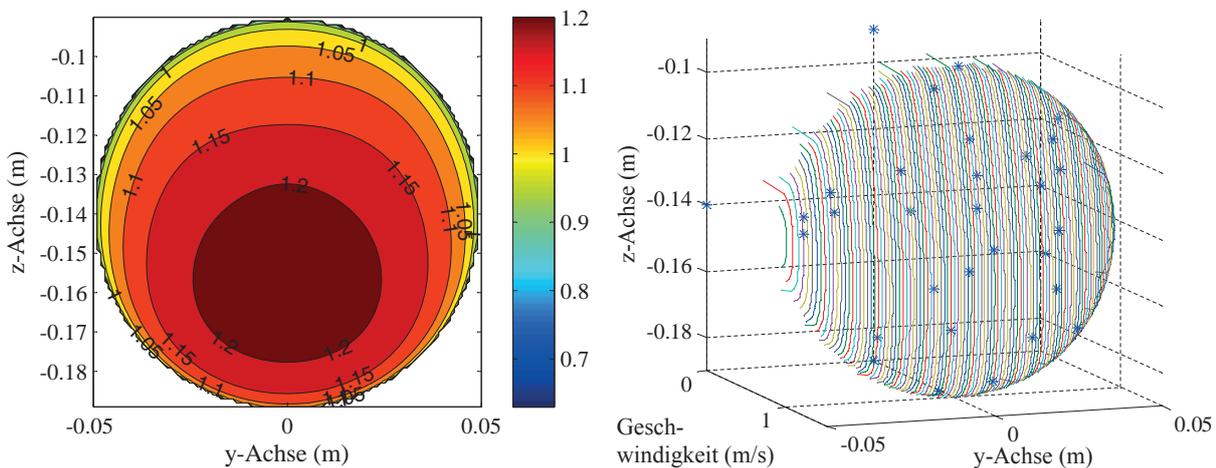


**Abb. A.34:** Links: Durch das MUSIC-Verfahren gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit berechnetem  $Q = 8,91/s$  und gegebenem Durchfluss von  $91/s$ ; Rechts: Reflektorgeschwindigkeit einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell bei  $Q = 8,91/s$  und einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten  $r_{LSQ} = 0,118 m/s$ .

## A.25 Messergebnisse: Fusionierte KF-PDA- mit DFT-Verfahren - vollgefülltes Rohr

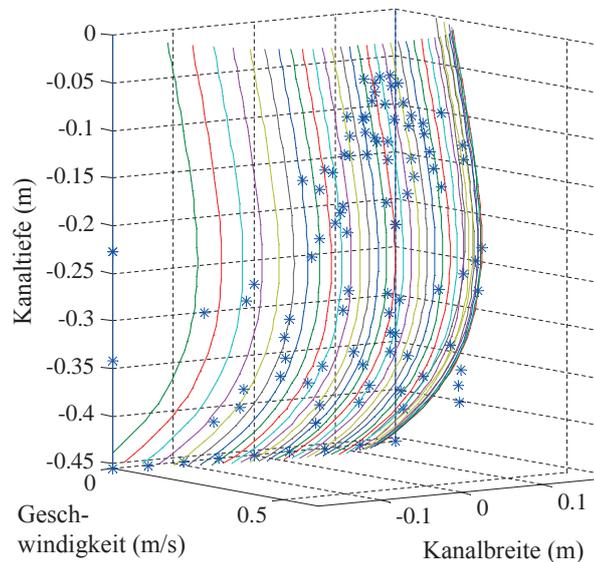


**Abb. A.35:** Reflektorgeschwindigkeiten und deren Ausgleichsmodell zum fusionierten KF-PDA-Verfahren mit DFT für eine vollgefüllte Rohrströmung. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,41/s$  mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten  $r_{LSQ} = 0,143 m/s$  bei gegebenem Durchfluss von  $3,51/s$ ; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 12,31/s$  mit einer Streuung  $r_{LSQ} = 0,439 m/s$  bei gegebenem Durchfluss von  $12,51/s$ .



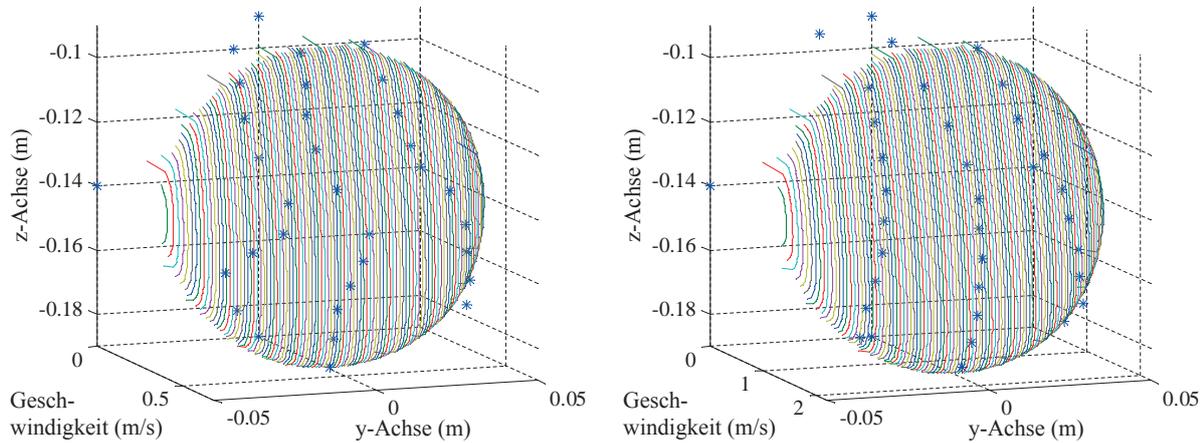
**Abb. A.36:** Links: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit berechnetem Durchfluss von  $8,91/s$  beim fusionierten KF-PDA-Verfahren mit DFT. Gegebener Durchfluss beträgt  $91/s$ ; Rechts: Dazugehörige Reflektorgeschwindigkeiten einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,366 m/s$ .

## A.26 Messergebnisse: Fusionierte KF-PDA- mit DFT-Verfahren - offener Kanal

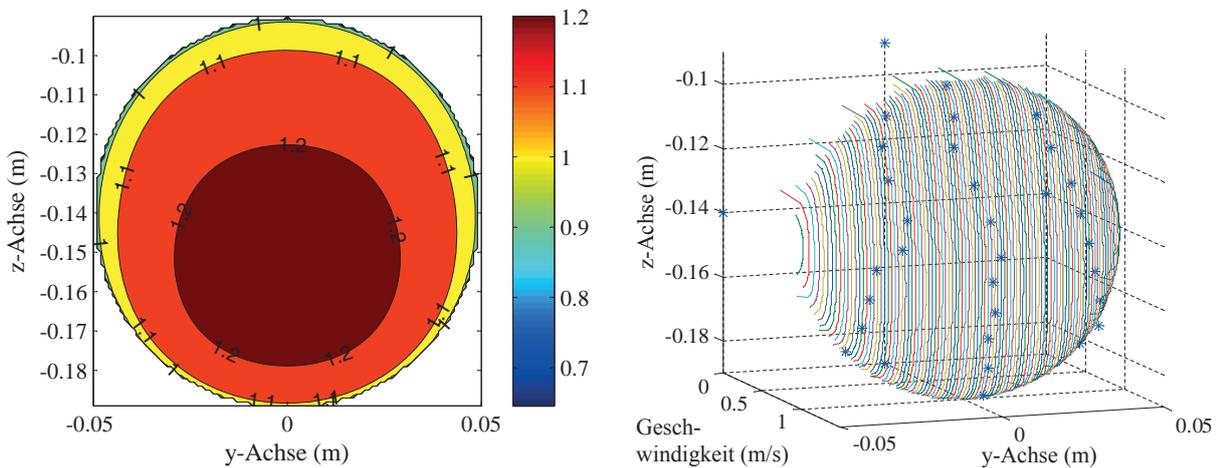


**Abb. A.37:** Reflektorgeschwindigkeiten und deren Ausgleichsmodell zum fusionierten KF-PDA-Verfahren mit DFT für eine offene Kanalströmung. Gemessener Durchfluss mit Phased-Array-Sensor  $Q = 52,91/\text{s}$  und der Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,0548 \text{ m/s}$  bei einem gegebenen Durchfluss von  $531/\text{s}$ .

## A.27 Messergebnisse: Erweiterte Dopplerauswertung MUSIC - vollgefülltes Rohr

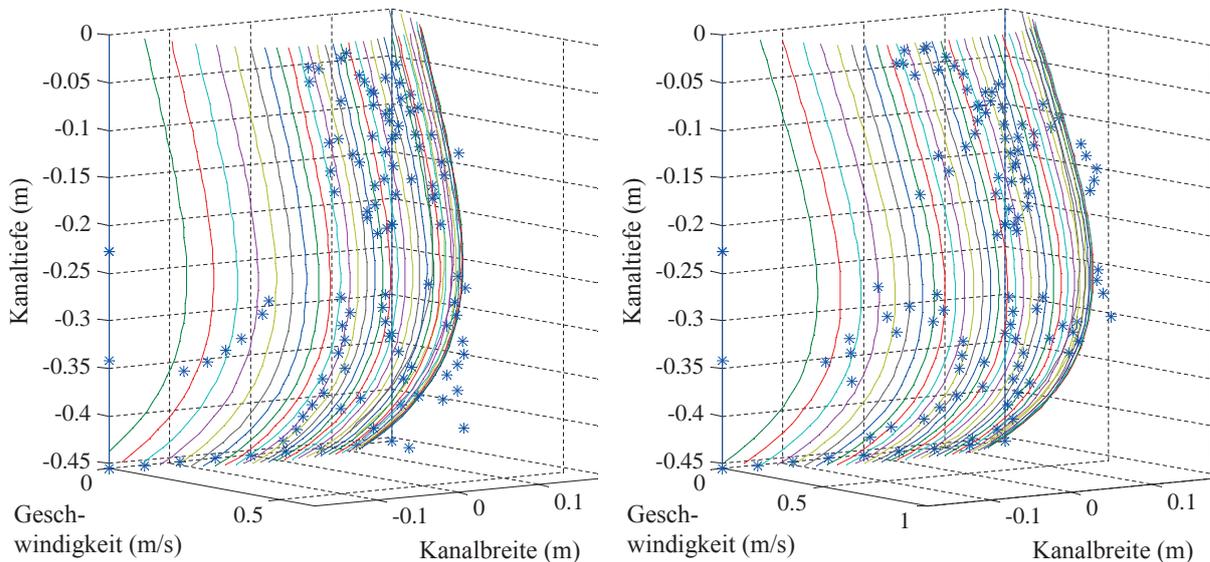


**Abb. A.38:** Cluster-Geschwindigkeiten und deren Ausgleichsmodell zur fusionierten Dopplerauswertung mit Hüllkurvendetektion und MUSIC-Verfahren für eine vollgefüllte Rohrströmung. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 3,51/s$  mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,120 \text{ m/s}$  bei einem gegebenen Durchfluss von  $3,51/s$ ; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 12,41/s$  mit einer Streuung von  $r_{LSQ} = 0,374 \text{ m/s}$  bei einem gegebenen Durchfluss von  $12,51/s$ .



**Abb. A.39:** Links: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung mit berechnetem Durchfluss von  $Q = 9,11/s$  bei fusionierter Dopplerauswertung mit Hüllkurvendetektion und MUSIC-Verfahren. Gegebener Durchfluss beträgt  $91/s$ ; Rechts: Dazugehörige Cluster-Geschwindigkeiten einer jeden Raumzone und deren Ausgleichsmodell mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten von  $r_{LSQ} = 0,183 \text{ m/s}$ .

## A.28 Messergebnisse: Erweiterte Dopplerauswertung MUSIC - offener Kanal



**Abb. A.40:** Cluster-Geschwindigkeiten und deren Ausgleichsmodell zur fusionierten Dopplerauswertung mit Hüllkurvendetektion und MUSIC-Verfahren für eine offene Kanalströmung. Links: Gemessener Durchfluss von  $Q = 52,31$  l/s mit einer Streuung der Reflektorgeschwindigkeiten  $r_{LSQ} = 0,0787$  m/s bei gegebenem Durchfluss von 531 l/s; Rechts: Gemessener Durchfluss von  $Q = 841$  l/s mit einer Streuung  $r_{LSQ} = 0,157$  m/s bei gegebenem Durchfluss von 831 l/s.





# Literaturverzeichnis

- [Bay63] T. Bayes, “An essay towards solving a problem in the doctrine of chances”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Bd. 53, S. 370–418, 1763.
- [BC89] D. P. Bertsekas und D. A. Castafion, “The auction algorithm for the minimum cost network flow problem”, Massachusetts Institute of Technology, Laboratory for Information and Decision Systems, Tech. Rep. LIDS-P-1925, 1989.
- [BCDT91] B. H. Brumley, R. G. Cabrera, K. L. Deines und E. A. Terray, “Performance of a broad-band acoustic doppler current profiler”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Bd. 16, Nr. 4, S. 402–407, 1991.
- [Ber91] P. Bertsekas, D., *Linear Network Optimization: Algorithms and Codes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
- [Ber92] D. P. Bertsekas, “Auction algorithms for network flow problems: A tutorial introduction”, *Computational Optimization and Applications*, Bd. 1, S. 7–66, 1992.
- [Bes07] B. Best, *Phase Locked Loops: Design, Simulation, and Applications*. McGraw-Hill, 2007, 6. Auflage.
- [Bet06] O. Betz, “Drei auf einen Streich - Neuer Ultraschallsensor ermöglicht multifunktionale Abwasserüberwachung”, *P & A Kompendium 2005/2006*, S. 138–139, 2005–2006.
- [BGSW72] F. C. Benham, H. L. Groginsky, A. S. Soltes und G. Works, “Pulse pair estimation of doppler spectrum parameters”, Raytheon Company, Tech. Rep., 1972.
- [Bla86] S. Blackman, *Multiple-Target Tracking with Radar Applications*. Artech House, 1986.
- [Bla04] U. Blahak, “Analyse des Extinktionseffektes bei Niederschlagsmessungen mit einem C-Band Radar anhand von Simulation und Messung”, Dissertation, TH Karlsruhe, Mai 2004.

- [BLJ07] H. Bonakdari, F. Larrarté und C. Joannis, “Effect of a bend on the velocity field in a circular sewer with free surface flow”, in *Novatech*, Lyon, Frankreich, 2007.
- [BMVW08] J. B. Bardiaux, R. Mosé, J. Vazquez und J. Wertel, “Two turbulent flow 3d-modelings to improve sewer net instrumentation”, in *11th International Conference on Urban Drainage*, Edinburgh, UK, 2008.
- [Bol07] G. Bollrich, *Technische Hydromechanik 1: Grundlagen*. Huss-Medien, 2007, 6. veränd. Auflage.
- [Bon89] R. Bonert, “Design of a high performance digital tachometer with a microcontroller”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Bd. 38, Nr. 6, S. 1104–1108, 1989.
- [Bon90] K. W. Bonfig, *Durchflussmessung von Flüssigkeiten und Gasen*. Stuttgart: Expert-Verlag, 1990.
- [BP99] S. Blackman und R. Popoli, *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, 1999.
- [Bra78] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 1978, 2. Auflage.
- [Bre10] E. F. Brekke, “Clutter mitigation for target tracking”, Dissertation, Norwegian University of Science and Technology, 2010.
- [Bru08] A. Brucker, *Durchflussmesstechnik*. München: Oldenbourg Verlag, 2008, Bd. 5.
- [BSDH09] Y. Bar-Shalom, F. Daum und J. Huang, “The probabilistic data association filter, estimation in the presence of measurement origin uncertainty”, *IEEE Control Systems Magazine*, Bd. 29, Nr. 6, S. 82–100, 2009.
- [BSF88] Y. Bar-Shalom und T. E. Fortmann, *Tracking and Data Association*. Academic Press, 1988, Bd. 179 von Mathematics in Science and Engineering Series.
- [BSKL05] Y. Bar-Shalom, T. Kirubarajan und X. Lin, “Probabilistic data association techniques for target tracking with applications to sonar, radar and eo sensors”, *IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine*, Bd. 20, Nr. 8, S. 37–56, 2005.
- [BSL93] Y. Bar-Shalom und X. R. Li, *Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software*. Boston: Artech House, 1993.
- [BSL95] ———, *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*. Storrs, CT, USA: YBS Publishing, 1995, 1. Auflage.

- [BSLK01] Y. Bar-Shalom, X. R. Li und T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [BSMM01] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühl, *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 2001, 5. Auflage.
- [BST75] Y. Bar-Shalom und E. Tse, “Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association”, *Journal Automatica (Journal of IFAC)*, Bd. 11, Nr. 5, S. 451–460, 1975.
- [BVM<sup>+</sup>07] J. B. Bardiaux, J. Vazquez, R. Mose, H. Bondakdari und F. Larrarte, “Assessment of velocity fields through open channels: creation of empirical laws”, in *Novatech*, Lyon, Frankreich, 2007.
- [CDBT87] R. Cabrera, K. Deines, B. Brumley und E. Terray, “Development of a practical coherent acoustic doppler current profiler”, in *IEEE/MTS OCEANS’87*, Halifax, Kanada, 1987, S. 93–97.
- [Che14] Z. Chen, “Bayesian filtering: From Kalman filters to particle filters, and beyond”, S. 1–69, 2003 (30.12.2014), <http://www2.ee.kuas.edu.tw/~lwang/WWW/BayesianFilteringFromKalmanFiltersToParticleFiltersAndBeyond.pdf>.
- [CLL<sup>+</sup>96] J. Chen, H. Leung, T. Lo, J. Litva und M. Blanchette, “A modified probabilistic data association filter in a real clutter environment”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 32, Nr. 1, S. 300–313, 1996.
- [Col56] D. Coles, “The law of the wake in the turbulent boundary layer”, *Journal of Fluid Mechanics*, Bd. 1, Nr. 2, S. 191–226, 1956.
- [CT65] J. W. Cooley und J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex fourier series”, *Mathematics of Computation*, Bd. 19, Nr. 90, S. 297–301, 1965.
- [Daß02] H. Daßler, “Mikromechanisch realisierte PVDF-Ultraschallwandler-Arrays für Anwendungen in Flüssigkeiten”, Dissertation, Technischen Universität Chemnitz, Januar 2002.
- [DdFG01] A. Doucet, N. de Freitas und S. Godsill, *Sequential Monte Carlo methods in practice*. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [DHW04] H. J. Dallwig, R. Hassinger und B. Welp, “Durchflussmessenrichtungen in Kläranlagen”, *Landesumweltamt Nordrhein-Westfalen*, Bd. 47 Merkblätter, 2004.

- [DR84] P. Davis und P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*. New York: Academic Press, 1984, 2. Auflage.
- [Dur60] J. Durbin, “The fitting of time-series models”, *Review of the International Statistical Institute*, Bd. 28, Nr. 3, S. 233–244, 1960.
- [DZ93] R. J. Doviak und D. S. Zrnić, *Doppler Radar and Weather Observations*. New York: Dover Publications, 1993, 2. Auflage.
- [DZH12] J. Dillon, L. Zedel und A. E. Hay, “On the distribution of velocity measurements from pulse-to-pulse coherent doppler sonar”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Bd. 37, Nr. 4, S. 613–625, 2012.
- [DZS79] R. J. Doviak, D. S. Zrnić und D. S. Sirmans, “Doppler weather radar”, *Proceedings of the IEEE*, Bd. 67, Nr. 11, S. 1522–1553, 1979.
- [FBSS83] E. Fortmann, T. Y. Bar-Shalom und M. Scheffe, “Sonar tracking of multiple targets using joint probabilistic data association”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Bd. 8, Nr. 3, S. 173–184, 1983.
- [FG<sup>+</sup>10] F. Frenzel, H. Grothey *et al.*, *Industrielle Durchfluss-Messtechnik, Grundlagen und Praxis*. ABB Automation Products GmbH, 2010.
- [FH85] W. J. Fleming und A. K. Hundiwal, “Radar ground speed sensors”, in *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC)*, Bd. 35, Boulder, CO, 1985, S. 262–272.
- [FHL<sup>+</sup>03] D. Fox, J. Hightower, L. Liao, D. Schulz und G. Borriello, “Bayesian filtering for location estimation”, *IEEE Pervasive Computing*, Bd. 2, Nr. 3, S. 24–33, 2003.
- [Fie92] O. Fiedler, *Strömungs- und Durchflussmesstechnik*. München: Oldenbourg Verlag, 1992.
- [FKS84] W. Fasold, W. Kraak und W. Schirmer, *Taschenbuch Akustik*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1984.
- [Fli91] N. Fliege, *Systemtheorie*, Reihe Informationstechnik. Stuttgart: Teubner Verlag, 1991.
- [GDWH92] S. Grime, H. F. Durrant-Whyte und P. Ho, “Communication in decentralized data-fusion systems”, in *American Control Conference*, Chicago, IL, 1992, S. 3299–3303.
- [Ges87] H. Geschwinde, *Einführung in die PLL-Technik*. Vieweg Verlag, 1987, 3. Auflage.

- [GH85] A. A. Giordano und F. M. Hsu, *Least Square Estimation with Application to Digital Signal Processing*. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [GK42] A. George und M. H. Kiesler, “Secret communication system”, 1942, US Patent 2,292,387.
- [Gol67] R. Gold, “Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Bd. 13, Nr. 4, S. 619–621, 1967.
- [Gro02] B. Grocholsky, “Information-Theoretic Control of Multiple Sensor Platforms”, Dissertation, University of Sydney, März 2002.
- [GVC96] G. H. Golub, L. Van und F. Charles, *Matrix computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996, 3. Auflage.
- [Hai13] M. Haide, “Ultrasonic flow measurement by tracking streamlines in pipes”, in *IEEE Sensors*, Baltimore, MD, 2013, S. 1–4.
- [Hän01] E. Hänsler, *Statistische Signale: Grundlagen und Anwendungen*, 3rd Ausg. Springer Berlin, 2001.
- [Han03] A. Hans, “Entwicklung eines Inline-Viskosimeters auf Basis eines magnetisch-induktiven Durchflussmessers”, Dissertation, Universität Karlsruhe, November 2003.
- [HFG<sup>+</sup>11] M. Haide, M. Fleischmann, G. Gramlich, K. Ressel, W. Schroer, M. Teufel und L. Sollic, “Error analyses of doppler-flow meters and correlation-flow meters by using an interface to execute cfd simulations”, in *SimTech 2011*, Stuttgart, 2011.
- [HGST11] M. Haide, G. Gramlich, W. Schroer und M. Teufel, “Designing a sound propagation model for a flow rate sensor based on cfd-particle streams”, in *Arbeitsgemeinschaft Simulation (ASIM)*, ZHAW, Winterthur, Schweiz, 2011.
- [HL64] Y. C. Ho und R. Lee, “A bayesian approach to problems in stochastic estimation and control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 9, Nr. 4, S. 333–339, 1964.
- [HS04] E. Hänsler und G. Schmidt, *Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004.
- [HS13] M. Haide und W. Schroer, “Flow measurement in open channels by using an ultrasonic phased array sensor”, in *IEEE Sensors*, Baltimore, MD, 2013, S. 1–4.

- [HSF08] H. Henn, G. R. Sinambari und M. Fallen, *Ingenieurakustik: Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008, 4. Ausgabe.
- [Huf06] M. Hufschmid, *Information und Kommunikation - Grundlagen und Verfahren der Informationsübertragung*. Teubner Verlag, 2006.
- [HWX09] H. Huang, F. Wang und Z. Xi, “V-adcp: A new acoustic doppler current profiler for measuring water velocity, level, and flow in open channels or large pipes”, in *33rd International Association of Hydraulic Engineering & Research (IAHR) Congress*, Vancouver, Kanada, 2009, S. 4425–4432.
- [II86] H. Imamoto und T. Ishigaki, “Visualization of longitudinal eddies in open channel flow”, in *Proceedings of 4th International Symposium on Flow Visualization*, Paris, Frankreich, 1986, S. 323–337.
- [ISO99] ISO[9613-2], *Akustik - Dämpfung des Schalls bei der Ausbreitung im Freien - Teil 2: Allgemeines Berechnungsverfahren*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 1999, Normenausschuss Akustik, Lärminderung und Schwingungstechnik (NALS) im DIN und VDI.
- [ISO05] ISO[6416], *Hydrometrie - Messung des Abflusses mit dem Ultraschallverfahren (akustisches Verfahren)*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 2005, Normenausschuss Wasserwesen (NAW).
- [ISO07] ISO[748], *Hydrometrie - Durchflussmessung in offenen Gerinnen mittels Fließgeschwindigkeitsmessgeräten oder Schwimmern*. DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 2007, Normenausschuss Wasserwesen (NAW).
- [Jop94] M. Joppich, *Schätzverfahren zur Genauigkeitssteigerung der Geschwindigkeitsmessung über Grund nach dem Dopplerprinzip*, Reihe 8. Düsseldorf: VDI-Verlag, Juli 1994, Nr. 440, Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [JUDW95] S. J. Julier, J. S. Uhlmann und H. F. Durrant-Whyte, “A new approach for filtering nonlinear systems”, in *Proceedings of the American Control Conference*, Bd. 3, Seattle, WA, 1995, S. 1628–1632.
- [JV87] R. Jonker und A. Volgenant, “A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems”, *Computing*, Bd. 38, Nr. 4, S. 325–340, 1987.
- [K05] B. U. Köhler, *Konzepte der statistischen Signalverarbeitung*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

- [Kal60] T. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems”, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, Bd. 82 - (Series D), S. 35–45, 1960.
- [Kam04] K. D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*. Wiesbaden: Teubner Verlag, 2004, 3. Auflage.
- [Kay88] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [KBS96] T. Kirubarajan und Y. Bar-Shalom, “Low observable target motion analysis using amplitude information”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 32, Nr. 4, S. 1367–1384, 1996.
- [KBS04] —, “Probabilistic data association techniques for target tracking in clutter”, *Proceedings of the IEEE*, Bd. 92, Nr. 3, S. 536–557, 2004.
- [Keh94] J. Kehrbeck, “Mikrowellen-Doppler-Sensor zur Geschwindigkeits- und Wegmessung- System-Modellierung und Verifikation”, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1994.
- [KK09] K. D. Kammeyer und K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009, 7. Auflage.
- [Köl04] C. Kölling, “SIMK - calibration of streamflow - gauging stations in rivers and canals”, in *5th International Conference in Hydraulic Efficiency Measurement (IGHM)*, Luzern, Schweiz, 2004.
- [KM03] Y. Kosuge und T. Matsuzaki, “The optimum gate shape and threshold for target tracking”, in *Society of Instrument and Control Engineers (SICE) Annual Conference*, Bd. 2, Fukui, Japan, 2003, S. 2152–2157.
- [KP89] R. J. Keller und R. E. Passarelli, “Signal processing for atmospheric radars”, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, Tech. Rep., 1989.
- [KS07] W. K. Kenneth und H. C. So, “An unbiased Pisarenko harmonic decomposition estimator for single-tone frequency”, in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Poznań, Poland, 2007, S. 956–959.
- [KTSH08] K. Klepiszewski, M. Teufel, S. Seiffert und E. Henry, “Cross correlation - the better ultra sonic doppler - technique”, in *6th International Symposium on Ultrasonic Doppler Methods for Fluid Mechanics and Fluid Engineering (ISUD)*, Prag, Tschechische Republik, 2008.
- [KTSH10] —, “Measurement of flow velocity profiles in tank structures using the prototype device OCM Pro LR”, in *Novatech*, Lyon, Frankreich, 2010.

- [Kut88] H. Kuttruff, *Physik und Technik des Ultraschalls*. Stuttgart: Hirzel Verlag, 1988.
- [KV95] C. Kölling und F. Valentin, “SIMK - Abflussmessungen”, *Wasserwirtschaft*, Bd. 85, Nr. 10, S. 494–499, 1995.
- [LBS93] D. Lerro und Y. Bar-Shalom, “Interacting multiple model tracking with target amplitude feature”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 29, Nr. 2, S. 494–509, 1993.
- [LCK94] A. Lohrmann, R. Cabrera und N. Kraus, “Acoustic-doppler velocimeter (ADV) for laboratory use”, in *Fundamentals and Advancements in Hydraulic Measurements and Experimentation*, Buffalo, NY, 1994, S. 351–365.
- [Lec09] S. Lecheler, *Numerische Strömungsberechnung: Schneller Einstieg durch ausführliche praxisrelevante Beispiele*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2009, 2. Auflage.
- [Lee00] J. Lee, “Poly-pulse pair estimation in a doppler weather radar”, in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Bd. 4, Nr. root, Salt Lake City, UT, 2000, S. 1968–1971.
- [Lev47] N. Levinson, “The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction”, *Journal of Mathematics and Physics*, Bd. 25, Nr. 4, S. 261–278, 1947.
- [Lhe73] R. Lhermitte, “Meteorological doppler radar”, *Science*, Bd. 182, Nr. 4109, S. 258–262, 1973.
- [Lhe81] —, “Observations of water flow high resolution doppler sonar”, *Geophysical Research Letters*, Bd. 8, Nr. 2, S. 155–158, 1981.
- [Lhe83] —, “Doppler sonar observation of tidal flow”, *Journal of Geophysical Research*, Bd. 88, Nr. C1, S. 725–742, 1983.
- [Lj11] E. Laurien und O. H. jr., *Numerische Strömungsmechanik: Grundgleichungen und Modelle - Lösungsmethoden - Qualität und Genauigkeit*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011, 4. Auflage.
- [LL84] R. Lhermitte und U. Lemmin, “Open-channel flow and turbulence measurement by high-resolution doppler sonar”, *American Meteorological Society (AMS)*, Bd. 11, S. 1295–1308, 1984.
- [LL00] X. R. Li und N. Li, “Integrated real-time estimation of clutter density for tracking”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Bd. 48, Nr. 10, S. 2797–2805, 2000.

- [LMM09] K. J. Langenberg, R. Marklein und K. Mayer, *Theoretische Grundlagen der zerstörungsfreien Materialprüfung mit Ultraschall*. München: Oldenbourg Verlag, 2009.
- [LO10] H. D. Lüke und J. R. Ohm, *Signalübertragung: Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. Berlin: Springer-Verlag, 2010, 11. Auflage.
- [LR97] U. Lemmin und T. Rolland, “Acoustic velocity profiler for laboratory and field studies”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Bd. 123, Nr. 12, S. 1089–1098, 1997.
- [LS84] R. Lhermitte und R. Serafin, “Pulse-to-pulse coherent doppler sonar signal processing techniques”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Bd. 1, Nr. 4, S. 293–308, 1984.
- [LS04] J. R. Lacy und C. R. Sherwood, “Accuracy of a pulse-coherent acoustic doppler profiler in a wave-dominated flow”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Bd. 21, S. 1448–1461, 2004.
- [LSW09] R. Lerch, G. M. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [Mar79] L. Marple, “Spectral line analysis by Pisarenko and Prony methods”, in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Bd. 4, Washington D.C., 1979, S. 159–161.
- [Mäh09] M. Mählich, “Filtersynthese zur simultanen Minimierung von Existenz-, Assoziations- und Zustandsunsicherheiten in der Fahrzeugumfelderfassung mit heterogenen Sensordaten”, Dissertation, Universität Ulm, August 2009.
- [Mor10] G. Morgenschweis, *Hydrometrie, Theorie und Praxis der Durchflussmessung in offenen Gerinnen*. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [MR70] K. S. Miller und M. R. Rochwarger, “On estimating spectral moments in the presence of colored noise”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Bd. 16, Nr. 3, S. 303–309, 1970.
- [MR72] —, “A covariance approach to spectral moment estimation”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Bd. 18, Nr. 5, S. 588–596, 1972.
- [Mös09] M. Möser, *Technische Akustik*. Berlin: Springer-Verlag, 2009, 8. Auflage.
- [MSMM05] D. Mušicki, S. Suvorova, M. Morelande und B. Moran, “Clutter map and target tracking”, in *8th International Conference on Information Fusion (FUSION)*, Bd. 1, Philadelphia, PA, 2005.

- [MSW98] A. Michalski, J. Starzyrski und S. Wincenciak, “Optimal design of the coils of an electromagnetic flow meter”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Bd. 34, Nr. 5, S. 2563–2566, 1998.
- [Mun11] M. Munz, “Generisches Sensorfusionsframework zur gleichzeitigen Zustands- und Existenzschätzung für die Fahrzeugumfeldererkennung”, Dissertation, Universität Ulm, Juli 2011.
- [Mut98] A. G. O. Mutambara, *Decentralized Estimation and Control for Multisensor Systems*. New York: CRC Press, 1998.
- [MW95] R. N. McDonough und A. D. Whalen, *Detection of Signals in Noise*. San Diego: Academic Press, 1995, 2. Auflage.
- [New87] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Universität von Kalifornien: J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687, Neuauflage 2011.
- [Nie02] M. Niemann, “Signalverarbeitung in der Ultraschall-Durchflussmessung”, Dissertation, Universität Essen, April 2002.
- [NN93] I. Nezu und H. Nakagawa, *Turbulence in Open-Channel Flow*. New York: CRC Press, 1993.
- [Opf94] G. Opfer, *Numerische Mathematik für Anfänger*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1994, 2. Auflage.
- [OR71] A. F. Orlicek und F. L. Reuther, *Zur Technik der Mengen- und Durchflussmessung von Flüssigkeiten*. München: Oldenbourg Verlag, 1971.
- [PA05] R. Poluri und A. N. Akansu, “New orthogonal binary user codes for multiuser spread spectrum communications”, in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Antalya, Türkei, 2005, S. 1–4.
- [Pap62] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill, 1962.
- [Pap84] —, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1984, 2. Auflage.
- [Pin79] R. Pinkel, “Observations of strongly nonlinear internal motion in the open sea using a range-gated doppler sonar”, *Journal of Physical Oceanography*, Bd. 9, S. 675–686, 1979.
- [Pis73] V. F. Pisarenko, “The retrieval of harmonics from a covariance function”, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 33, Nr. 3, S. 347–366, 1973.

- [PM96] J. G. Proakis und D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996, 3. Auflage.
- [Pro91] M. Prokin, “Double buffered wide-range frequency measurement method for digital tachometers”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Bd. 40, Nr. 3, S. 606–610, 1991.
- [Qi00] W. Qi, “Finite element study on 1-d array transducer design”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Bd. 47, Nr. 4, S. 949–955, 2000.
- [Rao96] R. P. N. Rao, “Robust Kalman filter for prediction, recognition, and learning”, The University of Rochester, Computer Science Department, Tech. Rep., 1996.
- [Rei68] W. Reichardt, *Grundlagen der technischen Akustik*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1968.
- [Rot10] J. C. Rotta, *Turbulente Strömungen: Eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung*, Reihe Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik Bd. 8. Göttingen: Universitätsverlag Göttingen, 2010.
- [RTS65] H. E. Rauch, F. Tung und C. T. Striebel, “Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems”, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, Bd. 3, Nr. 8, S. 1445–1450, 1965.
- [Rum68] W. D. Rummel, “Introduction of a new estimator for velocity spectral parameters”, Bell Telephone Labs., Whippany, NJ, Tech. Rep. MM68-4121-5, 1968.
- [SA91] W. A. Smith und B. A. Auld, “Modeling 1-3 composite piezoelectrics: Thickness-mode oscillations”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Bd. 38, Nr. 1, S. 40–47, 1991.
- [Sch05] R. Scheithauer, *Signale und Systeme: Grundlagen für die Mess- und Regelungstechnik und Nachrichtentechnik*. Wiesbaden: Teubner Verlag, 2005, 2. Auflage.
- [Sch10] H. W. Schüßler, *Digitale Signalverarbeitung 2: Entwurf diskreter Systeme*. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [SD08] K. Subrata Das, *High-Level Data Fusion*. Norwood, MA: Artech House, 2008.
- [SH99] S. D. Stearns und D. R. Hush, *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. München: Oldenbourg Verlag, 1999, 7. Auflage.

- [Sie00] H. E. Siekmann, *Strömungslehre: Grundlagen*. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [SM97] P. Stoica und R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [Smi89] W. A. Smith, “The role of piezocomposites in ultrasonic transducers”, in *IEEE Proceedings Ultrasonics Symposium*, Montreal, Kanada, 1989.
- [SO93] M. R. Simpson und R. N. Oltmann, *Discharge-Mmeasurement System Using an Acoustic Doppler Current Profiler with Applications to Large Rivers and Estuaries*, Reihe Water-Supply Paper. U.S. Geological Survey, 1993, Nr. 2395.
- [Sol13] L. Sollicec, “Real time flow rate modelling in disturbed conditions from velocity profilers”, Dissertation, Universität de Strasbourg, Dezember 2013.
- [SOSL02] M. K. Simon, J. K. Omura, R. A. Scholtz und B. K. Levitt, *Spread Spectrum Communications Handbook*, Reihe Telecom Engineering. McGraw-Hill, 2002, Elektronische Auflage.
- [Spu96] J. H. Spurk, *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Berlin: Springer-Verlag, 1996, 4. Auflage.
- [SS07] D. Surek und S. Stempin, *Angewandte Strömungsmechanik: für Praxis und Studium*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2007, 1. Auflage.
- [ST10] L. Sollicec und M. Teufel, “Using velocity profiles to determine an accurate volume flow rate at small and large dimensions”, in *Novatech*, Lyon, Frankreich, 2010.
- [Sti98] G. W. Stimson, *Introduction to Airborne Radar*. Mendham, NJ: SciTech Publishing, 1998, 2. Auflage.
- [Sto93] P. Stoica, “List of references on spectral line analysis”, *Signal Processing*, Bd. 31, Nr. 3, S. 329–340, 1993.
- [Sul01] S. C. Sulzer, “Flood discharge estimation for complex river geometries by inverse numerical modelling”, Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) Zürich, 2001.
- [SZ00] M. Sachidananda und D. S. Zrnić, “Clutter filtering and spectral moment estimation for doppler weather radar using staggered pulse repetition time (PRT)”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Bd. 17, S. 323–331, 2000.

- [SZ02] ———, “An improved clutter filtering and spectral moment estimation algorithm for staggered PRT sequences”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Bd. 19, S. 2009–2019, 2002.
- [TBF06] S. Thrun, W. Burgard und D. Fox, *Probabilistic Robotics*. Cambridge, MA: The MIT Press, 2006.
- [Teu06a] M. Teufel, “Durchflussmessungen mit Ultraschall in Kanälen und Rohrleitungen”, in *Wasserbaukolloquium 2006 - Strömungssimulation im Wasserbau*, Bd. 32, Dresden, 2006, S. 381–389.
- [Teu06b] ———, “Durchflussmessung mit Kreuzkorrelation”, *Korrespondenz Abwasser, Abfall*, Bd. 53, Nr. 7, 2006.
- [Tob11] M. Tobler, “Simulation von Phased Arrays”, Bachelorarbeit, Hochschule Ulm, 2011.
- [Tru96] E. Truckenbrodt, *Fluidmechanik: Band 1: Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. Berlin: Springer-Verlag, 1996, 4. Auflage.
- [Vas96] A. V. Vaseghi, *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*. Stuttgart: John Wiley & Sons und B.G. Teubner Verlag, 1996.
- [VT98] G. Voulgaris und J. H. Trowbridge, “Evaluation of the acoustic doppler velocimeter (ADV) for turbulence measurements”, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Bd. 15, S. 272–289, 1998.
- [Wal23] J. L. Walsh, “A closed set of normal orthogonal functions”, *American Journal of Mathematics*, Bd. 45, Nr. 1, S. 5–24, 1923.
- [Wen05] A. Wendemuth, *Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [WG74] R. F. Woodman und A. Guillen, “Radar observations of winds and turbulence in the stratosphere and mesosphere”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, Bd. 31, S. 493–505, 1974.
- [WH69] R. F. Woodman und T. Hagfors, “Methods for the measurement of vertical ionospheric motions near the magnetic equator by incoherent scattering”, *Journal of Geophysical Research, Space Physics*, Bd. 74, S. 1205–1212, 1969.
- [WH09] S. Walter und H. Heuer, “Mikrostrukturanalyse von PZT-Keramiken zur Herstellung piezoelektrischer 1-3-Kompositmaterialien für Phased-Array-Ultraschallsensoren”, in *Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung (DGZfP) Jahrestagung*, Münster, 2009, S. 1–9, Poster 41.

- [Wil30] E. J. Williams, “The induction of electromotive forces in a moving liquid by a magnetic field, and its application to an investigation of the flow of liquids”, *Proceedings of the Physical Society*, Bd. 42, Nr. 5, S. 466–478, 1930.
- [WK85] M. Wax und T. Kailath, “Detection of signals by information theoretic criteria”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Bd. 33, Nr. 2, S. 387–392, 1985.
- [WNR<sup>+</sup>08] S. Walter, K. Nieweglowski, L. Rebenklau, K.-J. Wolter, B. Lamek, F. Schubert, H. Heuer und N. Meyendorf, “Manufacturing and electrical interconnection of piezoelectric 1-3 composite materials for phased array ultrasonic transducers”, in *31st International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*, Budapest, Ungarn, 2008, S. 255–260.
- [WWY08] M. H. Wang, Q. Wan und Z. S. You, “A gate size estimation algorithm for data association filters”, *Science in China Series F: Information Sciences*, Bd. 51, Nr. 4, S. 425–432, 2008.
- [XT94] Y. Xiao und Y. Tadokoro, “On Pisarenko and constrained Yule-Walker estimator of tone frequency”, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Bd. E77-A, Nr. 8, S. 1404–1406, 1994.
- [ZHCL96] L. Zedel, A. E. Hay, R. Cabrera und A. Lohrmann, “Performance of a single-beam pulse-to-pulse coherent doppler profiler”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Bd. 21, Nr. 3, S. 290–297, 1996.
- [ZM85] D. S. Zrnić und P. Mahapatra, “Two methods of ambiguity resolution in pulse doppler weather radars”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 21, Nr. 4, S. 470–483, 1985.
- [Zrn77] D. S. Zrnić, “Spectral moment estimates from correlated pulse pairs”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 13, Nr. 4, S. 344–354, 1977.
- [Zrn79a] —, “Estimation of spectral moments for weather echoes”, *IEEE Transactions on Geoscience Electronics*, Bd. 17, Nr. 4, S. 113–128, 1979.
- [Zrn79b] —, “Spectrum width estimates for weather echoes”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Bd. 15, Nr. 5, S. 613–619, 1979.



