Hans-Jürgen Kammer

Messung und Modellierung der Körperschalldämmung durch nichtlineare Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Messung und Modellierung der Körperschalldämmung durch nichtlineare Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen

Vom Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik
der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte
Dissertation

von
Herrn
Dipl.-Ing. Hans-Jürgen Kammer
geb. in Zweibrücken

Tag der mündlichen Prüfung:	28. Oktober 2010
Dekan:	Prof. Dr.-Ing. S. Ripperger
Vorsitzender:	Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. habil. Bart
1. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. M. Böhle
2. Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. D.-H. Hellmann

D 386

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2011
Zugl.: (TU) Kaiserslautern, Univ., Diss., 2010

978-3-86955-628-4

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2011
Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.
1. Auflage, 2011
Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86955-628-4

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen des Fachbereichs Maschinenbau und Verfahrenstechnik der Technischen Universität Kaiserslautern. Die Anregung zur Durchführung kam von der Firma Tenneco Edenkoben, die auch die Finanzierung gewährleistete, wofür ich an dieser Stelle meinen besonderen Dank ausspreche.

Mein herzlicher Dank gebührt Herrn Professor Dr.-Ing. Böhle zum einen für die Übernahme des Referats und den damit verbundenen Aufwand, zum anderen auch für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen am Lehrstuhl und die unkomplizierte, vertrauensvolle Zusammenarbeit. Weiterhin danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. Hellmann, der wesentlich an der Akquisition des Projekts beteiligt war, für die Übernahme des Koreferats und Herrn Professor Dipl.-Ing. Dr. techn. habil. Bart für den Vorsitz der Prüfungskommission.

Besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Manfred Fallen, der als Leiter der *AG Akustik* die Arbeit in vielerlei Hinsicht unterstützte und für meine Fragen jederzeit ein offenes Ohr hatte. Die stets hervorragende Zusammenarbeit an interessanten Projekten hat meine Begeisterung für das Themengebiet Akustik und Schwingungen in erheblichem Maße weiter getragen.

Außerdem danke ich allen ehemaligen Kollegen und studentischen Mitarbeitern des Lehrstuhls für das sehr kollegiale Arbeitsklima.

Die Zusammenarbeit mit Firma Tenneco war stets ausgezeichnet, wofür ich mich besonders bei den Herren Dipl-Ing. (FH) Dirk Wiemeler, Dr.-Ing. Jan-Friedrich Brand und Dipl.-Ing. (FH) Tobias Pfeffer bedanken möchte.

Schließlich danke ich meiner Familie für die ständige Unterstützung und Ermutigung.

Waldkirch, Dezember 2010 Hans-Jürgen Kammer

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Körperschallübertragung durch Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen. Es werden Verfahren zur Messung von dynamischen Transfersteifen bezüglich longitudinaler, lateraler und rotatorischer Schwingungen entwickelt. Weiterhin werden Methoden zur Ermittlung nichtlinearer Modelle hergeleitet und angewendet. Die messtechnische Ermittlung der Modellparameter ist an einem speziell hierfür entwickelten Prüfstand bei Frequenzen bis zu 5 kHz möglich. Abschließend wird die Integration der Substrukturmodelle in numerische Berechnungen der gesamten Abgasanlagendynamik gezeigt.

Schlagwörter: Körperschallentkopplung, NVH, Schwingungsisolation, Abgasanlage, Entkoppelelement, dynamische Transfersteife, mechanischer Vierpol, nichtlineares Übertragungsverhalten

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Einführung und Motivation 1

1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit 2

2 Körperschallentkopplung in Abgasanlagen **4**

2.1 Anregung durch Schwingungsquellen 4

2.2 Entkoppelelemente in Abgasanlagen 5

3 Maschinenakustische Grundlagen der Körperschallentkopplung **8**

3.1 Prinzipien der Schwingungsisolation 8

3.2 Kirchhoffsche Sätze - Elektromechanische Analogie 10

3.3 Maschinendynamisches Modell zur Körperschallentkopplung 12

3.4 Matrizenformulierung der Bewegungsgleichungen 14

3.4.1 Vierpolgleichungen axialer Körperschalldämmung 15

3.4.2 Achtpolbeschreibung der Biegeschwingung 17

3.4.3 Synthese der Teilsysteme 19

3.5 Entkopplung höherer Schwingfrequenzen 20

4 Nichtlineare dynamische Systeme **24**

4.1 Nichtlineares Schwingverhalten von Entkoppelelementen 24

4.2 Nichtlineare Systeme 25

4.3 Nichtlineare Federkennlinien 26

4.4 Trockene Reibung 27

4.5 Lineare Ersatzmodelle 29

4.6 Numerische Untersuchung nichtlinearer Schwingungungsentkoppler 32

4.6.1 System mit nichtlinearer Federkennlinie 32

4.6.2 System mit trockener Reibung 34

5 Theorie der messtechnischen Identifikation von Schwingungsentkopplern 36
5.1 Nichtparametrische Frequenzgangsmessung 36
5.2 Eigenschaften breitbandiger Testsignale 37
5.3 Frequenzgangsmessung mit monofrequenter Anregung 39
5.4 Linearitätstests 41
5.5 Bestimmung der axialen Transfersteifigkeit 42
5.5.1 Ermittlung nach DIN ISO 10846 42
5.5.2 Erweiterung des Frequenzbereichs durch Differenzbildung 42
5.6 Vierpolermittlung mittels Umkehrverfahren 44
5.7 Bestimmung der Biegesteifigkeiten 46
5.7.1 Messtechnische Ermittlung der lateralen und rotatorischen Steifigkeiten 46
5.7.2 Erweiterung des Frequenzbereichs 48
5.7.3 Berücksichtigung der Prüflingsmasse 50
5.7.4 Numerische Untersuchungen 50
5.8 Dynamisches Messen nichtlinearer Systemparameter 54
5.8.1 Steifigkeitskennlinien 54
5.8.2 Reibung 57
5.8.3 Numerische Untersuchung der Messmethoden 58
5.8.4 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse 65

6 Prüfstand 66
6.1 Beschreibung des Prüfstandsaufbaus 66
6.2 Messung der Kräfte und Beschleunigungen 68
6.3 Anordnungen zur longitudinalen und lateralen Anregung 69

7 Messergebnisse 72
7.1 Prüflinge 72
7.2 Axiale Schwingungsübertragung 72
7.2.1 Transfersteifen der Schlauchleitungen 77
7.2.2 Linearisierte Transfersteife 78
7.3 Laterale und rotatorische Steifigkeiten 80
7.3.1 Referenzmessungen 80
7.3.2 Messungen an Entkoppelelemten 80
7.4 Messung nichtlinearer Modellparameter 84

7.4.1 Nichtlinearer Steifigkeitsverlauf 84
7.4.2 Coulomb-Modell 87
7.4.3 Masing-Modell 87
7.4.4 Anmerkung zu Elementen mit unstetiger Kennlinie 90
7.5 Zusammenfassung der Messergebnisse 92
7.6 Diskussion der Messunsicherheit 93
7.6.1 Bemerkung zur Erzeugung harmonischer Anregungen 95
7.7 Kontaktstelleneinfluss der Flanschverbindung 96

8 Kopplung mit dem Gesamtsystem **98**
8.1 Vibroakustik einer Abgasanlage 98
8.2 Anregung durch Körperschallquellen 99
8.3 Modellierung einer Referenz AGA 101
8.4 Durchgangsdämmung bei gegebener Eingangsimpedanz 102
8.5 Auswahl optimaler Entkoppelelemente 103
8.6 Integration nichtlinearer Modelle 108

9 Zusammenfassung und Ausblick **110**

10 Literaturverzeichnis **112**

A Berechnung der AGA-Dynamik **120**
A.1 Grundelemente 120
A.2 Rohrkrümmersteifigkeit 122
A.3 Modellierung des Endschalldämpfers 128

B Transfersteifen der Entkoppelelemente **131**

C Symbolverzeichnis **133**

Summary

Flexible decoupling elements are being deployed in automotive exhaust systems in order to prevent mechanical vibrations from propagating. Their main purpose is to compensate low frequency oscillation and shock excitation, which leads to a higher fatigue durability of the system and an improvement to the ride comfort. Therefore, the behavior of decoupling elements is well known at frequencies below approximately 500 Hz.
On the one hand, the demand of a low sound pressure level in and outside of the passenger cabin is steadily increasing, on the other, higher frequency excitation is also increasing, e. g. due to the extensive application of turbochargers and ancillary units. Thus, the transmission of structure-born sound through decoupling elements is becoming an important aspect. Operating experience shows that frequencies are relevant up to 5 kHz. Concerning this matter, no adequate descrition of the str ucture-born sound transmission through decoupling elements is available yet. The common procedure is to test and evaluate the decoupling element, which is integrated into the complete assembly. Experimental modal analysis and sound pressure measurements are the main tasks for this purpose. The severe disadvantages of this process are long development times and high costs, because prototypes of the exhaust system have to be available.

The aim of this thesis is to develop a novel test facility and test procedures in order to find the necessary parameters to model vibration isolation through decoupling elements in the frequency range up to 5 kHz. This will allow the developer to integrate the decoupling element as a substructure into computer models of the whole exhaust system. Therefore it is possible to simulate the structural dynamics in early stages of development, when resonances, that can possibly lead to acoustical problems, can be identified and appropriate measures be taken.

Chapter 2 begins with a brief overview of decoupling elements, their assembly and tasks in automotive exhaust systems.

The fundamentals of linear vibration isolation theory are summarized in chapter 3. With respect to the occuring waveforms, it is necessary to model the longitudinal, lateral and rotational wave motion. The impact of mass inertia leads to standing waves at higher frequencies, whose influence on transfer stiffness is shown.
Linear models are not capable of describing the decoupling element completely, especially when the excitation has a high dynamic range and varying properties in the time and frequency domain. Thus, Chapter 4 deals with different lumped nonlinear models. For a given stimulus, the methods of harmonic and statistic linearisation are optimal with respect to a minimum least-squares deviation. Numerical investigation of the discussed nonlinear modells is carried out using discrete time integration of the underlying differential equations.
Subject of chapter 5 is the theory of measurement. It starts with the fundamentals of non-parametric frequency response estimation, which is the basis for most of all measurements presented in this thesis. With respect to the test object's properties in the longitudinal direction, the measurement of transfer stiffness and four-pole parameters are shown. An indirect method for measuring the lateral and rotational components is being developed, based on a known rudimental procedure from [23]. Numerical analysis is carried out in order to verify the advanced measurement. An identification process of models with non-linear stiffness and coulomb-models using harmonic excitation is being developed and tested numericaly.
In chapter 6 the novel test rig for measuring the transfer properties of decoupling elements is presented in detail. By utilizing an indirekt measurement procedure according to the principles in [23], test objects can be examined at frequencies up to 5 kHz. The test rig does not exhibit disturbing resonances within this frequency range.
Chapter 7 contains the results of measurements with representative decoupling elements. Linearized four-pole parameters and transfer stiffnesses are shown, and their dependence on frequency and displacement. The novel advanced method for measuring lateral and rotational transfer stiffnesses has been implemented successfully. Finally, parameters of nonlinear models are identified, using flexible elements as test objects. It turns out that the masing model, a commonly used model for describing static hysteresis [52], is adequat to represent the physical legalities and hence the vibration transmission.
In chapter 8 the combination of the decoupling element and the remaining exhaust system is considered. Exemplary calculations are carried out by using a linear model of a simple exhaust system. The most simple way to evaluate the structure-born sound insulation is to calculate the frequency response, using the transfer stiffness of the decoupling element and the mechanical input impedance of the receiving structure. However, this method has

the great disadvantage of evaluating the structure-born sound field at only one point. In terms of acoustics, the minimization of the whole receiving structure's vibrational energy is the most comprehensive criterion by which the optimal decoupling element could be selected. Numerical examples show that a greater flexibility does not provide a greater attenuation of oscillation energy in every case.
Chapter 9 contains the summary and closes the thesis with an outlook on possible future work.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung und Motivation

Körperschallentkoppelelemente haben die Aufgabe, in einem breiten Frequenzbereich die Ausbreitung von mechanischen Schwingungen zu unterdrücken. Im Rahmen dieser Arbeit werden speziell Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen untersucht. Bisher lag hierbei das Hauptaugenmerk auf Schwingungen mit Frequenzen deutlich unterhalb von 500 Hz, wie sie z.B. von Motorkippbewegungen und Schlechtweganregungen erzeugt werden. Das höherfrequente Übertragungsverhalten wurde in der Vergangenheit nicht näher untersucht. In die Abgasanlage wird jedoch Körperschall mit weitaus höheren Frequenzen eingeleitet, der bis zu einer Frequenz von etwa 5 kHz in Form von Luftschall abgestrahlt wird. Aktuelle technische Entwicklungen im Automobilbau lassen einen noch weiter anhaltenden Trend zum Ansteigen höherfrequenter Schwingungsanregung erkennen, z.B. durch die Verwendung von Turboladern mit größeren Toleranzbreiten oder Einspritzsystemen bei direkt einspritzenden Benzinmotoren. Auf der anderen Seite steigt die Bedeutung der Akustik und stellt insbesondere im Premiumsegment einen sehr hohen Wettbewerbsfaktor dar. Immer strenger werdende gesetzliche Grenzwerte für maximale Vorbeifahrgeräuschpegel zwingen außerdem die Automobilhersteller zu geräuschmindernden Maßnahmen [3]. Dies führt zu einem verstärkten Interesse an der Kenntniss des höherfrequenten Übertragungsverhaltens der Entkoppelelemente [6].

Zur Beschreibung der Schwingungsisolation werden häufig Mobilitäten, Impedanzen [37] und insbesondere dynamische Transfersteifigkeiten [86] verwendet. Hierdurch wird die Schwingungsübertragung von Entkoppelelementen bereits in [9] charakterisiert, allerdings nur für tiefe Frequenzen. Durch Einführung der Vierpoltheorie in der Strukturdynamikbe-

rechnung durch [63] ist es möglich, komplexe Subsysteme bezüglich des eindimensionalen Schwingungsverhaltens an den Anschlussstellen vollständig zu charakterisieren. Messungen dieser Parameter sind in den Arbeiten [60] und [81] behandelt. Die Beschreibung von Biegeschwingungen wird durch die Hinzunahme rotatorischer Freiheitsgrade möglich, was in [91] und [31] beschrieben ist. Ein Messverfahren der dynamischen lateralen und rotatorischen Transfersteifen bei höheren Frequenzen ist in einer rudimentären Form in [86] gezeigt.
Grundlagen der Prüfeinrichtungen zur Messung von Körperschallübertragungssystemen sind in den Teilen der Norm DIN 10846 [21] vorgeschlagen. Für den in dieser Arbeit zu untersuchenden Messfrequenzbereich von bis zu 5 kHz ist ein indirektes Messverfahren zu bevorzugen. Spezielle Prüfstände, die auf die indirekte Messung spezifischer Entkoppelelemente ausgelegt sind, zeigen beispielsweise [15] und [83].

1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit

Das Ziel der Forschungsarbeit ist es, basierend auf experimentellen Untersuchungen, die Übertragungseigenschaften von Entkoppelelementen bei Frequenzen bis 5 kHz zu charakterisieren. Die so ermittelten Übertragungsmodelle sollen so umfassend sein, dass sie als Eingabegrößen in CAE-Berechnungen der gesamten Abgasanlage verwendet werden können. Damit ist es möglich, bereits in frühzeitigen Entwicklungsstadien Aussagen über das strukturdynamische Verhalten von Abgasanlagen zu machen, bevor überhaupt Prototypen existieren, an denen Messungen gemacht werden können.

Diese Arbeit beginnt in **Kapitel 2** mit einem kurzen Überblick über gebräuchliche Entkoppelemente in Kfz-Abgasanlagen.
Kapitel 3 fasst die maschinenakustischen Grundlagen der Schwingungsentkopplung durch linear visko-elastische Systeme zusammen.
Besonders die häufig verwendeten Schlauchgelenke und Schlauchleitungen weisen nichtlineare Mechanismen auf, die das Systemverhalten stark bestimmen. In **Kapitel 4** werden daher nichtlineare Modelle mit konzentrierten Parametern diskutiert und mittels numerischer Zeitintegration der zugrundeliegenden Differenzialgleichungen untersucht. Die Methoden der harmonischen und statistischen Linearisierung werden angewendet, da hierdurch lineare Ersatzmodelle ermittelt werden, die auch große Systemaussteuerungen mit minimalem quadratischen Fehler abbilden können.

In **Kapitel 5** werden die messtechnischen Verfahren zur Bestimmung der Modellparameter vorgestellt. Zunächst geht es um die Grundlagen zur nichtparametrischen Frequenzgangsschätzung, worauf die Messungen der linearen Ersatzmodelle beruhen. Bezüglich der Übertragungseigenschaften in longitudinaler Richtung werden die Messmethoden von Transfersteifen und Vierpolen gezeigt. Eine verbesserte Methode zur indirekten Messung der lateralen und rotatorischen Komponenten wird entwickelt, die auf einem einfachen Verfahren nach [86] beruht. Anhand numerischer Simulationen wird die Gültigkeit des Verfahrens überprüft. Des Weiteren werden Messverfahren zur Identifikation nichtlinearer, parametrischer Modelle hergeleitet. Hierbei werden zum einen die Polynomkoeffizienten nichtlinearer Steifigkeitskennlinien und zum anderen die Parameter des Coulomb-Modells durch die Auswertung der Oberschwingungen bei harmonischer Anregung bestimmt. Numerische Simulationen dienen zur Verifizierung der Messverfahren und Überprüfung der Ersatzmodelle.
In **Kapitel 6** wird ein speziell zur Messung der Körperschallübertragung durch Entkoppelelemente entwickelter Prüfstand im Detail dargestellt.
Die Messergebnisse von einer Auswahl an repräsentativen Entkoppelelementen befindet sich in **Kapitel 7**. Die Übertragungseigenschaften werden abhängig von der Frequenz, Anregungsamplitude und Signalform gezeigt. Die Möglichkeit, das Übertragungsverhalten durch die nichtlinearen Systeme aus Kapitel 4 zu modellieren, wird untersucht.
Die Entkoppelwirkung der Elemente wird in **Kapitel 8** im Verbund mit der Abgasanlage analysiert. Diese kann aufgrund der Resonanzen im betrachteten Frequenzbereich nicht als starrer Körper angesehen werden, was bei der Auswahl geeigneter Entkoppelelemente und Berechnung des dynamischen Verhaltens berücksichtigt werden muß. Hierzu wird eine effiziente Berechnungsmethode unter Verwendung von Kettenmatrizen entwickelt und angewendet, die die Verknüpfung von Abgasanlagen-Simulationsmodell und messtechnisch erlangten Systemparametern der Entkoppelelemente auf elegante Weise zuläßt.
Abschließend werden in **Kapitel 9** die Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsarbeiten gegeben.

Kapitel 2

Körperschallentkopplung in Abgasanlagen

2.1 Anregung durch Schwingungsquellen

In einem Kraftfahrzeug arbeitet eine Vielzahl von Aggregaten, die für Schwingungen und Geräuschemission ursächlich sind. Grundsätzlich werden in die Abgasanlage sowohl Körperschall über den Anschlussflansch als auch Gasschall eingeleitet. Im Folgenden wird nur der Körperschall betrachtet. Dieser wird von der Abgasanlage übertragen, über die Befestigungselemente in die Fahrzeugstruktur eingeleitet und in der Fahrgastzelle von den Strukturen als hörbarer Luftschall abgestrahlt. Zum Teil findet lokal auf den großflächigen Bauteilen der Abgasanlage wie Mittel- und Endschalldämpfer, die aufgrund der flachen Bauweise relativ große Abstrahlgrade aufweisen, die Schallabstrahlung statt.
Im Zusammenhang mit der Anregung von Abgasanlagen ist insbesondere der Abgasturbolader zu nennen, der als Strömungsmaschine ein breitbandiges Geräusch unter Beteiligung tonaler Komponenten u. a. des Drehklangs erzeugt, dessen Frequenz sich aus dem Produkt von Schaufelzahl und Drehzahl ergibt. Abgasturbolader laufen mit Drehzahlen von 30 000 Umdrehungen pro Minute und mehr. Da ein Fahrzeug in der Regel mit wechselnden Drehzahlen fährt, wird ein breiter Frequenzbereich hierdurch angeregt. Ursächlich für den Körperschall sind aber häufig Eigenfrequenzen des gleitend gelagerten Turbinenrades. Diese sind aufgrund der drehzahlabhängigen Lagereigenschaften variierend. Es treten hierdurch in der Praxis häufig Probleme mit starken tonalen Schwingungen zwischen 600 Hz und 1 kHz auf. Eine weitere Ursache für Körperschallschwingungen sind Unwuchten, die auf Grund der hohen Drehzahlen zu akustisch relevanten Schwingungen führen.

2.2 Entkoppelelemente in Abgasanlagen

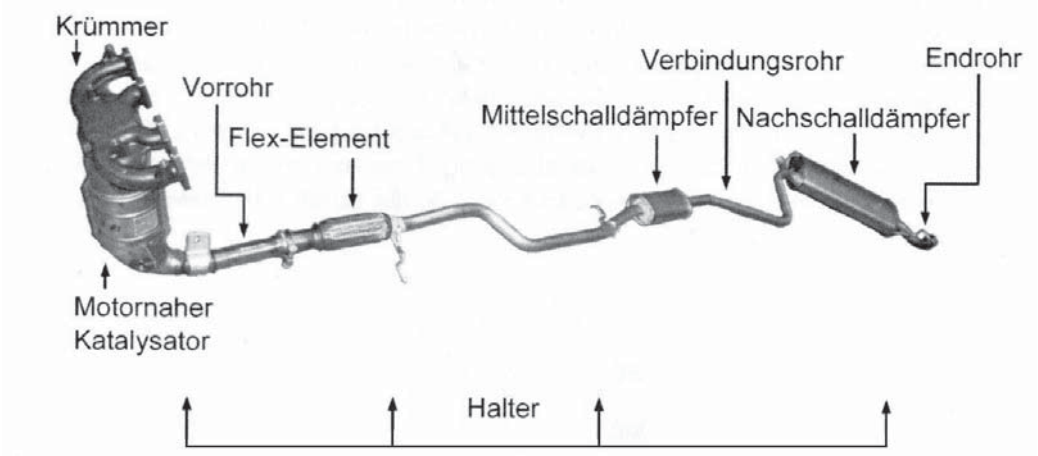
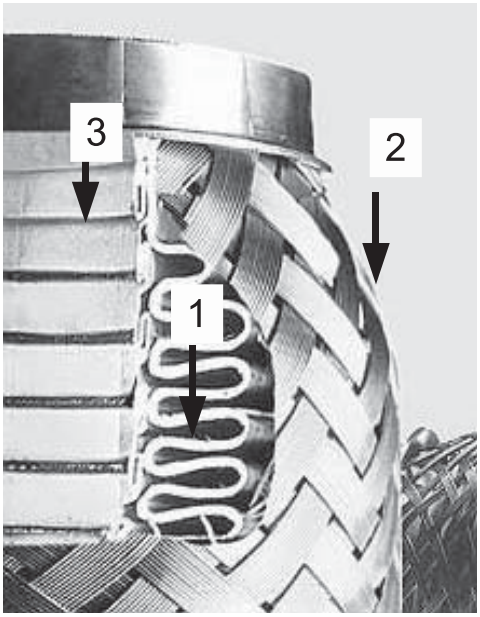


Abbildung 2.1: PKW-Abgasanlage [5]

Zur Schwingungsentkopplung werden flexible Elemente im vorderen Bereich der Abgasanlage eingesetzt, wie es beispielhaft in Abbildung 2.1 gezeigt ist. Prinzipiell wird zwischen einer tragenden und nicht-tragenden Entkopplung unterschieden. Tragende Entkoppelelemente sind so ausgelegt, dass keine Hängerelemente im Bereich der vorderen Abgasanlage notwendig sind. Entsprechend steif müssen solche Elemente sein, was wiederum der Funktion der Schwingungsdämmung entgegensteht. Häufig werden sog. *Schlauchgelenke* verwendet, deren Aufbau in Abbildung 2.2 verdeutlicht ist. Die auftretenden dynamischen und statischen Kräfte werden von dem Metallbalg (1), der von einem Drahtgeflecht (2) umhüllt ist, aufgenommen. Zur Strömungsführung befindet sich im Innern des Bauteils ein Agraffschlauch (3), der auch in hohem Maße die Dynamikeigenschaften des Entkoppelelementes beeinflusst. Weiterhin existieren weitere Varianten der Schlauchleitung, bei denen beispielsweise anstelle des Drahtgeflechtes ein Metallgestricke verwendet wird oder der Agraffschlauch durch ein Flammrohr ersetzt ist. Bei *Drahtkissenelementen* wird zur elastischen Verbindung zweier Rohre ein ringförmiges Drahtkissen verwendet. Ein weicher Metallbalg sorgt für die Gasdichtigkeit.

Deutlich höhere Dämmungen werden durch nicht tragende Entkoppelelemente erzielt, i.d.R. sind dies *Schlauchleitungen*. Der Aufbau ist dem der Schlauchgelenke sehr ähnlich. Die hautsächlichen Unterschiede liegen in der geringeren Steife der Schlauchleitungen und größeren Länge. Schlauchleitungen und Schlauchgelenke werden im Folgenden zusammenfassend als Flex-Element bezeichnet.



Quelle: Fa. Witzenmann

Abbildung 2.2: Aufbau eines Flex-Elementes

Die Entkopplung von höherfrequentem Körperschall wird durch kurze, meist mehrlagige Balgelemente mit dämpfendem Gestrickring erziehlt. Diese Elemente weisen erst eine Entkoppelwirkung bei höheren Frequenzen auf und werden als *Körperschallentkoppelelement* bezeichnet. Eine ausführlichere Darstellung der in der Kfz-Technik eingesetzten flexiblen Verbindungen ist in [9] zu finden.
Prinzipiell müssen longitudinale, laterale und rotatorische Schwingungen entkoppelt werden. Flex-Elemente und Körperschallentkoppelelemente sind aufgrund der Balgeigenschaften in torsionaler Richtung steif und müssen aus Dauerfestigkeitsgründen so eigebaut werden, dass Belastungen durch Torsionsschwingungen vermieden werden [9]. Daher wird die Entkopplung von Torsionsschwingungen in dieser Arbeit nicht behandelt.
Es existiert eine Vielzahl von Patentschriften, worin weitere Entkoppelelemente beschrieben sind, die zum Teil Modifikationen der Schlauchgelenke, Schlauchleitungen und Körperschallentkoppelelemente sind. Des Weiteren sind auch ganz andere Prinzipien, wie z.B. Flanschverbindungen mit erhöhter Nachgiebigkeit, als Entkoppelelement patentiert. Allerdings erscheint hierbei teilweise das Potential der Entkoppelwirkung und auch die Tauglichkeit hinsichtlich Gasdichtheit, thermischer Belastbarkeit und Dauerfestigkeit als fraglich.

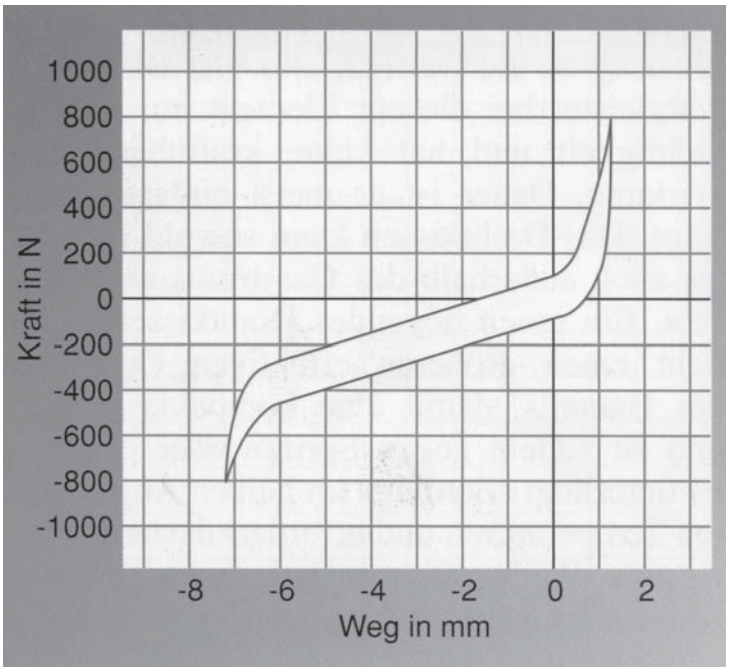


Abbildung 2.3: Kraft-Weg-Hysteresekurve eines Schlauchgelenkes [9]

In der Vergangenheit wurden flexible Elemente ausschließlich zum Ausgleich statischer Verformungen und zur Entkopplung niederfrequenter Schwingungen eingesetzt. Bekannt sind statische Hysteresekurven, die den Kraft-Weg-Zusammenhang angeben wie das Diagramm aus Abbildung 2.2. Man sieht bei großen Deformationen eine überproportionale Zunahme der Kraft. Linearisierte Steifigkeiten werden durch Verbindung der extremalen Endpunkte mit einer Geraden gebildet. Die durch Reibung dissipierte Energie wird anhand der Fläche, die von der Hyseresekurve eingeschlossen ist, berechnet. Dynamische Messungen der Steifigkeit lagen bisher nur in einem Frequenzbereich unterhalb von 500 Hz vor [6].

Kapitel 3

Maschinenakustische Grundlagen der Körperschallentkopplung

3.1 Prinzipien der Schwingungsisolation

Das Ziel der Schwingungsisolation ist die Minimierung von Vibrationen in einer Empfängerstruktur [39]. Hierbei spricht man von einer Körperschallisolation, wenn durch die Schwingungsminderung insbesondere eine Reduktion der abgestrahlten Schallleistung erreicht wird. In der Regel besteht eine Körperschall- bzw. Schwingungsisolation aus einer elastischen Verbindung zwischen Schwingungsquelle und Empfängerstruktur, wie in Abbildung 3.1 skizziert, wodurch die anregenden Wechselkräfte verringert werden. Dämpfende Mechanismen führen in der Nähe von Eigenfrequenzen zu einer Verminderung der Resonanzüberhöhung. Aus diesem Grund werden parallel zu den Federelementen in der Regel Dämpfer verwendet. Häufig wird dieses Ersatzschaltbild gebraucht, um die intrinsischen Dämpfungsmechanismen des Federelementes zu charakterisieren, wie dies beispielsweise bei Gummielementen der Fall ist. Eine Ankopplung von Strukturen lediglich über Dämpfer ist nicht üblich, unter anderem deswegen, da viskose Dämpfer keine statischen Kräfte aufnehmen können und das System ohne rückstellende elastische Kräfte somit instabil wäre.

Neben den elastischen Verbindungen werden Körperschallisolationen auch durch den Einsatz von Massen zur Erhöhung der Eingangsimpedanz der Empfängerstruktur angewendet (siehe Abbildung 3.2). Während die viskoelastische Entkopplung bei einer reinen Kraftanregung praktisch wirkungslos ist, können Massen hierbei die Kraftübertragung dämmen, nicht aber die Schwingschnellen bei Schnelleerregung. Dies verdeutlicht das Ersatzschalt-

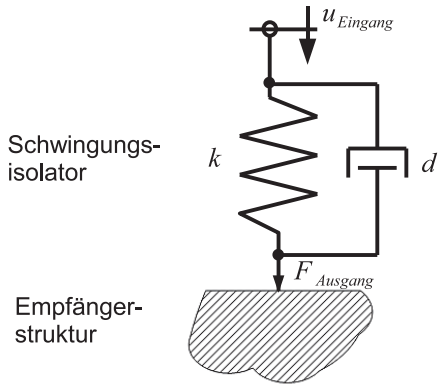


Abbildung 3.1: Anordnungen zur Körperschalldämmung

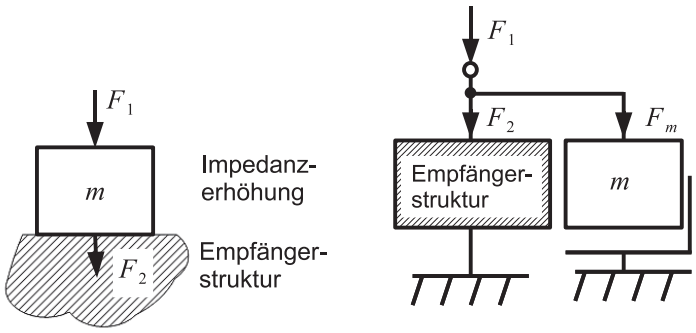


Abbildung 3.2: Aufbau mit Eingangsmasse und mechanischer Schaltplan

bild auf der rechten Seite von Abbildung 3.2. Eine Kombination aus eingangseitiger Masse mit nachgeschaltetem Feder-Dämpfer Element kombiniert die Vorteile beider Entkoppelprinzipien, d.h. die Schwingungsquelle wird durch die Masse belastet, wodurch übermäßig hohe Schwingungen am Isolatoreingang und lokal an der Quelle selbst vermieden werden. Wird zunächst ein viskoelastisches Element verwendet, so wird eine Wegerregung in eine Kraftanregung umgewandelt, die durch eine nachgeschaltete Masse gemindert wird.
Die Entkoppelwirkung von Sperrmassen ist bei Longitudinalwellen als gering zu bewerten [12]. Die Ausbreitung von Biegewellen hingegen kann, wie in Abbildung 3.3 skizziert, im höheren Frequenzbereich effektiv unterdrückt werden. Der Balken ist hierbei ein mechanischer Wellenleiter, dessen Sperrmassen einen Impedanzsprung darstellen und somit eine Reflexion der einfallenden Welle bewirken.
Durch den Einsatz von zwei Sperrmassen wird ein Resonanzraum geschaffen, in dem sich fast die gesamte Schwingungsenergie bestimmter Frequenzbereiche konzentriert, was eine

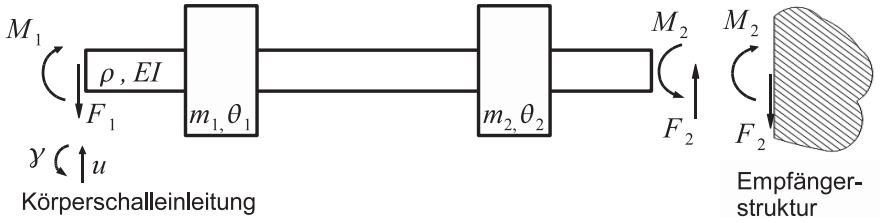


Abbildung 3.3: Sperrmassen am Biegebalken

sehr effiziente Körperschalldämmung bewirkt. Diese Schwingformen bezeichnet man nach [12] als „trapped modes“.

3.2 Kirchhoffsche Sätze - Elektromechanische Analogie

In der Maschinenakustik ist es üblich, dass harmonische Schwingungen betrachtet werden, bzw. periodische Signale, die in einer Fourierreihe dargestellt werden können und somit auch aus einer Summe von harmonischen Schwingungen bestehen. Aperiodische Schwingungen sind ebenfalls durch harmonische Basisfunktionen darstellbar und besitzen im Gegensatz zu den periodischen Signalen ein kontinuierliches Spektrum, welches durch das Fourierintegral mit der Zeitfunktion verknüpft ist. Im Folgenden werden die Wechselgrößen als komplexe Amplitude dargestellt.
Analog zu den Kirchhoffschen Sätzen in der Elektrotechnik kann man entsprechende grundsätzliche Formeln für die Mechanik formulieren [55]. Der Knotensatz sagt aus, dass alle Kräfte, die in einem Knoten angreifen in der Summe gleich Null ergeben.

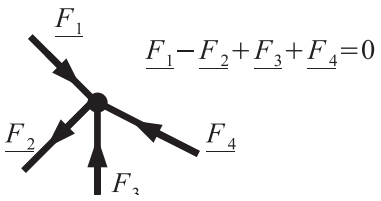


Abbildung 3.4: Kräftegleichgewicht am Knoten

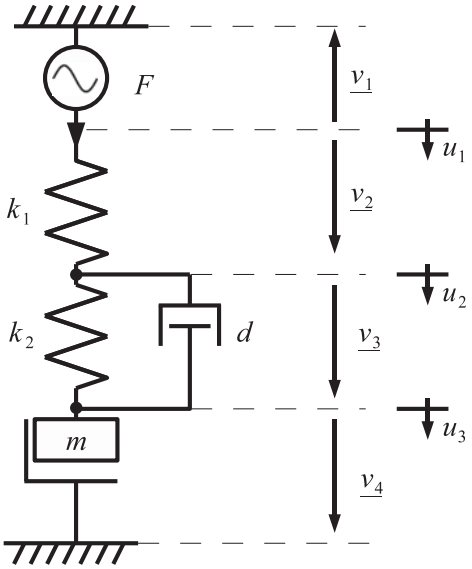


Abbildung 3.5: Schnelleverteilung entlang einer Serienschaltung

$$\sum_{i}^{n} \underline{F}_i = 0 \tag{3.1}$$

Die Summe aller Schnellen entlang einer geschlossenen Masche von seriell geschalteten Elementen beträgt Null. Dies wird als Maschensatz bezeichnet und lautet formal

$$\sum_{i}^{n} \underline{v}_i = 0. \tag{3.2}$$

Die Schnellen sind hierbei aus Differenzen zwischen eingangs- und ausgangsseitiger Schnelle zu berechnen. Die Abbildung 3.5 zeigt beispielhaft ein System mit einer Kraftquelle, deren Schnellevektor entgegengesetzt den Schnellevektoren der restlichen Elemente gerichtet ist. Dies ist sinnvoll, da eine Verlängerung der Quelle zu einer Verkürzung der passiven Elemente führt. Somit folgt in diesem Beispiel für harmonisch oszillierende Verschiebungen

$$j\omega(\underline{u}_1 - (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) - (\underline{u}_2 - \underline{u}_3) - \underline{u}_3) = 0 \tag{3.3}$$

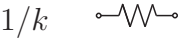
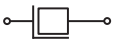
und somit lautet die Gleichung mit den relativen Schnellen

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3 - \underline{v}_4 = 0. \tag{3.4}$$

Durch Ausnutzung der Analogieen zwischen elektrischen und mechanischen Netzwerken werden die mechanischen Systeme häufig als elektrische Netzwerke dargestellt [39][55]. Hierbei ist es sinnvoll, die Spannung als Schnelle und den Strom als Kraft darzustellen. Somit sind die Regeln zur Berechnung elektrischer Netzwerke zur Mechanik isomorph und

können direkt angewendet werden, was einen großen Vorteil darstellt, da sehr leistungsfähige Rechenmethoden und Softwarelösungen zur Behandlung solcher Aufgaben verfügbar sind.

Die Korrespondenzen lauten zusammengefasst [55]:

elektrische Netzwerke	mechanische Schaltungen
Spannung $\underline{u_{el}}$	Schnelle $\underline{v}$
Strom $\underline{i}$	Kraft $\underline{F}$
Induktivität L $\underline{u_{el}} = j\omega L\underline{i}$	Nachgiebigkeit $n = 1/k$  $\underline{v} = j\omega n\underline{F}$
Kapazität C $\underline{i} = j\omega C\underline{u_{el}}$	Masse m  $\underline{F} = j\omega m\underline{v}$
Leitwert G $\underline{i} = G\underline{u_{el}}$	Reibungsadmittanz $Y = 1/d$ $\underline{F} = d\underline{v}$
elektrische Impedanz Z_{el}	mechanische Admittanz Y
elektrische Admittanz Y_{el}	mechanische Impedanz Z

Entsprechende Analogien sind für rotatorische Bewegungen, wie sie beispielsweise bei Torsionswellenentkopplung betrachtet werden, ebenfalls gültig. Hierbei werden die Schnellen durch Winkelgeschwindigkeiten und die Krafte durch Momente ersetzt.

3.3 Maschinendynamisches Modell zur Körperschallentkopplung

Das Feder-Dämpfer-Modell, dargestellt in Abbildung 3.6, ist ein grundlegendes lineares Modell zur Schwingungsabkopplung, das in der Literatur erschöpfend dargestellt und untersucht ist. Aufgrund seiner Einfachheit und leichten Interpretierbarkeit ist es häufig ein Ziel, kompliziertere Systeme auf diese Grundform zu vereinfachen. Die Körperschallisolierung besteht aus einer Parallelschaltung von Feder mit der Federkonstanten k und linearem viskosen Dämpfer d. Diese einfache Grundform eines Dämpfers wird als Kelvin-Voigt-Modell bezeichnet [50]. Hierbei wird die zu entkoppelnde Struktur als starre Masse approximiert, die auf dem Feder-Dämpfer-Element gelagert ist [37][39][50]. Zusammenfassen lassen sich Federsteifigkeit und Dämpferkonstante d in der komplexen Federsteifigkeit

$$\underline{k} = k + j\omega d. \tag{3.5}$$

Hieraus berechnet man den Verlustfaktor

$$\eta = \frac{\Im\{\underline{k}\}}{\Re\{\underline{k}\}} = \frac{d\omega}{k}, \tag{3.6}$$

der somit ein Maß für die im Dämpfer dissipierte Dämpfungsarbeit bezogen auf die elastische Formänderungsenergie ist. Eine anschauliche und sehr häufig verwendete Größe zur

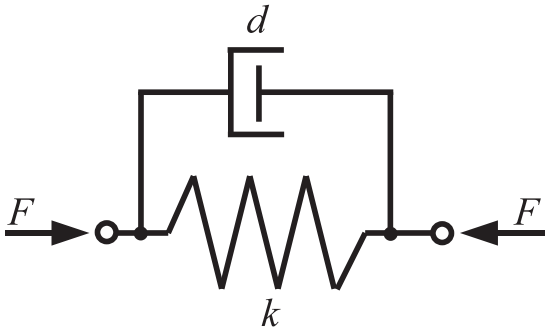


Abbildung 3.6: Kelvin-Voigt Modell

Charakterisierung von Entkoppelelementen ist die frequenzabhängige Durchgangsdämmung

$$D_{dv} = 20\,\mathrm{lg}\left|\frac{U_1(j\omega)}{U_2(j\omega)}\right|, \tag{3.7}$$

wobei U_1 das Schwingwegspektrum der Eingangs- und U_2 das der Ausgangsschwingung ist. Hierbei spielt die Phasenlage keine Rolle, da diese keine Auswirkung auf die Dämmung der übertragenen Schwingungsleistung hat. Der Nachteil dieses Dämmmaßes liegt darin, dass die Belastung der Körperschallquelle nicht mit berücksichtigt wird, d.h. weiche Entkoppelelemente, die der Quelle eine geringere Last entgegensetzten, schwingen am Eingang stärker als steifere, wodurch die Durchgangsdämmung vergleichsweise als zu positiv bewertet wird [81]. Eine aussagekräftigere Dämmgröße ist die Einfügedämmung, die aus dem Verhältnis zwischen dem Schwingweg an der Ankoppelstelle der Empfängerstruktur mit schalldämmender Maßnahme $U_2(j\omega)$ und ohne schalldämmender Maßnahme $U_2(j\omega)'$ besteht.

$$D_{de} = 20\,\mathrm{lg}\left|\frac{U_2(j\omega)'}{U_2(j\omega)}\right| \tag{3.8}$$

Die Durchgangsdämmung ist nicht nur von dem Schwingungsisolator, sondern auch von der Senkenstruktur abhängig, die Einfügedämmung zusätzlich noch von der Quellimpedanz. Will man Schwingungsisolatoren miteinander vergleichen, so geschieht dies im Idealfall durch den Vergleich der Dämmungen in der Applikation oder zumindest mit vergleichbaren mechanischen Quell- und Senkenimpedanzen. Häufig ist man jedoch gezwungen,

alleine das schwingungsisolierende Bauteil zu evaluieren, ohne nähere Kenntnis des Gesamtsystems zu haben. Hierbei bietet es sich an, die komplexe Steifigkeit des Bauteils bzw. den Betrag davon als interessante Größe anzugeben. Betrachtet man ein Feder-Dämpfer-Element mit ausgangsseitigem Kurzschluss, so folgt unter Verwendung des ausgangsseitigen Kraftspektrums $F(j\omega)$ und des eingangsseitigen Verschiebungsspektrums $u(j\omega)$ für die Federsteifigkeit

$$\underline{k}(j\omega) = \frac{\underline{F}(j\omega)}{\underline{u}(j\omega)}. \tag{3.9}$$

Dieser Quotient kann als Frequenzgang gedeutet werden, der die ausgangsseitige Kraft abhängig von der eingangsseitigen Verschiebung mit der Randbedingung $u_2 = 0$ ausdrückt. Dimensionslos wird er gemacht, indem er nach [21] auf die Bezugssteifigkeit $k_0 = 1N/m$ referenziert wird. Hiermit wird der Steifigkeitspegel definiert

$$k_p = 20\,\mathrm{lg}\left|\frac{\underline{k}(j\omega)}{k_0}\right| \tag{3.10}$$

3.4 Matrizenformulierung der Bewegungsgleichungen

Allgemein wird das Übertragungsverhalten des Schwingungsisolators mit der generalisierten Matrixgleichung 3.11 beschrieben.

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{q} \tag{3.11}$$

Hierbei sind die an den Anschlussstellen angreifenden Kräfte und Momente im Vektor $\mathbf{p}$ und die Verschiebungen und Drehwinkel im Vektor $\mathbf{q}$ zusammengefasst. Die Matrix $\mathbf{K}$ ist die Steifigkeitsmatrix, die die Größen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ miteinander verknüpft. Die Übertragungseigenschaften, sowie die Interaktion des linearen Bauteils mit angekoppelten Strukturen werden somit vollständig beschrieben. Die Elemente dieser Systemmatrix sind i.A. komplex und frequenzabhängig. Betrachtet man den allgemeinen 3-dimensionalen Fall, so handelt es sich bei $\mathbf{K}$ um eine 12x12 Elemente umfassende Matrix. Diese Matrix kann in vier Teile partitioniert werden:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Die jeweils 6x6 Elemente umfassenden Matrizen $\mathbf{K}_{1,1}$ und $\mathbf{K}_{2,2}$ sind die dynamischen Eingangssteifigkeiten und $\mathbf{K}_{1,2}$ und $\mathbf{K}_{2,1}$ die dynamischen Transfersteifigkeiten. Wird bei dem Aufstellen der Steifigkeitsmatrix der Impuls- und Drallsatz in Richtung der unbekannten

Verschiebungen gebildet, so ist nach [30] in Übereinstimmung mit dem Reziprozitätstheorem von Maxwell-Betti [27] die Steifigkeitsmatrix symmetrisch, d.h.

$$\underline{k}_{i,n} = \underline{k}_{n,i}. \tag{3.13}$$

Für die zur Körperschallübertragung besonders relevanten Transfersteifigkeiten folgt hieraus

$$\mathbf{K}_{2,1} = \mathbf{K}_{1,2}^{T}. \tag{3.14}$$

Dies hat den wichtigen Vorteil, dass die messtechnische Bestimmung der Steifigkeitsmatrix in vielen Fällen erheblich erleichtert wird. Weitere Vereinfachungen folgen bei symmetrisch aufgebauten Entkoppelelementen. Hierbei können Vereinfachungen durch Gleichheit der Eingangssteifigkeiten getroffen werden, wobei auf ggfs. ungleiche Vorzeichen geachtet werden muß.

3.4.1 Vierpolgleichungen axialer Körperschalldämmung

Schränkt man in der Betrachtung die Anzahl der Freiheitsgrade ein, so wird der Umfang der Matrixgleichung 3.11 entsprechend reduziert und für praktisch relevante Fälle leichter handhabbar. Von besonderer praktischer Bedeutung ist die Körperschalldämmung in longitudinaler Richtung, die sowohl theoretisch, als auch messtechnisch am einfachsten zu beschreiben und zu erfassen ist. Es handelt sich hierbei um eine eindimensionale Bewegung, bei der Kräfte und translatorische Verschiebungen als dynamische Schnittgrößen auftreten. Da am Ein- und Ausgang jeweils eine Kraft und eine Verschiebung betrachtet werden, ist es ein mechanischer Vierpol. Gleichungssystem 3.15 stellt die Vierpolgleichungen in Vektor-Matrix-Notation dar.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{1,1} & \underline{k}_{1,2} \\ \underline{k}_{2,1} & \underline{k}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

Aus der Reziprozitätsgleichung 3.13 folgt

$$\underline{k}_{1,2} = \underline{k}_{2,1}. \tag{3.16}$$

Für symmetrische Elemente gilt

$$\underline{k}_{1,1} = \underline{k}_{2,2} \tag{3.17}$$

Bei einer Feder mit der komplexen Steife $\underline{k}$ sind alle Vierpolelemente gleich [4]

$$\underline{k} = \underline{k}_{1,1} = \underline{k}_{1,2} = \underline{k}_{2,1} = \underline{k}_{2,2}. \tag{3.18}$$

Die Steifigkeitsmatrix ist eng verwandt mit der Impedanzmatrix, die in Gleichgung 3.19 angegeben ist.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{1,1} & \underline{Z}_{1,2} \\ \underline{Z}_{2,1} & \underline{Z}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Da $v = \dot{x}$ und für harmonische Größen die Korrespondenz $d/dt = j\omega$ gilt, folgt der Zusammenhang zwischen Steifigkeits- und Impedanzmatrix

$$\mathbf{K} = j\omega\mathbf{Z} \tag{3.20}$$

Im Zusammenhang mit Schwingungsentkoppelelementen wird sehr häufig die sog. Kettenmatrixform, gemäßg Gleichung 3.21, verwendet [15][61][81].

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{1,1} & \underline{A}_{1,2} \\ \underline{A}_{2,1} & \underline{A}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{v}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

Aus der Reziprozität folgt

$$det(\mathbf{A}) = 1. \tag{3.22}$$

Falls der Schwingungsisolator symmetrisch aufgebaut ist, gilt

$$\underline{A}_{1,1} = \underline{A}_{2,2}. \tag{3.23}$$

Der Vorteil der Kettenmatrix liegt in der einfachen Berechnung von seriell geschalteten Übertragungsgliedern [59]. Die Matrix des Gesamtsystems folgt aus dem Produkt der einzelnen Teilsystemmatrizen. Die Grundelemente Feder, Dämpfer und Masse können somit einfach zu komplexen Systemen zusammengeschaltet werden. Da es sich hierbei um lineare bilaterale Elemente handelt, ist bei allen Matrizen Gleichung 3.23 erfüllt. Die Kettenmatrizen der Grundelemente sind im Folgenden zusammengefasst.
Masse:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & j\omega m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Verlustbehaftete Feder:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\frac{\omega}{\underline{k}} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Viskoser Dämpfer:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

3.4.2 Achtpolbeschreibung der Biegeschwingung

Bei der Beschreibung von sich ausbreitenden Biegeschwingungen werden sowohl Kräfte und Verschiebungen, als auch Momente und Winkel betrachet, wie in Abbildung 3.7 dargestellt. Eine mathematische Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den statischen und dynamischen Schnittgrößen stellt der Achtpol in Gleichung 3.27 dar. Hierbei ist die Wirkrichtung der Kräfte und Momente aus Symmetriegründen positiv in Richtung der Verschiebungskomponenten gewählt.

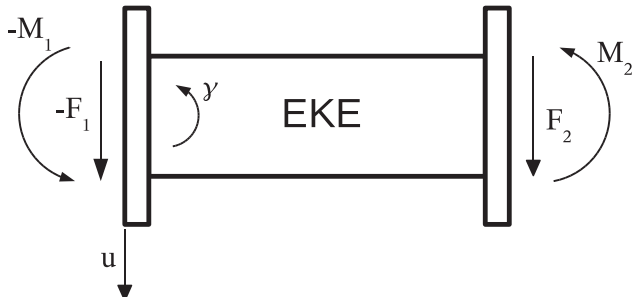


Abbildung 3.7: Schnittgrößen bei Biegung

$$\begin{Bmatrix} -\underline{F}_1 \\ -\underline{M}_1 \\ \underline{F}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{F_1,u_1} & \underline{k}_{F_1,\gamma_1} & \underline{k}_{F_1,\gamma_2} & \underline{k}_{F_1,u_2} \\ \underline{k}_{M_1,u_1} & \underline{k}_{M_1,\gamma_1} & \underline{k}_{M_1,\gamma_2} & \underline{k}_{M_1,u_2} \\ \underline{k}_{F_2,u_1} & \underline{k}_{F_2,\gamma_1} & \underline{k}_{F_2,\gamma_2} & \underline{k}_{F_2,u_2} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} & \underline{k}_{M_2,\gamma_1} & \underline{k}_{M_2,\gamma_2} & \underline{k}_{M_2,u_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\gamma}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{\gamma}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Für das wegerregte System gilt unter Verwendung der Transfersteifigkeiten und ausgangsseitiger Blockierung, d.h. $\underline{u}_2 = 0$ und $\underline{\gamma}_2 = 0$, das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} & \underline{k}_{F_2,\gamma_1} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} & \underline{k}_{M_2,\gamma_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\gamma}_1 \end{Bmatrix}. \tag{3.28}$$

Es handelt sich somit um ein System mit zwei Eingangsverschiebungen und zwei Ausgangskräften und ist systemtheoretisch als Multiple Input Multiple Output (MIMO) Systen modellierbar, während die axiale Körperschallausbreitung als Single Input Single Output (SISO) System mit nur einer Eingangsverschiebung und einer Ausgangskraft darstellbar ist. Das Ersatzschaltbild des MIMO Systems in Abbildung 3.8 besteht aus vier Übertragungsfunktionen. Sowohl die Eingangsverschiebung als auch die Drehwinkel rufen am mechanisch kurzgeschlossenen Ausgang eine Kraft und ein Moment hervor. Die Ausgangsgrößen der Übertragungsfunktionen wirken hierbei additiv, vorausgesetzt, es handelt

sich um ein lineares System, wobei das Superpositionsprinzip gültig ist. Ein alternatives Ersatzschaltbild des MIMO-Systems lässt sich nach [56] unter Anwendung der elektromechanischen Analogie angeben, wobei die Umwandlung von lateralen zu rotatorischen Größen und umgekehrt durch Übertrager modelliert wird. Analog zur Abstraktion des

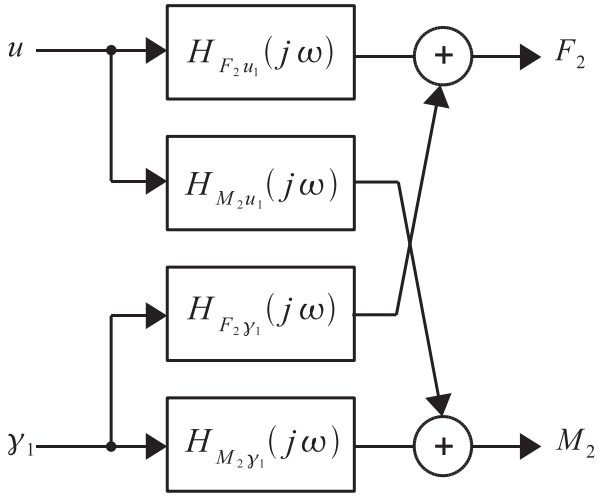


Abbildung 3.8: Biegeschwinger als MIMO-System

längsschwingenden Stabes als Feder wird bezüglich der Biegeschwingung das Entkoppelelement als Biegebalken beschrieben. Die Steifigkeitsmatrix des schlanken Biegebalkens folgt aus den Ergebnissen der Elastostatik und lautet nach [30]

$$\mathbf{K}_{Balken} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

wobei l die Balkenlänge ist. Zur Behandlung von seriell gekoppelten Elementen ist die Darstellung in Kettenmatrixform nützlich. Für den Biegebalken gilt, mit der Abkürzung $B = EI$, nach [31]

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{M}_1 \\ \underline{\dot{\gamma}}_1 \\ \underline{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 & 0 \\ -j\omega l^2/(2B) & -j\omega l/B & 1 & 0 \\ -j\omega l^3/(6B) & -j\omega l^2/(2B) & l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{M}_2 \\ \underline{\dot{\gamma}}_2 \\ \underline{v}_2 \end{Bmatrix}. \tag{3.30}$$

Handelt es sich bei dem Entkoppelelement um ein kurzes Bauteil, so ist die Schubdeformation nicht vernachlässigbar. Die Balkentheorie nach Timoschenko liefert, mit $\beta =$

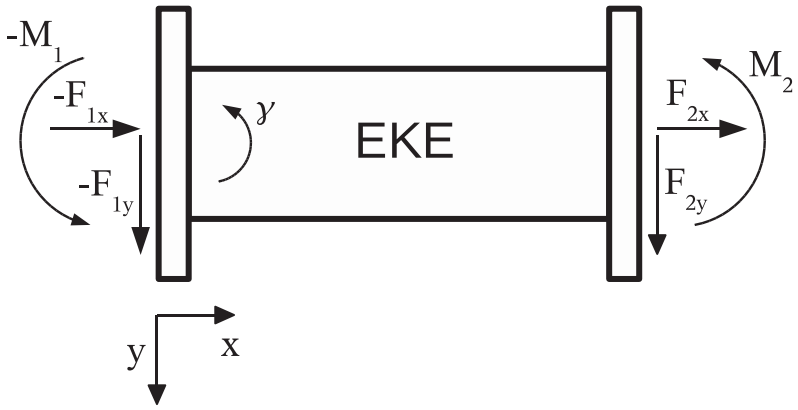


Abbildung 3.9: Schnittgrößen bei axialer, lateraler und rotatorischer Anregung

$4\chi EI/(AG)$, wobei A die Querschnittsfläche des Balkens ist, hierfür die Steifigkeitsmatrix [84]

$$\mathbf{K}_{TBalken} = \frac{AG}{4\chi l}\begin{bmatrix} 4 & -2l & -4 & 2l \\ -2l & \beta + l^2 & 2l & l^2 - \beta \\ -4 & 2l & 4 & 2l \\ -2l & l^2 - \beta & 2l & \beta + l^2 \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

3.4.3 Synthese der Teilsysteme

In der Praxis erfahren Entkoppelelemente, insbesondere in der Abgasanlage, Anregungen in mehreren Richtungen, da die Schwingungsquellen im Allgemeinen komplexe räumliche Bewegungen ausführen. Die Übertragungseigenschaften in axialer Richtung aus Kapitel 3.4.1 kombiniert mit dem lateralen und rotatorischen Übertragungssystem aus Kapitel 3.4.2 ermöglichen, das reale System abzubilden. Die Teilsysteme drücken das Schwingungsverhalten in zueinander orthogonalen Richtungen aus, die sich gegenseitig nicht beeinflussen. Somit folgt aus 3.15 und 3.27 das Gleichungssystem 3.32 mit den Bezeichnungen aus Abbildung 3.9.

$$\begin{Bmatrix} -\underline{F}_{1x} \\ -\underline{F}_{1y} \\ -\underline{M}_1 \\ \underline{F}_{2x} \\ \underline{F}_{2y} \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{F_{1x},u_{1x}} & 0 & 0 & \underline{k}_{F_{1x},u_{2x}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{k}_{F_{1y},u_{1y}} & \underline{k}_{F_{1y},\gamma_1} & 0 & \underline{k}_{F_{1y},u_{2y}} & \underline{k}_{F_{1y},\gamma_2} \\ 0 & \underline{k}_{M_1,u_{1y}} & \underline{k}_{M_1,\gamma_1} & 0 & \underline{k}_{M_1,u_{2y}} & \underline{k}_{M_1,\gamma_2} \\ \underline{k}_{F_{2x},u_{1x}} & 0 & 0 & \underline{k}_{F_{2x},u_{2x}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{k}_{F_{2y},u_{1y}} & \underline{k}_{F_{2y},\gamma_1} & 0 & \underline{k}_{F_{2y},u_{2y}} & \underline{k}_{F_{2y},\gamma_2} \\ 0 & \underline{k}_{M_2,u_{1y}} & \underline{k}_{M_2,\gamma_1} & 0 & \underline{k}_{M_2,u_{2y}} & \underline{k}_{M_2,\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_{1x} \\ \underline{u}_{1y} \\ \underline{\gamma}_1 \\ \underline{u}_{2x} \\ \underline{u}_{2y} \\ \underline{\gamma}_2 \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

Die Schwingungen befinden sich somit in einer Ebene. Da die meisten Entkoppelelemente einen rotationssymmetrischen Aufbau aufweisen, kann die dreidimensionale Struktur jedoch in vielen Fällen auf ein ebenes Problem projiziert werden. Der dreidimensionale Fall würde um jeweils einen translatorischen Freiheitsgrad in z-Richtung und einen rotatorischen Freiheitsgrad um die y-Achse erweitert werden. Wenn auch noch Torsionsschwingungen von Interesse sind, so muss die Rotation um die x-Achse mit berücksichtigt werden.

3.5 Entkopplung höherer Schwingfrequenzen

Bei tiefen Frequenzen kann ein Schwingungsisolator häufig als masselose verlustbehaftete Feder betrachtet werden, bzw. die Eigenmasse kann zusammengefasst und als diskrete Masse modelliert werden. Mit steigender Frequenz ist die Abstraktion als einfaches diskretes Modell nicht mehr gültig. Die Trägheitskräfte, bedingt durch den Massenbelag des schwingenden Kontinuums, wirken dem Kraftfluss entgegen, wodurch es im Bauteil sowohl zu starken Frequenz- als auch Ortsabhängigkeiten der Zustandsgrößen des Körperschalls kommt. Der Schwingungsisolator ist somit ein Wellenleiter, der in einfachen Fällen der longitudinalen Schwingungsentkopplung mit der eindimensionalen Wellengleichung 3.33 beschrieben und analytisch behandelt werden kann [4].

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.33}$$

Die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Lösung partieller Differentialgleichungen auftreten, werden in der Praxis durch eine räumliche Diskretisierung umgangen [31]. Somit wird das Problem auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert. Ein häufig verwendeter Ansatz zur Beschreibung schwingender Kontinua ist der des Wellenleiters, bestehend aus einer Kettenschaltung diskreter Elemente. Mit der Anzahl der Elemente steigen die Modellfreiheitsgrade, wodurch die Eigenmoden im interessierenden Frequenzbereich berechnet werden können. Zur Verdeutlichung dieses Prinzips wird die Kettenmatrix einer Serienschaltung aus Feder-Masse-Teilsystemen betrachtet, wie in Abbildung 3.10 dargestellt. Die Grundelemente des Kettenleiters liegen hier in der einfachsten Form vor. Die dazugehörige Kettenmatrix berechnet man durch Multiplikation der Matrizen aus Gleichung 3.25 und 3.24.

$$\mathbf{A}_{km} = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j\frac{\omega}{\underline{k}} & -\omega^2 \frac{m}{\underline{k}} + 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Der Massenbelag wird durch die diskreten Massen m_1,m_2,...,m_N approximiert, die Viskoelastizität mit verlustbehafteten Federn. Falls es sich um einen Stab mit konstantem Querschnitt und homogenem Material handelt, sind alle Feder-Masse-Elemente gleich. Zur Abschätzung, welche minimale Anzahl von Elementen notwendig ist, um das Kontinuum in dem betrachteten Frequenzbereich hinreichend genau anzunähern, ist in diesem Fall die Erfüllung von Gleichung 3.23 hinreichend. Die Approximation durch ein einzelnes Feder-Masse-Grundelement nach Gleichung 3.34 ist somit nur für $-\omega^2 \frac{m}{\underline{k}} \ll 1$ gültig, d.h. für tiefe Frequenzen. In Abbildung 3.11 sind die Betrags- und Phasenfrequenzgänge der Kettenmatrixparameter von $\mathbf{A}_{Kette}$, mit m = 0.54 kg, k = $5{\cdot}10^6$ N/m und mit d = 1,3 Ns/m schwach gedämpft, dargestellt.

$$\mathbf{A}_{Kette} = \prod_{1}^{N} \mathbf{A}_{km} \tag{3.35}$$

Die an den Schnittstellen der Feder-Masse-Blöcke auftretenden Zustandsgrößen der Schwin-

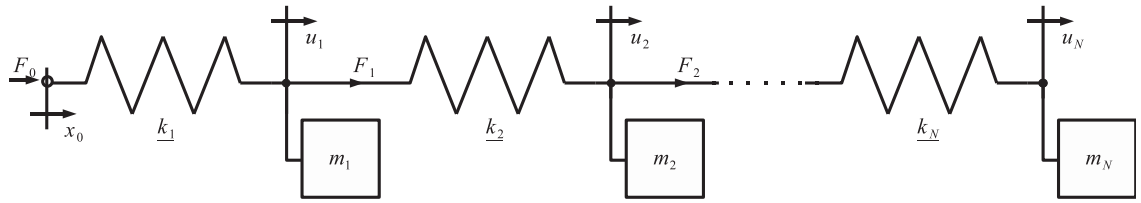


Abbildung 3.10: Kettenschaltung aus N Feder-Masse-Gliedern.

gung lassen sich nach [31] ebenfalls mit Hilfe der Kettenmatrizen berechnen. Hiermit ist es möglich, sowohl Eigenfrequenzen als auch Eigenformen zu ermitteln, die den Lösungen der Differenzialgleichungen des Systems entsprechen. Abbildung 3.12 zeigt den Betrag der Schnelle des längsschwingenden Stabes abhängig von der Stabposition und der Frequenz, bei einer Abschlussmasse von 2kg. Die erste Eigenform des Systems weist eine entlang des Stabes linear ansteigende Schnelle auf. Hierbei handelt es sich um eine $\lambda/4$-Resonanz, die mit dem einfachen Feder-Masse-Modell beschrieben werden kann. Die höherfrequenten Eigenformen bei 1,5 kHz und 3,0 kHz sind unabhängig von der Abschlussmasse und bestimmen die Übertragungseigenschaften des Bauteils signifikant. Dies ist an den Einbrüchen im Kurvenverlauf des Kettenparameters $\underline{A}_{2,1}$ erkennbar. Die Ausprägung der Eigenmoden sinkt mit steigender Frequenz, was auf die mit der Frequenz linear wachsenden Dämpfung zurückzuführen ist. Hier wird deutlich, dass bei höheren Frequenzen, reale Bauteile nicht mehr als ideale verlustbehaftete Feder modelliert werden können und für die Steifigkeiten Gleichung 3.18 nicht gültig ist. In der Praxis der Schwingungsentkopplung durch viskoelastische Elemente ist die Transfersteife $\underline{k}_{2,1}$ die interessanteste Kenngröße [21][86][81].

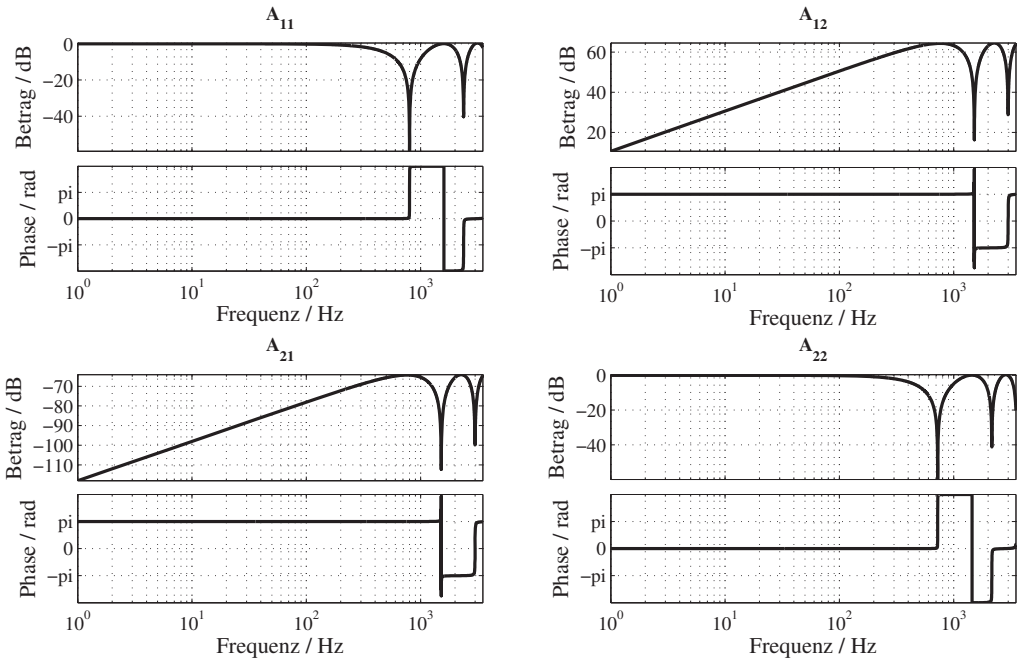


Abbildung 3.11: Kettenmatrixparameter von $\mathbf{A}_{Kette}$

Sie kann einfach aus der Kettenmatrix nach Gleichung 3.21 abgeleitet werden, unter Verwendung der unteren Zeile und der Randbedingung $v_2 = 0$, nach

$$\underline{k}_{2,1} = \frac{j\omega}{\underline{A}_{2,1}} \tag{3.36}$$

In Abbildung 3.13 ist an dem frequenzabhängigen Verlauf der Transfersteife erkennbar, dass die Stabeigenformen, mit ein- und ausgangsseitig fixierten Randbedingungen, zu einer stark ausgeprägten Bauteilversteifung führen.

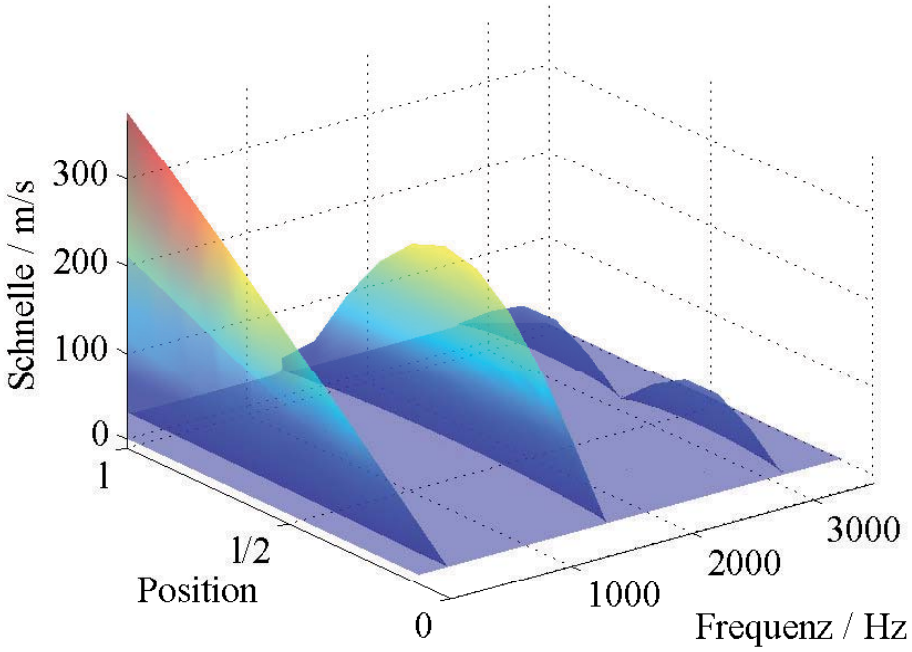


Abbildung 3.12: Schnelleverteilung entlang des diskretisierten Kontinuums

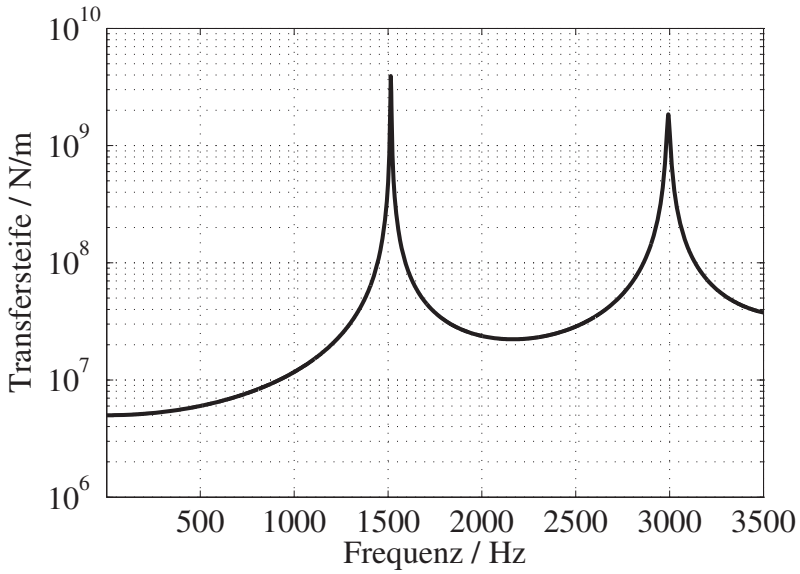


Abbildung 3.13: Transfersteife des diskretisierten Kontinuums

Kapitel 4

Nichtlineare dynamische Systeme

4.1 Nichtlineares Schwingverhalten von Entkoppelelementen

Eine Vielzahl der eingesetzten Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen haben eine nichtlineare Steifigkeitskennlinie. Insbesondere Schlauchgelenke und Schlauchleitungen weisen ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf. Dies macht sich beispielsweise bei der statischen Steifigkeitskennlinie in einem progressiven Kurvenverlauf bemerkbar [9]. Die Gründe hierfür sind in dem mehrlagigen, recht komplexen Aufbau zu finden, der in Abbildung 2.2 von Kapitel 2.2 gezeigt ist. Die maximalen Verstellwege sind aufgrund der Agraffschlauchgestaltung begrenzt. Es handelt sich somit z.T. um Nichtlinearitäten, die von geometrischen Zwangsbedingungen resultieren. Die Komponenten Agraffschlauch und das äußere Metallgeflecht bzw. Gestricke weisen eine sehr hohe innere Dämpfung auf, die auf trockener Reibung beruht und somit nichtlinear ist. Desweiteren sind Resonanzfrequenzen anregungsabhängig, was zwar zu breiteren Resonanzbereichen führt, die allerdings eine weniger stark ausgeprägte Amplitudenüberhöhung als lineare Systeme aufweisen. Nichtlineare Mechanismen sind daher prinzipiell nicht unerwünscht, führen aber zu einem häufig schwer beschreibbaren Systemverhalten. Die Zuordnung zwischen Systemein- und Ausgang ist i.A. nicht mit Hilfe einer einzigen nur von der Frequenz abhängigen Übertragungsfunktion möglich. Die Anregungsart, d.h. die Eigenschaften der Schwingung sowohl im Zeit- und im Frequenzbereich, als auch Vorspannung und Vorgeschichte, bei hysteretischen Systemen, sind Parameter der Übertragungseigenschaften.

Im Folgenden wird auf einige Aspekte der Systemtheorie nichtlinearer Systeme eingegangen, die im Hinblick auf die Anwendung bei Schwingungsentkopplern relevant sind. Anschließend werden Methoden zur Erlangung optimaler linearer Ersatzmodelle dargestellt und abschließend beispielhafte nichtlineare Modelle mit Hilfe der numerischen Zeitintegration behandelt.

4.2 Nichtlineare Systeme

Die Funktion $y = f(x)$ stellt den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße x und der Ausgangsgröße y her. Das System ist linear, wenn Superpositions-

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{4.1}$$

und Proportionalitätsbedingung

$$f(ax_1) = af(x_1) \tag{4.2}$$

erfüllt sind [77]. Im linearen Fall gilt

$$f(x) = \underline{c}_1 x. \tag{4.3}$$

Hierbei ist $\underline{c}_1$ ein komplexer Faktor, der im Allgemeinen von der Frequenz abhängig ist. Bei einer Vielzahl nichtlinearer Systeme kann die Nichtlinearität mit einer statischen Kennlinie beschrieben werden. Diese wird häufig durch eine Potenzreihe vom Grad N ausgedrückt:

$$y = \sum_{i=0}^{N} c_i x^i \tag{4.4}$$

Es ist einfach nachzuprüfen, dass für 4.4 die Bedingungen 4.1 und 4.2 nicht erfüllt sind. Der linear-affine Fall mit $c_0 \neq 0$ und $c_1 \neq 0$ wird im Zusammenhang mit strukturdynamischen Betrachtungen allerdings i.d.R. als lineares System behandelt, da statische Verschiebungen hierbei nicht Gegenstand der Untersuchungen sind.

Bei harmonischer Eingangsgröße weisen *reguläre* Systeme ein diskretes Linienspektrum am Ausgang auf. Dies besteht i.A. aus der Grundschwingung, Sub- und Superharmonischen und Modulationsfrequenzen, die sich aus dem Zusammenwirken der unterschiedlichen Harmonischen ergeben. Im Gegensatz dazu können *irreguläre* Systeme nur unzureichend mittels der Taylorreihe beschrieben werden. Hierzu zählen Systeme, bei denen Mechanismen mit sprunghafter Parameteränderung, wie z.B. Schwingungsentkoppler mit harten Begrenzungen [66] oder stark ausgeprägter trockener Reibung. Das bei harmonischer Anregung

resultierende Ausgangsspektrum ist bei solchen Systemen meist kontinuierlich und enthält diskrete Komponenten. Hierbei weisen die Zeitverläufe häufig chaotische Oszillationen auf [58].
Die Bandbreite nichtlinearer Mechanismen und deren Auswirkung auf das dynamische Verhalten ist sehr groß. Somit können diese Systeme sich sehr stark unterscheiden, was die Modellierung gegenüber der linearer Systeme unverhältnissmäßig schwierig macht [87]. Es existieren zwar Ansätze und Methoden zur Systemidentifikation, Modellierung und zur Linearisierung, allerdings hängt deren Einsetzbarkeit von dem vorliegenden System ab. Die Behandlung des Systems als *Black-Box*, bei der lediglich ein formaler Zusammenhang zwischen Ein-, Ausgangs- und Zustandsgrößen bestimmt wird, ist in den meisten Fällen entweder nicht oder nur mit begrenzter Modellgenauigkeit und hohem Aufwand möglich. Geeignete Modellansätze werden meist durch Kenntniss der physikalischen Gesetzmäßigkeiten des zu beschreibenden Systems erlangt. Die Strukturierung zwischen linearem und nichtlinearem Teilsystem wird häufig angestrebt.

4.3 Nichtlineare Federkennlinien

Die Beschreibung der wegabhängigen Steifigkeit erfolgt mit Hilfe von Kennlinien [62]. Progessive Kennlinien werden durch einen linearen Anteil und einen kubischen Anteil mit positivem Vorzeichen modelliert, bei degressiven Kennlinien wird der kubische Term subtrahiert. Die so entstehenden Kurven sind ursprungssymmetrisch, wie in Abbildung 4.1 (links) erkennbar. Elementare Feder-Masse-Systeme mit kubischem Steifigkeitsanteil werden als *Duffing*-Schwinger bezeichnet [58]. Die Hinzunahme von quadratischen Termen ermöglicht die einfache Modellierung asymmetrischer Kennlinien, wie in Abbildung 4.1 (rechts) skizziert.
Schlauchgelenke weisen ein stark progressives Verhalten auf, das aufgrund der geometrischen Randbedingungen in Zug- und Druckrichtung unterschiedlich ausgeprägt ist, was eine asymmetrische Kennlinie bedingt. Dies kann durch die Kombination von quadratischem und kubischem Term approximiert werden.
Mit steigendem Polynomgrad sind mehr Freiheitsgrade zur Modellierung des Systems verfügbar. Allgemein können die Koeffizienten ungeradzahliger Potenzen zur Modellierung der symmetrischen Kennlinienanteile verwendet werden. Asymmetrien werden mit Koeffizienten der geraden Potenzen ausgedrückt. Gemäß der Beschreibung von Gleichung 4.4 gilt speziell für die Steifigkeitskennlinie

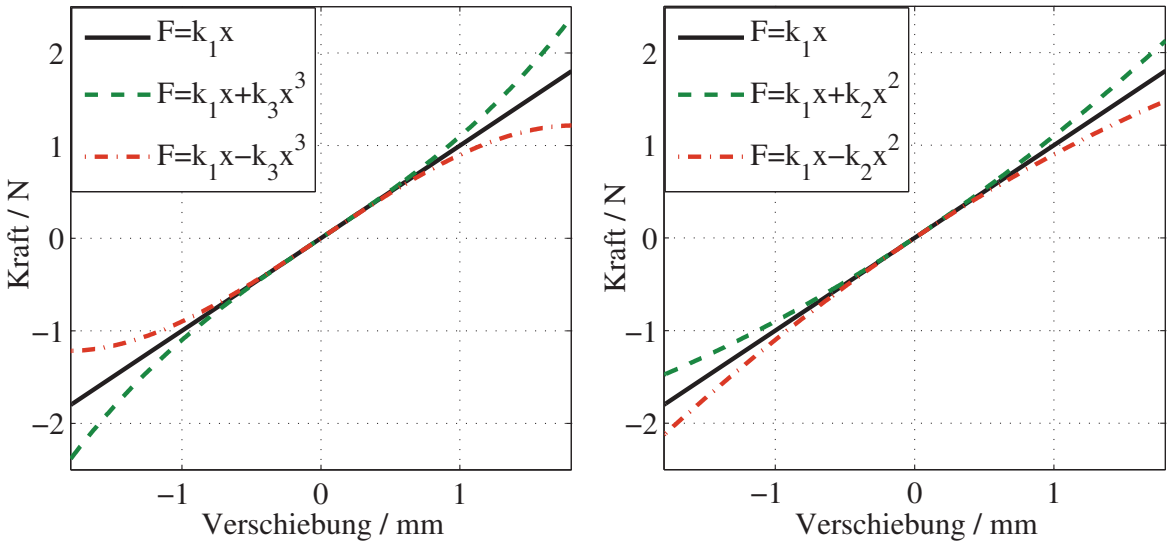


Abbildung 4.1: Polynomfunktionen als Kennlinien

$$F = \sum_{i=0}^{N} k_i x^i. \tag{4.5}$$

Polynome eigenen sich aufgrund der numerischen Unkompliziertheit hervorragend zur Implementierung in Simulationsprogrammen, wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wird. Es muss allerdings sicher gestellt werden, dass der Gültigkeitsbereich der Federverschiebung nicht überschritten wird. Bei degressiven Kennlinien tritt sonst ein „Umklappen“ der Kennlinie auf. Die Steifigkeitsverläufe aus Abbildung 4.1 sind reguläre Kennlinien. Hohe Schwingamplituden werden häufig durch geometrische Randbedingungen begrenzt, was zu einer sehr starken Progressivität führt, die durch eine nicht stetige Kennlinie gekennzeichnet ist. Das Ersatzschaltbild in Abbildung 4.2 folgt in Anlehnung an [66], wobei der Steifigkeit k_1 bei Überschreiten des Bereichs Δx eine zweite Steifigkeit k_2 hinzugeschaltet wird. Ein Polynomansatz eignet sich prinzipiell nur bedingt zur Approximation solcher „harter“ Kennlinien und kann häufig nur qualitativ erfasst werden.

4.4 Trockene Reibung

Trockene Reibung ist ein nichtlinearer Mechanismus, der häufig einen entscheidenden Einfluss auf die Dissipation von Schwingungsenergie hat. Insbesondere tritt dieser Effekt bei mehrlagig aufgebauten Elementen, wie den hier zu untersuchenden Schlauchgelenken und

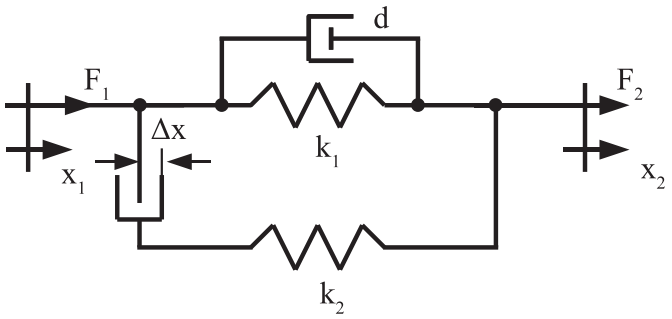


Abbildung 4.2: System mit irregulärer Kennlinie

-leitungen, an den Kontakt- und Fügestellen auf [32][78]. Das Modell der linear-viskosen Dämpfung wird aufgrund seiner Einfachheit ersatzweise angewendet, um die Dissipationseffekte der trockenen Reibung zu beschreiben. Hierbei handelt es sich allerdings um linearisierte Modelle, die nur für bestimmte Zustände gültig sind. Die Modellierung der statischen Hysterese ist hiermit nicht möglich. Das einfachste Modell zur Beschreibung eines Systems mit trockener Reibung ist das Coulomb-Modell [69], das durch die homogene Differenzialgleichung

$$m\ddot{u} + \mu sgn(\dot{u}) + ku = 0 \tag{4.6}$$

beschrieben wird. Aus einer seriellen Anordnung von elastischer Feder und coulomb'schem Reibelement besteht das Jenkin-Element [67]. Physikalisch modelliert man somit die Haft- und Gleitzustände der einzelnen Kontaktstellen. Die Schaltung solcher Jenkin-Elemente mit unterschiedlicher Federsteifigkeit und Reibkoeffizienten parallel zu einer Feder ermöglicht eine feine Modellierung der Hysteresekurve. Dies bezeichnet man als Masing-Modell [52], das in Abbildung 4.3 mit einer zusätzlichen viskosen Dämpfung dargestellt wird. Hiermit wird beispielsweise die strukturelle Dämpfung ausgedrückt und dem Problem, dass bei Unterschreiten der Haltekräfte das Masing-Modell ungedämpft ist, entgegengewirkt. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von Jenkin-Elementen mit nichtlinearer Feder, was im Cattaneo-Mindlin-Modell Anwendung findet, im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt wird. Die Ableitung der von dem i-ten Jenkin-Element übertragenen Kraft ist für den Fall, dass das Coulomb-Element haftet, d.h. $|F_i| < F_{i,max}, \vee(|F_i| = F_{i,max} \wedge sgn(\dot{u}) \leq 0)$

$$\dot{F}_i = k_i(\dot{u}), \tag{4.7}$$

wenn die Haltekraft $F_{i,max}$ überstiegen wird, gilt

$$\dot{F}_i = 0. \tag{4.8}$$

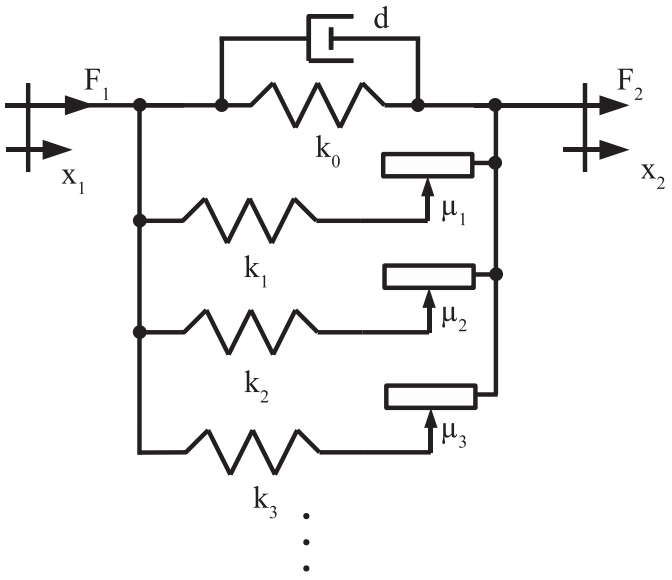


Abbildung 4.3: System mit viskoser und trockener Reibung

Diese beiden Evolutionsgleichungen lassen sich nach [52] zusammenfassen und numerisch günstig annähern durch

$$\dot{F}_i = k_i \dot{u} \left[1 - \frac{1}{2}(1 + sgn(\dot{u} F_{i,max})) \left| \frac{F_i}{F_{i,max}} \right|^n \right], \qquad n \in \mathbb{R} \wedge n \geq 1. \tag{4.9}$$

Mit der Anzahl der Jenkin-Elemente steigen die Kosten für die Berechnung der Evolutionsgleichungen, weshalb ein möglichst geringer Modellgrad angestrebt wird. Es existiert keine allgemeingültige Regel, mit der die Anzahl der Modellfreiheitsgrade festgelegt wird. Ein Optimum muß im Hinblick auf die Parameter Modellgröße, Genauigkeit und die Grenzen, innerhalb deren das Modell gültig ist, gefunden werden.

4.5 Lineare Ersatzmodelle

Eine sehr häufig verwendete Linearisierungsmethode ist die Betrachtung kleiner Auslenkungen um einen Arbeitspunkt, der beispielsweise im Fall einer Schwingungsisolation durch eine statische Vorspannung gegeben ist. Eine lineare Ersatzfunktion wird durch Anlegen der Tangente im Arbeitspunkt erreicht, d.h. die Taylorreihe wird nach dem linearen Glied abgebrochen. Diese einfache Methode ist nur bei kleinen Schwingwegen hinreichend genau und führt bei steigenden Amplituden zu einem immer größer werdenden Fehler.

Abbildung 4.4 (links) veranschaulicht, dass die Taylorlinearisierung nur im Bereich von -1 bis +1 gültig ist. Nur sehr schwach nichtlineare Systeme können somit in einem weiten Bereich sinnvoll beschrieben werden. Außerdem ist die messtechnische Ermittlung schwierig, da das System nur mit sehr kleiner Amplitude ausgesteuert werden darf, was prinzipiell einen schlechten Signal-Rauschabstand bedingt.

Weitaus günstigere Approximationen erhält man durch Modelle, die innerhalb definierter Systemgrenzen bezüglich eines minimalen quadratischen Fehlers optimal sind. Die statistische Linearisierung erfüllt diese Forderung [51]. Man wendet diese an, wenn an dem Eingang des nichtlinearen Systems eine stochastische Schwingung X anliegt. Das Ersatzmodell eines linear-affinen Systems

$$Y = c_0 + c_1 X + c_2 \dot{X} \tag{4.10}$$

erlangt man mit dem Erwartungswert

$$c_0 = E\left\{f(X)\right\}, \tag{4.11}$$

der Kovarianz von Eingangs- und Ausgangsgröße, geteilt durch die Varianz der Eingangsgröße X

$$c_1 = \frac{E\left\{f(X)X\right\}}{E\left\{X^2\right\}} \tag{4.12}$$

und

$$c_2 = \frac{E\left\{f(X)\dot{X}\right\}}{E\left\{\dot{X}^2\right\}}. \tag{4.13}$$

Es wird die Freiheit vom Gleichanteil der Eingangsgröße, der Ableitung und deren Kovarianz vorrausgesetzt:

$$\begin{aligned} E\left\{X\right\} &= 0 \\ E\left\{\dot{X}\right\} &= 0 \\ E\left\{\dot{X}X\right\} &= 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Die so erlangten Koeffizienten c_0, c_1 und c_2 erfüllen die Gleichung

$$\sigma^2 = E\left\{[f(X,\dot{X}) - c_0 - c_1 X - c_2 \dot{X}]^2)\right\} = min \tag{4.15}$$

wonach der quadratische Fehler minimal ist. Die Abhängigkeit des linearisierten Ersatzmodells von dem anregenden Signal zeigen die Kurvenverläufe in Abbildung 4.4 (rechts). Obwohl jeweils weißes Rauschen mit dem selben Spitzenwert von -2 bis +2 als Anregung

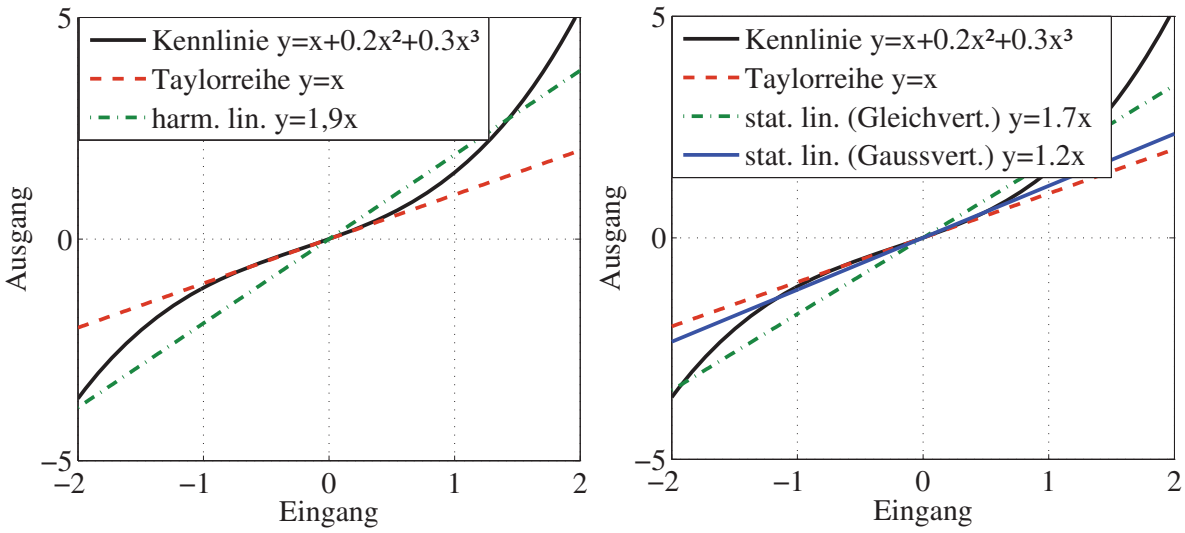


Abbildung 4.4: Linearisierungen einer statischen Kennlinie

verwendet wird, führt die gaußförmige Verteilungsfunktion zu einem kleineren Koeffizienten als das gleichverteilte Rauschen.

Ersetzt man in den Gleichungen 4.10, 4.11, 4.12 und 4.13 den Erwartungswert durch den zeitlichen Mittelwertbildner und nimmt die Schwingung $x(t) = \cos \omega t$ als Eingangsgröße an, so folgt hieraus die Gleichung

$$\begin{aligned} y =& a_0 + a_1 \hat{u} \cos \omega t - a_2 \hat{u} \omega \sin \omega t \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\hat{u} \cos \omega t, -\hat{u}\omega \sin \omega t) dt \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\hat{u} \cos \omega t, -\hat{u}\omega \sin \omega t) \cos \omega t dt \cos \omega t \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\hat{u} \cos \omega t, -\hat{u}\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt \sin \omega t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Es handelt sich hierbei um eine Fourierreihenentwicklung, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Dies ist das Prinzip der harmonischen Linearisierung. Im Frequenzbereich bedeutet dies, dass jeweils nur die erste Harmonische betrachtet wird und Ober- und Unterschwingungen nicht berücksichtigt werden. Das Verfahren der statistischen Linearisierung liefert bei harmonischen Eingangsschwingungen somit identische Ergebnisse, wie die harmonische Linearisierung. Speziell auf eine nichtlineare Rückführfunktion $g(u, \dot{u})$, die eine nichtlineare Elastizität und Dämpfung umfasst, folgt aus Gleichung 4.12 und den Schwingungen im Beobachtungszeitraum T die linearisierte Steife

$$k_{lin} = \frac{1/T \int_0^T u(t) g(u(t), \dot{u}(t)) dt}{1/T \int_0^T u^2(t) dt} \tag{4.17}$$

und aus Gleichung 4.12 die linearisierte Dämpfung

$$d_{lin} = \frac{1/T \int_0^T \dot{u}(t) g(u(t), \dot{u}(t)) dt}{1/T \int_0^T \dot{u}^2(t) dt}. \tag{4.18}$$

Speziell folgt für eine Feder mit linearem und kubischem Anteil

$$k_{lin} = \frac{1/T \int_0^T u(t)(k_1 u(t) + k_3 u^3(t)) dt}{1/T \int_0^T u^2(t) dt} = k_1 + k_3 \frac{\int_0^T u^4(t) dt}{\int_0^T u^2(t) dt}. \tag{4.19}$$

4.6 Numerische Untersuchung nichtlinearer Schwingungungsentkoppler

Die Behandlung nichtlinearer Schwingungssysteme ist häufig nur in speziellen, teilweise rein akademischen Spezialfällen analytisch möglich. Ein mächtiges Werkzeug zur Behandlung solcher Probleme ist die numerische Zeitintegration der zugrunde liegenden nichtlineren Differenzialgleichungen [58][75]. Zur Simulation der regulären nichtlinearen Steifigkeitskennlinien wird in dieser Arbeit der Matlab-Solver *ODE45*, welcher einen Runge-Kutta-Algorithmus mit der Schrittweitensteuerung nach Dormand und Prince [26] anwendet. Die absolute Genauigkeit (*AbsTol*) ist im Folgenden auf 10^{-18} und die relative Genauigkeit (*RelTol*) gleich 10^{-9} gesetzt. Bei der Simulation mit größeren Fehlertoleranzen ist die Verwendung eines Solvers mit Schrittweitensteuerung und einer Integrationsroutine niedrigerer Ordnung, wie z.B. *ODE23*, teilweise effizienter.

Es wird ein wegerregtes nichtlineares Entkoppelelement mit Massenabschluss gemäß Abbildung 4.5 untersucht. Diese Anordnung entspricht der zur indirekten Messung der axialen Übertragungseigenschaften des Entkoppelelementes, wie in Abschnitt 5.5.1 beschrieben. Zunächst wird der Einfluss einer nichtlinearen Steifigkeitskennlinie mit viskoser Dämpfung auf das Übertragungsverhalten gezeigt, dann ein Modell mit linear-elastischer Feder und trockener Reibung untersucht. Die Abschlussmasse beträgt in jedem Fall 3 kg.

4.6.1 System mit nichtlinearer Federkennlinie

Die Kraft-Weg-Kennlinie der Feder wird durch das Polynom fünfter Ordnung

$$F = 1,0 \cdot 10^4 u + 2,0 \cdot 10^6 u^2 + 5,0 \cdot 10^9 u^3 + 5,0 \cdot 10^{10} u^4 + 1,0 \cdot 10^{14} u^5 \tag{4.20}$$

berechnet. Die viskose Dämpfung ist d=100. Das System weist aufgrund des positiven Vorzeichens des Terms dritter und fünfter Ordnung einen progressiven Verlauf auf, was

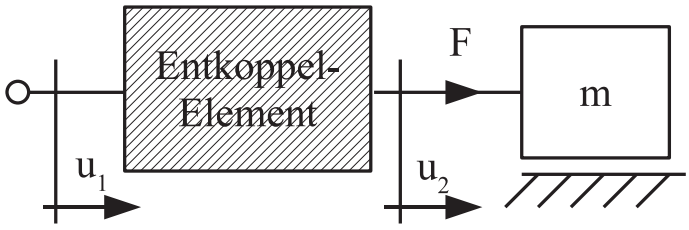


Abbildung 4.5: Testmodell mit Abschlussmasse

in dem Zeitverlauf der Ausgangskraft von Abbildung 4.6 (oben) erkennbar ist. Das dazugehörige Spektrum des eingeschwungenen Systems 4.6 (unten) ist diskret und beschreibt den Grenzzyklus, bei einer Anregung mit einer harmonischen Schwingung der Frequenz von 30 Hz und einem Spitzenwert von 1,5 mm. Hierbei sind die Harmonischen niedriger Ordnung der Ausgangskraft dominant. Die mit Sinusschwingungen diskret gemessene Beschreibungsfunktion ist abhängig von dem Spitzenwert der Anregung in Abbildung 4.7 dargestellt. Der Verlauf ist für sehr kleine Amplituden vergleichbar mit dem eines linearen Feder-Masse-Systems. Bei größerer Aussteuerung zeigt sich die für progressive Steifigkeitskennlinien typische Neigung der Resonanzüberhöhung zu höheren Frequenzen hin.

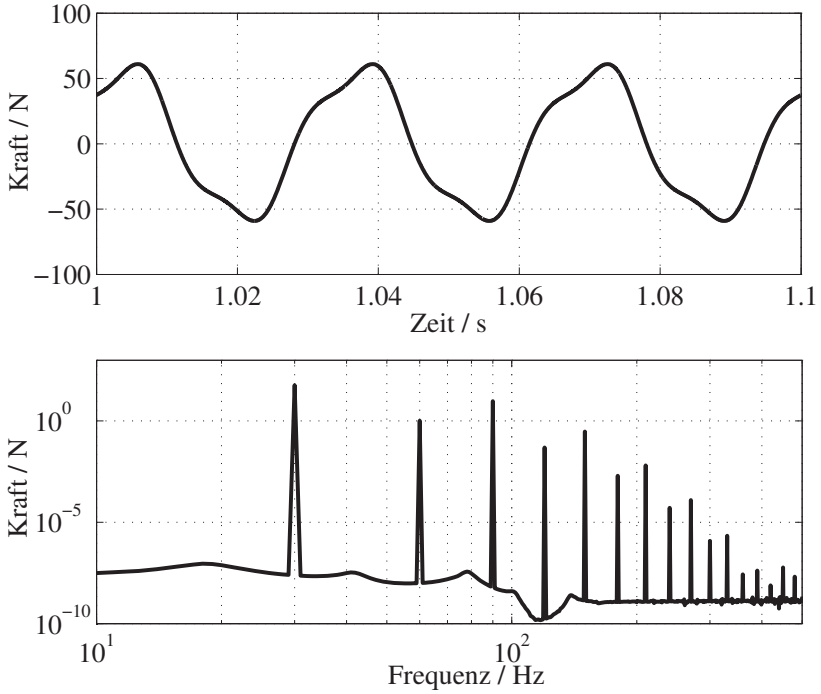


Abbildung 4.6: Simulierter Zeitverlauf und dessen Spektrum

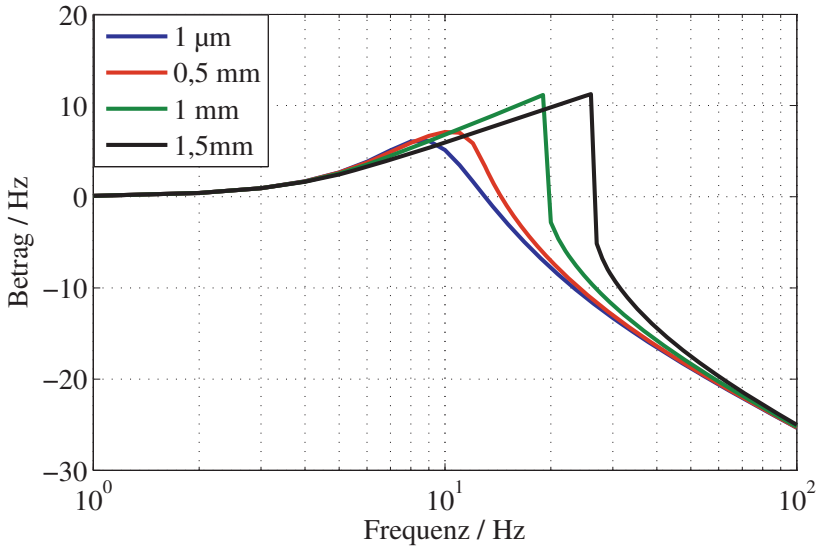


Abbildung 4.7: Beschreibungsfunktion des Systems mit progressiver Steife

4.6.2 System mit trockener Reibung

Dem Testsystem liegt das um einen viskosen Dämpfer ergänzte Masing-Modell mit zwei Jenkin-Elementen zugrunde. Der linear-viskoelastische Teil hat die Parameter d=10 Ns/m und $k_0 = 10^4$ N/m. Ein Jenkin-Element setzt sich aus der Steifigkeit $k_1 = 2 \cdot 10^4$ N/m und dem Reibelement mit einer extremalen Haltekraft von 10 N zusammen. Das zweite Jenkin Element mit einer Haltekraft von 1 N und einer vergleichsweise hohen Steifigkeit von $k_2 = 10^5$ N/m wird von deutlich geringeren Anregungen in den Gleitzustand versetzt als das erste Element.

Bei Anregung mit einer 30 Hz Sinusschwingung unterschiedlicher Amplitude folgen im Grenzzyklus die Hysteresekurven aus Abbildung 4.8 (links). Das in Abbildung 4.8 (rechts) gezeigte Spektrum des eingeschwungenen Systems weist nur ungeradzahlige Vielfache der Grundschwindung auf, was auf die Punktsymmetrie der Hysteresekennlinie zurückzuführen ist.

Die Beschreibungsfunktion in Abbildung 4.9 wird ebenfalls mit diskreten Sinusschwingungen unterschiedlicher Amplitude gemessen, so wie dies für die nichtlineare Steifigkeit in 4.6.1 gemacht wird. Die Lage des Maximums ist abhängig von der Anregungsamplitude, die Resonanzkurve ist nach links geneigt, wie dies auch bei degressiven Steifigkeitskennlinien der Fall ist. Die extremale Haltekraft des ersten Reibelementes wird bei der Anregung mit einer Amplitude von 1 μm nicht überschritten, weshalb das Element sich in diesem Bereich näherungsweise linear verhält. Bei stärkerer Aussteuerung beginnt auch das erste

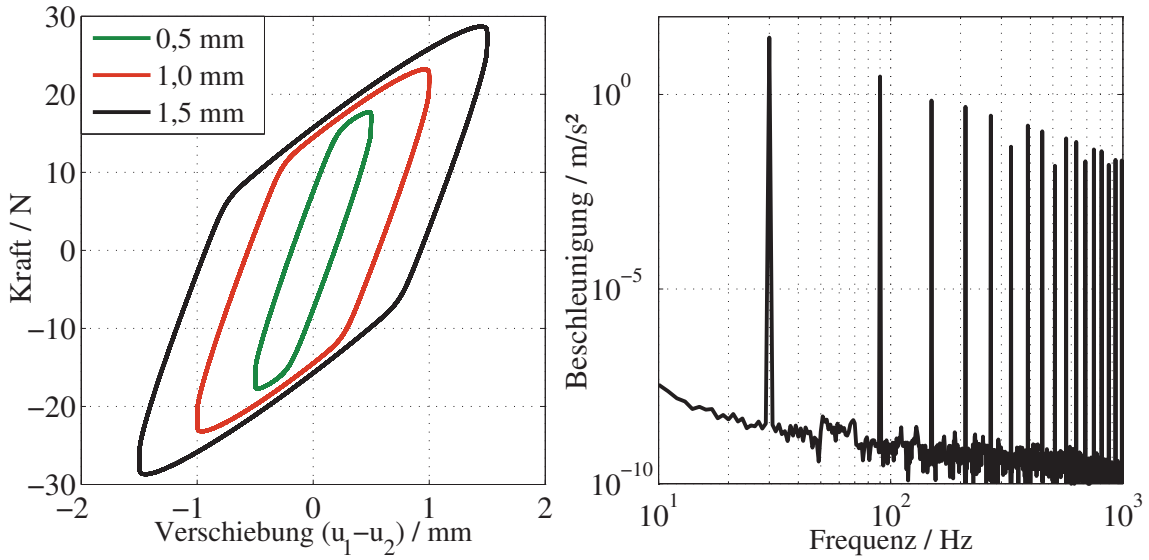


Abbildung 4.8: Hysterese und Ausgangsspektrum des Masing-Modells

Coulomb-Reibelement zu gleiten, wodurch Schwingungsenergie dissipiert wird, was an den geringer ausgeprägten Resonanzüberhöhungen deutlich wird.

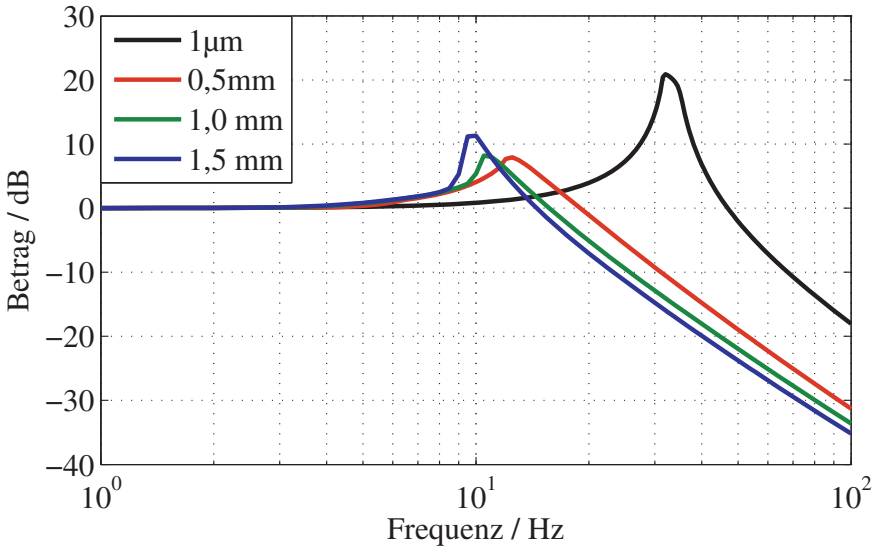


Abbildung 4.9: Beschreibungsfunktion des Systems mit Reibung

Kapitel 5

Theorie der messtechnischen Identifikation von Schwingungsentkopplern

5.1 Nichtparametrische Frequenzgangsmessung

Die nichtparametrische Identifikation dynamischer Systeme erfolgt häufig im Frequenzbereich unter Anwendung breitbandiger Testsignale, die den Prüfling innerhalb der interessierenden Bandbreite anregen. Der wahre Frequenzgang $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$, mit dem Eingangsspektrum $X(j\omega)$ und dem Ausgangsspektrum $Y(j\omega)$, wird hierbei von Frequenzgangsschätzern $\hat{H}(j\omega)$ aus den gemessenen Signalen, die i.A. von Messrauschen überlagert und durch nichtlineares Systemverhalten beeinflusst sind, geschätzt. Es werden die Autoleistungsspektren

$$S_{xx}(j\omega) = E\left\{|X(j\omega)|^2\right\} \tag{5.1}$$

$$S_{yy}(j\omega) = E\left\{|Y(j\omega)|^2\right\} \tag{5.2}$$

und Kreuzleistungsspektren

$$S_{xy}(j\omega) = E\left\{X^*(j\omega)Y(j\omega)\right\} \tag{5.3}$$

$$S_{yx}(j\omega) = E\left\{X(j\omega)Y^*(j\omega)\right\} \tag{5.4}$$

bestimmt. Praktisch werden die Leistungsspektren durch N-maliges Mitteln von FFT-Spektren berechnet [50].

$$S_{XX}(j\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X^*(j\omega)X(j\omega) \tag{5.5}$$

$$S_{XY}(j\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X^*(j\omega)Y(j\omega) \tag{5.6}$$

Die gebräuchlichsten nichtparametrischen Schätzer sind $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ und $H_r(j\omega)$ [70]

$$H_1(j\omega) = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_{xx}(j\omega)} \tag{5.7}$$

$$H_2(j\omega) = \frac{S_{yy}(j\omega)}{S_{yx}(j\omega)} \tag{5.8}$$

Hieraus ergibt sich

$$H_r(j\omega) = \sqrt{H_1(j\omega)H_2(j\omega)}. \tag{5.9}$$

$H_1(j\omega)$ liegt unterhalb und $H_2(j\omega)$ oberhalb von dem unbekannten wahren Frequenzgang $H(j\omega)$:

$$|H_1(j\omega)| \leq |H(j\omega)| \leq |H_2(j\omega)| \tag{5.10}$$

Iterative Tests unter Verwendung von den Gleichungen 5.7 oder 5.8 haben den Vorteil, dass nur die miteinander korrellierten Signalanteile des Eingangs- x und Ausgangssignals y in den Kreuzleistungsspektrum S_{xy} und S_{yx} enthalten sind und damit unkorrelierte Störungen unterdrückt werden. Im Falle des ungestörten Eingangssignals empfielt sich die Verwendung von $H_1(j\omega)$, während $H_2(j\omega)$ bei Ausgangssignalen mit höherem Signal-Rauschabstand die exakteren Ergebnisse liefert.
Der H_1-Schätzer kann als Entsprechung der stochastischen Linearisierung der Gleichgungen 4.12 und 4.13 im Frequenzbereich unter Verwendung komplexer Koeffizienten angesehen werden.

5.2 Eigenschaften breitbandiger Testsignale

Zur Systemidentifikation muss das zu untersuchende dynamische System im gesamten interessierenden Frequenzbereich angeregt werden. Mit elektrodynamischen Schwingerregern werden in der Regel Sinus-Sweeps, zufälliges und pseudozufälliges Rauschen angewendet. Die Eigenschaften dieser Signale sind in der Literatur ausreichend beschrieben [28]. Allerdings können diese Signale nicht exakt als mechanische Anregung wiedergegeben werden, da vor allem der Schwingerreger in erheblichem Maße lineare als auch nichtlineare Verzerrungen verursacht. Die linearen Verzerrungen, d.h. der Frequenzgang des Systems, führt dazu, dass nicht der gesamte Messfrequenzbereich gleichmäßig ausgesteuert ist. Dies führt zu einem geringeren lokalen Signal-Rausch-Abstand. Werden hingegen Eigenfrequenzen des Systems angeregt, so folgt eine Überhöhung der Anregung, wodurch häufig ein

nichtlineares Systemverhalten resultiert. Im Zeitbereich beobachtet man eine Erhöhung des Crestfaktors c_f der Anregung, was höhere Spitzenwerte bei geringerer Schwingungsenergie bedeutet.

Eine Verbesserung der Anregung erfolgt durch die Verwendung angepasster Filter. Weißes Rauschen beispielsweise erzeugt ein Kraftspektrum mit Tiefpasscharakteristik, wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Hierzu invers ist der Frequenzgang des angepassten Filters, das in erster Näherung einem Hochpass mit einer Grequenzfrequenz von 500 Hz entspricht[1]. Die anregende Kraft weist somit im Messfrequenzbereich ein konstanteren Verlauf auf. Der Frequenzgang des Schwingerregers wird mit Hilfe der Vorfilterung entzerrt[2]. Die bei einer Abtastrate von 48 kHz[3] gemessenen Crestfaktoren typischer Testsignale sind in Ta-

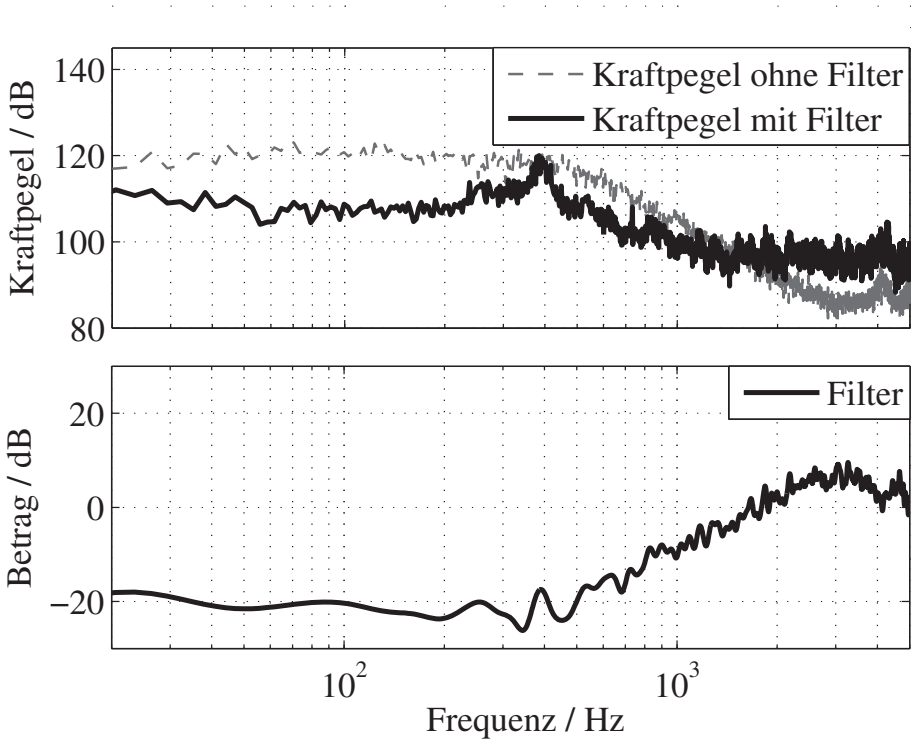


Abbildung 5.1: Kraftspektrum der Anregung und Betragsfrequenzgang des Filters

[1]Unter Matlab wird mit dem Befehl *fir2*, d.h. mittels Abtastung des Ziel-Frequenzgangs und anschließender inverser FFT, ein FIR-Filter mit 5000 Koeffizienten entworfen, die mit dem Hamming-Fenster gewichtet werden. Außerdem wird eine Bandbegrenzung mit IIR-Filtern (Typ: Butterworth) auf den Frequenzbereich 15 Hz - 5 kHz vorgenommen, wodurch sich die Signalenergie auf den Messfrequenzbereich konzentriert.

[2]Eine stärkere Entzerrung hat sich bei Experimenten als Kontraproduktiv herraus gestellt, da größere Amplituden in hohen Frequenzbereichen zu nichtlinearen Verzerrungen führen.

[3]Der Crestfaktor wurde bei Abtastraten zwischen 16 kHz und 48 kHz gemessen. Die Abweichungen waren im Bereich der Messgenauigkeit.

belle 5.1 zusammengefasst. Der theoretische Crestfaktor c_f ist hierbei immer geringer, als der gemessene. Durch die Filterung verbessert sich insbesondere der Crestfaktor des Sinus-Sweeps. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei diesem Testsignal zu einem Zeitpunkt die gesamte Schwingungsenergie in einem schmalen Frequenzband konzentriert ist, wodurch Resonanzbereiche ohne die Filterung stark ausgesteuert werden. Nichtlineares Verhalten wird hierdurch in erheblichem Maße hervorgerufen. Der theoretisch hervorragende Wert der Maximalfolgen wird bei der mechanischen Schwingung nicht annähernd erreicht, was auf die Bandbegrenzung zurückzuführen ist, wohingegen der Crestfaktor des normalverteilten Rauschens von allen gemessenen Signalen am geringsten ist, obwohl der theoretische Wert der höchste ist.

Signal	c_f theoretisch	ohne Entzerrung c_{f1}	Mit Entzerrung c_{f2}
Sinus	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1,5 < c_f < 1,8$	-
Sinus-Sweep	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	14,8	5,6
Rauschen (gleichverteilt)	$\frac{1}{\sqrt{2/6}}$	3,9	3,8
Rauschen (normalverteilt)	>3	4,2	3,6
Maximalfolgen	1	3,9	4,5

Tabelle 5.1: Crestfaktoren

5.3 Frequenzgangsmessung mit monofrequenter Anregung

Breitbandsignale regen über den Beobachtungszeitraum gemittelt die komplette Messbandbreite an. Bedingt durch Systemresonanzen sind gewisse Frequenzbereiche stark ausgesteuert, wodurch bei Strukturdynamikprüfungen der linear-elastische Bereich häufig leicht überschritten wird, in anderen dagegen liegt die zu messende Größe im schlechtesten Fall unter dem Systemrauschen. Die Verwendung einzelner harmonischer Schwingungen zur „Punkt-für-Punkt“-Messung des kompletten Frequenzbereiches ist häufig vorteilhaft, da ein Maximum an Energie im betrachteten Messpunkt zur Verfügung steht und eine sehr gute Kontrolle der frequenzabhängigen Aussteuerung möglich ist. Der Crestfaktor der Sinusschwingung wird weiterhin nicht durch lineare Verzerrungen des Schwingerregers erhöht, was bei sämtlichen Breitbandsignalen in der Praxis der Fall ist.
Mit einem digitalen Messsystem wird die Sinusschwingung $s(n) = sin(2\pi f_k n/f_t)$, mit $f_k = k \cdot \frac{f_t/2}{K}$, $k = 0, 1, ...(K-1)$ und der Abtastrate f_T, als Testsignal erzeugt. Zur Ver-

besserung des transienten Verhaltens werden die ersten Perioden der Sinusschwingung mit einer steigenden Rampenfunktion gewichtet. Hierdurch wird die Beanspruchung des Prüflings und des Schwingerregers während des Einschwingvorgangs verringert.
Die Berechnung der Kreuzenergie von komplexer harmonischer Schwingung und Messwert $x(n)$ liefert nach Gleichung 5.11 den k-ten Messpunkt des einseitigen komplexen Spektrums.

$$X(k) = \frac{2}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)cos(2\pi f_k n/f_T) - j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)sin(2\pi f_k n/f_T)\right] \tag{5.11}$$

Hierbei ist $K \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Punkte des diskreten Spektrums, mit dem unter Verwendung von 5.7 bzw. 5.8 die relevanten Übertragungsfunktionen geschätzt werden. Die Messwerte $x(n)$ werden erst nach Abklingen des Einschwingvorgangs aufgenommen. Gewöhnlich sind die Einschwingdauern bei höheren Frequenzen kürzer, als bei niedrigeren Frequenzen, weshalb man bei steigender Frequenz kürzere Zeitfenster wählen kann. Der Frequenzabstand $\frac{ft}{2}/K$ kann an die Anforderungen der Messung angepasst werden. Zur genaueren Bestimmung einer Resonanzfrequenz kann das Frequenzraster im Bereich um die Resonanzfrequenz verfeinert werden.
Stepped-Sine-Messungen werden in analoger Technik mit Fourierdemodulatoren realisiert [80]. In einer digitalen Implementierung ist die Verwendung von Fensterfunktionen zur Gewichtung der Sinus- und Cosinuskoeffizienten eine Möglichkeit zur Unterdrückung von Leckeffekten. Optimale Ergebnisse erreicht man, indem die Fensterlänge so gewählt wird, dass die Abtastung kohärent erfolgt [72]. Die Bedingung für die minimale Fensterlänge hierfür lautet mit f_0, der Frequenz der Sinusschwingung,

$$N^* = \left\lceil \frac{f_T}{ggT(f_0, f_T)} \right\rceil . \tag{5.12}$$

Kohärente Abtastung liegt beispielsweise immer vor, wenn die Frequenzen und die Abtastrate ganzzahlig sind und die Fensterlänge gleich der Abtastrate ist.
Nachteilig ist bei der Stepped-Sine-Messung die erheblich höhere Messdauer gegenüber Breitbandmessungen. Die Korrelation in Gleichung 5.11 kann als Filterung mit einem schmalbandigen FIR-Filter interpretiert werden. Somit werden Störungen unterdrückt, die nicht mit dem Signal korreliert sind, wie z.B. Netzbrummen oder Verstärkerrauschen. Ein weiterer Vorteil ist somit auch die Unterdrückung sub- und superharmonischer Schwingungen, die durch die Nichtlinearität des Schwingungsisolators und des Schwingerregers entstehen, was einer harmonischen Linearisierung entspricht.

5.4 Linearitätstests

Zur Prüfung innerhalb welcher Grenzen das System als linear angesehen werden kann, bzw. zu einer Quantifizierung der Nichtlinearität besteht die einfachste Methode in der Überprüfung der Proportionalität gemäß Gleichung 4.2. Dies geschieht durch den Vergleich der Messergebnisse bei unterschiedlichen Anregungsarten. In [23] sollen zwei Messungen mit Anregungen, deren Terzbandpegel um mindestens 10dB voneinander abweichen, durchgeführt werden. Hinreichende Linearität liegt vor, wenn sich die in Terzbändern quadratisch gemittelte Steifigkeitspegel um maximal 1,5dB unterscheiden.
Eine andere Methode basiert auf dem Superpositionsprinzip aus Gleichung 4.1. Die Nichtlinearität wirkt sich in der Abweichung der Transfersteife eines Terzbandes aus, wenn zwar die Anregung in diesem Terzband konstant bleibt, in anderen Frequenzbereichen eine variierende Anregung erfolgt. Dies ist auf eine Modulation der Transfersteife zurückzuführen. Bei breitbandiger Anregung mit unterschiedlichen Anregungsniveaus wird sowohl hinsichtlich der Einhaltung von Proportionalität als auch von Superposition geprüft.
Inwiefern ein linearer Zusammenhang zwischen dem gemessenen Eingangs- und Ausgangssignal besteht wird im Frequenzbereich mit Hilfe der Kohärenzfunktion

$$\gamma^2(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)} = \frac{|S_{xy}(j\omega)|^2}{S_{xx}(j\omega)S_{yy}(j\omega)}, \quad 0 \leq \gamma^2(j\omega) \leq 1 \tag{5.13}$$

quantifiziert, wobei die Auto- und Kreuzspektren nach 5.5 und 5.6 mehrmalig gemittelt werden müssen, da ansonsten die Kohärenzfunktion immer einen perfekten linearen Zusammenhang anzeigt. Die zuverlässige Identifikation von Nichtlinearitäten mit der Kohärenzfunktion setzt die Verwendung von Testsignalen mit unterschiedlichen Anregungsniveaus vorraus. Stochastische Anregungen oder Pseudozufallsfolgen mit randomisierter Amplitude und Phase sind somit hierfür geeignet. Mit Hilfe der Kohärenzfunktion läßt sich aus dem gemessenen Autoleistungsspektrum der Ausgangsgröße der linear mit der Eingangsgröße zusammenhängende Anteil angeben nach

$$S_{yy,coh}(j\omega) = \gamma^2(j\omega)S_{yy}(j\omega). \tag{5.14}$$

Im Gegensatz dazu werden Störungen und Nichtlinearitäten direkt von der Inkohärenzfunktion angezeigt.

$$\vartheta(j\omega) = \sqrt{1 - \gamma^2(j\omega)}, \quad 0 \leq \gamma^2(j\omega) \leq 1 \tag{5.15}$$

5.5 Bestimmung der axialen Transfersteifigkeit

5.5.1 Ermittlung nach DIN ISO 10846

Die in Abschnitt 3.4 definierten Transfersteifigkeiten sind im Hinblick auf die Schwingungsentkopplung die interessantesten Größen. In der internationen Norm DIN ISO 10846 Teil 1-5 [21]-[23] sind die Grundlagen der Messung dynamischer Steifigkeiten enthalten. Hierbei wird grundsätzlich zwischen direkten und indirekten Messverfahren unterschieden, deren Struktur in Abbildung 5.2 skizziert ist. Bei den direkten Verfahren wird die Ausgangsseite des Schwingungsisolators mit dem Prüfstandsfundament, bzw. einer sehr großen, auf Federn gelagerten Masse, kurzgeschlossen, wodurch die Ausgangsverschiebung unterdrückt wird. Die Transfersteifigkeit kann so durch den einfachen Zusammenhang

$$\underline{k}_{2,1} = \frac{\underline{F}_2}{\underline{u}_1} \tag{5.16}$$

ermittelt werden. Die notwendige ausgangsseitige Randbedingung $\underline{u}_2 = 0$ ist in der Praxis häufig nicht einhaltbar. Der Messfrequenzbereich wird durch Resonanzen des Abschlussfundaments begrenzt. Je größer die Abschlussmasse ist, d.h. je exakter der ausgangsseitige mechanische Kurzschluss ist, desto geringer wird somit die obere Grenzfrequenz. Einen zu höheren Frequenzen erweiterten Messbereich erreicht man nur mit einem indirekten Messverfahren. Hierbei wird der Abschluss durch eine Senkenstruktur mit einer genau definierten Eingangssteifigkeit k_s gebildet. Vorzugsweise werden Massen verwendet, die sich noch bis deutlich über den Messfrequenzbereich hinaus wie starre Massen verhalten, d.h. es treten vernachlässigbare Messabweichungen infolge des Resonanzverhaltens auf. Die ausgangsseitige Kraft wird nun indirekt über die ausgangsseitigen Schwingwege bestimmt. Die Messung erfolgt im überkritischen Bereich, d.h. der Schwingweg am Ausgang wird vernachlässigt. Im Fall des Abschlusses durch eine Masse $\underline{k}_s = -\omega^2 m$ lautet die Grundgleichung

$$\underline{k}_{2,1} = \frac{-\omega m \underline{u}_2}{\underline{u}_1} \tag{5.17}$$

5.5.2 Erweiterung des Frequenzbereichs durch Differenzbildung

Die Schwingungen am Ausgang des Prüflings führen bei der indirekten Messmethode nach [23] zu einer erheblichen Einschränkung des Messfrequenzbereichs. Besonders bei kleineren Abschlussmassen und steiferen Prüflingen kommt es in der Praxis zu inakzeptablen

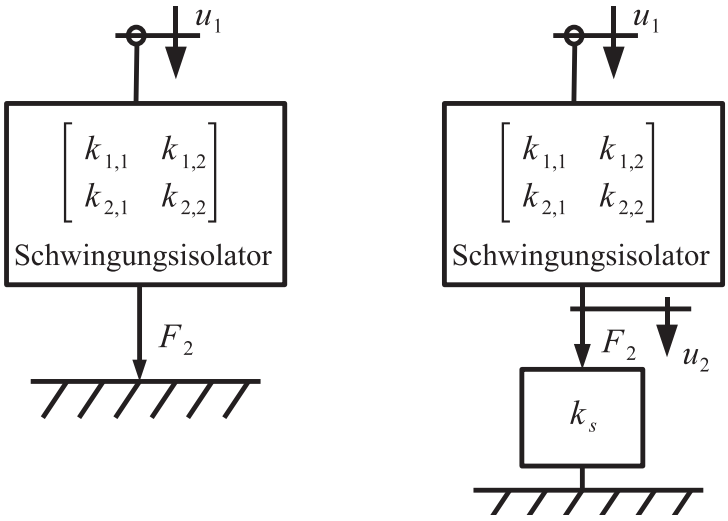


Abbildung 5.2: Prinzipien der indirekten (links) und direkten (rechts) Messung

Messabweichungen. Nach [86] kann dies durch Erweiterung von Gleichung 5.17 durch die Verwendung Relativbewegungen zwischen Ein- und Ausgang, anstelle der absoluten Verschiebung $\underline{u}_1$ erfolgen. Grundlage bildet die zweite Zeile der Vierpolgleichgung 3.15, wobei Gleichung 3.18, d.h. die Gleichheit der dynamischen Steifigkeiten bei tiefen Frequenzen ausgenutzt wird. Die Gleichung des erweiterten Verfahrens lautet somit

$$\underline{k}_{2,1} = \frac{-\omega m \underline{u}_2}{\underline{u}_1 - \underline{u}_2} \tag{5.18}$$

und ist auch aus Knoten- und Maschensatz für die ideale verlustbehaftete Feder bei Wegerregung und Masseabschluss ableitbar. Die Approximation nach Gleichung 3.18 ist zwar nur bei tiefen Frequenzen gültig, führt aber bei höheren Frequenzen zu einer vernachlässigbaren Messabweichung, da die Ausgangsschwingung mit steigender Frequenz in der Regel stark abfällt, wodurch sich die Ergebnisse von 5.16 und 5.17 mit steigender Frequenz annähern.

Abbildung 5.3 verdeutlicht den Einfluss der ausgangsseitigen Schwingung auf das Messergebnis anhand der Berechnung mit der Transfersteifigkeit von $k = 10^4 N/m$, einer Abschlussmasse von 3,15 kg und jeweils einer schwachen (d = 10 Ns/m) und einer starken Dämpfung (d = 250 Ns/m). Die Beträge und Phasen der komplexen Transfesteife sind nach dem erweiterten Verfahren im gesamten Frequenzbereich, sowohl im stark als auch im schwach gedämpften Fall fehlerfrei. Die Beträge, die sich aus dem Verfahren nach 5.5.1 ergeben, sind im überkritischen Bereich zwar in sehr guter Näherung als ideal zu betrachten, allerdings ist der Phasenverlauf bei dem stark gedämpften Fall nicht mit der Frequenz asymptotisch von Null gegen $\pi/2$ steigend, sondern von π fallend. Dies entspricht einem

negativen Realteil und einem zu großen Imaginärteil, was bedeutet, dass das Verfahren nach [21] bei starker Dämpfung zur Messung des Verlustfaktors ungeeignet ist, selbst wenn $u_2 << u_1$.

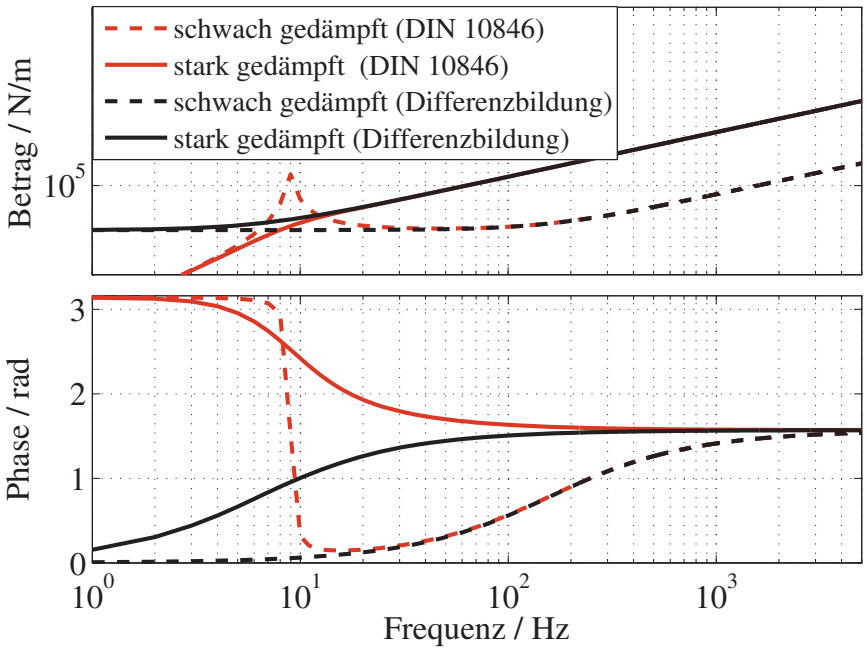


Abbildung 5.3: Vergleich der gemessenen Transfersteifen

5.6 Vierpolermittlung mittels Umkehrverfahren

Das Umkehrverfahren ist eine indirekte Methode zur Messung der Vierpolparameter. Der Prüfling wird wie in Abbildung 5.4 zwischen zwei Massen eingebaut und über die Eingangsmasse mit der Kraft F angeregt. Es werden zwei Messungen mit unterschiedlichen Einbaurichtungen durchgeführt, gekennzeichnet durch den Index i. Die translatorischen Schnellen erhält man durch Mittelwertbildung der Signale aus den jeweils paarweise angeordneten Beschleunigungsaufnehmern $\underline{v}_n^{(i)} = (\underline{a}_n^{a,(i)} + \underline{a}_n^{b,(i)})/(2j\omega)$. Hierdurch werden unkorrelierte Störsignale und insbesondere Signale infolge von Rotationen der Abschlussmasse unterdrückt. Man ermittelt somit aus der 1. Messung die Frequenzgänge

$$H_1 = \underline{F}^{(1)}/\underline{v}_1^{(1)}, \quad H_2 = \underline{F}^{(1)}/\underline{v}_2^{(1)} \tag{5.19}$$

und aus der 2. Messung

$$H_3 = \underline{F}^{(2)}/\underline{v}_1^{(2)}, \quad H_4 = \underline{F}^{(2)}/\underline{v}_2^{(2)}. \tag{5.20}$$

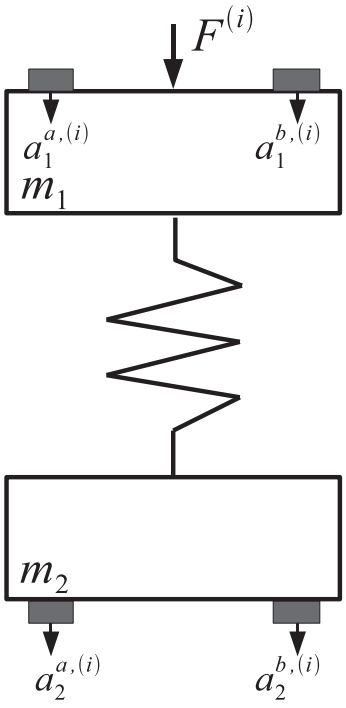


Abbildung 5.4: Indirekte Vierpolidentifikation mit dem Umkehrverfahren

Hierbei sollte der Frequenzgangsschätzer $H_2(j\omega)$ aus Gleichung 5.8 verwendet werden, da die Signale der Eingangskräfte weniger gestört sind als die Beschleunigungen. Aus der Eingangsmasse m_1 und der Abschlussmasse m_2 berechnen sich die Quell- und Senkenimpedanzen nach $\underline{Z}_q = j\omega m_1$ und $\underline{Z}_s = j\omega m_2$. Die Vierpolparameter ergeben sich hiermit nach [81] aus:

$$\underline{A}_{22} = \frac{H_2}{H_1} - \underline{A}_{21}\underline{Z}_s \tag{5.21}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\frac{H_2}{H_1} - \frac{H_3}{H_4}}{H_3 + \underline{Z}_s - \underline{Z}_q} \tag{5.22}$$

$$\underline{A}_{12} = H_4 - \underline{Z}_q \frac{H_4}{H_3} - \underline{A}_{22}\underline{Z}_s \tag{5.23}$$

$$\underline{A}_{11} = \frac{H_4}{H_3} - \underline{A}_{21}\underline{Z}_s \tag{5.24}$$

Andere gebräuchliche Verfahren, wie das Zwei-Impedanz-Verfahren oder das Kurzschluss-Leerlaufverfahren, welches im Gegensatz zu dem Umkehrverfahren auf direkten Kraftmessungen basiert, werden in [81] beschrieben und im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der Nachteile von direkten Verfahren nicht näher betrachtet.

5.7 Bestimmung der Biegesteifigkeiten

5.7.1 Messtechnische Ermittlung der lateralen und rotatorischen Steifigkeiten

Das indirekte Verfahren zur Messung der dynamischen lateralen und rotatorischen Transfersteifigkeiten beruht auf der Messung der translatorischen und rotatorischen Schwingbeschleunigungen und ist in einer einfachen Form in [23] dargestellt. Die ausgangsseitigen Kräfte und Momente werden durch Anwendung von Impuls- und Drallsatz erlangt. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 5.5 skizziert. Wie bei dem Aufbau in Kapitel 5.6 ist auch hierbei der Prüfling zwischen einer Ein- und Ausgangsmasse eingespannt. Die kinematischen Größen werden durch Auswertung der Beschleunigungssignale erlangt. Hierbei müssen die eingangsseitigen Translationen und Rotationen und die ausgangsseitigen Kräfte und Momente bestimmt werden. Die Translation am Eingang des Schwingungsisolators folgt mit der mittleren Translation $\underline{a}_1' = (\underline{a}_1^a + \underline{a}_1^b)/2$ nach

$$\underline{u}_1 = -\frac{1}{\omega^2}\underline{a}_1' + \underline{\gamma}_1 h_1. \tag{5.25}$$

Die Eingangsrotation ergibt sich aus

$$\underline{\gamma}_1 = -\frac{1}{d_1\omega^2}(-\underline{a}_1^a + \underline{a}_1^b). \tag{5.26}$$

Kräfte und Momente an der Schnittstelle zwischen Schwingungsisolator und Abschlussmasse lauten, mit der Korrekturgröße h_c, die gleich dem Weg vom Mittelpunkt zwischen den Beschleunigungssensoren zum Schwerpunkt SP der Abschlussmasse ist,

$$\underline{F}_2 = -m_2\omega^2(\underline{u}_2' - h_c\underline{\gamma}_2), \tag{5.27}$$

$$\underline{M}_2 = -\omega^2\Theta_2\underline{\gamma}_2 + \underline{F}_2 h_2. \tag{5.28}$$

Die Zählpfeilrichtung von $\underline{F}_2$ und $\underline{M}_2$ bezieht sich in Abbildung 5.5 auf die Anregung der Abschlussmasse. Das Massenträgheitsmoment Θ_2 ist gültig bezüglich der Rotation der Ausgangsmasse um den Schwerpunkt. Das in Kapitel 3.4.2 eingeführte Gleichungssystem 3.28

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} & \underline{k}_{F_2,\gamma_1} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} & \underline{k}_{M_2,\gamma_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\gamma}_1 \end{Bmatrix}$$

enthält die interessierenden Transfersteifigkeiten $\underline{k}_{F_2,u_1}$,$\underline{k}_{F_2,\gamma_1}$,$\underline{k}_{M_2,u_1}$,$\underline{k}_{M_2,\gamma_1}$. Die Messung der lateralen Steifigkeiten würde die vollständige Unterdrückung der Eingangsrotation

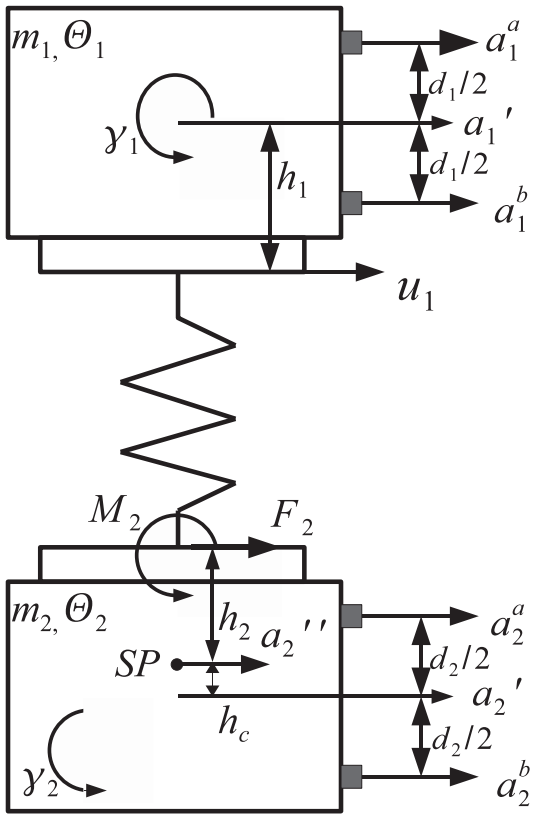


Abbildung 5.5: Messung der lateralen und rotatorischen Steifigkeiten

erfordern, was praktisch nicht einhaltbar ist. Ebenso können die Translationen nicht vermieden werden, was für die Messung der rotatorischen Steifigkeiten notwendig wäre. Allerdings ist es möglich, unterschiedliche Verhältnisse von anregender Translation und Rotation zu applizieren. Zur Erlangung der vier unbekannten Steifigkeiten werden zwei Versuche durchgeführt, bei denen die Anregungsposition einmal an der Oberseite der Eingangsmasse und einmal an der unteren Kante erfolgt. Zur Lösung steht nun das Gleichungssystem 5.29 mit vier Gleichungen zur Verfügung, wobei $^{(1)}$ und $^{(2)}$ den Versuch kennzeichnen aus dem die Größen stammen.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2^{(1)} \\ \underline{F}_2^{(2)} \\ \underline{M}_2^{(1)} \\ \underline{M}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1^{(1)} & \underline{\gamma}_1^{(1)} & 0 & 0 \\ \underline{u}_1^{(2)} & \underline{\gamma}_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u}_1^{(1)} & \underline{\gamma}_1^{(1)} \\ 0 & 0 & \underline{u}_1^{(2)} & \underline{\gamma}_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} \\ \underline{k}_{F_2,\gamma_1} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} \\ \underline{k}_{M_2,\gamma_1} \end{Bmatrix} \tag{5.29}$$

Zur Unterdrückung von Störsignalen, die nicht mit dem Testsignal korreliert sind, wird das Gleichungssystem 5.29 mit Hilfe der Übertragungsfunktion $R^{(i)} = \underline{u}_1^{(i)}/\underline{\gamma}_1^{(i)}$, $i = 1, 2$ umformuliert, d.h. als Referenz wird die Eingangsrotation gewählt, was sich nach [86] auf eine günstigere Konditionierung des Gleichungssystems auswirkt. Prinzipiell können

auch die Signale $\underline{a}_1^{a,(i)}$, $\underline{a}_1^{b,(i)}$ oder die Eingangsverschiebung $\underline{u}_1^{(i)}$ als Referenz dienen. Der H_1-Schätzer nach Gleichung 5.7 sollte verwendet werden, da das Eingangssignal einen höheren Signalrauschabstand als das Ausgangssignal aufweist. Das Gleichungssystem 5.30 liefert somit in der Praxis bessere Ergebnisse als Gleichungssystem 5.29.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2^{(1)}/\underline{\gamma}_1^{(1)} \\ \underline{F}_2^{(2)}/\underline{\gamma}_1^{(2)} \\ \underline{M}_2^{(1)}/\underline{\gamma}_1^{(1)} \\ \underline{M}_2^{(2)}/\underline{\gamma}_1^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ R^{(2)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{(1)} & 1 \\ 0 & 0 & R^{(2)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} \\ \underline{k}_{F_2,\gamma_1} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} \\ \underline{k}_{M_2,\gamma_1} \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

5.7.2 Erweiterung des Frequenzbereichs

Zur Bestimmung der lateralen und rotatorischen Steifigkeiten setzt die Methode nach [23] eine hinreichende Unterdrückung der Ausgangsschwingung durch eine Abschlussmasse vorraus. Dies ist allerdings nur im überkritischen Bereich gegeben und somit auf einen höheren Frequenzbereich anwendbar. Bei der Berechnung der longitudinalen Transfersteife in Abschnitt 5.5.2 wird der Einfluss der ausgangsseitigen Bewegung durch eine einfache Differenzbildung unterdrückt. Im Fall der Biegeschwingung wird ausgehend von dem Achtpolgleichungssystem 3.27 die Grundlage für das erweiterte Messverfahren formuliert. Hiervon werden die ersten beiden Zeilen gestrichen, wodurch das Gleichungssystem 5.31 übrig bleibt.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} & \underline{k}_{F_2,\gamma_1} & \underline{k}_{F_2,u_2} & \underline{k}_{F_2,\gamma_2} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} & \underline{k}_{M_2,\gamma_1} & \underline{k}_{M_2,u_2} & \underline{k}_{M_2,\gamma_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{\gamma}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{\gamma}_2 \end{Bmatrix} \tag{5.31}$$

Die kinematischen Ausgangsgrößen $\underline{u}_2$ und $\underline{\gamma}_2$ beziehen sich auf die Bewegung der Schnittstelle zwischen Schwingungsisolator und Endmasse. Diese Steifigkeitsmatrix enthält neben den zu berechnenden Transfersteifigkeiten auch die Eingangssteifigkeiten. Betrachtet man die Steifigkeitsmatrix des Biegebalkens von Gleichung 3.29 so wird deutlich, dass hierfür bei tiefen Frequenzen drei Paare von Transfer- und Eingangssteifigkeiten betragsmäßig gleich sind, nämlich

$$\begin{aligned} -\underline{k}_{F_2,u_1} &= \underline{k}_{F_2,u_2}, \\ -\underline{k}_{F_2,\gamma_1} &= \underline{k}_{F_2,\gamma_2}, \\ -\underline{k}_{M_2,u_1} &= \underline{k}_{M_2,u_2}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

während

$$\underline{k}_{M_2,\gamma_1} = 2 \cdot \underline{k}_{M_2,\gamma_2}. \tag{5.33}$$

Für die Messung von Elementen, deren Aufbau die Modellierung als Bernoulli-Balken erlaubt, folgt hieraus Gleichungssystem 5.34.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2^{(1)} \\ \underline{F}_2^{(2)} \\ \underline{M}_2^{(1)} \\ \underline{M}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_2^{(1)} & -\underline{\gamma}_1^{(1)} - \underline{\gamma}_2^{(1)} & 0 & 0 \\ -\underline{u}_1^{(2)} + \underline{u}_2^{(2)} & -\underline{\gamma}_1^{(2)} - \underline{\gamma}_2^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u}_1^{(1)} - \underline{u}_2^{(1)} & \underline{\gamma}_1^{(1)} + 2 \cdot \underline{\gamma}_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \underline{u}_1^{(2)} - \underline{u}_2^{(2)} & \underline{\gamma}_1^{(2)} + 2 \cdot \underline{\gamma}_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} \\ \underline{k}_{F_2,\gamma_1} \\ \underline{k}_{M_2,u_1} \\ \underline{k}_{M_2,\gamma_1} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

Bei einer Vielzahl von Entkoppelelementen weichen die Verhältnisse innerhalb der Steifigkeitsmatrix von denen des Biegebalkens ab. Insbesondere die Schubdeformation bei kurzen Elementen führt zu Abweichungen, was durch die Balkentheorie nach Timoschenko berücksichtigt wird. Berücksichtigt man hierzu die Verhältnisse der Steifigkeiten aus Gleichung 3.31, so sind hierfür die Gleichungen 5.32 ebenfalls gültig, Gleichung 5.33 ist aufgrund des Schubeinflusses ungültig. Bei der Betrachtung von komplex aufgebauten Strukturen, wie z.B. den mehrschichtig aufgebauten Flex-Elementen, ist in der Regel eine theoretische Herleitung der Steifigkeitsmatrix bzw. der Verhältnisse der Steifigkeiten zueinander nicht möglich. Somit ist ein allgemeinere Berechnungsmethode der Transfersteifigkeiten als Gleichungssystem 5.34 sinnvoll. Aufgrund der Reziprozität ist die Gleichheit

$$\underline{k}_{F_2,\gamma_2} = \underline{k}_{M_2,u_2} \tag{5.35}$$

immer erfüllt. Bei symmetrischen Elementen ergeben sich nach [12] die Vereinfachungen

$$\underline{k}_{F_2,\gamma_1} = \underline{k}_{F_2,\gamma_2} \quad = \quad \underline{k}_{M_2,u_1} = \underline{k}_{M_2,u_2}, \tag{5.36}$$

$$\underline{k}_{M_2,u_1} \quad = \quad \underline{k}_{M_2,u_2} \tag{5.37}$$

und durch Einschränkungen der rotatorischen Freiheitsgrade folgt der laterale Vierpol, bei dem analog zu Abschnitt 5.5.2 für Eingangs- und Transfersteifigkeiten bei tiefen Frequenzen gilt

$$\underline{k}_{F_2,u_1} = \underline{k}_{F_2,u_2}. \tag{5.38}$$

Die Vorraussetzung der Symmetrie stellt in der Praxis keine signifikante Einschränkung dar, da fast alle Entkoppelelemente der Abgasanlage einen symmetrischen Aufbau aufweisen. Selbst asymmetrische Strukturen können in hinreichender Näherung als symmetrisch behandelt werden. Aus den Gleichungen 5.31 folgt unter Berücksichtigung der Vereinfachungen und der Verwendung von zwei unterschiedlichen Anregungspositionen das Gleichungssystem 5.39, dessen Lösungsvektor die gesuchten Steifigkeiten enthält.

$$\begin{Bmatrix} \underline{F}_2^{(1)} \\ \underline{F}_2^{(2)} \\ \underline{M}_2^{(1)} \\ \underline{M}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{u}_1(1) + \underline{u}_2(1) & -\underline{\gamma}_1(1) - \underline{\gamma}_2(1) & 0 & 0 \\ -\underline{u}_1(2) + \underline{u}_2(2) & -\underline{\gamma}_1(2) - \underline{\gamma}_2(2) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u}_1(1) - \underline{u}_2(1) & \underline{\gamma}_1^{(1)} & \underline{\gamma}_2^{(1)} \\ 0 & \underline{u}_1(2) - \underline{u}_2(2) & \underline{\gamma}_1^{(2)} & \underline{\gamma}_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_{F_2,u_1} \\ \underline{k}_{FM} \\ \underline{k}_{M_2,\gamma 1} \\ \underline{k}_{M_2,\gamma 2} \end{Bmatrix} \tag{5.39}$$

5.7.3 Berücksichtigung der Prüflingsmasse

Wird die ausgangsseitige Kraft nach 5.27 und das Moment nach 5.28 berechnet, so führt die Eigenmasse m_{iso} des Schwingungsisolators zu systematischen Abweichungen der berechneten Transfersteifigkeiten. Eine weitere Verfeinerung der Messmethode nach Abschnitt 5.7.2 ergibt sich durch Berücksichtigung der Eigenmasse. Ein Teil davon wird der Abschlussmasse hinzugerechnet und das Trägheitsmoment entsprechend angepasst. Näherungsweise wird davon ausgegangen, dass der Schwingungsisolator eine homogene Massenverteilung besitzt und die Schnelle linear über die Bauteillänge l ansteigt. Die kinetische Energie der Schwingung folgt somit aus

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{m_{iso} v_2^2}{2l^3} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{2}(m_2 + m_{iso}/3) v_2^2. \tag{5.40}$$

Die korrigierte Masse ergibt sich aus

$$m_{2c} = (m_2 + m_{iso}/3). \tag{5.41}$$

Der Schwerpunkt des Abschlusses verschiebt sich, was durch den modifizierten Korrekturfaktor

$$h_{c(m)} = h_c + \frac{m_{iso}/3(l/3 + h_2)}{m_2 + m_{iso}/3} \tag{5.42}$$

ausgedrückt wird. Das Trägheitsmoment lautet somit

$$\Theta_{2c} = \Theta_2 + \frac{1}{36} m_{iso} \left(\frac{l}{3}\right)^2 + m_{iso}/3 \cdot (l/6 + h_c + h_2 - h_{c(m)})^2. \tag{5.43}$$

Die korrigierten Werte nach den Gleichungen 5.41, 5.42 und 5.43 werden in 5.27 und 5.28 eingesetzt.

5.7.4 Numerische Untersuchungen

Das in Abschnitt 5.7.1 beschriebene Verfahren zur Ermittlung der lateralen und rotatorischen Steifigkeiten und die erweiterten Methoden, von Abschnitt 5.7.2 und 5.7.3, werden im Folgenden anhand numerisch berechneter Daten untersucht. Als Referenzmessobjekt dient ein hohles Rohr mit der Länge von 305 mm, einer Wanddicke von 1,5 mm und einem Durchmesser von 50 mm, was einem Rohrabschnitt einer Abgasanlage entspricht. Die Materialdaten entsprechen der von Edelstahl[4] und der Verlustfaktor wird konstant $\eta = 10^{-2}$ festgelegt. Als Ein- und Ausgangsmasse sind zwei identische quaderförmige Edelstahlblöcke an den Rohrenden angebracht, diese haben eine Masse von jeweils 7,75 kg,

[4]Dichte: $7750 kg/m^3$, E-Modul: 193 GPa, Poison-Zahl: 0,31

eine Kantenlänge von jeweils 100 mm und die erste Eigenmode bei 14,0 kHz, wodurch eine Messung der Transfersteifigkeit mit dem indirekten Messverfahren bis zu einer Frequenz von 5 kHz problemlos möglich ist. Das gesamte Objekt wird als Verbund modelliert, d.h. die Kontaktstellen verfügen über keine Nachgiebigkeit, was in der Realität allerdings nicht immer erfüllt ist und zu Abweichungen führen kann, worauf in Kapitel 7.7 näher eingegangen wird.

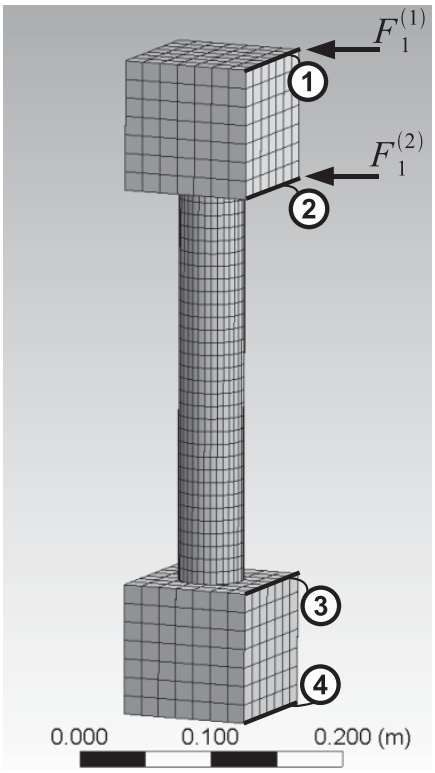


Abbildung 5.6: FEM Modell von Testobjekt

In Abbildung 5.6 ist das FE-Netz des Messobjektes mit den vier Kanten, die als Messpositionen dienen dargestellt. An diesen Stellen wird die Schwingbeschleunigungskomponente in lateraler Richtung berechnet, die sich jeweils ergibt, wenn der Prüfling einmal an Kante „1“ und einmal an Kante „2“ angeregt wird, dies entspricht dem Vorgehen nach 5.7.1.
Prinzipiell erwartet man für die Transfersteifigkeiten einen konstanten Verlauf bei niedrigen Frequenzen, der mit steigender Frequenz ansteigt und bei der ersten λ-Biegewellenresonanz, die bei dem Testobjekt etwa 2,5 kHz beträgt, ein Maximum annimmt. Das grundlegende Verfahren nach [23] liefert mit den berechneten Werten die Transfersteifigkeitsverläufe in Abbildung 5.7, wobei die Massenkorrektur nach 5.7.3 angewendet wurde.

Da bei diesem Verfahren keine Korrekturen für die Abschlussmassenbewegung gemacht werden, sind resonanzbedingte Abweichungen bei 260 Hz, 390 Hz und 620 Hz, wodurch die Kurvenverläufe erst ab etwa 1 kHz als gültig angesehen werden können.
Das erweiterte Verfahren, bei dem das Gleichungssystem 5.34 zur Anwendung kommt, liefert die Transfersteifigkeiten nach Abbildung 5.8, wobei auch hier die Massenkorrektur Anwendung findet. Die Einbeziehung der ausgangsseitigen Schwingungen in die Berechnung führt zu einer Elimination der Resonanzen, die durch das Zusammenwirken des Prüflings mit den Abschlussmassen begründet sind. Somit ist der Frequenzbereich zu tiefen Frequenzen hin unabhängig von den Abschlussmassen. Der nicht konstante Verlauf der Steifigkeiten k_{M_2,γ_1} und k_{M_2,u_1} unterhalb von 500 Hz ist darauf zurückzuführen, dass aufgrund des Schubeinflusses die Gleichheit $k_{M_2,\gamma_1} = 2 \cdot k_{M_2,\gamma_2}$ nicht exakt erfüllt ist.
Der allgemeinere verbesserte Ansatz nach Gleichung 5.39 führt unter Verwendung der Massenkorrektur zu den Ergebnissen in Abbildung 5.9. Auch hier ist der Einfluss der niederfrequenten Resonanzen fast vollständig unterdrückt. Die rotatorische Steifigkeit k_M, γ_1 weist hier gegenüber dem in Abbildung 5.8 einen verbesserten Verlauf auf, da dieser nun auch unterhalb von 500 Hz konstant ist. Der hierzu gehörige Phasenfrequenzgang zeigt Abbildung 5.10, wonach aufgrund der sehr schwachen Dämpfung ein kaum nennswerter Phasenzuachs bis etwa 2 kHz vorliegt. Bei dem Übergang vom unter- in den überkritischen Bereich tritt die typische Phasendrehung von $-\pi$ auf.

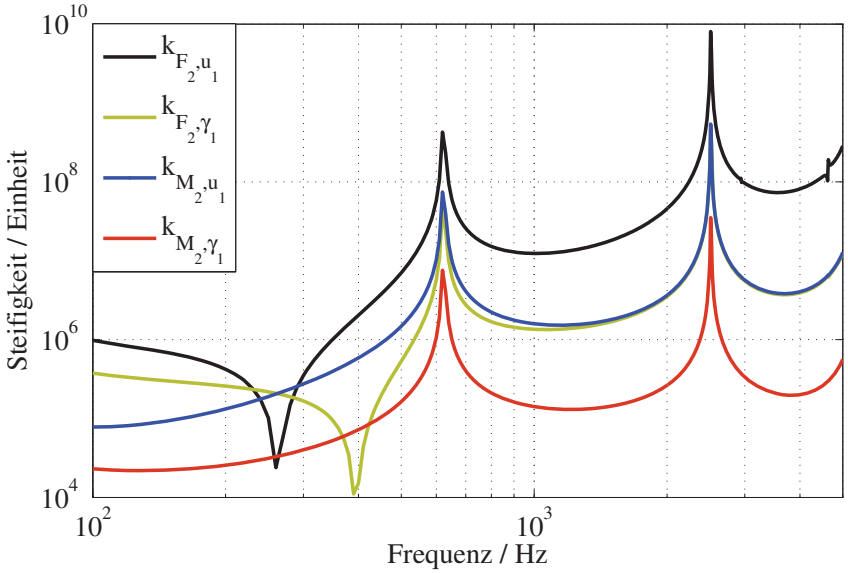


Abbildung 5.7: Biegesteifigkeiten nach DIN

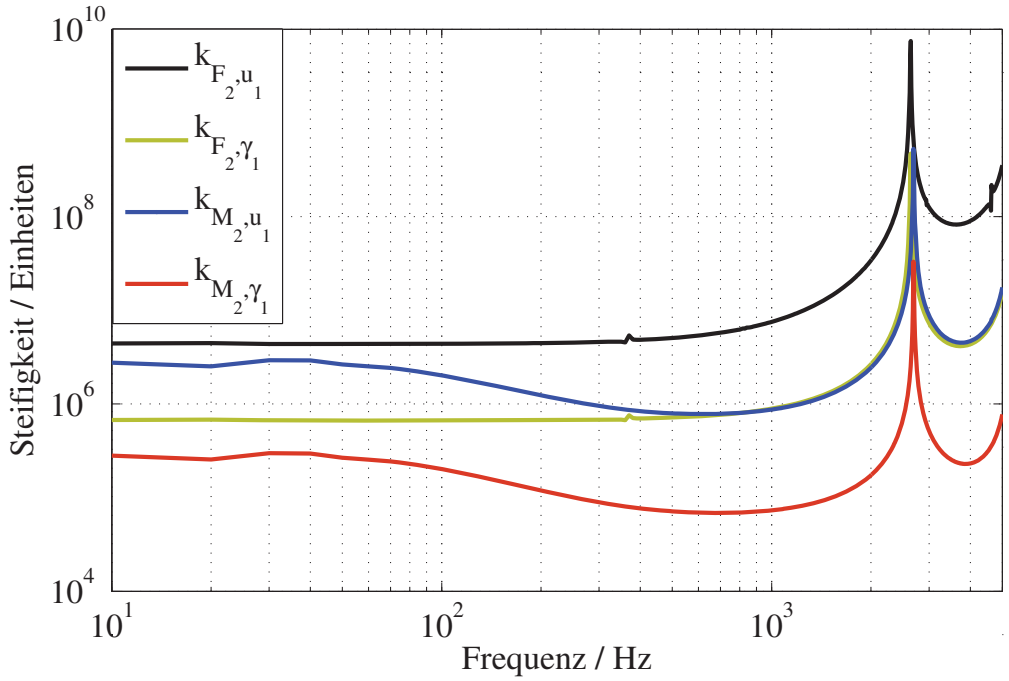


Abbildung 5.8: Biegesteifigkeiten unter Verwendung der Bernoulli-Balkentheorie

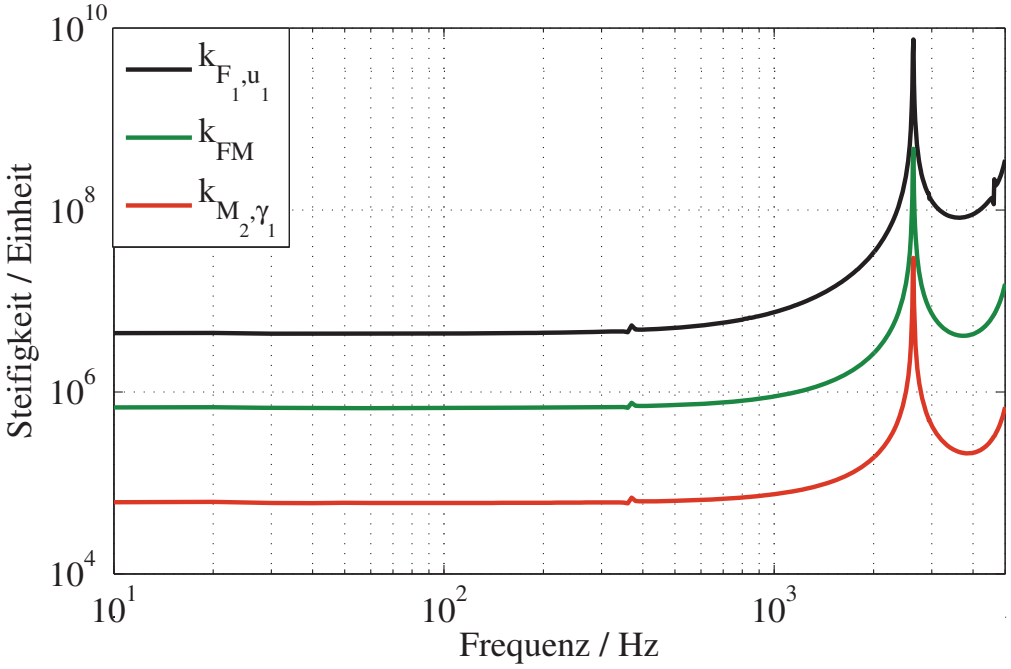


Abbildung 5.9: Biegesteifigkeiten nach dem erweiterten Verfahren

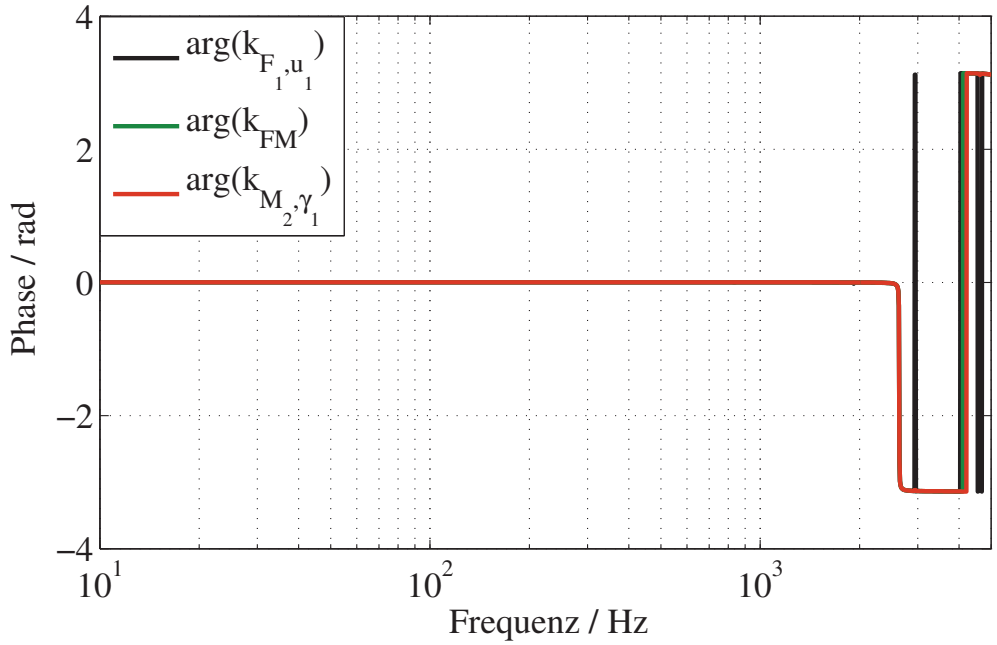


Abbildung 5.10: Phasenwinkel der Steifigkeiten

5.8 Dynamisches Messen nichtlinearer Systemparameter

Im folgenden Abschnitt 5.8.1 wird ein Verfahren zur Ermittlung der axialen nichtlinearen Steifigkeitskennlinie beschrieben. Im Abschnitt 5.8.2 wird eine Methode hergeleitet, die die dynamische Bestimmung der Modellparameter bei trockener Reibung möglich macht. Beide Verfahren basieren auf einem parametrischen Modell und der Auswertung der harmonischen Ausgangsschwingungen. Die Systeme sind wegerregt mit u_1 und ausgangsseitig zur indirekten Kraftmessung mit der Masse m abgeschlossen, das System entspricht somit dem aus Abbildung 4.5.

5.8.1 Steifigkeitskennlinien

Der Prüfling wird mit einer Kosinus-Schwingung

$$u_1 = U_1 \cos(\omega t) \tag{5.44}$$

angeregt und die Kennlinie durch Auswertung der resultierenden harmonischen Oberschwingungen bestimmt. Die grundlegende nichtlineare Differenzialgleichung

$$(u_1 - u_2) \cdot k(u_1 - u_2) + (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)d = \ddot{u}_2 m \tag{5.45}$$

des linear-viskos gedämpften Systems enthält die zu bestimmende nichtlineare Transfersteifigkeit, für die der Polynomansatz

$$k(u_1 - u_2) = k_1 + k_2 \cdot (u_1 - u_2) + k_3 \cdot (u_1 - u_2)^2 + ... + k_N \cdot (u_1 - u_2)^{(N-1)} \tag{5.46}$$

mit N komplexen Freiheitsgraden gemacht wird. Da es sich hierbei um eine reguläre Kennlinie handelt, besteht die ausgangsseitige Schwingung u_2 aus einer Summe von harmonischen Funktionen. Somit kann unter Verwendung der komplexen Schreibweise die zweifache Ableitung nach der Zeit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_2 &= \Re\left\{ m \cdot \frac{d^2}{dt^2}(u_2(1)e^{j\omega t+\phi_1} + u_2(2)e^{j2\omega t+\phi_2} + u_2(3)e^{j3\omega t+\phi_3} + ... + u_2(N)e^{jN\omega t+\phi_N}) \right\} \\ &= -\omega^2 m \cdot \Re\left\{ (\underline{u}_2(1) + 4\underline{u}_2(2) + 9\underline{u}_2(3) + ... + N^2\underline{u}_2(N)) \right\}, \end{aligned} \tag{5.47}$$

mit der Annahme, dass die Anzahl der Oberschwingungen gleich dem Polynomgrad von 5.46 ist. Mit Hilfe von Gleichung 5.47 wird die Differentialgleichung 5.45 in eine algebraische Gleichung umgewandelt. Im überkritischen Bereich gilt analog zum Verfahren nach Abschnitt 5.5.1, mit der Vereinfachung $u_2 = 0$ und der komplexen nichtlinearen Steife $\underline{k}(u_1)$, die Approximation

$$\underline{k}(u_1)u_1 \approx \underline{F}_2. \tag{5.48}$$

Da hierbei davon ausgegangen wird, dass die Ausgangsschwingung einen sehr geringen Betrag hat, wird die Rückwirkung auf das System vernachlässigt, was bedeutet, dass keine Modulationsfrequenzen entstehen. Somit ist es lediglich die erste Harmonische, die eine dämpfende Kraftwirkung $d\dot{u}_1$ hervorruft. Der lineare Steifigkeitsterm $\underline{k}_1$ ist somit komplex, während die Steifigkeitskoeffizienten der höheren Ordnungen reell sind. Ausgeschrieben folgt somit

$$u_1 \left(\underline{k}_1 + \sum_{n=2}^{N} u_1^{n-1} k_n \right) = -\omega^2 m \sum_{n=1}^{N} n^2 \underline{u}_2(n) \tag{5.49}$$

Der trigonometrische Zusammenhang

$$(U_1 cosx)^n = \frac{U_1^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos\left((n-2k)x\right), \tag{5.50}$$

liefert die durch das Potenzieren entstehenden Harmonischen. Einsetzen von Gleichgung 5.50 in 5.49 und anschließendes Trennen der Koeffizienten nach Frequenzen führt, für N=5, zu dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 & \frac{3}{4}U_1^3 & 0 & \frac{10}{16}U_1^5 \\ 0 & \frac{1}{2}U_1^2 & 0 & \frac{4}{8}U_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}U_1^3 & 0 & \frac{5}{16}U_1^5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}U_1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16}U_1^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_2(1) \\ F_2(2) \\ F_2(3) \\ F_2(4) \\ F_2(5) \end{Bmatrix}, \tag{5.51}$$

wonach sich die Transfersteifigskoeffizienten berechnet lassen. Die bei geradzahligen Harmonischen entstehenden Gleichanteile werden nicht berücksichtigt, da häufig nur Wechselsignale gemessen werden können.

Bevor die Spektren gemessen werden, muss die harmonische Eingangsschwingung so lange anliegen, bis das System eingeschwungen ist. Erst dann können die Spektren mit ausreichender Genaugigkeit ermittelt werden. Die Wahl des Zeitfensters für die FFT sollte so erfolgen, dass kohärente Abtastung vorliegt. So können die Beträge der Harmonischen mit maximaler Genauigkeit ermittelt werden. Da der Beginn des Zeitfensters häufig nur schwer so gewählt werden kann, dass 5.44 erfüllt ist, kann im Allgemeinen U_1 gleich dem Betrag der Schwingung $\underline{u}_1$ gesetzt und der Vektor mit den Harmonischen der Ausgangskraft um die Phasendrehung $\arg(\underline{u}_1) = \varphi$ korrigiert werden nach

$$\underline{\mathbf{f}}_2^* = \left\{ \underline{F}_2(1)e^{-j\varphi}, \underline{F}_2(2)e^{-j2\varphi}, \underline{F}_2(3)e^{-j3\varphi}, \ldots, \underline{F}_2(N)e^{-jN\varphi} \right\}^T. \tag{5.52}$$

Verwendet man statt der Eingangsverschiebung die Schnelle, so läßt sich analog zu der hier beschriebenen Methode die Kennlinie der Transferimpedanz ermitteln, was numerische Vorteile hat. Aufgrund der Potenzierung von U_1 neigt das Gleichungssystem 5.51 für Eingangsschwingungen mit kleinem Betrag zu schlechten Konditionszahlen. Für die um den Faktor ω größeren Schnellebeträge führt dies zu einer geringeren Koeffizientendynamik und somit zu stabileren Gleichungssystemen.

Ein prinzipielles Problem bei der Koeffizientenbestimmung nach Gleichungssystem 5.51 ist, dass der Einfluss der ausgangsseitigen Schwingung nicht berücksichtigt wird. Dies führt häufig zu inakzeptablen Abweichungen der gemessenen Phasenwinkel, wie bereits in Abschnitt 5.5.2 für den linearen Fall beschrieben. Des Weiteren entstehen aufgrund der Interaktion zwischen der ersten Harmonischen der Eingangsschwingung und den höheren Harmonischen am Ausgang Mischfrequenzen. So führt ein Bauteil mit quadratischer Kennlinie bespielsweise nicht nur zu einer Verdopplung der anregenden Frequenz und einer statischen Verschiebung, sondern außerdem auch zu zahlreichen Frequenzen, die alle Vielfache der Grundschwingung sind.

Prinzipiell läßt sich die hier beschriebene Methode verfeinern, indem Gleichung 5.45 ohne die Vereinfachung von Gleichung 5.48 nach den zu suchenden Transfersteifen aufgelöst wird. Exemplarisch folgt durch Ausmultiplizieren für einen Polynomansatz dritter Ordnung

$$\begin{aligned} &k_1(u_1-u_2)+k_2(u_1-u_2)^2+k_3(u_1-u_2)^3 \\ &=k_1(u_1-u_2)+k_2(u_1^2-2u_1u_2+u_2^2)+k_3(u_1^3-3u_1^2u_2+3u_1u_2^2-u_2^3), \end{aligned} \tag{5.53}$$

wodurch die Störterme und das Zusammenwirken der diskreten Frequenzen sichtbar wird. In einem ersten Schritt ergibt sich eine deutliche Verbesserung des Verfahrens durch eine Differenzbildung bei dem linearen Term, d.h. der ersten Harmonischen. Da u_2 sehr klein ist, werden die Terme höherer Potenz, sowie die Schwingungen der Mischfrequenzen u_1u_2, $u_1^2u_2$, $u_1u_2^2$ im Folgenden vernachlässigt.

5.8.2 Reibung

Mit dem einfachen Coulomb-Modell, das um einen viskosen Dämpfer d erweitert und mit der Masse m abgeschlossen ist, wird die trockene Reibung des Entkoppelelementes beschrieben. Wenn u_2 vernachlässigt wird, folgt

$$ku_1+\mu sgn(\dot{u}_1)+d\dot{u}_1=m\ddot{u}_2. \tag{5.54}$$

Die Eingangsschwingung ist

$$u_1=a\cdot\cos(\omega t), \tag{5.55}$$

so folgt ausgeschrieben

$$ka\cdot\cos(\omega t)+\mu sgn(-a\omega\cdot\sin(\omega t))-da\omega\sin(\omega t)=m\ddot{u}_2 \tag{5.56}$$

Das Ergebnis der Signumfunktion ist eine Rechteckschwingung, deren Fourierreihe nur aus ungeradzahligen Sinuskoeffizienten besteht. Der Coulomb-Reiber führt somit zu den Harmonischen der Ausgangskraft

$$F_R(n)=-j\frac{2\mu}{n\pi}(-1+\cos(n\pi)),\qquad n\in\mathbb{R}. \tag{5.57}$$

Die Auswertung der ersten beiden Harmonischen liefert genügend Informationen zur Bestimmung der komplexen Steifigkeit als auch des Reibungskoeffizienten μ. In Matrizenform folgt mit der Relativverschiebung $U_1-\underline{U}_2(1)$

$$\begin{bmatrix} U_1-\underline{U}_2(1) & -\frac{j2}{\pi}(-1+\cos(\pi)) \\ 0 & -\frac{2}{\pi 3}(-1+\cos(3\pi)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k}_1 \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_2(1) \\ \Im\{F_2(2)\} \end{Bmatrix}. \tag{5.58}$$

Mit den Harmonischen höherer Frequenz kann das Optimierungsproblem

$$\min_{\underline{k},\mu} \left\| \begin{bmatrix} (U_1 - \underline{U}_2(1)) & j4/\pi \\ 0 & j4/3\pi \\ 0 & j4/5\pi \\ 0 & j4/7\pi \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{k} \\ \mu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F(1) \\ F(3) \\ F(5) \\ F(7) \\ \vdots \end{Bmatrix} \right\|_2 \tag{5.59}$$

formuliert werden. Der Vorteil hiervon ist, dass der Einfluss des praktisch vorkommenden Messrauschens verringert wird.

5.8.3 Numerische Untersuchung der Messmethoden

Im Folgenden wird zunächst die Messmethode nach Abschnitt 5.8.1 mittels numerisch berechneter Beispielsysteme untersucht. Der eingangsseitige Schwingweg u_1 und das ausgangseitige Kraftspektrum $\underline{F}_2$ dienen als Eingangsgrößen für das Gleichungssystem 5.51 mit der Differenzbildung $U_1 - \underline{U}_2$ in Position (1,1) der Matrix. Es werden zunächst Testmodelle mit nichtlinearer Steifigkeit unterschiedlicher Polynomgrade und viskoser Dämpfung mit d=100 gemäß der Differentialgleichung 5.45 numerisch simuliert. Dannach folgt die Anwendung der Messmethode auf das Masing-Model, wodurch die Tauglichkeit eines Steifigkeitspolynoms zur Approximation des Masing-Modellverhaltens untersucht werden soll. Schließlich wird die Identifikation des Coulomb-Modells nach dem Verfahren aus Abschnitt 5.8.2 untersucht.

Bei unterschiedlichen Modellarten ist es nicht möglich, die Koeffizienten des tatsächlichen Systems und Ersatzsystems direkt miteinander zu vergleichen. Somit werden bei identischen Anregungen und Anfangszuständen die Systemantworten miteinander verglichen. Hierzu wird von dem Kraft-Zeit-Verlauf des Ersatzmodells $F_{2,em}(t)$ der des Ausgangsmodells F_2 subtrahiert und hiervon der Effektivwert gebildet. Dieser Wert wird auf den Effektivwert von F_2 bezogen, wodurch man das integrale Fehlermaß

$$\sigma_b = \frac{\sqrt{1/T \int_0^T (F_2(t) - F_{2,em}(t))^2 dt}}{\sqrt{1/T \int_0^T F_2(t)^2 dt}} \tag{5.60}$$

erhält. Speziell für lineare Ersatzmodelle ist σ_b ein Maß der Nichtlinearität des Systems, wobei sowohl harmonische als auch nicht-harmonische Verzerrungen berücksichtigt werden.

Steifigkeit mit Polynomkennlinie

Die Ergebnisse der Identifikation von Steifigkeitstermen unterschiedlicher Potenz sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Die Kennlinie hat jeweils einen linearen und einen nichtlinearen Anteil. Die Ergebnisse werden mit Abschlussmassen von 3 kg und 30 kg, bei einer anregenden harmonischen Schwingung mit einer Frequenz von 70 Hz erlangt. Die Abweichungen der Ergebnisse von den realen Modellparametern sind im Fall der 30 kg-Masse aufgrund der höheren Unterdrückung der Ausgangsschwingung geringer, als bei der 3 kg-Masse.

	berechnete Steifigkeiten / N/m^n	
Modellparameter	3 kg	30 kg
$\underline{k}_1$ $k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$	$\underline{k}_1 = 1,00 \cdot 10^4 + j\omega 100,00$	$\underline{k}_1 = 1,00 \cdot 10^4 + j\omega 100,00$
$\underline{k}_1,\ k_2 = 2,0 \cdot 10^6$ $k_3 = k_4 = k_5 = 0$	$\underline{k}_1 = 9,03 \cdot 10^3 + j\omega 100,00$ $k_2 = 2,02 \cdot 10^6$	$\underline{k}_1 = 9,05 \cdot 10^3 + j\omega 100,00$ $k_2 = 2,01 \cdot 10^6$
$\underline{k}_1,\ k_3 = 5,0 \cdot 10^9$ $k_2 = k_4 = k_5 = 0$	$\underline{k}_1 = 1,03 \cdot 10^4 + j\omega 101,55$ $k_3 = 5,32 \cdot 10^9$	$\underline{k}_1 = 1,00 \cdot 10^4 + j\omega 100,15$ $k_3 = 5,05 \cdot 10^9$
$\underline{k}_1,\ k_4 = 5,0 \cdot 10^{10}$ $k_2 = k_3 = k_5 = 0$	$\underline{k}_1 = 1,00 \cdot 10^4 + j\omega 100,00$ $k_4 = 5,02 \cdot 10^{10}$	$\underline{k}_1 = 1,00 \cdot 10^4 + j\omega 100,00$ $k_4 = 5,03 \cdot 10^{10}$
$\underline{k}_1,\ k_5 = 1,0 \cdot 10^{14}$ $k_2 = k_3 = k_4 = 0$	$\underline{k}_1 = 1,05 \cdot 10^4 + j\omega 99,97$ $k_5 = 9,94 \cdot 10^{13}$	$\underline{k}_1 = 1,05 \cdot 10^4 + j\omega 100,00$ $k_5 = 1,01 \cdot 10^{14}$

Tabelle 5.2: Parameteridentifikation, f = 70 Hz, $\underline{k}_1 = 1,0 \cdot 10^4 + i\omega \cdot 100$

Im Folgenden wird die Ermittlung der Modellparameter untersucht, wobei sämtliche Freiheitsgrade des Polynoms fünfter Ordnung besetzt sind. Die Parameter sind gleich denen des Beispielsystems aus Abschnitt 4.6.1. Wird der Grad des gesuchten Modells gleich dem Grad des tatsächlichen Modells gesetzt, so folgen die Werte in Tabelle 5.3. Auch hier zeigen die Werte bei größerer Ausgangsmasse eine geringere Abweichung. Auffällig ist, dass die Terme ungerader Ordnung genauer identifiziert werden können als die gerader Ordnung.

Wird für das zu beschreibende System ein Modellgrad geringerer Ordnung angenommen als das reale System hat, so folgen die Parameter des reduzieren Ersatzmodells aus Tabelle 5.4. Das lineare Ersatzsystem erfüllt das Prinzip der harmonischen Linearisierung. Die

	berechnete Steifigkeiten / N/m^n	
Modellparameter	3 kg	30 kg
$k1 = 1,0 \cdot 10^4 (+i\omega \cdot 100)$	$1,01 \cdot 10^4 + j\omega 101,60$	$9,77 \cdot 10^3 + j\omega 100,15$
$k2 = 2,0 \cdot 10^6$	$7,25 \cdot 10^5$	$7,31 \cdot 10^5$
$k3 = 5,0 \cdot 10^9$	$5,28 \cdot 10^9$	$5,03 \cdot 10^9$
$k4 = 5,0 \cdot 10^{10}$	$1,40 \cdot 10^{10}$	$8,30 \cdot 10^9$
$k5 = 1,0 \cdot 10^{14}$	$1,25 \cdot 10^{14}$	$1,03 \cdot 10^{14}$

Tabelle 5.3: Modell mit sechs Freiheitsgraden, 70Hz

resultierenden statischen Steifigkeitskennlinien sind durch die Kraft-Weg-Verlaufe in Abbildung 5.11 dargestellt. Im monofrequenten Fall ist die Modellabweichung mit -52,56 dB bei einem Polynomgrad von drei bereits sehr gering. Das dynamische Verhalten bei breitbandiger Anregung zeigt der Kraftverlauf in Abbildung 5.12, der resultiert, wenn das System mit einem linearen Sweep angeregt wird. Die Abweichung hierbei ist prinzipiell höher, als wenn das System nur mit einer Frequenz angeregt wird, mit der auch die Parameter bestimmt wurden.

Modell-	berechnete Steifigkeiten / N/m^n					Abweichung σ_b /dB	
grad	k_1	$k_2/10^5$	$k_3/10^9$	$k_4/10^9$	$k_5/10^{14}$	f=70 Hz	Sweep 0-100Hz
1	$1,86 \cdot 10^4$ $+j\omega 100,00$	-	-	-	-	-23,93	-4,65
2	$1,86 \cdot 10^4$ $+j\omega 100,00$	7,50	-	-	-	-24,08	-4,65
3	$9,61 \cdot 10^3$ $+j\omega 100,15$	7,50	5,32	-	-	-52,56	-14,09
4	$9,61 \cdot 10^3$ $+j\omega 100,15$	7,31	5,32	8,30	-	-52,57	-13,84
5	$9,77 \cdot 10^3$ $+j\omega 100,15$	7,31	5,03	8,30	1,03	-52,87	-28,60

Tabelle 5.4: Steifigkeiten bei 70Hz abhängig vom Modellgrad (m=30kg)

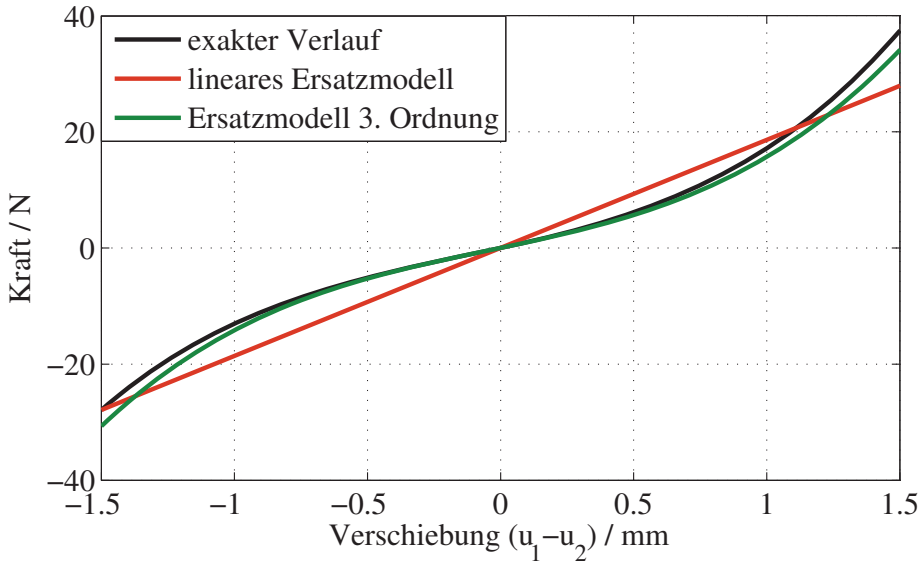


Abbildung 5.11: Verlauf der statischen Kraft-Weg-Kennlinie

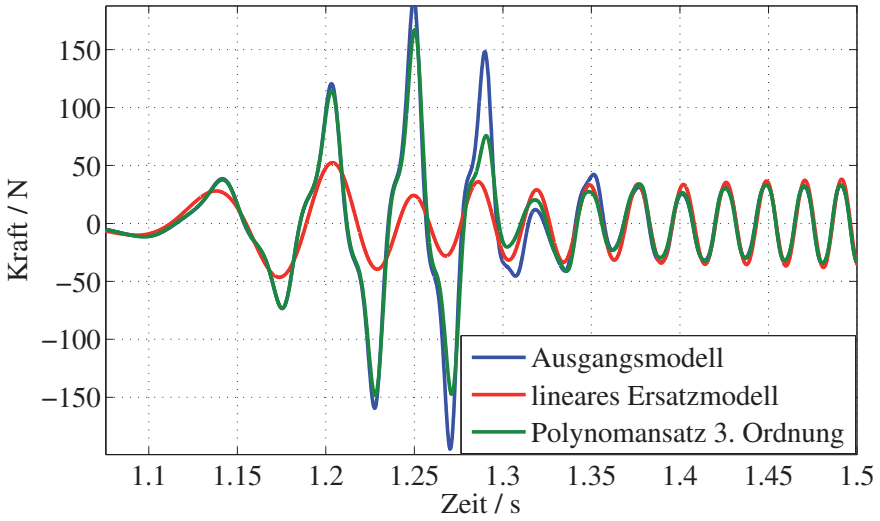


Abbildung 5.12: Vergleich der Zeitverläufe, Breitbandanregung

Coulomb-Modell

Die Modellparameter betragen k = 10^4 N/m, d = 10 Ns/m und $\mu = 1{,}5$. Die Ergebnisse abhängig von der Abschlussmasse, bei einer harmonischen Anregung mit f = 30 Hz und $\hat{u}_1 = 1,5mm$ sind in Tabelle 5.5 aufgelistet. Die Abweichungen der ermittelten Werten von den realen Parametern sind kleiner gleich 0,4 % und somit als sehr gering zu bewerten.

Abschlussmasse / kg	$k/N/m$	$d/Ns/m$	μ/N
$3kg$	$9,96 \cdot 10^3$	9,98	1,50
$30kg$	$9,99 \cdot 10^3$	9,99	1,50

Tabelle 5.5: Ermittelte Modellparameter abhängig von Abschlussmasse

Masing-Modell

Ein Masing-Modell mit den identischen Parametern wie das aus Abschnitt 4.6.2 wird mit einer 3kg Masse abgeschlossen. Die Werte des linearen Ersatzsystems nach der harmonischen Linearisierung und die Polynomkoeffizienten der nichtlinearen Steifigkeitskennlinie dritter und fünfter Potenz sind in Tabelle 5.6 zusammengefasst. Der Koeffizient k_3 ist in jedem Fall positiv, was einer progressiven Steifigkeit entspricht. Dies ist allerdings für das Verhalten des Masing-Modells untypisch. Der Koeffizient k_5 mit negativem Vorzeichen führt zu einer degressiven Steifigkeit. Somit ist zu erwarten, dass das Modell fünfter Ordnung i. A. exaktere Ergebnisse als das Modell dritter Ordnung liefert. Der Kraft-Zeit-Verlauf in Abbildung 5.13 vergleicht das Ausgangsmodell mit dem harmonisch linearisierten Modell und dem mit der Polynomkennlinie.

	berechnete Steifigkeiten / N/m					Abweichung σ
Modellgrad	k1	k2	k3	k4	k5	/ dB
1	$1,48 \cdot 10^4 + j\omega 41,55$	-	-	-	-	-14,59
3	$1,01 \cdot 10^4 + j\omega 43.72$	-	$3,30 \cdot 10^9$	-	-	-17,96
5	$9,02 \cdot 10^3 + j\omega 44,19$	-	$5,43 \cdot 10^9$	-	$-7,59 \cdot 10^{14}$	-18,46

Tabelle 5.6: Steifigkeiten bei 30Hz (m=3kg)

Der Algorithmus zur Erkennung der Parameter des Coulomb-Modells liefert bei Anwendung auf das Masing-Modell die Ergebnisse von Tabelle 5.7. Die Parameter sind in erheblichem Maße von der Abschlussmasse abhängig und das negative Vorzeichen der Reibzahl

physikalisch nicht begründbar. Hieraus läßt sich schließen, dass mit dem Coulomb-Modell das Verhalten des Masing-Modells zwar für den speziellen Testfall hinreichend approximiert wird, wie in Abbildung 5.14 gezeigt, bei anderen Anregungsarten und Randbedingungen u. U. nicht näherungsweise wieder gegeben werden kann.

Die Abweichungen der Ersatzsystemantworten gegenüber dem Ausgangsmodell bei breitbandiger Anregung mit einem linearen Sweep sind für unterschiedliche Frequenzbereiche in Tabelle 5.8 zusammengefasst. Das linearisierte Ersatzmodell weist hierbei trotz des geringen Modellgrades größtenteils die höchste Genauigkeit auf. Ähnliche Werte liefert das Steifigkeitspolynom fünfter Ordnung, während das System mit dem Polynom dritter Ordnung als unbrauchbar angesehen werden kann. Das Coulomb-Modell approximiert das Ausgangssystem mit geringer Genauigkeit.

Abschlussmasse / kg	$k/N/m$	$d/Ns/m$	μ/N	Abweichung σ / dB
3 kg	$1,50e4$	49,24	-1,98	-20.31
30 kg	$1,58e4$	61,90	-5,00	-18.31

Tabelle 5.7: Ermittelte Modellparameter abhängig von Abschlussmasse (f = 30Hz)

Frequenzbereich / Hz	harmonisch linearisiert	Coulomb-Modell	Polynom 3. Ord.	Polynom 5. Ord.
0-25	-9.17	-4,20	51,09	-8.12
0-50	-6.18	-3.68	48,41	-6.92
0-100	-6.83	-4,08	52,41	-5,52

Tabelle 5.8: Abweichung σ_b bei Breitbandanregung (m=3kg)

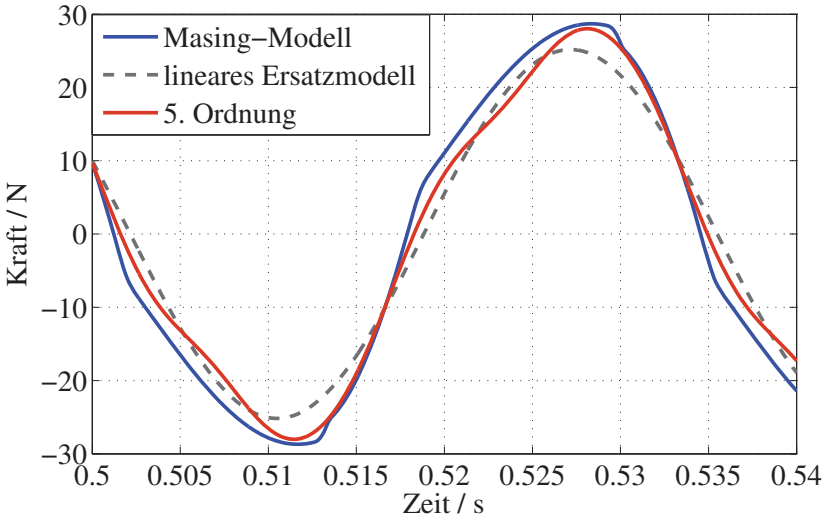


Abbildung 5.13: Kraft-Zeit-Verläufe unterschiedlicher Modelle

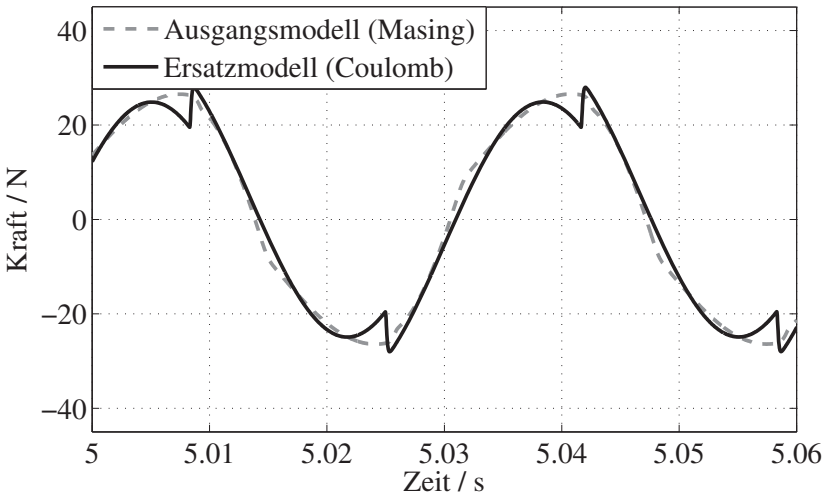


Abbildung 5.14: Zeitverläufe des Masing- und Coulombmodells

5.8.4 Zusammenfassung der numerischen Ergebnisse

Die vorangegangenen numerischen Untersuchungen zeigen die Ermittlung linearer und nichtlinearer Systemparameter anhand der harmonischen Ausgangsschwingungen bei monofrequenter harmonischer Eingangsanregung. Die Verfahren zur Bestimmung der nichtlinearen Steifigkeitskennlinie, aus Abschnitt 5.8.1, und der Parameter des Coulomb-Modells, aus Abschnitt 5.8.2, wurden bei unterschiedlichen Systemen getestet.
Es gilt, ein Ersatzmodell zu verwenden, das die physikalischen Eigenschaften des Ausgangsmodells ausreichend abbilden kann. Erwartungsgemäß ist in den Beispielen die Abweichung der beiden Systeme voneinander am geringsten, wenn die mathematischen Modelle identisch sind. Im Hinblick auf die Modellierung von Strukturdynamiksystemen kann die Genauigkeit hierbei als sehr gut bezeichnet werden. Abweichungen kommen durch die Vereinfachung 5.48 zustande, die bei einem Abschluss mit der 30 kg Masse geringer sind als mit der 3 kg Masse.
Das Masing-Modell hat einen prinzipiell anderen Aufbau als die hier verwendeten Ersatzsysteme. Diese sind nur in der Lage, das Masing-Modell für den Fall der Anregung mit der harmonischen Schwingung, mit der sie ermittelt wurden, mit geringer Abweichung wieder zu geben. Der Test mit Breitbandanregung zeigt, dass die harmonische Linearisierung hierfür zu bevorzugen ist.

Kapitel 6

Prüfstand

6.1 Beschreibung des Prüfstandsaufbaus

Die Prüfung der Schwingungsübertragung von Entkoppelelementen wird in einem höheren Frequenzbereich vorzugsweise an Prüfständen mit einem indirekten Messverfahren ermittelt. Grundlagen hierfür stehen in der Norm DIN EN ISO 10846 [21], [23]. Die konstruktive Auslegung des Prüfstandes hängt von der Art des Schwingungsisolators und insbesondere von dessen Einsatz ab. Praxisnahe Testbedingungen werden beispielsweise durch Vorspannsysteme und Heizungen zur Temperierung geschaffen, wie z.B. mit den Prüfeinrichtungen in den Arbeiten [14], [83] und [86] beschrieben. Die Forderung nach einer Messung der Übertragungseigenschaften der Entkoppelelemente bis 5 kHz frei von Prüfstandseinflüssen führte zu einer Neuentwicklung eines Schwingprüfstandes im Rahmen dieser Arbeit.
Der in Abbildung 6.1 dargestellte Prüfstand besteht aus einem massiven Prüfstandsrahmen (4), der keine Resonanzen aufweist, die zu unerwünschten Schwingungen am Messobjekt oder den Abschlussmassen führen. Überkritisch entkoppelt befindet sich der Modalschwingerrerger (Bruel & Kjaer 4828) (5) hängend am Prüfstandsrahmen. Dieser ist über die Eingangsmasse (6) mit dem Prüfling (7) verbunden. Dabei wird die statische Last vollständig von den Gummiexpandern getragen, während der Modalschwingerreger das Messobjekt dynamisch anregt. Aufgrund des Eigengewichtes der Abschlussmasse erfährt das Entkoppelelement eine definierte Vorspannung. Diese kann prinzipiell durch die Verwendung von Expandern und Federwagen variiert werden.

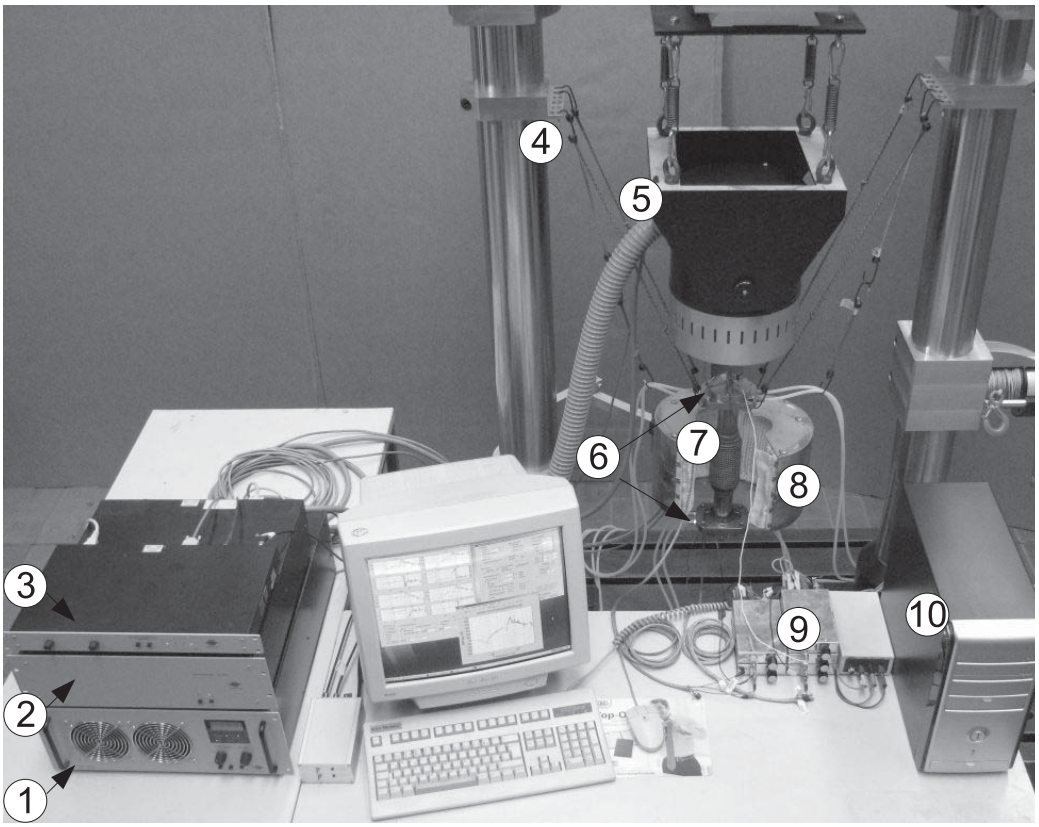


Abbildung 6.1: Gesamter Prüfstandsaufbau

1	Leistungsverstärker	6	Abschlussmassen
2	Spannungsversorgung für Leistungsverstärker	7	Prüfling
3	Gerät zur statischen Stösselpositionierung	8	Heizvorrichtung
4	Prüfstandsrahmen	9	Ladungsverstärker
5	Modalshaker	10	Messrechner

Die Ansteuerung des Schwingerregers erfolgt durch das System, bestehend aus einem Leistungsverstärker (Bruel & Kjaer 2721) (1), einer Spannungsversorgung (Bruel & Kjaer 2830) (2) und der Einheit zur statischen Stösselpositionierung und Vorspannung (Bruel & Kjaer 1056) (3). Die Anregungssignale werden im Messrechner (10) generiert, der auch zur Signalaufzeichnung und Analyse genutzt wird. Das Zusammenwirken der Komponenten verdeutlicht das Blockschaltbild in Abbildung 6.2. Zur Messung der Beschleunigungen werden vier piezoelektrische Beschleunigungssensoren (PCB 340A50 und 4367 Bruel & Kjaer) und zur Kraftmessung ein piezoelektrischer Kraftsensor (Bruel & Kjaer 8200) verwendet. Das Verstärkersymbol, das nach jedem Sensor folgt, steht für einen hochempfindlichen rauscharmen Ladungsverstärker, dessen vereinfachter Schaltplan links unten angegeben ist. Das RC-Glied in der Rückkopplung der Impedanzwandler-Stufe bestimmt

die untere -3dB-Grenzfrequenz, die somit gleich $1/(2\pi \cdot 40M\Omega \cdot 220pF) = 18,1Hz$ ist. Die synchrone Ausgabe des Testsignals und Aufzeichnung der Sensorsignale erfolgt über die A/D- und D/A-Wandlerkarte (M-Audio Delta 1010lt), deren hoher Dynamikbereich von 99,6dB (A-bewertet) breitbandige Messungen mit großen Resonanzüberhöhungen und stark gedämmten Frequenzbereichen möglich macht. Die Anbindung der Wandlerkarte an Matlab erfolgt über die ASIO-Schnittstelle.
Im Betrieb erfahren die Entkoppelelemente eine starke Erhitzung durch das heiße Abgas, welches lokal je nach Betriebszustand Temperaturen von bis zu 1000°C aufweisen kann [10]. Die thermische Last hat einen Einfluss auf das Schwingverhalten des Bauteils und wird somit am Prüfstand mit Hilfe einer Heizmanschette (8) erreicht.

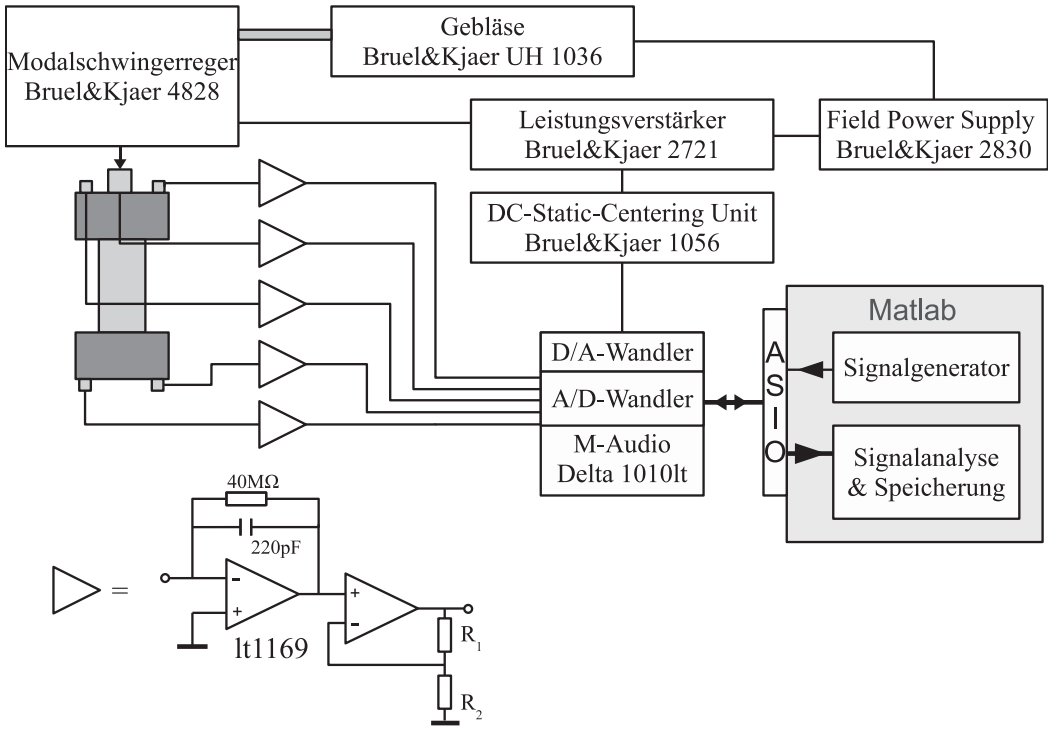


Abbildung 6.2: Blockschaltbild des Prüfstands

6.2 Messung der Kräfte und Beschleunigungen

Zur Messung der Beschleunigungen werden sowohl an Eingangs- als auch an Ausgangsmasse jeweils zwei piezoelektrische Beschleunigungssensoren mit Ladungsausgang verwendet. Der Betragsfrequenzgang dieser Sensoren kann innerhalb der Bandbreite von 5 kHz

als konstant angesehen werden, die Phasenverschiebungen sind vernachlässigbar. Die Abschlussmassen haben ihre erste Eigenmode bei Frequenzen höher 8 kHz, weshalb unterhalb von 5 kHz von starren Massen ausgegangen werden kann. So wird die ausgangsseitige Kraft mit Hilfe des zweiten Newtonschen Axioms bestimmt werden. Translatorische Beschleunigungen werden durch das arithmetische Mittel der Ausgangssignale der Beschleunigungsaufnehmer ermittelt. Hierdurch ergibt sich eine Unterdrückung der Störsignale, wie in 5.6 bereits beschrieben. Die Differenz der Signale, geteilt durch den Abstand der Sensoren, ergibt die Winkelbeschleunigung, was bei der Bestimmung der rotatorischen und lateralen Steifigkeiten Anwendung findet. Es werden für jede Anregungsrichtung jeweils zwei unterschiedliche Größen der Messköpfe verwendet, abhängig vom Flanschtyp. Tabelle 6.1 enthält die relevanten statischen und dynamischen Eigenschaften der Massen zusammengefasst. Da die indirekte Messung der anregenden Kraft nicht präzise möglich ist, wird diese direkt mit dem Kraftsensor gemessen.

	longitudinal		lateral	
Lochabstand / mm	78	100	78	100
Masse / kg	3,18	4,52	5,97	7,28
1. Eigenfrequenz / kHz	9,1	8,1	14,3	12,4
Abstand der Sensoren (Mittelpunkte) / mm	64	64	39	39

Tabelle 6.1: Eigenschaften der Abschlussmassen

6.3 Anordnungen zur longitudinalen und lateralen Anregung

Zur Messung der Schwingungsübertragung des Entkoppelelementes in longitudinaler Richtung dient die Anordnung aus Abbildung 6.3. Hiermit ist es möglich, den Vierpol gemäß dem Umkehrverfahren nach Kapitel 5.6 zu ermitteln. Der Modalshaker (1) befindet sich oberhalb des Prüflings, der über einen kurzen steifen Stössel (2) an den Kraftsensor (3) angebunden ist. Dieser misst die Kraft, die die Eingangsmasse (6) anregt. Vier elastische Expander (3) sind an der Eingangsmasse angebracht. Die Beschleunigungsaufnehmer (5) sind symmetrisch um den Kraftsensor angeordnet. Zwischen der Eingangs- und Ausgangsmasse (9) befindet sich der Prüfling (9). Ausgangsseitig sind zwei Beschleunigungssensoren (8), die sich in diesem Bild unter einer Luftschallisolierung befinden.

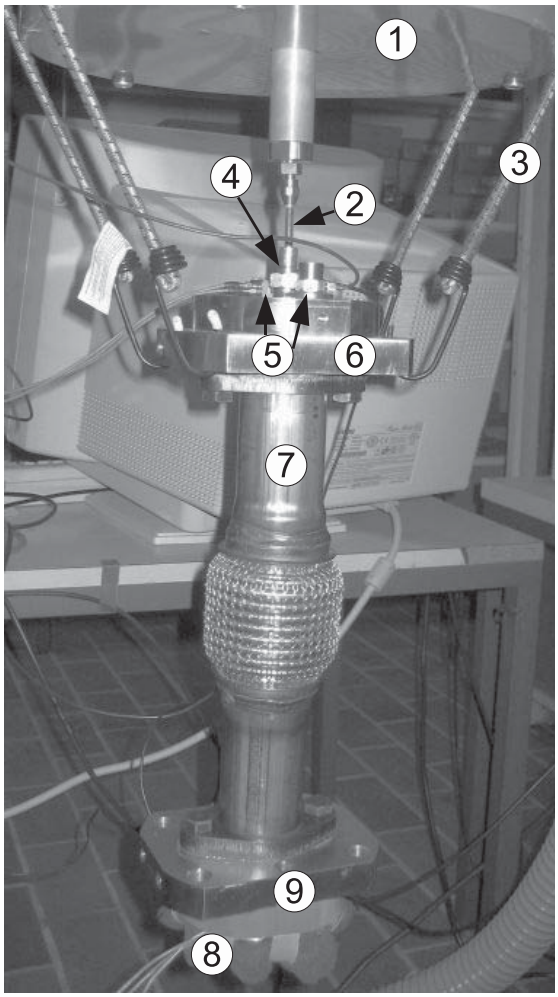


Abbildung 6.3: Axiale Anregung und Messung

Die laterale Schwingungsanregung erfolgt nach dem Aufbau gemäß Abbildung 6.4, wobei die Nummerierung analog zu der von Abbildung 6.3 gilt. Der Modalshaker regt den Prüfling hierfür seitlich an. Der Stössel muß biegeweich sein, damit die Eingangsmasse zu einem gewissen Grad Rotationen ausführen kann. Es befinden sich Gewindelöcher sowohl an der Ober- (A) als auch der Unterseite (B), was die unterschiedlichen Verhältnisse von anregender Translation und Rotation realisierbar macht, die zur Bestimmung der Biegesteifigkeiten nach Kapitel 5.7.1 notwendig sind.

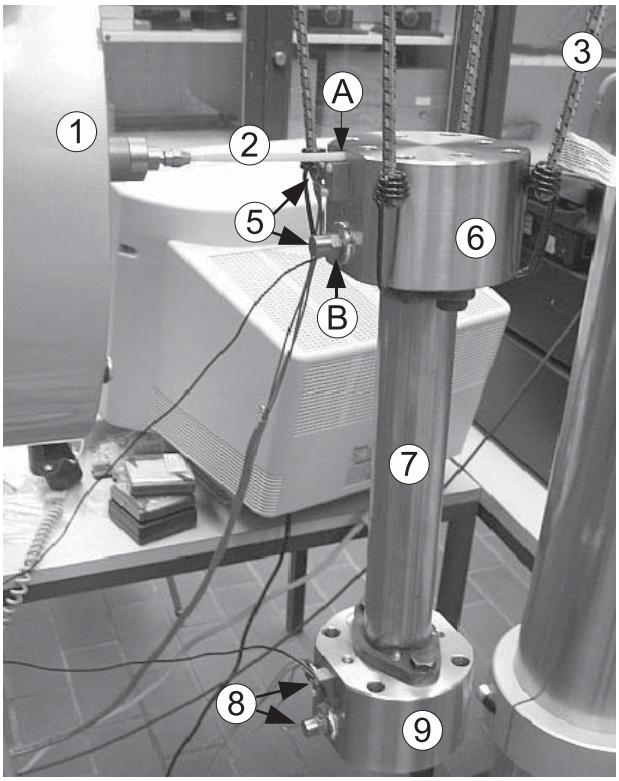


Abbildung 6.4: Laterale Anregung und Messung

Kapitel 7

Messergebnisse

7.1 Prüflinge

Untersucht werden im Folgenden vier nicht tragende Schlauchleitungen (SL) aus Abbildung 7.1, deren Maße in Tabelle 7.1 zusammengefasst sind. Die Verbindungsrohre haben jeweils einen 50 mm breiten Durchmesser und eine Wanddicke von 1,5 mm. Der innen liegende Metallbalg besteht aus zwei Lagen mit jeweils 0,2 mm Dicke. Außerdem wird ein Schlauchgelenk (SG), dargestellt in Abbildung 7.2, mit identischen Verbindungsrohren und einem zweilagigen Metallbalg mit einer Lagendicke von 0,25 mm untersucht.

Element	Nennlänge / mm	Außendurchmesser / mm
SL #1	88	77,2
SL #2	106	77,2
SL #3	124	77,2
SL #4	178	75,0
SG	100	82,5

Tabelle 7.1: Maße der Schlauchleitungen

7.2 Axiale Schwingungsübertragung

Das Umkehrverfahren führt bei dem Schlauchgelenk SL #1 zu den komplexen Vierpolparametern $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{21}$, $\underline{A}_{12}$, $\underline{A}_{22}$, die in Abbildung 7.3 nach Betrag und Phase dargestellt sind. Zunächst werden die Verläufe der Parameter erläutert, die sich bei der Messung

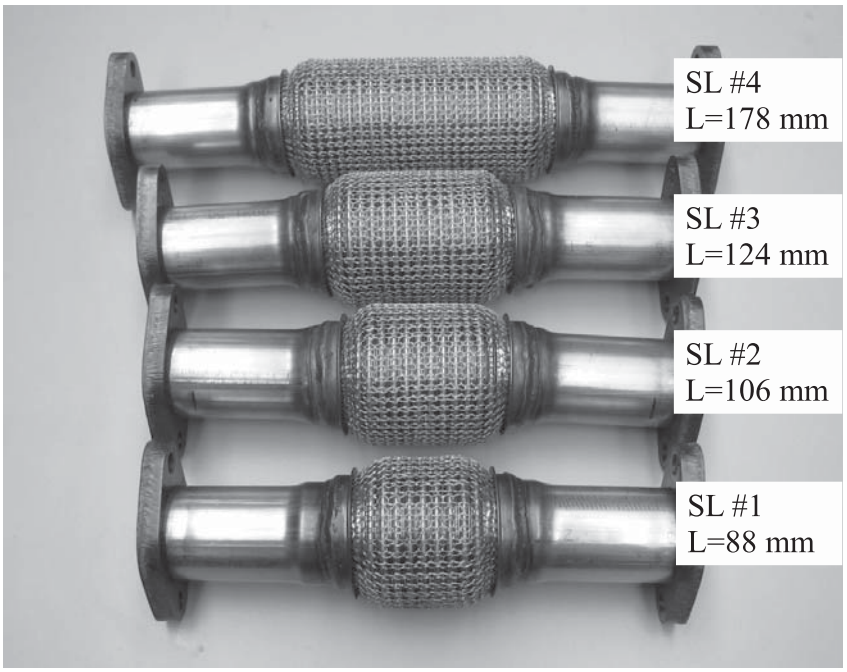


Abbildung 7.1: Schlauchleitungen SL #1-#4

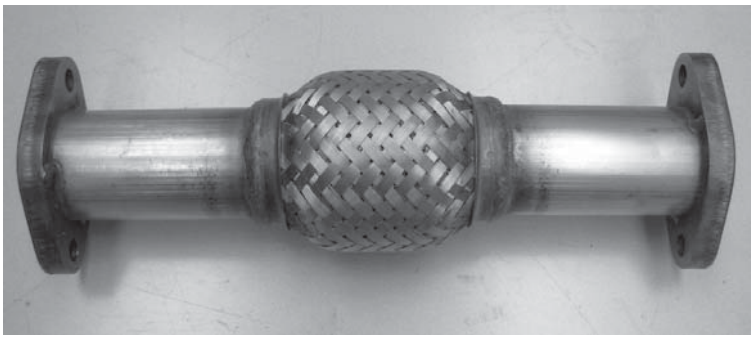


Abbildung 7.2: Schlauchgelenk SG

mit diskreten harmonischen Schwingungen und einem Beschleunigungspegel von konstant 120 dB ergeben (schwarze Kurve).
Der erste Einbruch im Betrag des Parameters $\underline{A}_{11}$ liegt bei etwa 138 Hz. Dieser ist auf die erste Resonanz des oberen Teils des Prüfkörpers zurückzuführen. Das Stahlrohr schwingt wie eine starre Masse auf der flexiblen Schlauchleitung, die sich wie eine Feder verhält. Der Parameter $\underline{A}_{22}$ zeigt aufgrund der Symmetrie einen identischen Verlauf zu $\underline{A}_{11}$.
Das erste lokale Minimum der Transfergröße $\underline{A}_{21}$ liegt bei ca. 615 Hz und stellt den Einfluss der ersten axialen stehenden Welle im Schwingungsisolator dar, wenn Ein- und Ausgang gefesselt sind. Der Parameter $\underline{A}_{21}$ verknüpft die Kraft am Ausgang bei fester Einspannung mit der eingangsseitigen Schnelle und stellt somit eine wichtige Kenngröße der Schallübertragung dar. Der zweite signifikante Einbruch liegt bei 2,8 kHz und ist um 23 dB niedriger, als der erste, was zu einer deutlichen Erhöhung der Transfersteife führt.
Die erste Eigenform, bei der Ein- und Ausgang eine freie Bewegung ausführen können, führt zu dem ersten Einbruch von Parameter $\underline{A}_{12}$ bei 256 Hz.
Diese harmonisch linearisierten Vierpolparameter weichen erheblich von denen ab, die eine Messung mit Breitbandanregung liefert. Die rote Kurve zeigt die Ergebnisse bei Anregung mit gaussverteiltem weißen Rauschen. Als Frequenzgangsschätzer wird $H_2(j\omega)$ aus Gleichung 5.8 verwendet, da auf die Eingangskraft referenziert wird. Hierzu werden die Leistungsspektren jeweils mit 20 Mittelungen erlangt.
Die Frequenz des ersten Minimums von $\underline{A}_{11}$ ist mit 26 Hz um ca. Faktor 5 geringer als bei der Stepped-Sine-Messung. Sowohl die niedrigeren Resonanzfrequenzen, als auch der Verlauf der Beträge weist bei der Breitbandmessung auf eine höhere Nachgiebigkeit des Bauteils hin. Des Weiteren sind die resonanzbedingten Kurveneinbrüche hierbei geringer ausgeprägt. Beispielsweise sinkt $\underline{A}_{11}$ bei der Stepped-Sine-Messung im ersten Minimum gegenüber dem quasi-statischen Betrag um ca. 16 dB ab, bei der roten Kurve beträgt der Unterschied nur ca. 1 dB. Bei dem Parameter $\underline{A}_{21}$ der roten Kurve ist aufgrund der hohen Dämpfung die Lage der ersten Resonanzfrequenz nicht genau definierbar.

Die durch stochastische Anregung erlangten Kettenmatrixparameter sind statistisch linearisierte Größen. Eine Linearisierung ist mit periodischen Breitbandsignalen ohne Variation von Betrag und Phase nicht möglich. Die in Abbildung 7.4 gezeigten Vierpolparameter von SL #1 sind die Ergebnisse von Messungen mit Rauschen (rote Kurven) und im Vergleich dazu mit einem linearen Sinus-Sweep (blaue Kurve). Die Kurven weichen teilweise stark voneinander ab, trotz gleicher Amplitudendiche der Anregung von 110 dB/Hz. Die Lage von Resonanzfrequenzen läßt sich anhand der blauen Kurve nur schwer abschätzen, da keine ausgeprägten einzelnen Minima bzw. Maxmia vorhanden sind. Die Kettenmatrixparameter des Schlauchgelenks SG sind in Abbildung 7.5 skizziert. Wie bei dem SL #1 ist

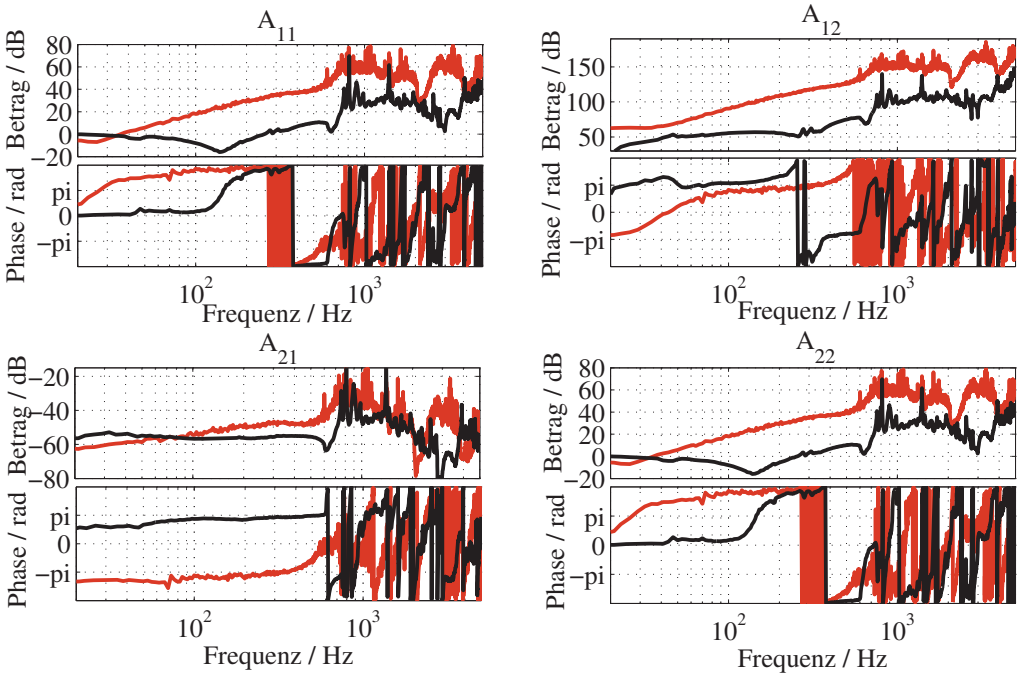


Abbildung 7.3: Betrags- und Phasenfrequenzgänge der Kettenmatrixparameter von SL #1 bei unterschiedlichen Anregungen, rot: Rauschen, schwarz: Sinusschwingungen

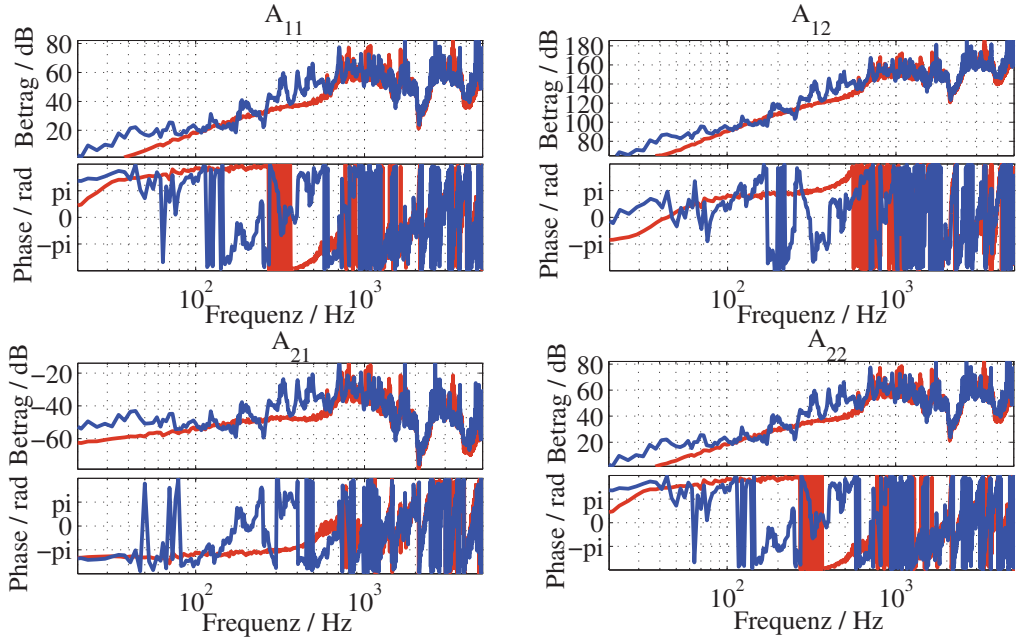


Abbildung 7.4: Betrags- und Phasenfrequenzgänge der Kettenmatrixparameter von SL #1, rot: Rauschen, blau: linearer Sweep

hierbei aufgrund der Bauteilsymmetrie die Gleichheit $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ gültig. Die Verläufe der Betrags- und Phasenfrequenzgänge können analog zu denen des SL#1 gedeutet werden. Das Schlauchgelenk weißt prinzipiell höhere Resonanzfrequenzen auf und kann bis 400 Hz als verlustbehaftete Feder mit konzentrierter Masse modelliert werden.

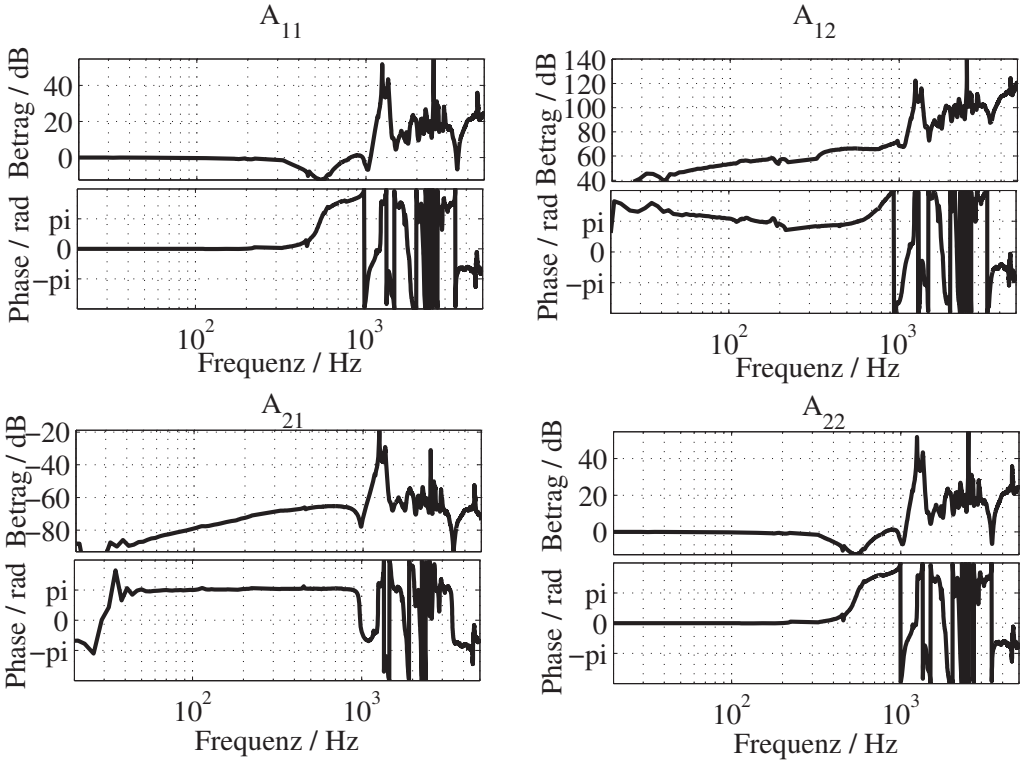


Abbildung 7.5: Kettenmatrix SG

7.2.1 Transfersteifen der Schlauchleitungen

Die axiale dynamische Transfersteife dient im Folgenden zum quantitativen Vergleich der frequenzabhängigen Entkoppelwirkung der vier Schlauchleitungen SL #1 - SL #4. Zur besseren Überschaubarkeit werden die Transfersteifen in Terzbändern durch quadratische Mittelwertbildung zusammengefasst.

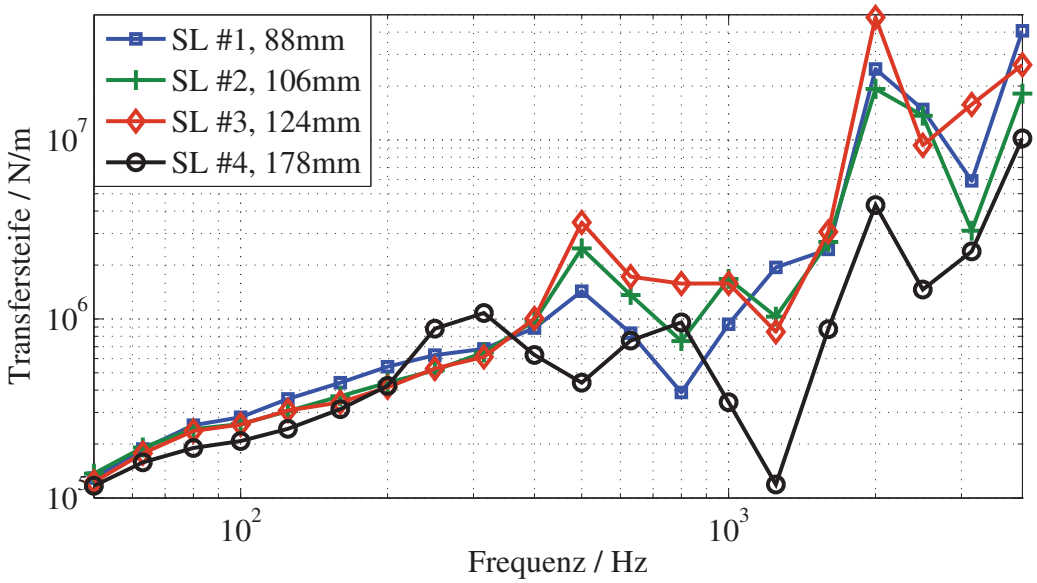


Abbildung 7.6: Transfersteifen der Schlauchleitungen

Die Messung unter Anwendung der Stepped-Sine-Methode mit konstanter Beschleunigung der Anregung von 130 dB liefert die Kurvenverläufe von Abbildung 7.6. Unterhalb von 200 Hz liegen die Kurven weitgehend parallel und unterschieden sich entsprechend den statischen Steifigkeiten. Oberhalb von 200Hz werden die Kurvenverläufe stark von den Resonanzen bestimmt. So nehmen diese ihr erstes Maximum bei der $\lambda/2$-Resonanz an, die bei dem Element #4 im Terzband mit der Mittenfrequenz von 315 Hz liegt. Die kürzeren und somit steiferen Elemente weisen diese Steifigkeitsüberhöhung im 500 Hz-Band auf. Außerdem treten hohe Versteifungen der Elemente in den 2 kHz und 4 kHz Bändern auf.

Hierbei wird deutlich, dass die Entkoppelwirkung bei höheren Frequenzen sehr stark von dem Resonanzverhalten abhängig ist und dass die Unterschiede der Kurvenverläufe hierbei nicht mehr aus den statischen Steifigkeiten, bzw. den dynamischen Transfersteifen tiefer Frequenzen, abgeleitet werden können. Während die Unterschiede im tieffrequenten Bereich entsprechend den Längenunterschieden maximal um ca. Faktor 2 auseinander

liegen, betragen die Abweichungen bei höheren Frequenzen mehrere Größenordnungen. Kontinuumsresonanzen müssen in Frequenzbereichen, in denen eine hohe Dämmung erzielt werden soll, vermieden werden. Ein Beispiel hierfür ist der Frequenzbereich der Turboladeranregung zwischen 600 Hz - 1 kHz. Für die Entkopplung dieser Frequenzen ist das Schlauchelement SL #1 am besten geeignet, obwohl es aufgrund der kürzesten Nennlänge die höchste statische Steifigkeit besitzt. Die längeren Elemente SL #2 - #4 sind hierfür aufgrund der ungünstigen Lage der Resonanzfrequenzen ungeeignet.

7.2.2 Linearisierte Transfersteife

Die Amplituden- und Frequenzabhängigkeit der axialen Transfersteife wird exemplarisch anhand der Messergebnisse von SL #4 untersucht. Im Anhang B befinden sich die Messergebnisse zu den Testteilen SL #1 - #3.
Die mit harmonischen Schwingungen nach dem Verfahren aus Abschnitt 5.5.2 gemessenen Beträge der Transfersteifen zeigt Abbildung 7.7. Bis zu einer Frequenz von etwa 160 Hz ist die Frequenzabhängigkeit des Betrages nur gering ausgeprägt. In diesem Bereich zeigt sich allerdings die größte Abhängigkeit von dem Beschleunigungspegel, dessen Effektivwert von 0,04 m/s^2 bis 40 m/s^2 verändert wird. Der Betrag der Transfersteife sinkt bei 30 Hz von $2{,}0 \cdot 10^5$ N/m auf $1{,}5 \cdot 10^4$ N/m ab. Mit steigender Frequenz und konstanter Amplitude steigt der Betrag stetig bis zur ersten Längsresonanz des Bauteils, deren Resonanzfrequenz jedoch nicht konstant, sondern von der Anregungung abhängig ist, somit varriert die Lage der Resonanz zwischen 250 Hz und 350 Hz. Dies ist in Abbildung 7.7 durch die rote Linie gekennzeichnet. Die degressive Steifigkeit des Bauteils führt zu einer mit steigender Beschleunigung fallenden Resonanzfrequenz, was durch den Pfeil verdeutlicht ist. Die Ausprägung der resonanzbedingten Versteifung sinkt mit wachsender Beschleunigung, da hiermit der Einfluss der Reibung steigt. Der Einfluss der Nichtlinearität auf die höherfrequenten Versteifungen ist mit steigender Frequenz schwächer ausgeprägt und oberhalb von 1 kHz praktisch nicht mehr relevant.

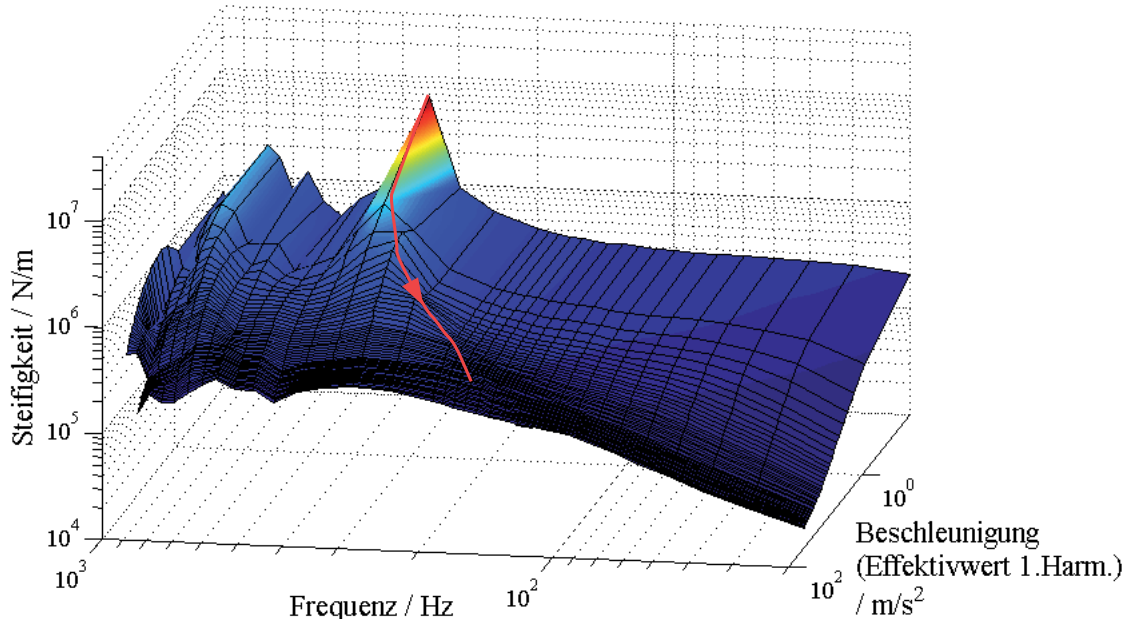


Abbildung 7.7: Transfersteife von SL #4

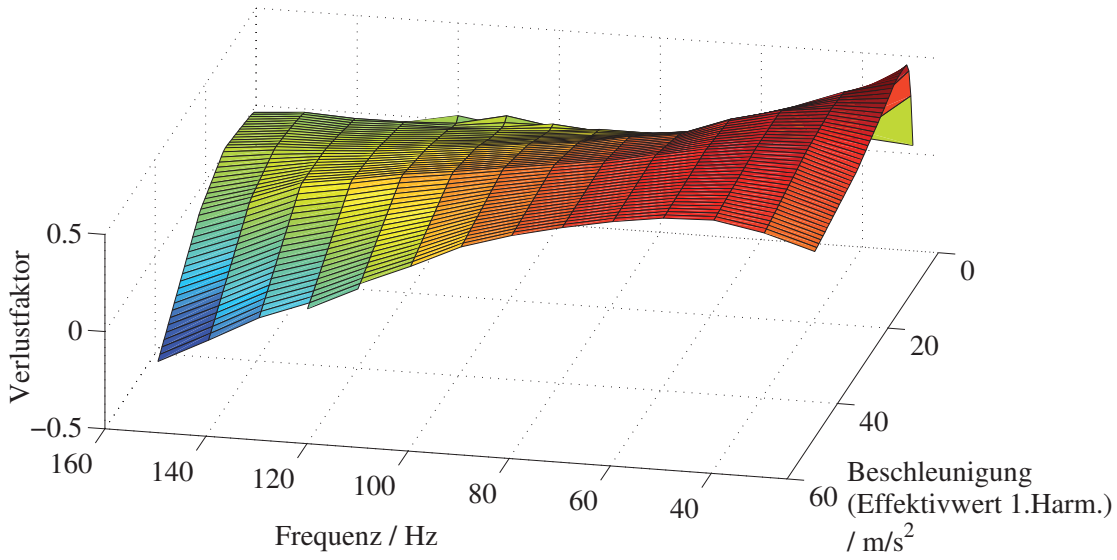


Abbildung 7.8: Verlustfaktor von SL #4

Den Verlustfaktor zeigt Abbildung 7.8. Dieser ist für sehr kleine Aussteuerungen sehr klein, bei einem Effektivwert von 0,04 m/s^2 liegt er im Bereich zwischen 0 und 0,04. Dieser steigt bei höheren Amplituden zunächst sehr stark an und erreicht sein Maximum von 0,5 bei einer Frequenz von 30 Hz und einem Effektivwert von 4 m/s^2. Mit steigender Amplitude sinkt der Verlustfaktor, was darauf schließen läßt, dass keine weiteren Kontaktstellen in den Gleitzustand versetzt werden. Das Abfallen des Verlustfaktors mit steigender Frequenz läßt sich dadurch erklären, dass bei konstanter Beschleunigung die Schwingschnelle linear und der Schwingweg in zweiter Potenz abfallen, somit weniger Reibung in dem Bauteil auftritt.

7.3 Laterale und rotatorische Steifigkeiten

In diesem Abschnitt werden die Messergebnisse der linearisierten lateralen und rotatorischen Transfersteifen ausgewählter Entkoppelelemente gezeigt. Diese werden durch die Messverfahren aus Kapitel 5.7 erlangt.

7.3.1 Referenzmessungen

Die Referenzmessung an einem Prüfkörper, der dem Testobjekt aus Kapitel 5.7.4 gleich ist, liefert nach dem einfachen Messverfahren, ohne die Berücksichtigung der Ausgangsschwingungen, die Transfersteifen nach Abbildung 7.9. Es zeigt sich eine gute qualitative als auch quantitative Übereinstimmung. Das erweiterte Messverfahren nach Kapitel 5.7.2 liefert die Messergebnisse nach Abbildung 7.10. Auch bei den Messwerten sind Messabweichungen aufgrund der Resonanzen, die durch die Interaktion von Entkoppelelement und Abschlussmasse entstehen, unterdrückt. Lediglich ein schmalbandiger Ausbruch bei 450 Hz führt zu Abweichungen von dem idealen Wert. Das stetige Absinken der Transfersteifen unterhalb von 200 Hz mit fallender Frequenz ist durch Messabweichungen, wie in Kapitel 7.6 gezeigt, begründet.

7.3.2 Messungen an Entkoppelelemten

Im Folgenden werden nur die Messergebnisse gezeigt, die unter Anwendung des erweiterten Messverfahrens nach Kapitel 5.7.2 erlangt wurden. Die Beträge der lateralen und

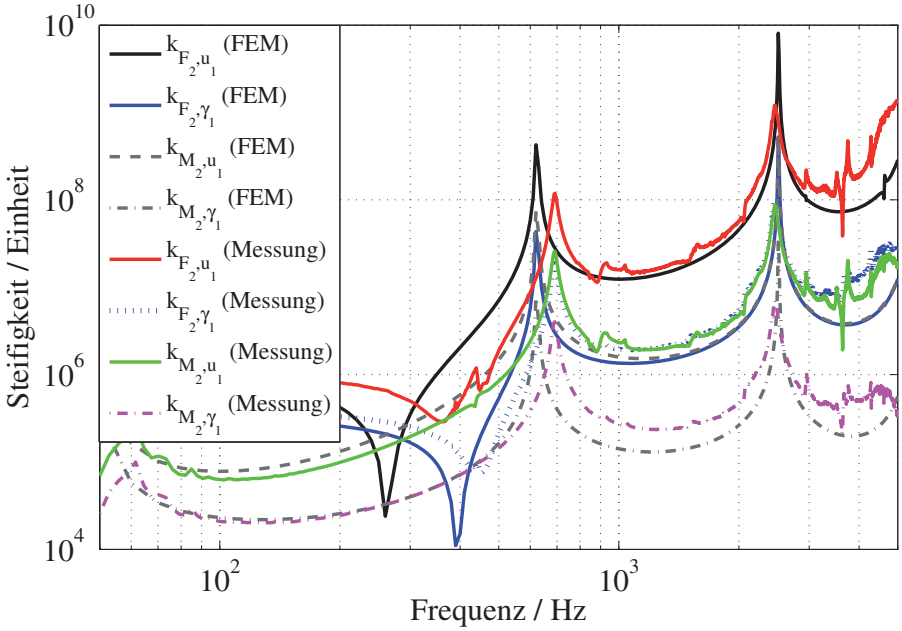


Abbildung 7.9: Vergleich der Messergebnisse mit Simulationswerten, DIN Verfahren

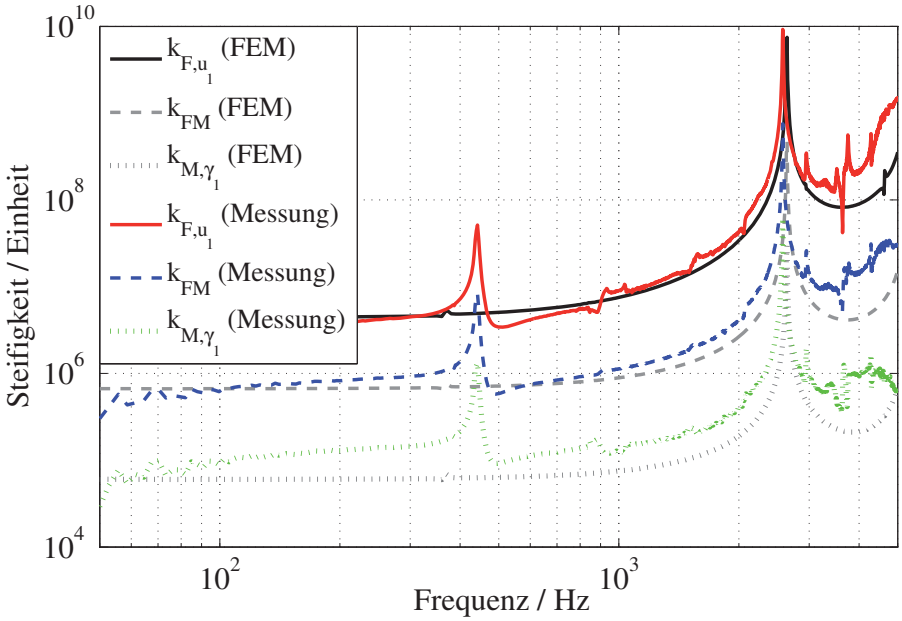


Abbildung 7.10: Vergleich der Messergebnisse mit Simulationswerten

rotatorischen Transfersteifen des Elementes SL #1 sind in Abbildung 7.11 zusammengefasst. Diese weisen, wie das Referenzrohr, einen näherungsweise parallelen Verlauf auf. Die Versteifungen infolge von Bauteilresonanzen sind aufgrund der hohen Strukturdämpfung vergleichsweise schwach ausgeprägt. Eine exakte Lokalisation diskreter Resonanzfrequenzen ist nicht möglich. Die Kurvenverläufe weisen einen tendenziell steigenden Verlauf auf. Dies ist bei tiefen Frequenzen sowohl auf Resonanzen, als auch auf die Degressivität zurückzuführen, da die Anregungen einen konstanten Beschleunigungspegel von 120 dB und somit eine mit der Frequenz linear fallende Schnelle aufweist. Oberhalb von 1 kHz steigt die laterale Transferstefe k_{F_2,u_1} von 1,9·10^6 N/m stark an und erreicht ihr Maximum bei 3,6 kHz mit 1,8·10^8 N/m. Dies ist zum einen durch die mit der Frequenz wachsende Modendichte, zum anderen dadurch zu erklären, dass in diesem Anregungsbereich die Haltekräfte an den Kontaktstellen nicht überschritten werden. Des Weiteren steigt mit der Frequenz der Einfluss der inneren Materialdämpfung und somit der Imaginärteil des E-Moduls. Einen Überblick über die Transfersteifen verschiedener Entkoppelelemente zeigt Abbil-

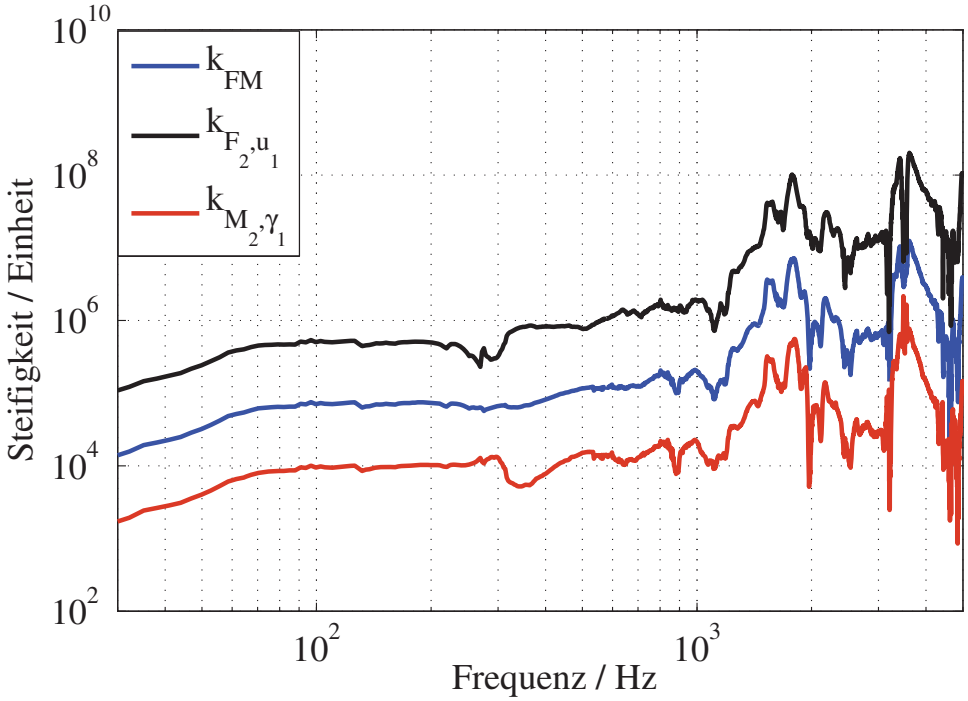


Abbildung 7.11: Laterale und rotatorische Steifigkeiten von Prüfling SL #1

dung 7.12. Die laterale Transfersteifigkeit k_{F_2,u_1} dient zum quantitativen Vergleich der Körperschallübertragung durch die Schlauchleitungen SL #1, SL #4 und des Schlauchgelenks SG. Die Schlauchleitung weist eine statische Transfersteife von 1,7·10^6 N/m auf und ist somit lediglich um Faktor zwei geringer als die des Referenzrohres. Auch der qualitative

Kurvenverlauf ist dem des Referenzrohres ähnlich, wobei deutlich ausgeprägte Bauteilversteifungen bei 1,5 kHz und 4,8 kHz vorliegen.
Deutlich geringer sind im statischen und tieffrequenten Bereich die Transfersteifigkeiten der Schlauchleitungen. SL #1 ist im Bereich von 30 Hz - 150 Hz um Faktor 10 nachgiebiger als SL #4. Mit steigender Frequenz nähern sich die Beträge jedoch an und liegen oberhalb von 300 Hz auf ähnlichem Niveau.
Der Vergleich der Phasenfrequenzgänge der lateralen Steifigkeiten aus Abbildung 7.13 zeigt, dass mit steigender Frequenz der Phasenzuwachs bei der Schlauchleitung größer ist als bei dem schwächer gedämpften Schlauchgelenk. Die Transfersteife des Referenzrohres weist erwartungsgemäß den geringsten Phasenzuwachs auf. Der Frequenzbereich, in dem die Phase zur Bestimmung der Dämpfung ausgewertet werden kann, ist bei dem Schlauchgelenk durch das Absinken bei etwa 1 kHz deutlich erkennbar. Schwieriger ist die Festlegung bei dem Schlauchgelenk aufgrund seiner nicht exakt definierbaren Lage der Resonanzfrequenzen. Die erste Unstetigkeit des Phasenverlaufes bei 250 Hz sollte als Obergrenze der Gültigkeit angesehen werden.

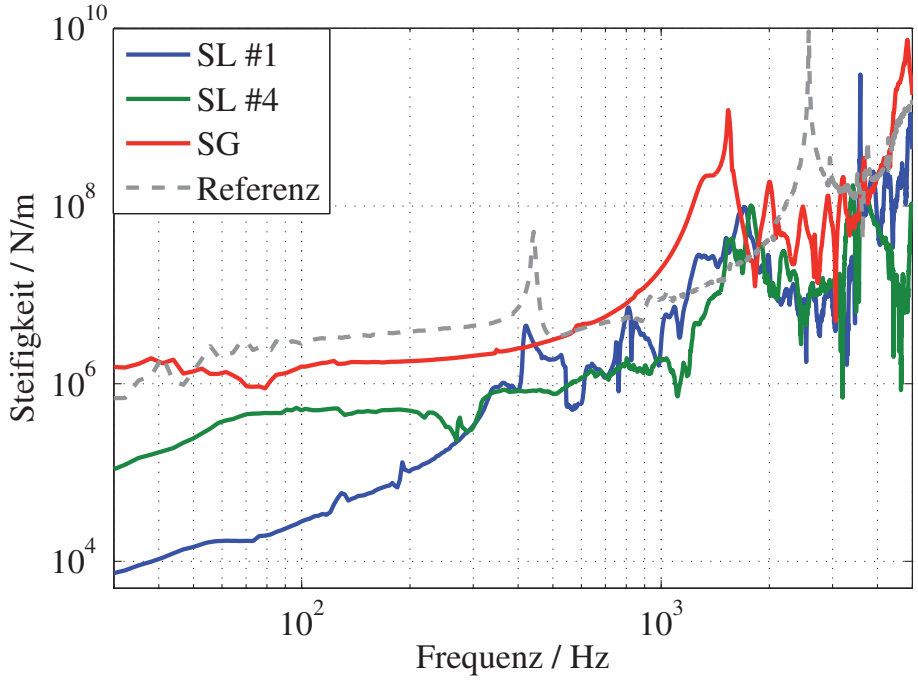


Abbildung 7.12: Vergleich der lateralen Steifigkeit der Prüflinge SL #1 und SL #4

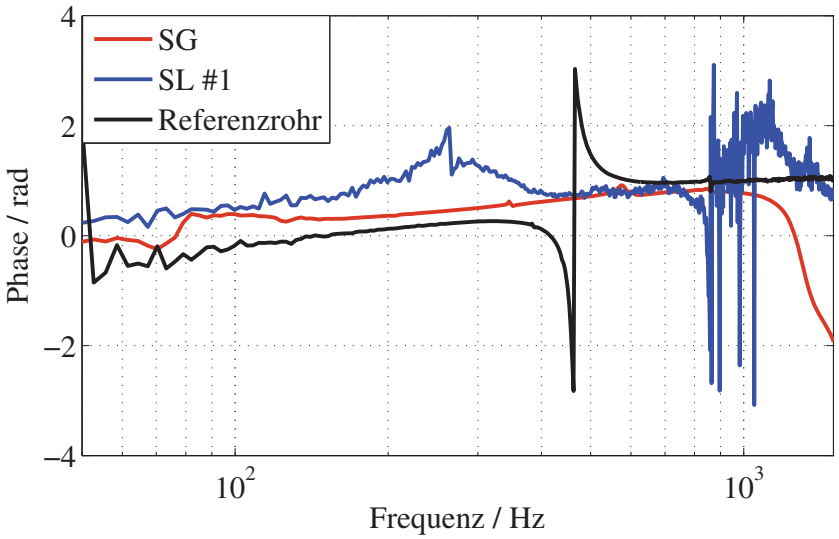


Abbildung 7.13: Phasenfrequenzgang der lateralen Steifigkeiten

7.4 Messung nichtlinearer Modellparameter

Die Untersuchungen in 7.2 zeigen eine ausgeprägte Anregungsabhängigkeit des Übertragungsverhaltens von Schlauchleitungen. Im Folgenden werden die Parameter nichtlinearer Modelle ermittelt und deren Tauglichkeit im Hinblick auf eine umfassende und exakte Systembeschreibung überprüft. Exemplarisch werden alle Untersuchungen an dem SL #1 in axialer Richtung durchgeführt. Hierbei wird das Entkoppelelement mit konzentrierten Parametern beschrieben, was im niederfrequenten Bereich aufgrund der vernachlässigbaren Trägheitskräfte möglich ist.

7.4.1 Nichtlinearer Steifigkeitsverlauf

Das Messverfahren aus Kapitel 5.8.1 wird zur Messung der Steifigkeitskennlinie angewendet. Tabelle 7.2 enthält die Polynomkoeffizienten und zugehörigen Modellabweichungen, die bei einer harmonischen Anregung mit einer Frequenz von 70 Hz und einem Beschleunigungspegel von 155 dB entstehen. Die harmonische Linearisierung liefert ein Ersatzsystem mit einer Abweichung von -11,02 dB. Das System mit der Polynomkennlinie dritter Ordnung hat im Vergleich dazu eine um 2,79 dB geringere Abweichung und kann im Hinblick auf den geringeren Modellierungsaufwand als optimales Ersatzmodell angesehen werden. Abbildung 7.14 zeigt den Zeitverlauf der Ausgangskraft. Die Modellgenauigkeit ist bei einem Polynomgrad von fünf geringer. Dies ist bei den Messergebnissen aus Ta-

belle 7.3, die bei 30 Hz erlangt werden, noch stärker ausgeprägt. Die Kraft-Zeit-Verläufe sind in Abbildung 7.15 gezeigt. Hieraus läßt sich schließen, dass die zugrunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten durch das nichtlineare Ersatzmodell nur unzureichend beschrieben werden können.

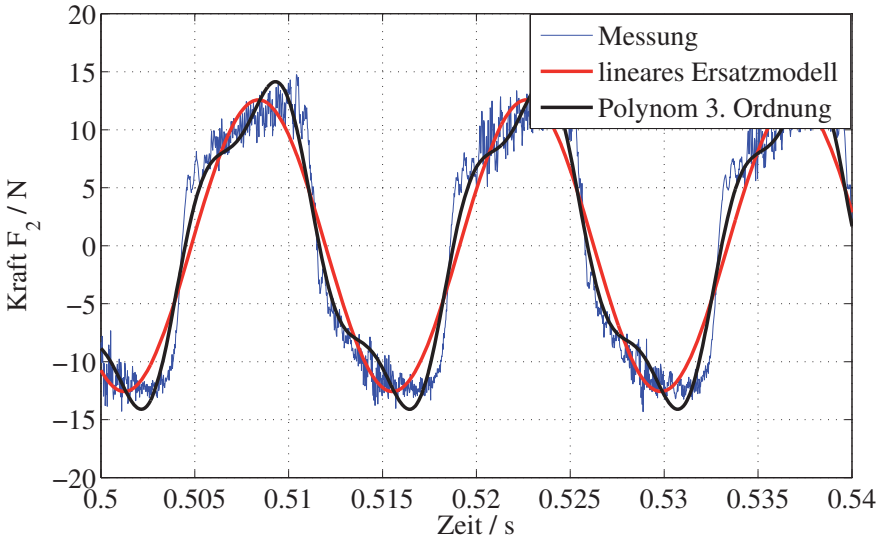


Abbildung 7.14: Kraft-Zeit-Verlauf (SL #1), f = 70 Hz

Polynom-	Betrag / N/m					Abweichung
grad	k1	k2	k3	k4	k5	σ_b / dB
1	$3,72 \cdot 10^4$ $+j\omega 62,22$	-	-	-	-	$-11,02$
2	$3,72 \cdot 10^4$ $+j\omega 62,22$	$5,72 \cdot 10^5$	-	-	-	$-11,02$
3	$1,01 \cdot 10^4$ $+j\omega 65,17$	$5,72 \cdot 10^5$	$5.17 \cdot 10^{11}$	-	-	$-13,80$
4	$1,01 \cdot 10^4$ $+j\omega 65,17$	$1,63 \cdot 10^7$	$5,17 \cdot 10^{11}$	$-2,12 \cdot 10^{14}$	-	$-13,81$
5	$4,15 \cdot 10^3$ $+j\omega 65,81$	$1,63 \cdot 10^7$	$6,31 \cdot 10^{11}$	$-2,12 \cdot 10^{14}$	$-1,23 \cdot 10^{18}$	$-13,46$

Tabelle 7.2: Koeffizienten bei 155dB Beschleunigungspegel und f = 70Hz, SL #1

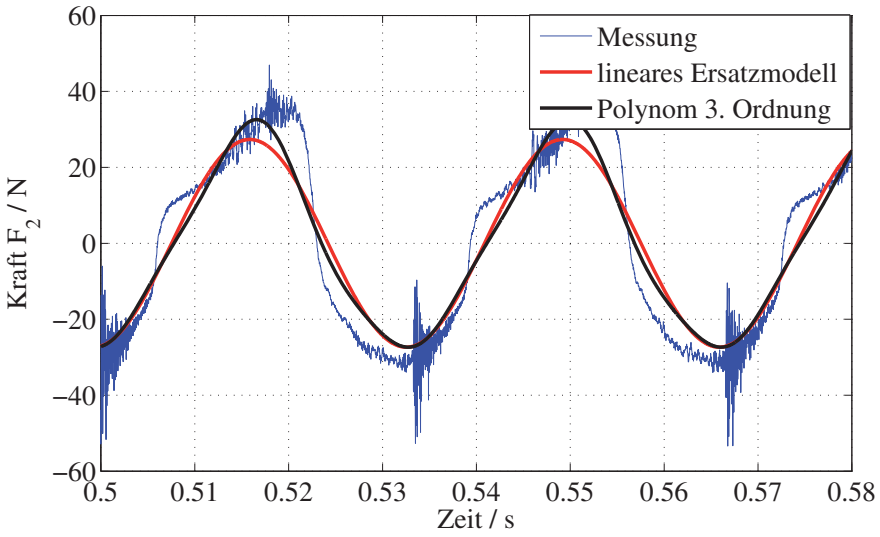


Abbildung 7.15: Kraft-Zeit-Verlauf (SL #1), f = 30 Hz

Polynom-grad	Betrag / N/m k1	k2	k3	k4	k5	Abweichung σ_b / dB
1	$2,04 \cdot 10^4 + j\omega 29,84$	-	-	-	-	$-9,34$
2	$2,04 \cdot 10^4 + j\omega 29,84$	$3,32 \cdot 10^6$	-	-	-	$-9,58$
3	$1,68 \cdot 10^4 + j\omega 31,01$	$3,32 \cdot 10^6$	$3.48 \cdot 10^9$	-	-	$-10,09$
4	$1,68 \cdot 10^4 + j\omega 31,01$	$7,97 \cdot 10^6$	$3,48 \cdot 10^9$	$-2,77 \cdot 10^{12}$	-	$-10,13$
5	$-1,08 \cdot 10^4 + j\omega 40,00$	$7,97 \cdot 10^6$	$3,03 \cdot 10^{10}$	$-2,77 \cdot 10^{12}$	$-1,28 \cdot 10^{16}$	$-2,23$

Tabelle 7.3: Koeffizienten bei 155dB Beschleunigungspegel und f = 30Hz, SL #1

7.4.2 Coulomb-Modell

Die Parameter des Coulomb-Modells werden entsprechend dem Vorgehen nach Kapitel 5.8.2 bestimmt, die Ergebnisse stehen in Tabelle 7.4. Der Vergleich der Zeitverläufe von Experiment und Rechenmodell zeigt Abbildung 7.16. Der Reibkoeffizient weist ein negatives Vorzeichen auf, was der physikalischen Bedeutung des Coulomb-Modells widerspricht. Die Modellabweichung ist um lediglich 0,62 dB geringer als die des harmonisch linearisierten Ersatzmodells.

k	d	μ	Abweichung σ_b / dB
$3{,}78 \cdot 10^{4}$	93,01	-3,09	-11,63

Tabelle 7.4: Koeffizienten bei 155dB Beschleunigungspegel und f = 70Hz, SL #1

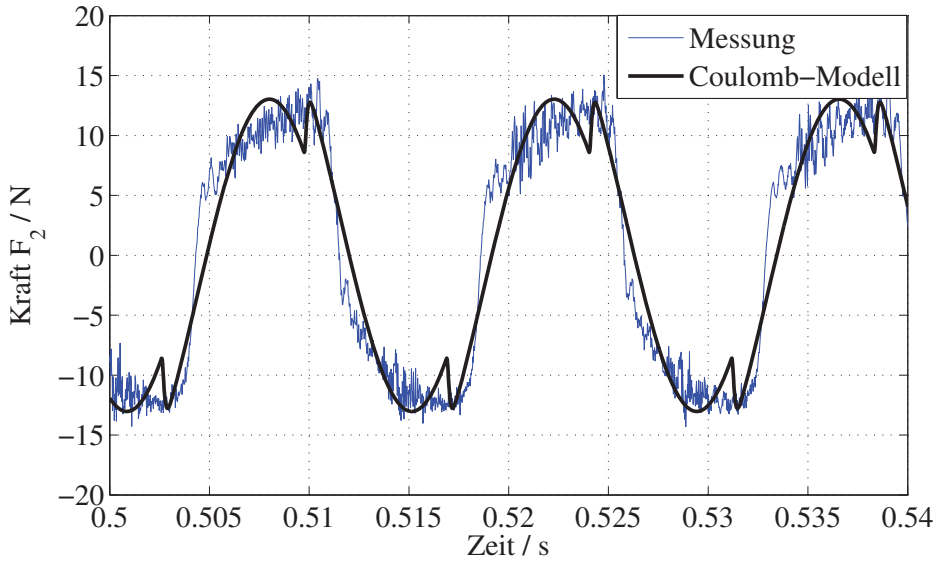


Abbildung 7.16: Kraft-Zeit-Verlauf SL #1

7.4.3 Masing-Modell

Die Parameter des Masing-Modells werden durch die Minimierung der Modellabweichung σ_b unter Verwendung des in Matlab enthaltenen Downhill-Simplex-Algorithmus *fminsearch* erlangt. Diese Optimierungsaufgabe wird erheblich vereinfacht, indem lediglich ein Jenkin-Element verwendet wird. Der Algorithmus benötigt Startwerte, deren geschickte Wahl zu einer raschen Konvergenz der Parametersuche führt. Hierzu werden Teilabschnitte des

Kurvenverlaufs aus Abbildung 7.17 betrachtet, die aufgrund der harmonischen Anregung periodisch verlaufen. In dem mit „1“ gekennzeichneten Abschnitt wird die Haltekraft des Reibelements nicht überschritten, d.h. es haftet. Die Ausgangskraft folgt der sinusförmigen Eingangsschwingung. In diesem Bereich ist für den Zeitverlauf der Ausgangskraft die Linearisierung $\Delta F_2^{(1)} = \hat{F}_2^{(1)} \cdot \sin(\omega \Delta t) \approx \hat{F}_2^{(1)} \cdot \omega \Delta t$ gültig, womit der Scheitelwert $\hat{F}_2^{(1)}$ bestimmt wird. Der Startwert von k_1 folgt dann aus $\hat{F}_2(1)/\hat{u}_1$. Der Übergang vom Haft- in den Gleitzustand des Reibelementes ist im Punkt „2“ erkennbar. Hier tritt eine plötzliche Erhöhung der Nachgiebigkeit auf, was sich in einem geringeren Anstieg der Ausgangskraft manifestiert. Die Kraft im Punkt „2“ dient somit als Startwert für die Haltekraft μ. Die Steigung der Geraden „3“ wird durch die Steifigkeit der Feder k_0 bestimmt. Das Verhältnis der Steigungen von Gerade „3“ und Gerade „1“ ist eine grobe Abschätzung für das Verhältnis der Steifigkeiten k_1 und k_0 und ergibt den Faktor, mit dem der Startwert von k_1 multipliziert wird, wodurch man den Startwert von k_0 erhält. Abbildung 7.17 zeigt den

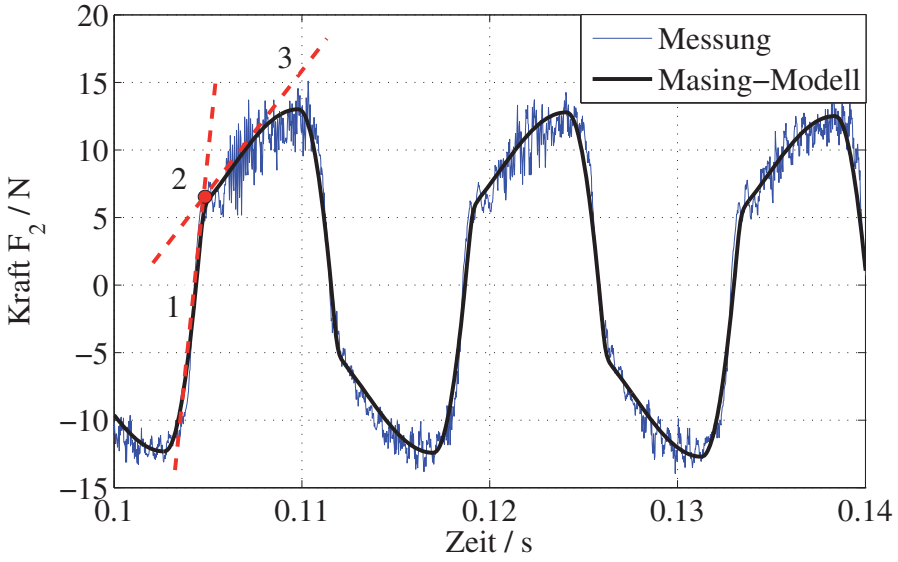


Abbildung 7.17: Kraft-Zeit-Verlauf bei f = 70 Hz, SL #1, Masing-Modell

Verlauf der Ausgangskraft des Masing-Modells im Vergleich zu dem gemessenen Kräfteverlauf bei einer Frequenz von 70 Hz. Hierbei wird eine hohe qualitative und quantitative Übereinstimmung der Systemverhalten deutlich. Die Abweichung σ_b ist mit -17,66 dB als gering zu bewerten. Tabelle 7.5 fasst die Modellparameter bei verschiedenen Frequenzen zusammen. Tiefere Frequenzen weisen eine höhere Modellabweichung auf. Dies ist zum einen darauf zurückzuführen, dass lediglich ein Jenkin-Element verwendet wird, zum anderen kommt aufgrund der größeren Schwingwegen die Progressivität der Steifigkeit zum tragen. Hieraus resultieren die Abweichungen der Parameter zueinander. Die Eig-

Frequenz / Hz	k_0	k_1	μ	Abweichung σ_b / dB
30	$1{,}76 \cdot 10^4$	$2{,}36 \cdot 10^4$	11,09	-10,40
50	$2{,}09 \cdot 10^4$	$8{,}26 \cdot 10^4$	8,24	-14.77
70	$1{,}54 \cdot 10^4$	$1{,}51 \cdot 10^5$	8,23	-17,66

Tabelle 7.5: Koeffizienten bei 155dB Beschleunigungspegel, SL #1

nung dieser Modelle, das breitbandige Systemverhalten wiederzugeben, wird durch Tests überprüft, bei denen der Prüfling mit einem linearen Sweep in einem Frequenzbereich von 30 Hz bis 130 Hz angeregt wird. Die gemessene Anregung wird dem Simulationsmodell als Eingabegröße übergeben, und die gemessene und berechnete Kraft werden am Entkoppelelementausgang miteinander verglichen. Es werden vier Experimente mit unterschiedlichen Anregungspegeln gemacht. Die Form der mechanischen Anregung weicht von der eines linearen Sweeps aufgrund der amplitudenabhängigen Eingangsimpedanz des Prüfkörpers erheblich ab. Daher sind in Tabelle 7.6 die Spitzen- und Effektivwerte der Anregungen mit angegeben. Die bei 30, 50 und 70 Hz ermittelten Parameter führen zu Ersatzsystemen, deren breitbandige Abweichungen vom realen System in den entsprechenden Spalten zusammengefasst sind. Des Weiteren enthält die Spalte „30 - 130 Hz“ die Abweichungen des Masing-Modells, das durch Lösung des Optimierungsproblems unter Verwendung der Daten aus Messung 4 entsteht[1].

Erwartungsgemäß weist das Modell, das unter Verwendung der Breitbandanregung geschätzt wird, den geringsten Modellfehler auf. Dieser ist bemerkenswerterweise bei den Messungen 2 und 3 geringer als bei der Messung 4, bei der die Modellparameter geschätzt wurden, was auf eine gute Robustheit des Ersatzmodells hin deutet. Die vergleichgsweise hohe Abweichung bei der Messung 1 ist auf Phasenverschiebungen zurückzuführen. Von den bei diskreten Frequenzen gemessenen Parametersätzen weist der bei 70 Hz gemessene die geringste Modellabweichung auf. Abbildung 7.18 zeigt anhand der Ausgangskraftver-

Messung	Anregung / m/s^2		Abweichung σ_b / dB			
Nr.	Spitzenwert	Effektivwert	30 Hz	50 Hz	70 Hz	30 - 130 Hz
1	2,6	1,0	0,55	3,32	2,96	-0,35
2	24,3	13,7	-1,67	-1,73	-3,19	-6,78
3	79,3	22,6	-2,01	-1,92	-3,97	-5,45
4	105,2	23,1	0,46	0,65	-0,89	-2,13

Tabelle 7.6: Modellfehler bei Breitbandtest

[1]Die Parameter sind: k_0=8,37·10^3 N/m, k_1=7,01·10^5 N/m, μ=6,03 N

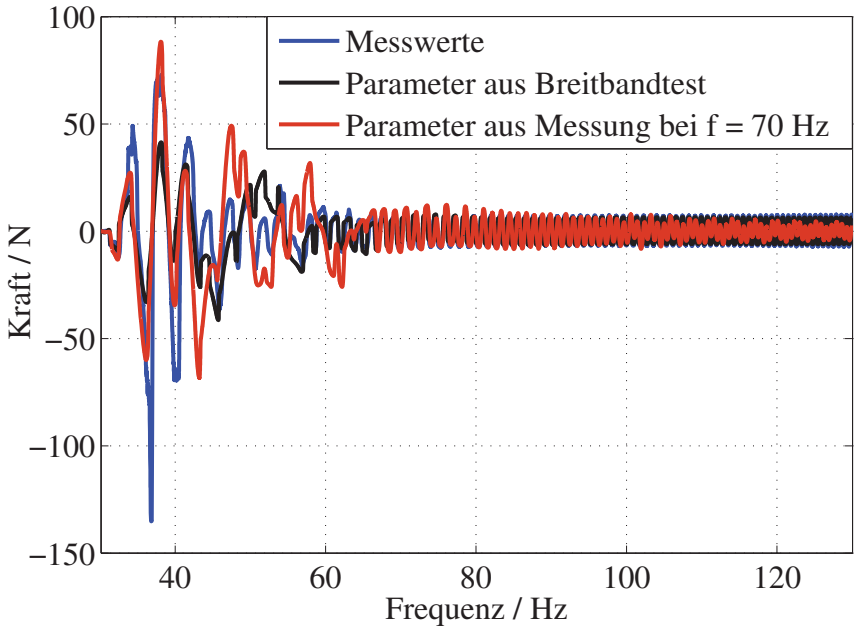


Abbildung 7.18: Vergleich der Systeme bei Breitbandanregung, SL #1

läufe das zeitliche Systemverhalten, wobei die Zeitachse mit der Momentanfrequenz der Sweep-Anregung skaliert ist. Die Dauer des Zeitfensters beträgt eine Sekunde. Es wird deutlich, dass die Abweichungen beider Ersatzmodelle hauptsächlich im Bereich unterhalb von 60 Hz liegen. Das Systemverhalten wird im Bereich von 60 Hz bis 130 Hz von beiden Simulationsmodellen besser approximiert als das tieffrequente. Hierbei zeigt das bei 70 Hz ermittelte System eine zu höheren Frequenzen hin steigende Abweichung, da der Kräfteverlauf im Vergleich zum realen System sinkt. Dies ist eine Folge der zu geringen Steifigkeit k_1 und der zu hohe Haltekraft, die oberhalb von 90 Hz nicht mehr erreicht bzw. überschritten wird, wodurch das System in diesem Bereich ungedämpft ist. Bei dem unter Breitbandanregung ermittelten System wirkt die Dämpfung im gesamten Messbereich.

7.4.4 Anmerkung zu Elementen mit unstetiger Kennlinie

Elemente mit stark irregulären Kennlinien können nur sehr bedingt durch linearisierte Ersatzsysteme und Steifigkeitspolynome approximiert werden. Harte Begrenzungen, die durch geometrische Randbedingungen bedingt sind, führen zu sehr breitbandigen Spektren. Zur Verdeutlichung dient der Prüfling in Abbildung 7.19, der aus lediglich zwei Flanschen besteht, die mit zwei vorgespannten Federn aneinander gedrückt werden. Dämpfende Mechanismen sind kaum vorhanden und können vernachlässigt werden. Bei einer

Beschleunigung mit einem Effektivwert der ersten Harmonischen von 122 dB und einer Frequenz von 30 Hz liegt hierbei die Abweichung σ_b weitgehend unabhängig von den Modellfreiheitsgraden bei -2,0 dB. Abbildung 7.20 (links) verdeutlicht, dass der Kraftverlauf von stark ausgeprägten Signalspitzen dominiert wird, was zu einem Crestfaktor von 7,64 dB führt. Im Mittel wird der Zeitverlauf von dem linearen Ersatzmodell zwar gut approximiert, die impulsartigen Signalanteile führen jedoch zu großen Abweichungen. Im Spektrum (Abbildung 7.20 (rechts)) erkennt man, dass bei einem Polynomgrad von fünf die ersten fünf Harmonischen des gemessenen Signals mit denen des Ersatzmodells übereinstimmen, ein großer Anteil der Schwingungsenergie in einer Vielzahl von diskreten Schwingungen bis zu einer Frequenz von etwa 1 kHz verteilt ist.

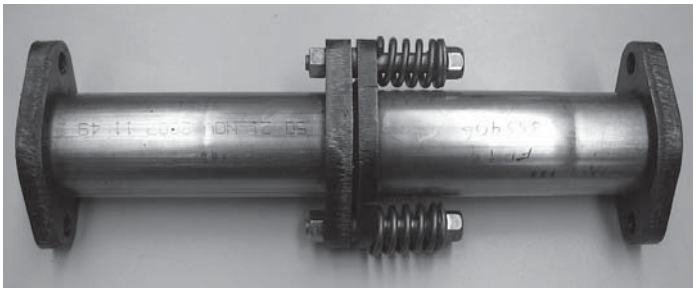


Abbildung 7.19: Element mit unstetiger Kennlinie

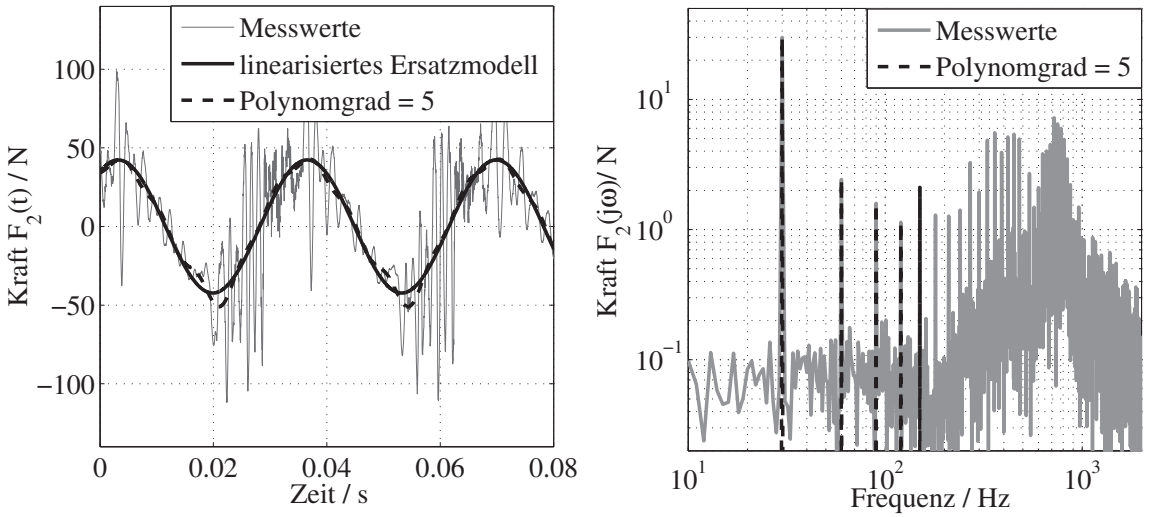


Abbildung 7.20: Ausgangskraft von Element mit unstetiger Kennlinie, links: Zeitverlauf, rechts: Spektrum

7.5 Zusammenfassung der Messergebnisse

Die Körperschallübertragung durch Entkoppelelemente wurde anhand ausgewählter Beispiele umfassend untersucht. Aufgrund der Bauteilresonanzen liegt eine starke Frequenzabhängigkeit der Systemparameter vor. Dies bedeutet, dass die Bauteile nicht als diskrete, sondern kontinuierliche Übertragungssysteme angesehen werden müssen. Das nichtlineare Übertragungsverhalten von Schlauchleitungen wurde zunächst anhand linearisierter Transfersteifigkeiten quantifiziert. Es zeigt sich innerhalb der Messdynamik ein deutlich ausgeprägtes degressives Verhalten. Erst bei höheren Anregungsamplituden sind Versteifungen infolge geometrischer Begrenzungen zu erwarten. Nichtlineare Effekte treten in erster Linie durch Schwingungen mit niedrigen Frequenzen auf. Diese können somit auch das Übertragungsverhalten bei höheren Frequenzen beeinflussen.
Das erweiterte Verfahren zur Messung lateraler und rotatorischer Steifigkeiten wurde an dem Prüfstand erfolgreich umgesetzt. Hiermit ist es möglich, die Transfersteife der Entkoppelelemente bis zu 5 kHz weitgehend ohne Resonanzeinflüsse des Prüfaufbaus zu messen. Es wurde versucht, das Verhalten der Schlauchleitungen mit nichtlinearen Modellen abzubilden. Die Anwendung der Messverfahren aus den Kapiteln 5.8.1 und 5.8.2 liefern die nichtlineare Steifigkeitskennlinie bzw. die Parameter des passenden Coulomb-Modells. Diese beiden Modelle erweisen sich, im Hinblick auf den Modellierungsaufwand, als nicht geeignet, das Bauteilverhalten hinreichend wieder zu geben. Die erreichte Genaugigkeit ist kaum höher als die des harmonisch linearisierten Ersatzmodells. Erst bei größeren Schwingwegen ist aufgrund der Progessivität der Steifigkeit mit einer deutlich höheren Modellgenauigkeit durch die Verwendung nichtlinearer Steifigkeitskennlinien zu rechnen.
Das Masing-Modell erscheint zur Modellierung der Dämpfung und Degressivität als sehr geeignet. Hiermit kann das Verhalten des Systems sowohl bei harmonischer als auch breitbandiger Anregung deutlich genauer approximiert werden, als dies mit linearen Modellen möglich ist. Abweichungen zwischen Modell und realem System treten in erster Linie bei kleinen Anregungen auf, bei denen die Haltekräfte der Reibelemente nicht überschritten werden und das Modell somit ungedämpft ist. Hierbei kann die Erweiterung der Jenkin-Elemente um viskose Dämpfer hilfreich sein. Es werden in dieser Arbeit lediglich Masing-Modelle mit diskreten Parametern betrachtet, wodurch nur der unterkritische Frequenzbereich ausreichend beschrieben werden kann. Weitere Verfeinerungen würden sich durch Modelle mit verteilten Parametern ergeben, wodurch der Einfluss der Trägheitskräfte auf die höherfrequente Schwingungsübertragung ausgedrückt werden kann.

7.6 Diskussion der Messunsicherheit

Beim indirekten Messverfahren ergibt sich die Transfersteife mit den gemessenen Beschleunigungen $\hat{a}_1$ und $\hat{a}_2$

$$\hat{k}_t = \frac{\omega^2 m}{1 - \hat{a}_1/\hat{a}_2}. \tag{7.1}$$

Die gemessene Beschleunigung $\hat{a}$ resultiert aus der Summe der wahren Beschleunigung a mit einem Störterm Δa

$$\hat{a} = a + \Delta a. \tag{7.2}$$

Da $\lim_{\omega \to 0} a_1/a_2 = 1$, streben sowohl Zähler als auch Nenner von 7.1 mit kleiner werdender Frequenz gegen Null. Sowohl die Beschleunigung am Eingang als auch die Beschleunigung am Ausgang sind mit Messunsicherheiten behaftet. Diese werden als Störterme Δa_1 und Δa_2 ausgedrückt. Zusammenfassen lassen sich die einzelnen Störungen mit dem Fehler der Durchgangsdämmung ΔD_{dv}. Aus $\hat{D}_{dv} = \frac{a_1 + \Delta a_1}{a_2 + \Delta a_2}$ folgt mit dem linearen Glied der Taylorreihe für den Maximalfehler

$$\Delta D_{max} = \left| \frac{\Delta a_1}{a_2} \right| + \left| -\frac{a_1 \Delta a_2}{a_2^2} \right|. \tag{7.3}$$

Eingesetzt in Gleichung 7.1 folgt für die Transfersteife

$$\hat{k}_t = \frac{\omega^2 m}{1 - (D_{dv} \pm \Delta D_{max})}. \tag{7.4}$$

Bei einem Signal-Störabstand von -47 dB zwischen den Effektivwerten der Nutzsignale zu den Störsignalen ergeben sich die Kurvenverläufe der mit fehlerbehafteten Werten ermittelten Transfersteife, wie in Abbildung 7.21. Der subtraktiv wirkende Störterm führt dazu, dass die gemessene Größe immer unterhalb des wahren Wertes bleibt, während die additive Störung in diesem Rechenbeispiel im Frequenzbereich zwischen 65 Hz und 200 Hz zu einer deutlichen Erhöhung des Messwertes gegenüber dem wahren Wert führt. In beiden Fällen sinken die gemessenen Transfersteifigkeiten im tieffrequenten Bereich mit fallender Frequenz asymptotisch gegen Null. Der Frequenzmessbereich ist also bei sehr steifen Prüflingen nach unten beschränkt. Bei weichen Flex-Elementen ist dieser Fehler innerhalb der Messbandbreite in der Regel vernachlässigbar. Die schmalbandigen Ausbrüche der gemessenen Transfersteife in Abbilding 7.21 sind auf orthogonale Moden zurückzuführen, deren Einfluss auf den gemessenen Kurvenverlauf ist a-priori schwer abschätzbar. Diese Effekte sind allerdings leicht identifizierbar, wenn man beispielsweise die Beschleunigungsspektren in orthogonaler Richtung betrachtet. Die Verwendung mehrerer symmetrisch auf dem Messkopf angeordneter Beschleunigungssensoren macht die Messung unempfindlicher

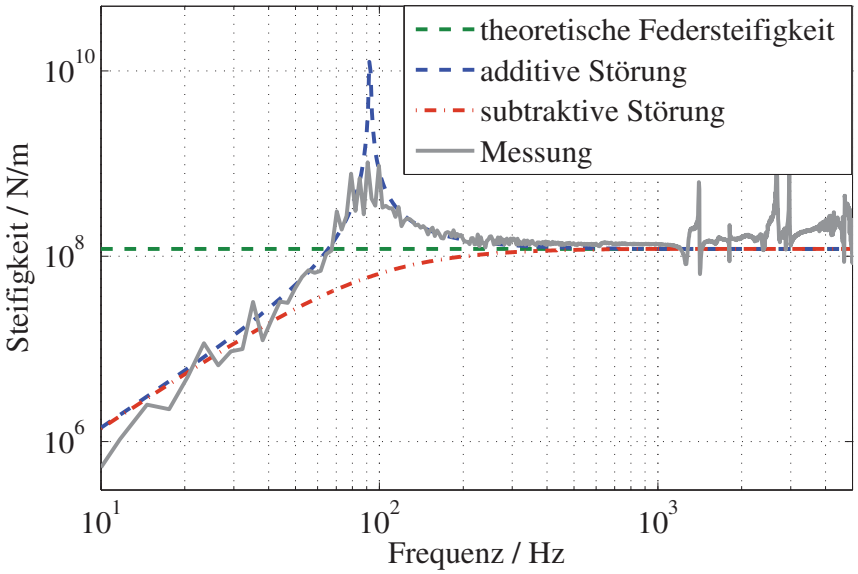


Abbildung 7.21: Abweichung

gegen orthogonale Schwingungen. Durch Mitteln lassen sich unkorrelierte Störungen unterdrücken, wie z.B. das Messgerätegrundrauschen. Der Signal-Rauschabstand wird hierdurch effektiv vergrößert. Dieser sollte im Messfrequenzbereich größer als 10 dB sein, so ist die hieraus resultierende Messabweichung kleiner 0,41 dB. Allerdings wirken in der Praxis auch Störungen auf die Messkette, die gleichermaßen auf Ein- und Ausgang wirken, somit korrelliert sind, wie z.B. elektromagnetische Störungen.
Abbildung 7.22 zeigt das Störsignal, das von den Beschleunigungssensoren am Eingang des Messkörpers, bei eingeschaltetem Schwingerregersystem ausgegeben wird. Das breitbandige Störsignal von 90 Hz bis 550 Hz erzeugt das Gebläse, dass den Modalschwingerreger kühlt. Außerdem ist das Brummen der 50 Hz-Netzspannung erkennbar. Im Bereich oberhalb von 600 Hz dominieren Frequenzen bedingt durch das Emissionsspektrum des Lüftermotors. Prinzipiell ergeben sich systematische Messabweichungen abhängig von dem Resonanzverhalten der Abschlussmassen. Auch wenn diese so ausgelegt werden, dass die erste Eigenfrequenz deutlich oberhalb des Messfrequenzbereichs liegt, so ergibt sich durch den Messaufbau eine Kopplung über den Prüfling, wodurch die dynamische Masse des Abschlusses im oberen Messfrequenzbereich von der statischen Masse systematisch abweicht. Die Stärke dieses Effektes hängt von der Steifigkeit des Prüflings ab. In der Regel kann dieser Einfluss vernachlässigt werden, wenn die Transfersteifigkeit des Prüflings sehr viel kleiner als die Eingangssteifigkeit des Abschlusses ist, was bei allen Schwingungsisolatoren der Fall ist.

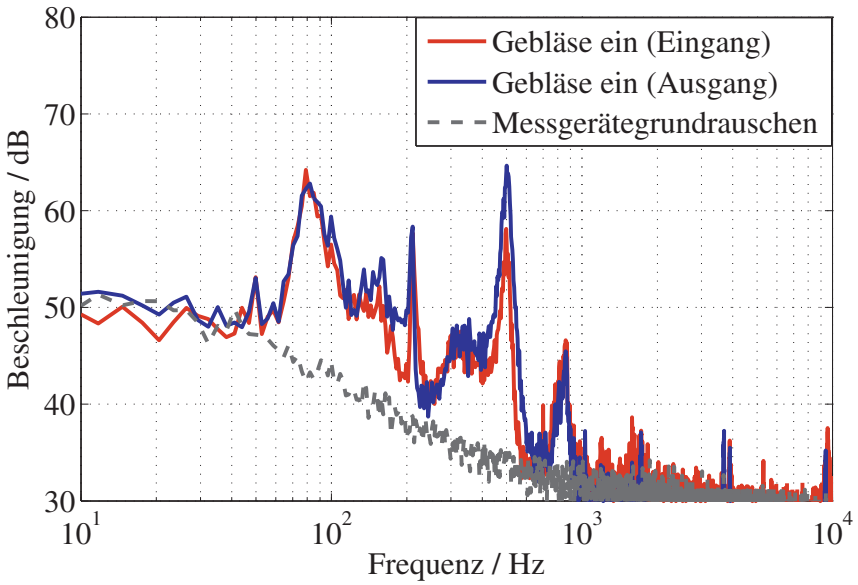


Abbildung 7.22: Grundrauschen

In dieser Arbeit wurden die Beschleunigungssensoren mit dem Handkalibrator Bruel & Kjaer 4294 kalibriert. Dieser erzeugt laut Hersteller eine harmonische Schwingung mit einer Frequenz von 159,15 Hz (+/- 0.02%) und einem Effektivwert von $10m/s^2(+/-3\%)$, wobei sich systematische Kalibrierfehler teilweise aufheben bei Messverfahren, die auf einer Verhältnisbildung beruhen. Die Gewichtsangabe der Abschlussmassen ist auf 3% genau, wobei dieser Fehler linear in die gemessenen Kräfte und Momente eingeht, was bedeutet, dass selbst bei einer Abweichung von 20 % der Steifigkeitspegel um lediglich knapp 1,6 dB abweichen würde.

7.6.1 Bemerkung zur Erzeugung harmonischer Anregungen

Zur erfolgreichen Messung harmonisch linearisierter Ersatzsysteme und insbesondere zur Koeffizientenbestimmung nichtlinearer Systeme, nach den Verfahren aus den Kapiteln 4.3 und 4.5, muss der Prüfling mit einer möglichst idealen harmonischen Schwingung angeregt werden. Reale Schwingerreger, wie der im Rahmen dieser Arbeit verwendete elektrodynamische Modalshaker, weisen ein nichtlineares Übertragungsverhalten auf und erzeugen deutliche reguläre Verzerrungen innerhalb des vom Hersteller spezifizierten Nennbereichs. Die somit vorhandenen Oberschwingungen sind der Messung als Störgrößen überlagert und müssen klein gegenüber den höheren Harmonischen der Ausgangsschwingung sein. Hierbei zählt allerdings nicht der absolute Betrag der Signalpegel, sondern das Verhältnis

zur Grundschwingung, was dem in der elektrischen Messtechnik verwendeten *Total Harmonic Distortion (THD)* [47] entspricht.
Verbesserungen der Linearität können prinzipiell durch Gegenkopplungen erlangt werden, was allerdings mit einfachen Mitteln nur im tieffrequenten Bereich möglich wäre, da das System einen stark varriierenden Phasenfrequenzgang aufweist, was zu Mitkopplung und Instabilität führt. Eine andere interessante Möglichkeit zur Obertonreduktion besteht darin, neben dem Nutzsignal zusätzliche Oberschwingungen so auszugeben, dass diese mit einer Phasenverschiebung von π relativ zu den Störschwingungen am Prüflingseingang anliegen. Exemplarisch resultiert für ein System mit der statischen Kennlinie

$$f(x) = x + x^2, \tag{7.5}$$

für eine Kosinusschwingung die Systemantwort

$$f(x) = \cos(x) + \cos^2(x) = \cos(x) + 1/2\cos(2x) + 1/2. \tag{7.6}$$

Setzt man nun $x = \cos(x) - 1/2\cos(2x)$ in 7.5 ein, so folgt

$$f(x) = 5/8 + 1/2\cos(x) - 1/2\cos(3x) + 1/8\cos(4x), \tag{7.7}$$

was zeigt, dass durch das Anlegen des invertierten Signals zwar die 2. Harmonische unterdrückt wird, allerdings eine dritte und vierte Harmonische entstehen, was ein prinzipielles Problem bei dieser Art der Linearitätsverbesserung ist.

7.7 Kontaktstelleneinfluss der Flanschverbindung

Die Anbindung der Prüflinge an die Abschlussmassen erfolgt über Schraubverbindungen. Da Fügestellen im Allgemeinen zu einer nicht unwesentlichen Kontaktnachgiebigkeit führen, ist die Quantifizierung des dadurch resultierenden Einflusses auf das Übertragungsverhalten notwendig. Hierzu werden in einem Experiment die axiale Federsteifigkeit bestimmt. Als Verbindung wird zwischen den zwei 3,15 kg Abschlussmassen ein 103 mm langes Edelstahlrohr mit einer Steifigkeit von $4{,}28{\cdot}10^2$ kN/mm verwendet[2]. Das erste Minium der Durchgangdämmung ist gleich der Resonanzfrequenz des Feder-Masse-Systems, bestehend aus einer Serienschaltung von Rohr- und zwei Kontaktsteifigkeiten, die mit einer Masse von 3,15 kg zuzüglich Prüflings- und Flanschmasse abgeschlossen ist. Hieraus folgen die Steifigkeitswerte, die in Tabelle 7.7 zusammengefasst sind.

[2]Das Anzugsmoment der Schrauben ist hierbei konstant 20 Nm.

Kontaktmittel	Viskosität des Grundöls / mm^2/s	Resonanzfrequenz /Hz	Steifigkeit pro Kontaktstelle / MN/mm
„trocken“	-	1333	1,1
Fett	18	1606	3,6
Kupfer-Paste	-	1617	3,9
Fett	160	1669	5,9
Fett	200	1682	6,7
Fett	400	1688	7,2
Fett	1020	1694	7,7

Tabelle 7.7: Einfluss der Kontaktstelle

Die „trockene“ Anbindung weist die geringste Steifigkeit auf und führt somit zu dem stärksten Absinken der Resonanzfrequenz, die um 21 % geringer ist als die der steifsten Verbindung. Mit steigender Viskosität des Kontaktmittels steigt die Steifigkeit der Verbindung. Des Weiteren zeigt sich, dass durch die steiferen Verbindungen der Einfluss orthogonal schwingender Moden vermindert wird. Aus diesen Gründen ist es zwingend erforderlich, ein geeignetes Kontaktmittel, wie z.B. ein Fett mit hoher Viskosität, zu verwenden, da nur so die Kontaktsteifigkeit bei der Auswertung der Messergebnisse vernachlässigt werden kann.

Kapitel 8

Kopplung mit dem Gesamtsystem

8.1 Vibroakustik einer Abgasanlage

Durch den Einsatz von Entkoppelelementen wird eine gezielte Beeinflussung der Strukturdynamik der Abgasanlage vorgenommen. Prinzipiell kann man das Subsystem Abgasanlage für vibroakustische Untersuchungen getrennt von dem Rest des Fahrzeugs betrachten, wenn die Randbedingungen vergleichbar mit dem Applikationszustand gewählt werden. Hierzu wurden in [74] Hängerelemente bezüglich der Viskoelastizität untersucht und in [85] das Systemverhalten von Abgasanlagen mit unterschiedlichen Randbedingungen gemessen.
Abbildung 8.1 skizziert das System grob, bestehend aus einer Schwingungsquelle, die sämtliche Anregungen zusammenfasst, dem Entkoppelelement und der hinteren Abgasanlage, dem „Cold-End“. Die Modellierung einer Ersatz-Körperschallquelle ist Gegenstand von Abschnitt 8.2, und das Zusammenspiel der Teilsysteme wird in 8.5 behandelt.

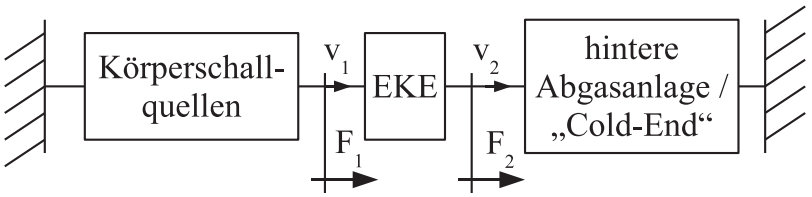


Abbildung 8.1: Prinzip-Ersatzschaltbild

8.2 Anregung durch Körperschallquellen

Die dominanten Körperschallquellen, die die Abgasanlage anregen, sind der Motor und im höherfrequenten Bereich der Abgasturbolader. Beschrieben werden die Anregungsarten hierdurch hauptsächlich anhand von Beschleunigungsspektren, die in einem speziellen System in einer definierten Richtung gemessen werden, oder mittels Spektrogrammen, die das transiente Verhalten im Frequenzbereich bei einem speziellen Fahrmanöver, z.B. bei konstanter Beschleunigung, zeigen. Dies ist allerdings eine sehr unzureichende Quellenbeschreibung, da sie nur für das vorliegende spezielle System gültig ist. Besser ist die Modellierung der Körperschallquelle als ideale Kraftquelle mit Innenwiderstand, was als Thévenin-Equivalent bezeichnet wird [37]. Hierbei kann man in erster Näherung davon ausgehen, dass es sich um ein lineares System handelt, welches die Ausgangskraft $F_{s,q}$ und die Ausgangsschnelle $v_{s,q}$ liefert. Der Index q steht hierbei für eine generalisierte Koordinate, in der Praxis sind dies jeweils drei orthogonale Translationen und Rotationen.

In [68] wird ein Verfahren zur Messung des komplexen Innenwiderstandes $\underline{Z}_{s,q}$ und der Urquellkraft $\underline{F}_{0,q}$ vorgeschlagen. Die Gleichung für die Kennlinie der Quellkraft berechnet sich in Abhängigkeit von $\underline{V}_{s,q}(j\omega)$ nach

$$\underline{F}_{s,q}(j\omega) = \underline{F}_{0,q}(j\omega) - \underline{Z}_{s,q}(j\omega)\underline{V}_{s,q}(j\omega). \tag{8.1}$$

Grundsätzlich handelt es sich hierbei um einen Test, bei dem die Schwingungsquelle nacheinander mit zwei definierten Abschlussimpedanzen, vorzugsweise starren Massen m_1 und m_2, belastet wird, wie in Abbildung 8.2 skizziert. Auf der Quellkennlinie werden somit zwei Arbeitspunkte $AP1$, $AP2$ erreicht. Es folgen die Gleichungen für die Urkraftquelle

$$\underline{F}_{0,q}(j\omega) = \frac{j\omega\underline{V}_{s,q,1}(j\omega)(m_1 - m_2)}{1 - \underline{V}_{s,q,1}(j\omega)/\underline{V}_{s,q,2}(j\omega)} \tag{8.2}$$

und die Innenimpedanz

$$\underline{Z}_{s,q}(j\omega) = \frac{j\omega(\underline{V}_{s,q,1}(j\omega)m_1 - \underline{V}_{s,q,2}(j\omega)m_2)}{\underline{V}_{s,q,2}(j\omega) - \underline{V}_{s,q,1}(j\omega)}. \tag{8.3}$$

Die Schnellespektren $\underline{V}_1(j\omega)$ und $\underline{V}_2(j\omega)$ liegen jeweils bei der Quellbelastung mit den Massen m_1 und m_2 am Ausgang an. Weitere Arbeitspunkte, wie $AP3$, $AP4$ in Abbildung 8.3, sind für eine statistische Absicherung der Messung und Linearitätsprüfung in der Praxis sinnvoll. Die Quellkraft ist gültig für einen Betriebszustand der Schwingungsquelle, d.h. beispielsweise für eine bestimmte Drehzahl und Last des Motors, während der Innenwiderstand davon weitgehend unabhängig ist, so lange die Abweichung des Bauteilsteifigkeit durch die thermische Belastung nicht zu sehr varriert.

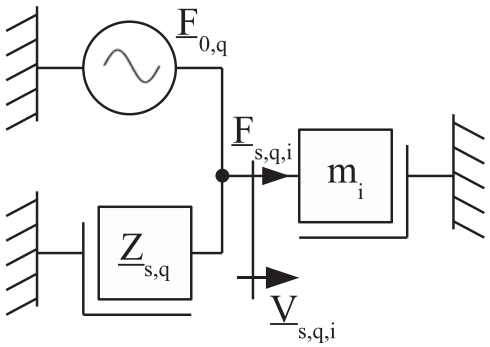


Abbildung 8.2: Schaltbild der Quellmessung

Eine besondere Bedeutung hat die Körperschallquellenbeschreibung für die Auslegung eines passenden Entkoppelelementes. Hierbei wird sowohl deutlich, welche Frequenzbereiche gedämmt werden müssen, als auch, welche Schwingbeschleunigungen vorliegen. Die Kenntniss des Anregungsniveaus ist notwendig zur Berechnung des Übertragungsverhaltens nichtlinearer Elemente, wie in Kapitel 4 beschrieben.

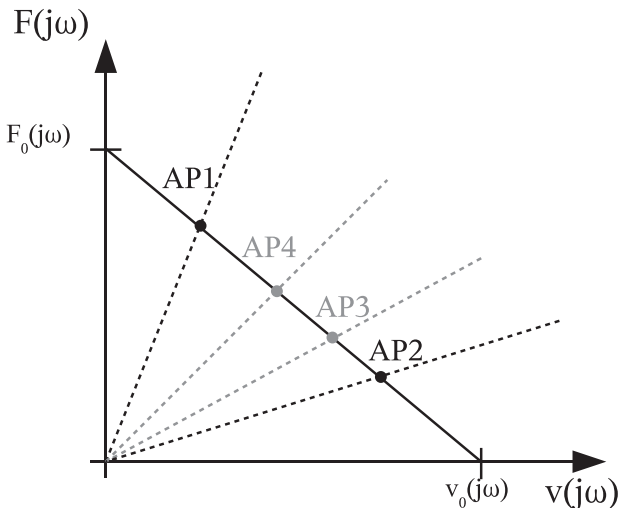


Abbildung 8.3: Arbeitspunkte auf der Quellkennlinie einer Frequenz

8.3 Modellierung einer Referenz AGA

Als Referenzabgasanlage dient ein einsträngiges Modell mit den Maßen, wie in Abbildung 8.4 angegeben. Der eingeschlossene Winkel der Rohrbögen beträgt jeweils 66°, nähere Angaben zu dem Endtopf stehen in A.3. Es handelt sich hierbei um ein einfaches Modell vergleichbar mit dem eines Kompaktklasse-PKWs. Die numerische Berechnung der Strukturschwingung kann mit dem hier skizzierten FE-Netz mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden. Im Folgenden werden allerdings Kettenmatrizen verwendet, was ausführlich im Anhang A beschrieben ist. Der Vorteil hiervon liegt sowohl in der hohen Effizienz des Berechnungsverfahrens, als auch in der einfachen und eleganten Verknüpfung des Simulationsmodells mit berechneten oder gemessenen Entkoppelelement-Kettenmatrizen.

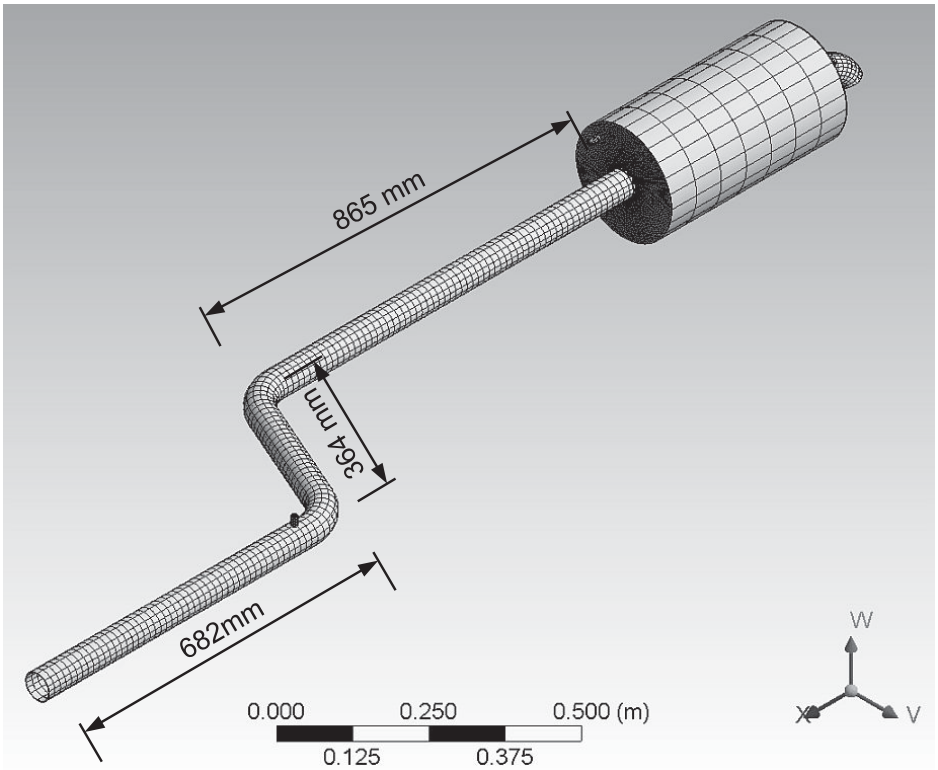


Abbildung 8.4: FEM-Netz einer Abgasanlage

8.4 Durchgangsdämmung bei gegebener Eingangsimpedanz

Aus dem Vierpol der longitudinalen Schwingungsausbreitung folgt für den Betrag der Dämmung

$$D_{dv} = \left| \underline{A}_{2,1} \cdot \underline{Z}_{CE} + \underline{A}_{2,2} \right| , \tag{8.4}$$

wobei $\underline{Z}_{CE}$ die Eingangsimpedanz des Cold-Ends in der jeweiligen Anregungsrichtung ist. Die Eingangsimpedanz der ungefesselten Referenzabgasanlage ist in Abbildung 8.5 in longitudinaler und lateraler Richtung über der Frequenz aufgetragen. Im Vergleich hierzu steht die Impedanz einer 9,6 kg Punktmasse, die dem statischen Gewicht der Abgasanlage entspricht. Da die Masse weder bei longitudinaler noch bei lateraler Anregung symmetrisch um die Kraftachse verteilt ist, entstehen Rotationen, weshalb die quasi-statischen Impedanzen der Abgasanlage geringer sind als die der Punktmasse. Die Beträge der drei Impedanzen verlaufen parallel bis etwa 30 Hz, darüber treten Kontinuumsresonanzen der Abgasanlage auf, die die Eingangsimpedanz bestimmen.

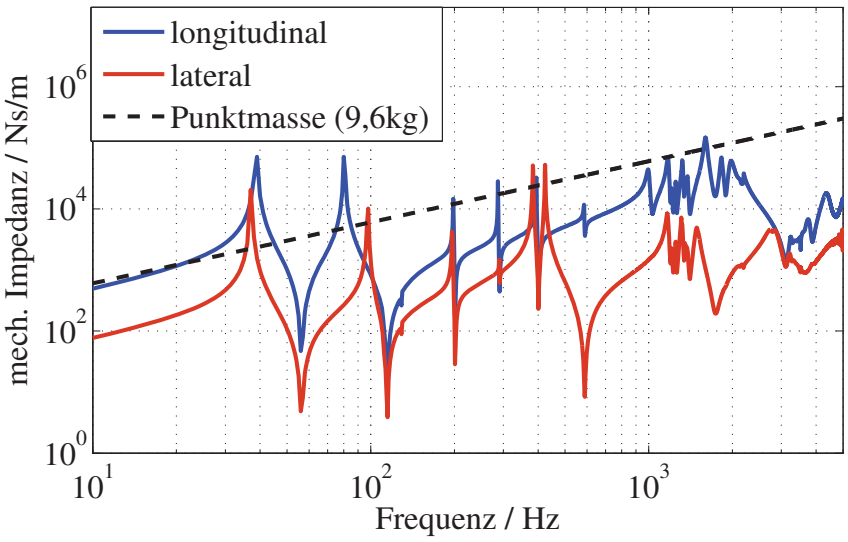


Abbildung 8.5: Eingangsimpedanz der Modell-AGA

Die Auswirkung der Abschlussimpedanz auf die Dämmung macht Abbildung 8.6 anhand der Durchgangsdämmung der Schlauchleitung SL #4 deutlich. Die Kurvenverläufe sind entsprechend den Impedanzen bis 30 Hz praktisch identisch. Bei höheren Frequenzen bis etwa 500 Hz kommt es aufgrund der Cold-End-Resonanzen zu erheblichen Abweichungen der Kurvenverläufe, die maximal etwa 30dB betragen. Im Bereich von 500 Hz - 5 kHz

sind die Ausbrüche der Dämmung durch die Kontinuumsresonanzen des Entkoppelelementes begründet, die Resonanzfrequenzen sind von der Abschlussimpedanz weitgehend unbeeinflusst, wohingegen die Beträge um bis zu ca. 20dB voneinander abweichen.

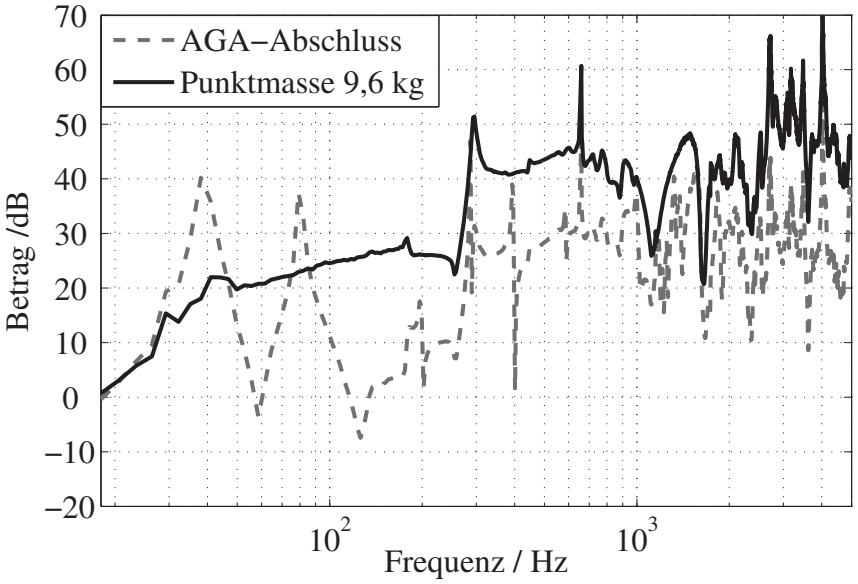


Abbildung 8.6: Durchgangsdämmung abhängig von Abschlussimpedanz

8.5 Auswahl optimaler Entkoppelelemente

Die zur Quantifizierung der Entkoppelwirkung verwendeten Kenngrößen Durchgangs- und Einfügedämmung nach den Gleichungen 3.7 und 3.8 sind anschauliche und einfach handhabbare Kenngrößen, die in der Praxis eine breite Anwendung finden. Die Interaktion des Entkoppelelemtes mit der Abgasanlage wird durch die Verknüpfung der Entkoppelelement-Übertragungseigenschaften mit der Eingangsimpedanz der Abgasanlage berücksichtigt [43], somit erfolgt eine räumlich punktuelle Bewertung des Entkoppelelements. Die i.A. komplexen Schwingformen einer Abgasanlage lassen eine abschließende Bewertung des Entkoppelelementes, basierend auf Durchgangs- oder Einfügedämmung, nicht zu. Liegt beispielsweise ein Schwingungsknoten im Bereich des Entkoppelelementausgangs vor, so wird die Entkoppelwirkung mit großer Wahrscheinlichkeit als zu hoch bewertet, während im Gegensatz dazu ein Schwingungsbauch zu einer schlechteren Einschätzung führt.
In der strukturdynamischen und vibroakustischen Entwicklung von Abgasanlagen werden deshalb Tests an dem Gesamtsystem durchgeführt. Die Eigenformen und Eigenfrequen-

zen werden durch eine rechnerische [6] oder experimentelle Modalanalyse [85] bestimmt. Falls der abgestrahlte Luftschall von Interesse ist, geschieht dies durch Schalldruck- [46] bzw. vorzugsweise durch Schallleistungsmessungen. Immer häufiger werden in der Praxis hierfür auch numerische Verfahren eingesetzt, wobei die Körperschallfelder meistens mit der Finite-Element-Methode und der abgestrahlte Luftschall durch eine Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion oder FEM-BEM-Kopplung [5][24] berechnet werden.

Ein allgemeiner Ansatz zur Optimierung der Strukturschwingung besteht in der Lösung des Optimierungsproblems

$$\min \int_0^{2\pi f_G} \left[\int_O \left| v_q(\mathbf{r}, j\omega) \right|^2 d\mathbf{r} \right] d\omega, \tag{8.5}$$

wobei der Effektivwert der Schnelle $v_q(\mathbf{r}, j\omega)$ in Richtung einer generalisierten Koordinate eine Funktion des Ortes $\mathbf{r}$ und der Frequenz ist, dessen Betragsquadrat entlang der Bauteiloberfläche O und im interessierenden Frequenzbereich integriert wird. Dies entspricht einer Minimierung der physikalischen Schwingungsenergie. Die Schnelle im dreidimensionalen Raum kann durch quadratische Addition dreier orthogonaler Schnellen beschrieben werden

$$v_q(\mathbf{r}, j\omega) = \sqrt{v_x(\mathbf{r}, j\omega) + v_y(\mathbf{r}, j\omega) + v_z(\mathbf{r}, j\omega)}, \tag{8.6}$$

wobei die auf der Bauteiloberfläche senkrecht stehende Schnellekomponente bezüglich der Schallabstrahlung die größte Relevanz besitzt. Gleichung 8.5 setzt allerdings die genaue Kenntniss der Kontinuumsschwingung vorraus, was in der Regel nicht gegeben ist. Durch eine räumliche Diskretisierung wird das Problem numerisch handhabbar, wodurch die Schwingungen an einzelnen Punkten bekannt werden. Das Integral wird zu einer Summe:

$$\min \sum_0^{2\pi f_G} \left[\sum_{i=0}^{N} a_i(j\omega) \left| v_{q,i}(j\omega) \right|^2 \right] \cdot g(j\omega) d\omega \tag{8.7}$$

Wieviel Punkte betrachtet werden müssen, hängt unter anderem auch von dem betrachteten Frequenzbereich, bzw. den kürzesten vorkommenden Wellenlängen ab. Diese müssen noch ausreichend erfasst werden, was analog zu dem Nyquist-Shannonschen Abtasttheorem mindestens zwei Punkte pro Wellenlänge bedeutet.
Es ist sinnvoll, die Schwingungen gemäß der akustischen Wirkung unterschiedlich zu gewichten. Der Faktor $a_i(j\omega)$ in Gleichung 8.7 könnte z.B. gleich dem Abstrahlgrad der lokalen Baugruppe gewählt sein. Des Weiteren können Bauteilresonanzen, die akustisch relevant sind und ggfs. als problematisch eingestuft werden, hiermit entsprechend stark

gewichtet werden. Der Faktor $g(j\omega)$ drückt eine frequenzabhängige Gewichtung für die gesamte Struktur aus, wie beispielsweise die A-Bewertungskurve. Eine Dämmung, die bezüglich Turbolader-typischer Geräuschphänomene wirksam ist, kann durch Gewichtung mit der Bewertungskurve aus Abbildung 8.7 gefunden werden. Durch diese „Turbo"-Bewertung werden die Frequenzbereiche der Turbinenwellen-Eigenfrequenz und Drehklänge besonders hervorgehoben.

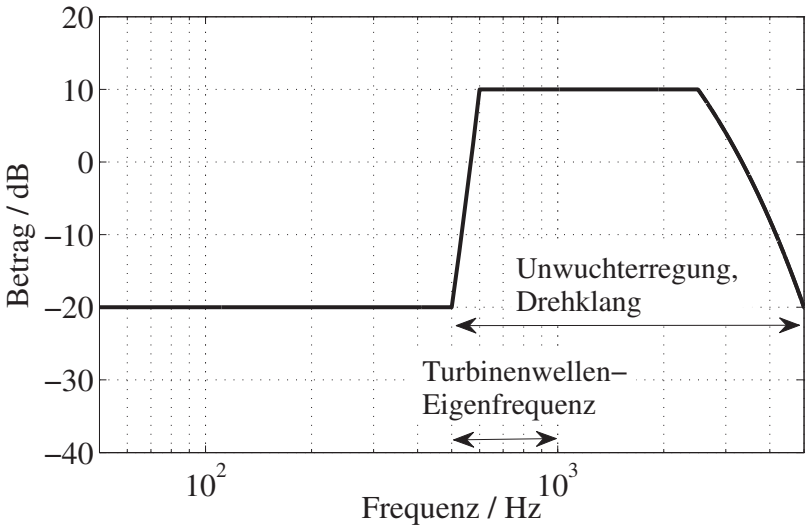


Abbildung 8.7: Bewertungskurve für ATL-Schwingungen

Für die Referenz-Abgasanlage wird die Schwingungsleistung aller translatorischer Freiheitsgrade zunächst am Cold-End-Eingang, d.h. direkt hinter dem Entkoppelelement berechnet. Die Schnelleerregung wirkt in longitudinaler Richtung, ist harmonisch und bei jeder Frequenz gilt v_1=1 m/s. Als Entkoppelelement-Modell wird eine Serienschaltung von zwei Feder-Masse Glieder mit dem Verlustfaktor $\eta = 5 \cdot 10^{-5}$ verwendet. Abbildung 8.8 zeigt die Schwingungsleistung abhängig von der statischen Entkoppelelement-Steifigkeit. Als 0dB-Referenz wird der Punkt maximaler Schwingungsleistung gesetzt. Die unbewertete Schwingungsleistung sinkt erst, wenn eine Steifigkeit von 10^6 N/m unterschritten wird. Allerdings sinkt die Schwingungsleistung mit fallender Steifigkeit nicht monoton. Nach diesem Simulationsbeispiel wäre ein Entkoppelelement, bei sämtlichen hier verwendeten Bewertungskurven, mit einer Steifigkeit von $2 \cdot 10^4$ N/m optimal. Bezüglich Turbolader-Schwingungen wäre bereits die Schwingungsleistung bei einer Entkoppelelementsteifigkeit von 10^7 N/m um 20 dB reduziert.

Wird nun die Schwingungsleistung an den Mittelpunkten der Rohre, den Rohrkrümmern und an der Endtopfvorder und -rückseite gleich gewichtet aufsummiert, so folgt die

Schwingungsleistung nach Abbildung 8.9. Im Gegensatz zu der punktuellen Beurteilung am Cold-End-Eingang sind hierbei ausgeprägte Resonanzen auffällig, die sich im Steifigkeitsbereich von 10^6 N/m bis $2 \cdot 10^7$ N/m ergeben. Da diese bei der A-bewerteten Kurve nicht erkennbar sind, handelt es sich um Resonanzen mit niedrigeren Frequenzen. Auch in diesem Beispiel würde eine optimale Steifigkeit bei $2 \cdot 10^4$ N/m liegen. Die Schwingungsleistung, die sich an diesen Punkten bei lateraler Anregung ergeben, zeigt Abbildung 8.10. Resonanzüberhöhungen sind hierbei weniger ausgeprägt als bei longitudinaler Anregung. Dies ist auf die geringere laterale Steifigkeit der Rohrleitung im Vergleich zur longitudinalen zurück zu führen.

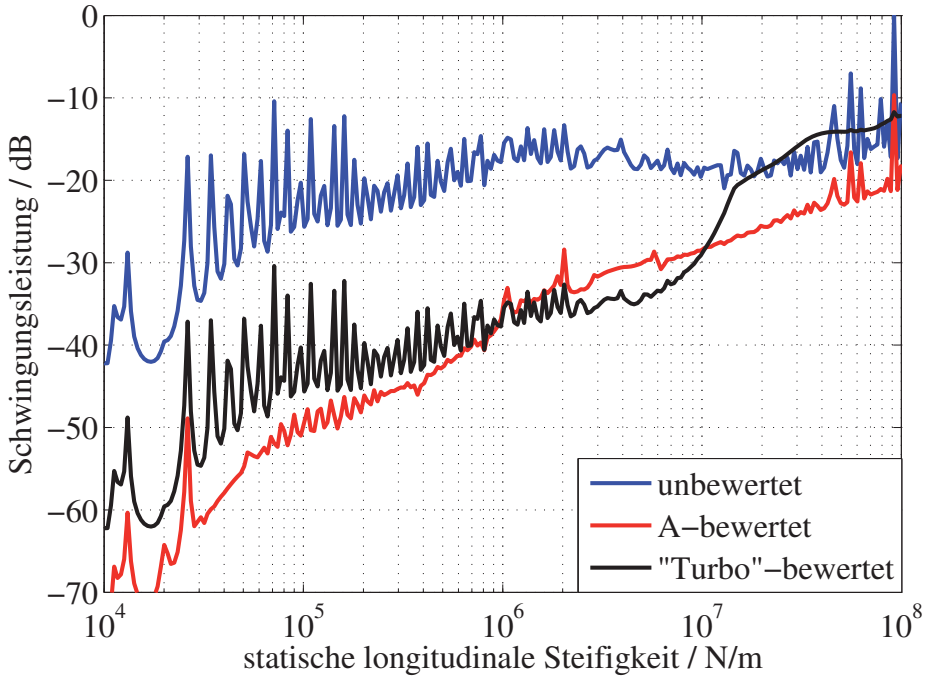


Abbildung 8.8: Cold-End-Anregung abhängig von EKE-Steifigkeit

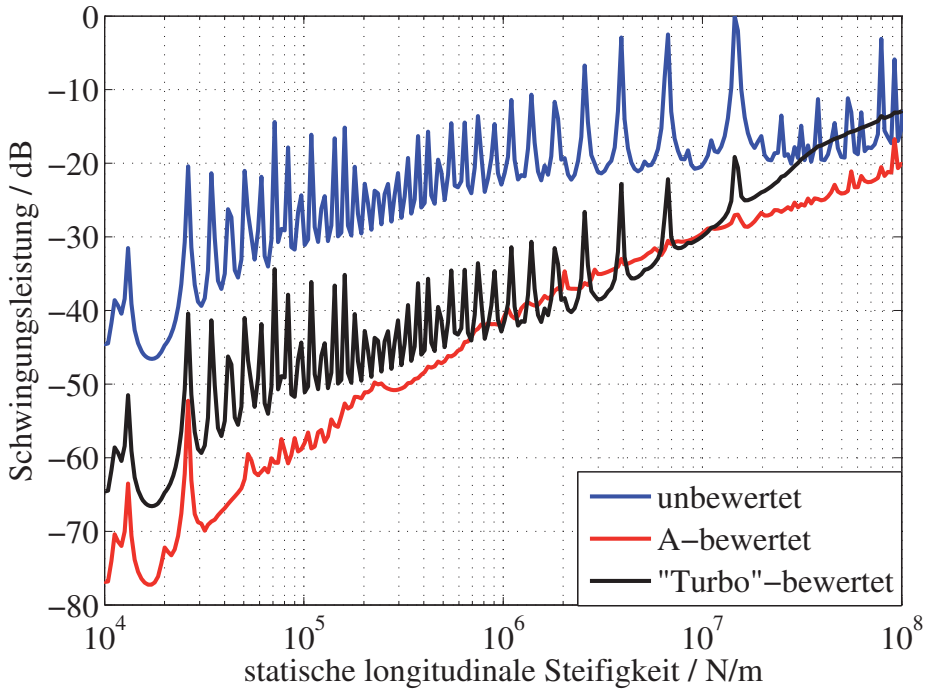


Abbildung 8.9: AGA-Schwingungsenergie in Folge longitudinaler Anregung

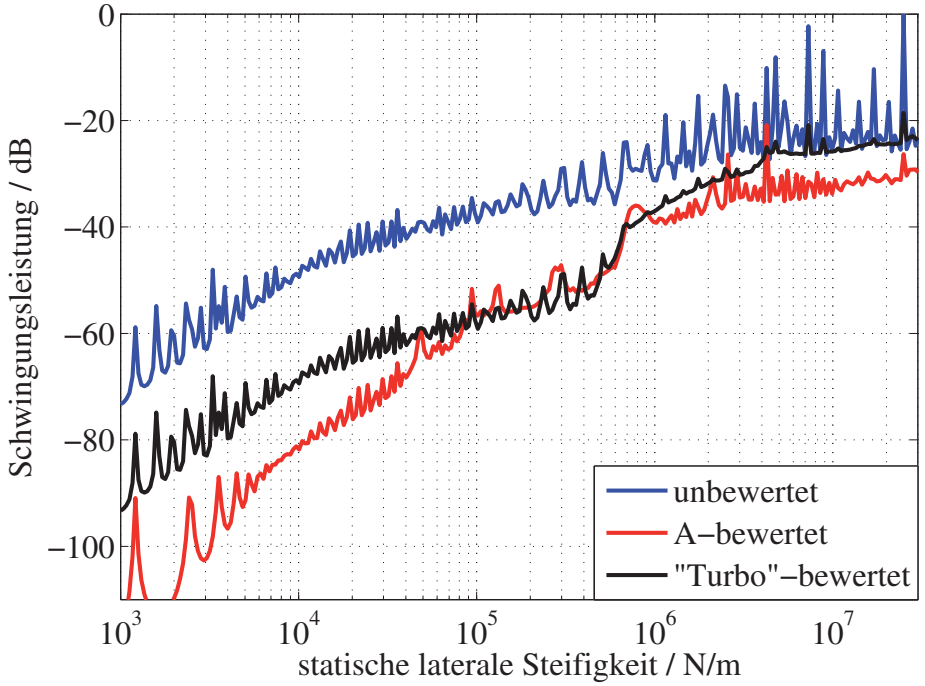


Abbildung 8.10: AGA-Schwingungsenergie in Folge lateraler Anregung

8.6 Integration nichtlinearer Modelle

Berücksichtigt man den nichlinearen Steifigkeitsverlauf des Entkoppelelements, so folgt mit der Eingangsimpedanz des Cold-Ends Z_{CE} der Zusammenhang

$$(u_1 - u_2) \cdot k(u_1 - u_2) = j\omega u_2 Z_{CE}. \tag{8.8}$$

Da man bei gegebener Eingangsschwingung zunächst die ausgangsseitige Schwingung, bzw. die Dämmung nicht kennt, ist somit auch die Transfersteife unbekannt. Diese Größen werden iterativ mit der Berechnungsmethode erlangt, die in Abbildung 8.11 skizziert ist. Hierbei wird für die Transfersteife ein Startwert gleich $k(u_1)$ angenommen und somit

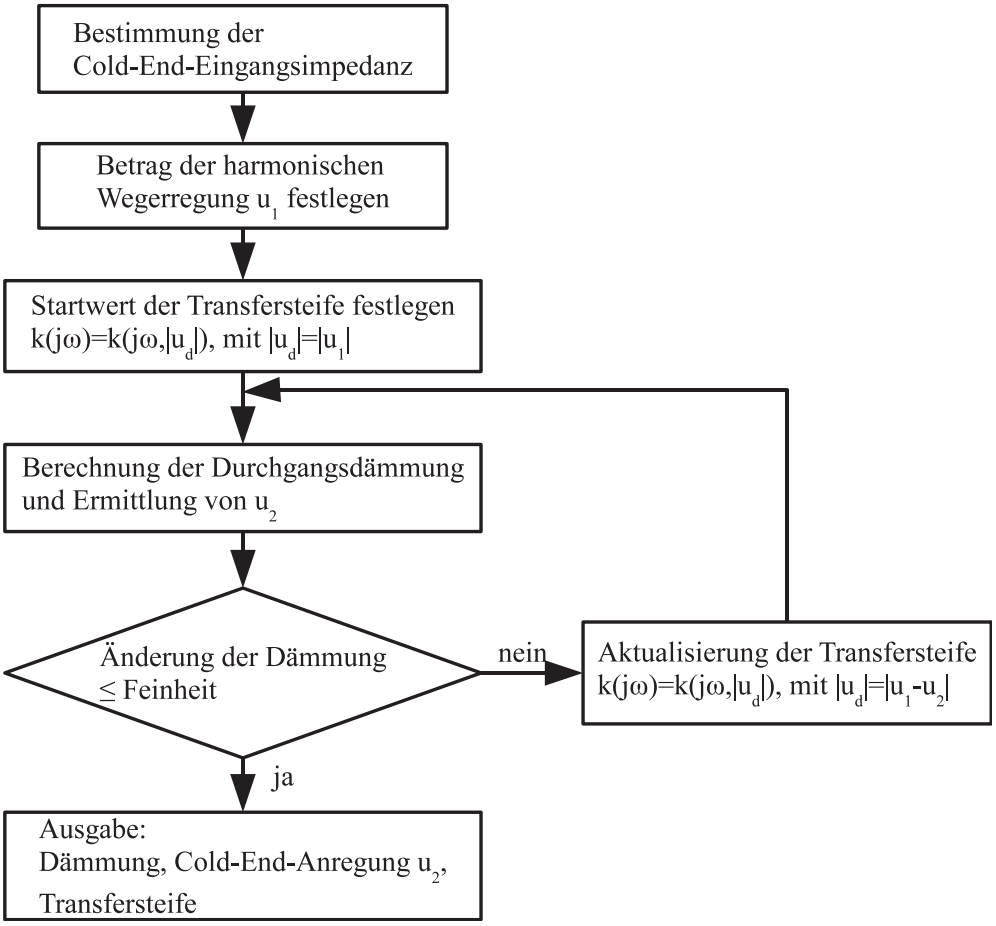


Abbildung 8.11: Ablauf der iterativen Dämmungsberechnung

die Dämmung berechnet. Die hieraus resultierende ausgangsseitige Schwingung u_2 wird im nächsten Schritt in $k(u_1 - u_2)$ eingesetzt und die Dämmung erneut berechnet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis die Änderung der Dämmung bei aufeinander folgenden

Iterationen kleiner als eine festgelegte Feinheit ist oder eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht wird. Der Einfluss der ausgangsseitigen Schwingung ist in Bereichen niedriger

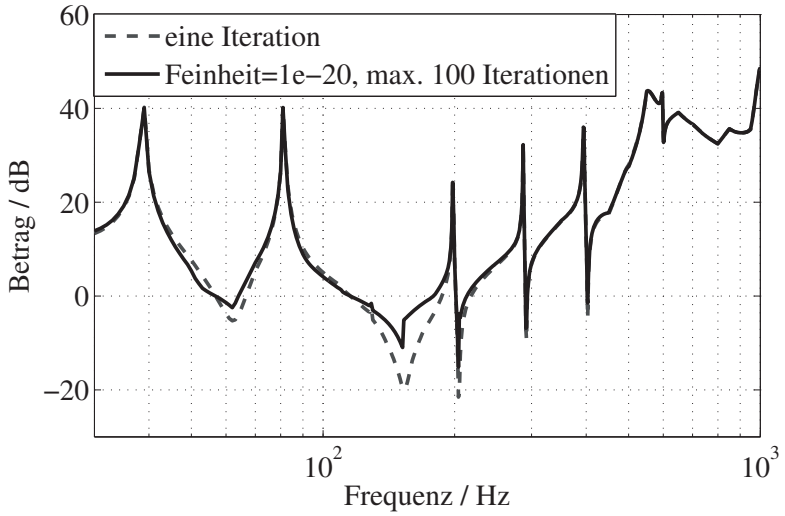


Abbildung 8.12: Vergleich von direkter und iterativer Berechnung

und negativer Dämmung signifikant. Dies verdeutlicht Abbildung 8.12 beispielhaft anhand der longitudinalen Durchgangsdämmung, die sich aus der experimentell erlangten linearisierten Transfersteifigkeit der Schlauchleitung SL#1 bei Anschluss mit dem Referenz-Cold-End ergibt. Abbildung 8.13 zeigt die Abhängigkeit der Durchgangsdämmung von unterschiedlichen Beschleunigungspegeln der anregenden harmonischen Schwingung. Bei tiefen Frequenzen sind die Unterschiede besonders stark ausgeprägt, die in diesem Beispiel bis zu 20 dB betragen.

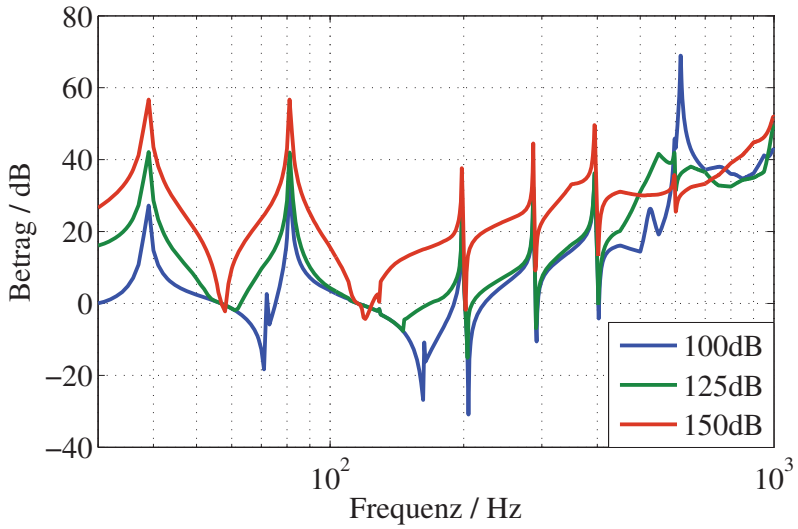


Abbildung 8.13: Anregungsabhängige Dämmung

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Eine Minderung der Schwingungsanregung von Kfz-Abgasanlagen wird durch den Einsatz von Entkoppelelementen erlangt, deren Auswahl bisher primär im Hinblick auf tieffrequente Schwingungsentkopplung unterhalb von 500 Hz erfolgte. Das vermehrte Auftreten von Körperschall mit höheren Frequenzen, bedingt durch den Einsatz von Turboladern, und die immer weiter wachsenden Anforderungen an ein niedriges Geräuschniveau im Automobilbau lässt die Dämmung höherer Frequenzen zu einem wichtigen Auswahlkriterium geeigneter Entkoppelelemente werden.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die umfassende Untersuchung der Körperschallübertragung durch Entkoppelelemente bei Frequenzen bis 5 kHz. Somit ist der gesamte Frequenzbereich abgedeckt, innerhalb dessen es im Kraftfahrzeug zu akustisch relevanter Schallabstrahlung kommt. Es wurde ein spezieller vibroakustischer Prüfstand entwickelt, an dem die Messung der Übertragungseigenschaften mit Hilfe eines indirekten Messverfahrens möglich ist. Innerhalb der Messbandbreite sind die Randbedingungen des Prüflings exakt definiert, wodurch der Prüfstand keinen Einfluss auf die Messergebnisse hat. Dies ist ein erheblicher Vorteil gegenüber fahrzeugspezifischen Komponententests, bei denen der Prüfkörper im Verbund mit einem Referenzsystem getestet wird. Die gemessenen Systemparameter beschreiben das Entkoppelelement als Substruktur, die in die Berechnungen der Gesamtsystemdynamik integriert werden können.

In longitudinaler Schwingungsrichtung erweist sich die Vierpoltheorie als mächtiges Werkzeug zur Beschreibung der Schwingungsübertragung. Hierdurch wird das Verhalten bezüglich der Zustandsgrößen der Schwingung an den Anschlussstellen vollständig beschrieben. Weitaus aufwändiger ist die Beschreibung der lateralen und rotatorischen Schwingungsentkopplung, da neben den translatorischen Größen auch rotatorische berücksichtigt werden

müssen. Ein in [23] in einfacher Form vorgeschlagenes Messverfahren zur Bestimmung der Transfersteifen wurde so erweitert, dass zu tiefen Frequenzen hin keine resonanzbedingten Messabweichungen vorliegen. Dies wird durch die Einbeziehung der ausgangsseitigen Schwingungen und die statische Prüflingsmasse in den Berechnungsvorgang bewerkstelligt. Anhand numerischer Simulationen und Referenzmessungen wurde die Messmethode verifiziert.

Das nichtlineare Verhalten der Entkoppelelemente, insbesondere der Schlauchleitungen, führt dazu, dass Vorspannung und Anregungsform einen starken Einfluss auf die Körperschallübertraung haben. Dies macht zum einen die Modellierung des Übertraungsverhaltens aufwändig, zum anderen ist die Ermittlung eines aussagekräftigen Schalldämmmaßes äußerst kompliziert. Die Verwendung geeigneter linearisierter Ersatzsysteme vereinfacht die Behandlung solcher Probleme. Es werden in dieser Arbeit Methoden entwickelt, anhand derer unter Verwendung harmonischer Anregungungen die Parameter nichtlinearer Schwingungs-Differenzialgleichungen gemessen werden können. Mittels numerischer Untersuchungen wird deren Potential zur Systemidentifikation bei geeigneten Testsystemen nachgewiesen.

Innerhalb der getesteten Messdynamik weisen die Schlauchleitungen eine degressive dynamische Transfersteife auf. Das Masing-Modell hat sich zur Simulation des Systemverhaltens als geeignet heraus gestellt. In dieser Arbeit wird ein diskretes Modell verwendet, womit nur der niederfrequente Bereich hinreichend genau beschrieben werden kann. Die Verwendung eines Masing-Modells mit verteilten Parametern sollte der Ansatz für weitergehende Forschungsarbeiten sein.

Zur Beschreibung der Köperschallausbreitung müssen sämtliche Substrukturen der Abgasanlage im Verbund betrachtet werden. Die Abgasanlage weist im Frequenzbereich bis 5 kHz eine hohe Modendichte und komplexe Schwingformen auf, so dass in diesem Bereich die mechanische Eingangsimpedanz stark von der einer statisch gleichen idealen Masse abweicht. Ein Entkoppelelement ist aus vibroakustischer Sicht als optimal anzusehen, wenn die Schwingungsenergie, die in das gesamte Cold-End bzw. daran angeschlossene Fahrzeugstrukturen eingeleitet wird, ein Minimum annimmt. Eine verlässliche Simulation des Bauteilverhaltens ist erst dann möglich, wenn neben der Beschreibung des passiven Systems eine Modellierung der Körperschallquelle vorhanden ist. Dies ist insbesondere bei nichtlinearen Entkoppelelementen der Fall. Weitere Forschungsarbeit muß zur Charakterisierung der Körperschallquellen geleistet werden. Hierzu wird in dieser Arbeit der Vorschlag eines Verfahrens zur Messung der Modellparameter gemacht.

10 Literaturverzeichnis

[1] ASME: *Boiler & Pressure Vessel Code, Section III, Division 1 - Subsection NB*. The American Society of Mechanical Engineers, New York, 2006

[2] Baltes, J. ; Chang, D. ; Hodgson, J. ; Brück, R. ; Breuer, H.-J.: A New Generation of Flexible Coupling Elements with Integrated Metal Substrates. In: *SAE International* (2000), Nr. 2000-01-0498

[3] Basshuysen, R. von (Hrsg.): *Ottomotor mit Direkteinspritzung - Verfahren, Systeme, Entwicklung, Potenzial*. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2007

[4] Bittner, M.: *Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Abkopplung von Körperschall mittels Gummilagerelementen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2000

[5] Brand, J.-F.: *Oberflächenschallabstrahlung von Abgasanlagen bei Straßenfahrzeugen, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 12, Nr. 648*. VDI Verlag Düsseldorf, 2007

[6] Brand, J.-F. ; Kammer, H.-J. ; Fallen, M.: Future technologies against turbo charger noise transferred to exhaust systems. In: *SAE International* (2008), Nr. 2008-01-0891

[7] Bronstein, I.N. ; Semendjajew, K.A. ; Grosche, G. (Hrsg.) ; Ziegler, V. (Hrsg.) ; Ziegler, D. (Hrsg.): *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Auflage. Stuttgart - Leipzig : B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1991

[8] Bruns, J.-U.: *Detektion und Identifikation von Nichtlinearitäten in mechanischen Schwingungssystemen*, Universität Hannover, Diss., 2004

[9] Burkhardt, C. ; Balmer, B.: *Entkoppelelemente in der Fahrzeugtechnik*. Verlag Moderne Industrie, 2002

[10] Burkhardt, C. ; Rösler, R. ; Seeger, B. ; Börner, F. ; Herrmann, G.: Feldanalyse und Korrosionssimulation zur Werkstoffauswahl bei Entkoppelelementen. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 01 (2008), S. 54–61

[11] Coja, M.: *Effective Vibro-Acoustical Modelling of Rubber Isolators*, Royal Institute of Technology, Stockholm, Diss., 2005

[12] Cremer, L. ; Heckl, M.: *Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1996

[13] Dickens, J.D.: Assessment of Waveguide Vibration Isolator / DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory (DSTO-TR-0812). – Forschungsbericht

[14] Dickens, J.D.: Vibration Isolator Test Facility / DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory (DSTO-TR-0357). – Forschungsbericht

[15] Dickens, J.D.: Investigation of Asymmetrical Vibration Isolators for Maritime Machinery Applications / DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory. 1999 (DSTO-RR-0168). – Forschungsbericht

[16] Dickens, J.D. ; Norwood, C.J.: The Effect of Vibration Isolator Properties and Structural Stiffness on Isolator Performance. In: *Journal of Vibration and Control* 4 (1998), S. 253–275

[17] DIN 1311-1: Schwingungen und schwingungsfähige Systeme, Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung. (2000)

[18] DIN 1311-2: Schwingungen und schwingungsfähige Systeme, Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad. (2002)

[19] DIN 1311-3: Schwingungen und schwingungsfähige Systeme, Teil 3: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden. (2000)

[20] DIN 1311-4: Schwingungslehre: Schwingende Kontinua, Wellen. (1974)

[21] DIN EN ISO 10846-1: Akustik und Schwingungstechnik - Laborverfahren zur Messung der vibro-akustischen Transfereigenschaften elastischer Elemente - Teil 1: Grundlagen und Übersicht. (2005)

[22] DIN EN ISO 10846-2: Akustik und Schwingungstechnik - Laborverfahren zur Messung der vibro-akustischen Transfereigenschaften elastischer Elemente - Teil 2: Direktes Verfahren zur Ermittlung der dynamischen Steifigkeit elastischer Stützelemente bei Anregung in translatorischer Richtung. (2005)

[23] DIN EN ISO 10846-3: Akustik und Schwingungstechnik - Laborverfahren zur Messung der vibro-akustischen Transfereigenschaften elastischer Elemente - Teil 3: Indirektes Verfahren für die Bestimmung der dynamischen Steifigkeit elastischer Elemente für Translatorische Schwingungen. (2002)

[24] Diwoky, F. ; Priebsch, H. ; Bartsch, P. ; Moshammer, T. ; Kastreuz, B.: Simulation der Strukturdynamik und Geräuschabstrahlung von Abgasanlagen. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 11 (2003), S. 1080–1088

[25] Doltsinis, C.: Ein numerisches Verfahren zur Ermittlung der Ovalisierungseinflüsse in Rohrleitungen aus Versuchsergebnissen. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 51 (1985), Nr. 1, S. 19–21

[26] Dormand, J. R. ; Prince, P. J.: A family of embedded Runge-Kutta formulae. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6 (2006), Nr. 1, S. 19–26

[27] Dresig, H. ; Holzweissig, F.: *Maschinendynamik*. 7. Auflage. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007

[28] Døssing, Ole: *Structural Testing - Part I: Mechanical Mobility Measurements*. Brüel & Kjær, 1988

[29] Finger, K.: *Untersuchungen zur Kraftanregung durch die Verbrennung beim direkteinspritzenden Common-Rail Dieselmotor unter Berücksichtigung des Körperschallübertragungsverhaltens*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2001

[30] Gasch, R. ; Knothe, K.: *Strukturdynamik, Band 1: Diskrete Systeme*. Springer-Verlag, 1989

[31] Gasch, R. ; Knothe, K.: *Strukturdynamik, Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1989

[32] Gaul, L.: Zur Dämmung und Dämpfung von Biegewellen an Fügestellen. In: *Ingenieur-Archiv* 51 (1981), S. 101–110

[33] Genuit, K. ; Sottek, R. ; Vorländer, M. ; Behler, G. ; Kellert, T.: Binaurale Transferpfadanalyse und -synthese / HEAD acoustics GmbH, Institut für Technische Akustik (ITA), RWTH Aachen. 2005. – Forschungsbericht

[34] Gerwing, W.: *Untersuchungen zur Dämmwirkung von Gummielementen in komplexen Strukturen im akustischen Frequenzbereich*. Berlin Heidelberg New York, Diss., 1980

[35] Gropp, R.: *Flexible metallische Leitungen.* Verlag Moderne Industrie, 1988

[36] Hagedorn, P.: Eine Bemerkung zur Momentenimpedanz bei Plattenschwingungen in der Substrukturtechnik. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* Vol. 36 (1986), S. 293–304

[37] Harris, C.M. ; Crede, C. E.: *Shock and Vibration Handbook.* Mc Graw-Hill Book Company, 1961

[38] Hauger, W. ; Schnell, W. ; Gross, D.: *Technische Mechanik, Band 3: Kinetik.* 2. Auflage. Springer-Verlag, 1989

[39] Henn, H. ; Sinambari, R. G. ; Fallen, M.: *Ingenieurakustik: Physikalische Grundlagen und Anwendungsbeispiele.* 4. Auflage. Würzburg : Vieweg+Teubner, 2008

[40] Heynen, Th.: Schallübertragung von Elastomerkupplungen / Institut für Maschinenelemente und Maschinengestaltung RWTH Aachen. 1998. – Forschungsbericht

[41] Hüser, M. ; Pischinger, S.: Mechanisch und akustisch optimierte Abgasanlagen - Neue Entwicklungsmethoden mittels CAE. 102, 9 (2000), S. 738–745

[42] Hynnä, P.: Mechanical Mobility Technique / VTT Technical Research Centre of Finland. 2002. – Forschungsbericht

[43] Kammer, H.-J. ; Brand, J.-F. ; Fallen, M.: Übertragungsverhalten von Flex-Elementen in Abgasanlagen bei Frequenzen bis 5000 Hz, Tagungsbeitrag Daga, Dresden, 2008

[44] Kammer, H.-J. ; Fallen, M. ; Böhle, M. ; Pfeffer, T.: Verfahren zur Ermittlung der Körperschalldämmung durch Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen, Tagungsbeitrag Daga, Berlin, 2010

[45] Kammer, H.-J. ; Fallen, M. ; Pfeffer, T. ; Brand, J.-F.: Experimentelle Ermittlung des akustischen Übertragungsverhaltens von Entkoppelelementen in Kfz-Abgasanlagen, VDI-Fachtagung Maschinenakustik, Böblingen, 2008

[46] Kessler, F. ; Lyttek, P.: *Vibroakustische Untersuchungen an einer Abgasanlage zum Dämmverhalten von Körperschallentkoppelelementen*, Technische Universität Kaiserslautern, Projektarbeit, 2008

[47] Kester, W. ; Analog Devices, Inc. (Hrsg.): *The Data Conversion Handbook.* Elsevier, 2005

[48] Khan, M.M. ; Lagoudas, D.C. ; Mayes, J.J. ; Henderson, B.K.: Pseudoelastic SMA Spring Elements for Passive Vibration Isolation: Part I - Modeling. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 15 (2004), S. 415–441

[49] Klaus, B. ; Krieger, E.: Auswirkung moderner Turbolader auf die Abgasakustik bei Diesel-Direkteinspritzmotoren. In: *20. Wiener Motorensymposium*, 1999

[50] Kollmann, F.G.: *Maschinenakustik*. 2. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006

[51] Kolomiets, V. G.: Some remarks on linearization methods in the theory of nonlinear oscillations. In: *Ukrainian Mathematical Journal* Volume 33 (1981), 01, Nr. Number 1, S. 51–55

[52] Kolsch, H. ; Ottl, D.: Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen mit Hysterese. In: *Forschung im Ingenieurwesen - Engineering Research* 59 (1993), S. 66–71

[53] Kose, K. ; Schröder, R. ; Wieliczek, K.: *Numerik sehen und verstehen*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1992

[54] Lagoudas, D.C. ; Khan, M.M. ; Mayes, J.J. ; Henderson, B.K.: Pseudoelastic SMA Spring Elements for Passive Vibration Isolation: Part II - Simulations and Experimental Correlations. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 15 (2004), S. 443–470

[55] Lenk, Arno: *Elektromechanische Systeme, Band 1: Systeme mit konzentrierten Parametern*. 3. Auflage. VEB Verlag Technik Berlin, 1975

[56] Lenk, Arno: *Elektromechanische Systeme, Band 2: Systeme mit verteilen Parametern*. 2. Auflage. VEB Verlag Technik Berlin, 1977

[57] Ljung, L.: *System Identification: Theorie for the User*. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987

[58] Magnus, K. ; Popp, K.: *Schwingungen*. 8., überarbeitete Auflage. Stuttgart [u.a.] : Teubner, 2002

[59] Marko, H.: *Theorie linearer Zweipole, Vierpole und Mehrtore*. Hirzel Verlag, 1971

[60] Meltzer, G. ; Melzig-Thiel, R.: Experimental Determination and Practical Application of the Four-Pole Parameters of Structure-borne Sound Isolators. In: *Archives of Acoustics* 5 (1980), Nr. 4, S. 315–336

[61] Melzig-Thiel ; Schirmer (Hrsg.): *Technischer Lärmschutz*. 2., bearb. und erw. Aufl. Springer - Verlag, Berlin [u.a.], 2006

[62] Mitschke, M. ; Wallentowitz, H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Vierte Auflage. Springer-Verlag Berlin Heildeberg New York, 2004

[63] Molloy, C.T.: Use of Four-Pole Parameters in Vibration Calculations. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 29 (1957), Nr. 7, S. 842–853

[64] Moon, D.H. ; Choi, M.S.: Vibration Analysis of Frame Structures using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient. In: *Journal of Sound and Vibration* 234(5) (2000), S. 725–736

[65] Möser, M. (Hrsg.): *Technische Akustik*. 7., erw. und aktualisierte Aufl. Berlin [u.a.] : Springer, 2007

[66] Narimani, A. ; Golnaraghi, M. E. ; Jazar, G. N.: Frequency Response of a Piecewise Linear Vibration Isolator. In: *Journal of Vibration and Control* 10 (2004), S. 1775–1794

[67] Ottl, D.: Modellierung der mechanischen Hysteresis. In: *Naturwissenschaften* 80 (September 1993), Nr. 9, S. 391–396

[68] Pfeffer, T. ; Kammer, H.J. ; Womann, M. ; Fallen, M. ; Böhle, M.: Körperschalldämmung von Turboladergeräuschen in Abgasanlagen. In: *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift* 07-08 (2009), S. 526–531

[69] Popp, K.: Nichtlineare Schwingungen mechanischer Strukturen mit Füge- oder Kontaktstellen. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 74 (1994), Nr. 3, S. 147–165

[70] Potchinkov, A.: Digital signal processing methods of global nonparametric frequency domain audio testing. In: *Signal Processing* 85(6) (2005), June, S. 1225–1254

[71] Preisach, F.: Über die magnetische Nachwirkung. In: *Zeitschrift für Physik* 94 (1938), S. 277–302

[72] Proakis, J. G. ; Manolakis, D. G.: *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. 4. Auflage. Pearson Prentice Hall, 2007

[73] Rakheja, S. ; Vliet, M. V. ; Sankar, S.: A Discrete Harmonic Linearization Technique for Simulating Non-linear Mechanical Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 100(4) (1985), S. 511–526

[74] Rao, M.D. ; Gruenberg, S. ; Griffiths, D.: Measurement of Dynamic Parameters of Automotive Exhaust Hangers. In: *SAE International* (2001), Nr. 01NVC-121

[75] Rill, G.: *Simulation von Kraftfahrzeugen*. Regensburg : Vieweg Verlag, 2007

[76] Rämmal, H. ; Abom, M.: Acoustics of Turbochargers. In: *SAE International* 01-2205 (2007)

[77] Rupprecht, W.: *Signale und Übertragungssysteme*. 1. Auflage. Berlin, Heidelberg, New-York : Springer-Verlag, 1993

[78] Sauter, D.: *Modeling the Dynamic Characteristics of Slack Wire Cables in Stockbridge Dampers*, TU Darmstadt, Diss., 2003

[79] Schnell, W. ; Gross, D. ; Hauger, W.: *Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik*. 2. Auflage. Springer-Verlag, 1989

[80] Schütte, O.: *Analyse und Modellierung nichtlinearer Schwingungen beim Außenrundeinstechschleifen*, Universität Hannover, Diss., 2003

[81] Seidel, E.: *Wirksamkeit von Konstruktionen zur Schwingungs- und Körperschalldämmung in Maschinen und Geräten*. Wirtschaftsverl. NW, Verl. für Neue Wiss., 1999

[82] Seidel, E.: Schwingungstechnische Modellierung mechanischer Baugruppen auf der Grundlage von Impedanzmessungen. In: *Technisches Messen* 10 (2001), S. 456–464

[83] Sentpali, S.: *Beitrag zur Körperschallübertragung gerader und gebogener biegeschlaffer Schlauchleitungen im Fahrzeugbau*, Technische Universität Kaiserslautern, Diss., 2008

[84] Steinke, P.: *Finite-Element-Methode - Rechnergestützte Einführung*. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[85] Storck, H. ; Sumali, H. ; Pu, Y.: Experimental Modal Analysis of Automotive Exhaust Structures. In: *SAE International* 2001-01-0662 (2001)

[86] Thompson, D.J. ; Vliet, W.J. van ; Verheij, J.W.: Developments of the Indirect Method for Measuring the High Frequency Dynamic Stiffness of Resilient Elements. In: *Journal of Sound and Vibration* (May 1998)

[87] Unbehauen, H.: *Regelungstechnik II*. 9., durchgesehene und korrigierte Auflage. Vieweg Verlag, 2007

[88] Verheij, J.W.: Test facility for multi-directional transfer through resilent elements under static load. In: *Ship en werf* 51, 9 (1984), S. 149–150

[89] Webster, A. ; Semke, W.: Frequency-Dependent Viscoelastic Structural Elements for Passive Broad-Band Vibration Control. In: *Journal of Vibration and Control* 10 (2004), S. 881–895

[90] Yun, H.-B. ; Tasbighoo, F. ; Masri, S.F. ; Caffrey, J.P. ; Wolfe, R.W. ; Makris, N. ; Black, C.: Comparison of Modeling Approaches for Full-scale Nonlinear Viscous Dampers. In: *Journal of Vibration and Control* 14 (2008), S. 51–76

[91] Zurmühl, R.: Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode. XXXII (1963), S. 201–213

Anhang A

Berechnung der AGA-Dynamik

A.1 Grundelemente

Die Kettenmatrix des dreidimensionalen Grundelementes entsteht durch die Kombination des eindimensionalen Vierpols der longitudinalen Richtung $\underline{\mathbf{A}}^{y}$ mit den zweidimensionalen Achtpolen der Biegeschwingungen $\underline{\mathbf{A}}^{x}$ und $\underline{\mathbf{A}}^{z}$. Das Aufreten von Torsionsschwingungen entlang der Längsachse wird durch die Terme $\underline{\mathbf{A}}^{\gamma_y}$ berücksichtigt. Die Diskretisierung der Abgasanlage erfolgt, wie in Abbildung A.1 skizziert, wobei das zur Kettenmatrix $\underline{\mathbf{A}}_1$ zugehörige lokale Koordinatensystem links spezifiziert ist. Die allgemeine Form eines Übertragungsgliedes ist in der Matrixgleichung A.1 aufgestellt. Da Teilsysteme orthogonal zueinander sind und jeweils keine Richtungsänderung des Schwingungsvektors auftritt, werden die Kreuzterme gleich Null gesetzt.

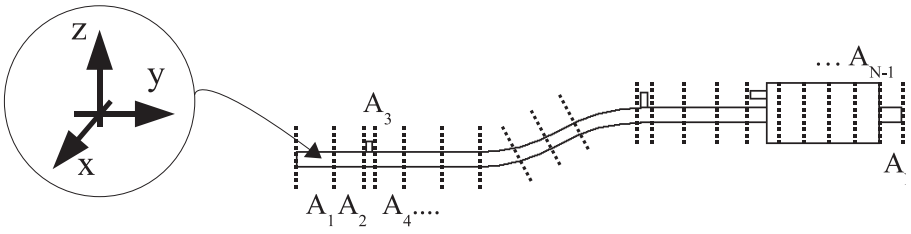


Abbildung A.1: Diskretisierung der AGA mittels Kettenmatrizen

$$\begin{Bmatrix} M_{1,y} \\ F_{1,y} \\ F_{1,z} \\ M_{1,x} \\ F_{1,x} \\ M_{1,z} \\ \dot{\gamma}_{1,z} \\ v_{1,x} \\ \dot{\gamma}_{1,x} \\ v_{1,z} \\ v_{1,y} \\ \dot{\gamma}_{1,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{\gamma_y}_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{\gamma_y}_{2,1} \\ 0 & \underline{A}^{y}_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{y}_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{1,1} & \underline{A}^{z}_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{1,3} & \underline{A}^{z}_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{2,1} & \underline{A}^{z}_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{2,3} & \underline{A}^{z}_{2,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{x}_{1,1} & \underline{A}^{x}_{1,2} & \underline{A}^{x}_{1,3} & \underline{A}^{x}_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{x}_{2,1} & \underline{A}^{x}_{2,2} & \underline{A}^{x}_{2,3} & \underline{A}^{x}_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{x}_{3,1} & \underline{A}^{x}_{3,2} & \underline{A}^{x}_{3,3} & \underline{A}^{x}_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{x}_{4,1} & \underline{A}^{x}_{4,2} & \underline{A}^{x}_{4,3} & \underline{A}^{x}_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{3,1} & \underline{A}^{z}_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{3,3} & \underline{A}^{z}_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{4,1} & \underline{A}^{z}_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{z}_{4,3} & \underline{A}^{z}_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{A}^{y}_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{y}_{2,2} & 0 \\ \underline{A}^{\gamma_y}_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{A}^{\gamma_y}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{2,y} \\ F_{2,y} \\ F_{2,z} \\ M_{2,x} \\ F_{2,x} \\ M_{2,z} \\ \dot{\gamma}_{2,z} \\ v_{2,x} \\ \dot{\gamma}_{2,x} \\ v_{2,z} \\ v_{2,y} \\ \dot{\gamma}_{2,y} \end{Bmatrix} \tag{A.1}$$

Für ein Bernoulli-Balkenelement mit longitudinaler Steifigkeit k_l und Torsionssteifigkeit k_{tor} gilt:

$$\underline{\mathbf{A}}_{Balken} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega l^2/(2B) & -j\omega l/B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega l^3/(6B) & -j\omega l^2/(2B) & l & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega l^2/(2B) & -j\omega l/B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega l^3/(6B) & -j\omega l^2/(2B) & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega/k_l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\omega/k_{tor} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Eine Punktmasse besitzt die Matrix

$$\underline{\mathbf{A}}_{Masse} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega\Theta_{tor} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega\Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & j\omega m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & j\omega\Theta_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

wobei die Drehträgheit durch die Besetzung der Positionen $(6,7)$, $(4,9)$ und $(1,12)$ mit den jeweiligen Termen ausgedrückt wird. Die Kettenmatrix des Rohrelementes ergibt sich aus der Multiplikation von Steifigkeits- und Massenmatrix. Die Schubdeformation wird durch das Hinzufügen einer translatorischen Feder berücksichtigt. Hieraus folgt

$$\underline{\mathbf{A}}_{Rohr} = \underline{\mathbf{A}}_{Balken} \cdot \underline{\mathbf{A}}_{k_{Schub}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_{Masse}. \tag{A.4}$$

Die Koordinatensysteme der Kettenmatrizen sind lokal. Die geometrische Richtungsänderung an den Rohrbögen der AGA wird durch eine Koordinatentransformation in die

Berechnung integriert. Es werden hier nur Winkeländerungen um die z-Achse betrachtet, d.h. die Rohrleitung liegt in einer Ebene. Die Rotationsmatrix in A.5 erhält sowohl das Kräftegleichgewicht als auch die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen:

$$\underline{\mathbf{A}}_{rot} = \begin{bmatrix}
\cos(\gamma_z) & 0 & 0 & -\sin(\gamma_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\gamma_z & 0 & 0 & -\sin\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin(\gamma_z) & 0 & 0 & \cos(\gamma_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin(\gamma_z) & 0 & 0 & \cos(\gamma_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma_z) & 0 & 0 & \sin(\gamma_z) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma_z) & 0 & 0 & \sin(\gamma_z) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\gamma_z) & 0 & 0 & \cos\gamma_z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma_z & 0 & 0 & \cos(\gamma_z)
\end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Die Fixation durch Gummi-Hänger-Elemente wird durch die verlustbehafteten translatorischen ($\underline{k}_x, \underline{k}_y, \underline{k}_z$) und rotatorischen Federn ($\underline{k}_{x,rot}, \underline{k}_{y,rot}, \underline{k}_{z,rot}$) ausgedrückt

$$\underline{\mathbf{A}}_h = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{k}_{y,rot}/(j\omega) \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{k}_y/(j\omega) & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{k}_z/(j\omega) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{k}_{x,rot}/(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \underline{k}_x/(j\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{k}_{z,rot}/(j\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{A.6}$$

A.2 Rohrkrümmersteifigkeit

Die Spannungsverläufe im Bereich der Rohrbögen weichen bei Biegebeanspruchung deutlich von dem linearen Verlauf ab, wie er der Balkentheorie zugrunde liegt [79]. Dies ist auf die Formänderung des Rohrquerschnitts zurückzuführen, der eine ovale Form annimmt [25]. Hieraus resultieren eine deutlich höhere Nachgibigkeit der Rohrleitung und somit niedrigere Eigenfrequenzen, als mit einem einfachen Balkenmodell ausgedrückt werden kann. In [1] wird der Flexibilitätsfaktor

$$k_f = \gamma_{real}/\gamma_{nom} \tag{A.7}$$

eingeführt, mit dem die Abweichung zu dem Balkenmodell ausgedrückt wird. Hierbei ist γ_{real} die Querschnittsdrehung infolge eine Lastmomentes M, die auf die nominelle Drehung bezogen wird γ_{nom}, die sich aus der Balkenbiegung nach

$$\gamma_{nom} = \frac{R}{EI} \int_0^\alpha M d\gamma \tag{A.8}$$

ergeben würde. R ist der Biegeradius, EI die Biegesteifigkeit und α der Bogenwinkel. Eine Abschätzung für k_f läßt sich, mit dem mittleren Rohrradius r und der Wanddicke t, im drucklosen Fall angeben mit

$$k_f = \frac{1,65 \cdot r^2}{tR}, \tag{A.9}$$

die allerdings nur Gültigkeit für die Fälle R/r > 1,7 und Rα > 2r besitzt. Außerdem ist dies keine Funktion des Bogenwinkels α, obwohl davon ausgegangen werden kann, dass der Flexibilitätsfaktor im Allgemeinen hiervon abhängt.
Genauere Werte der Flexibilität erhält man für die relevanten Geometrien durch numerische Untersuchungen. Als Referenzobjekt werden hierfür jeweils 0,4 m lange Rohre mit einer Wanddicke von 1,5 mm gewählt. Der Biegewinkel wird zwischen den Werten $0°, 22,5°, 45°, 67,5°, 90°$ variiert, während der Biegeradius immer konstant 0,09 m gewählt wird. An dem Rohrende werden alle Freiheitsgrade fixiert und am Eingang eine reine Momentenlast aufgebracht, wie in Abbildung A.3 skizziert. Die hieraus resultierende Neigung am Eingang wird unter Verwendung der Finiten Element Methode berechnet. Hiervon wird der Anteil der geraden Rohrteilstücke subtrahiert

$$\gamma_{Bogen} = \gamma - \frac{M}{EI}(0.4 - \alpha R) \tag{A.10}$$

und der so erhaltene Winkel γ_{Bogen} auf γ_{Nom} bezogen. In Abbildung A.4 sind die Ergebnisse für unterschiedliche Rohrdurchmesser, die für PKW-AGA-Rohre typisch sind, dargestellt. Verglichen mit der Abschätzung nach Gleichung A.9 ist der Flexibilitätsfaktor bei $a = \pi/2$ um ca. 20 % geringer. Für den Bereich $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ und $50 \leq d \leq 80$ (Rohrdurchmesser in mm) kann für die Berechnung des Flexibilitätsfaktors das Polynom

$$\begin{aligned} k_f(\alpha, d) =& 6,04 - 27,76\alpha - 143,1\alpha^2 + 105,5\alpha^3 - 0,3165d + 7,365 \cdot 10^{-3}d^2 \\ & - 7,54 \cdot 10^{-5}d^3 + 2,867 \cdot 10^{-7}d^4 + 6,2667 \cdot 10^{-6}d^4\alpha^3 \\ & - 7,6133 \cdot 10^{-6}d^4\alpha^2 - 3,0667 \cdot 10^{-6}d^4\alpha - 1,65133 \cdot 10^{-3}d^3\alpha^3 \\ & + 2,1078 \cdot 10^{-3}d^3\alpha^2 + 6,333 \cdot 10^{-4}d^3\alpha + 0,161593d^2\alpha^3 - 0.2167d^2\alpha^2 \\ & - 0,043483d^2\alpha - 6,816d\alpha^3 + 9,253d\alpha^2 + 1,7232d\alpha \end{aligned} \tag{A.11}$$

verwendet werden, dessen maximale Abweichung bezüglich der simulierten Flexibilitätswerte 1% beträgt. Die Einarbeitung der Flexibilitätswerte erfolgt durch die Kombination einer rotatorischen Nachgiebigkeit

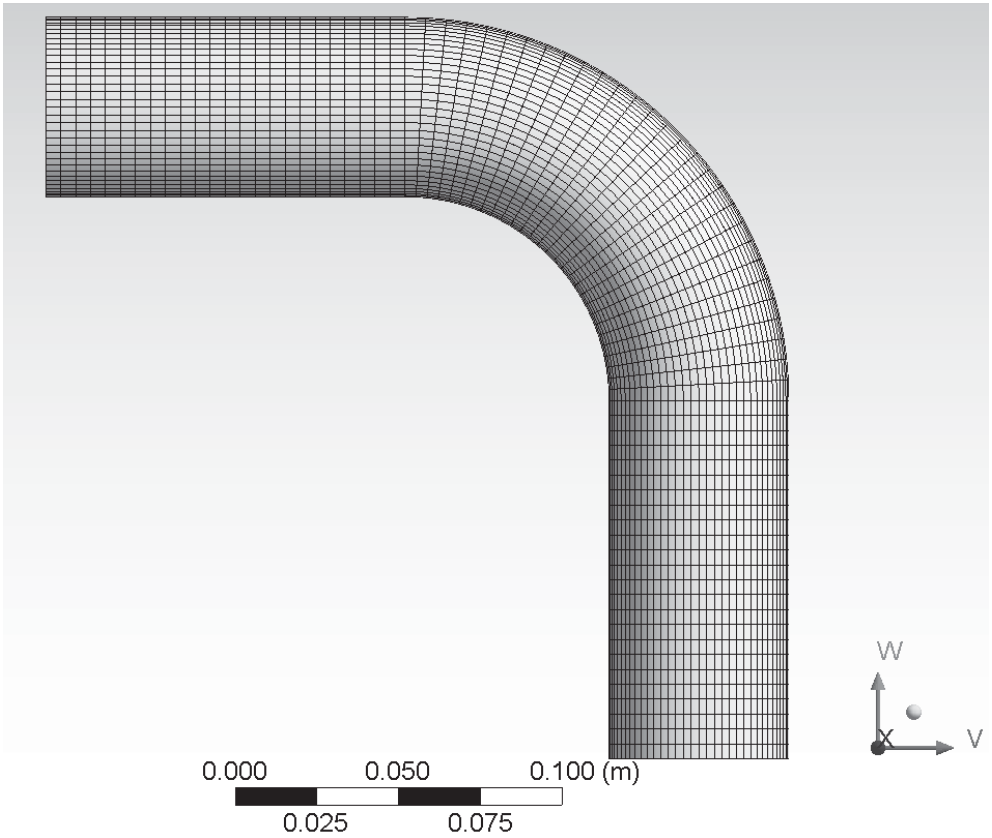


Abbildung A.2: FE-Netz von 90°-Rohrkrümmer (d = 55mm) mit 5390 Elementen und 36682 Knoten

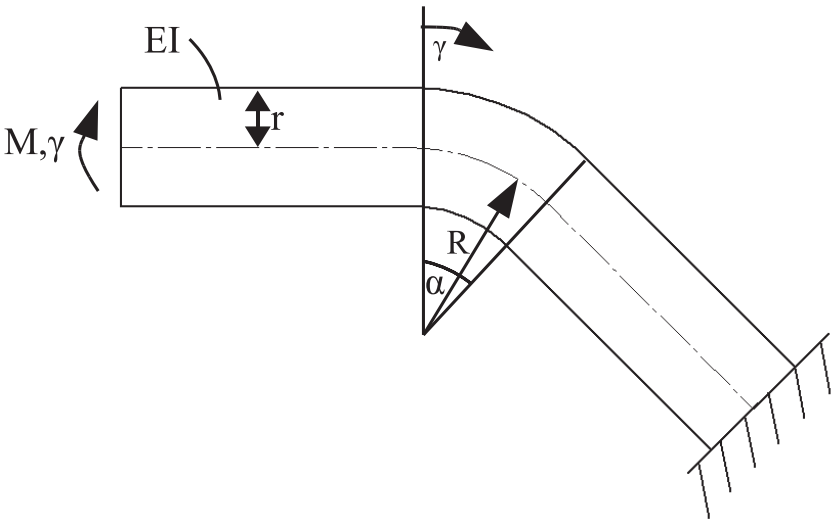


Abbildung A.3: Bestimmung des Flexibilitätsfaktors

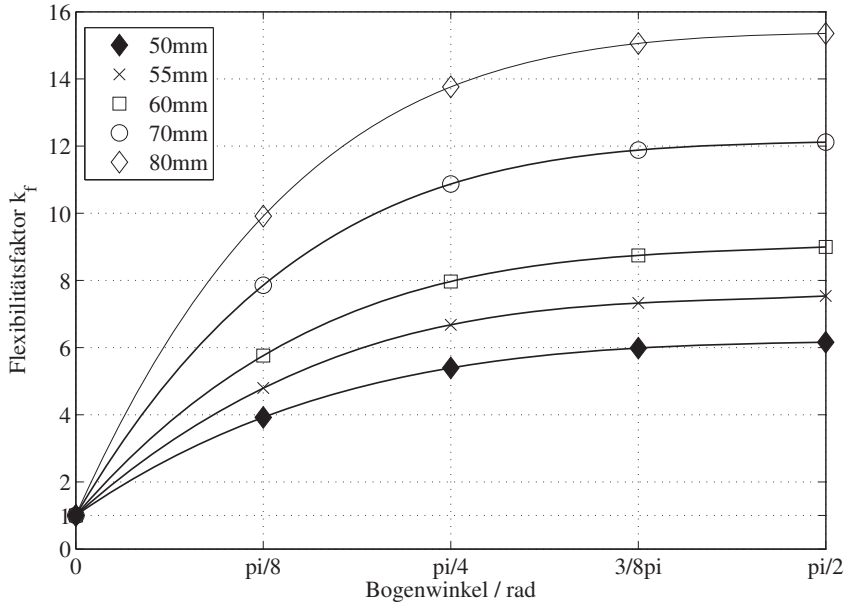


Abbildung A.4: Flexibilitätsfaktor

$$\underline{\mathbf{A}}_{Flex} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega l/B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\omega l/B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

mit der Rotationsmatrix A.5, wobei B die Biegesteifigkeit ist, die den Flexibilitätsfaktor k_f enthält. Die Nachgiebigkeiten werden mit der Rotationsmatrix verknüpft, wodurch sich die erweitere Rotationsmatrix $\underline{\mathbf{A}}_{rot'}$ ergibt.

$$\underline{\mathbf{A}}_{rot'} = \underline{\mathbf{A}}_{Flex} \cdot \underline{\mathbf{A}}_{Rot} \tag{A.13}$$

Die Torsionssteifigkeit kann als unabhängig von den Rohrbögen angesehen werden, der Flexibilitätsfaktor ist konstant eins [1].

Als Testobjekt wird das Verbindungsrohr der Abgasanlage aus Abschnitt 8.3 betrachtet. Dieses wird eingangsseitig in lateraler Richtung mit der konstanten Kraft von 1 N im Frequenzbereich bis 5 kHz angeregt und das Schnellespektrum am Rohrende berechnet.

Das Ergebnis nach der Methode der Kettenmatrizen unter Anwendung der Balkentheorie ist in Abbilding A.5 dargestellt. Als Referenz dient die gestrichelte Linie, die mit der Finiten Element Methode, mit konstanter Dämfung von 10^{-5} und Beta-Dämfung von 10^{-6}, ermittelt wurde. Aufgrund der Effekte an den Rohrbögen weist das mittels der FEM berechnete Spektrum um etwa 50 Hz tiefer liegende Schwingungsmaxima auf als die Kettenmatrixmethode. Die Verwendung der erweiterten Rotationsmatrix nach Gleichung A.13, mit $k_f = 7{,}3$, führt zu dem Schnellespektrum in Abbildung A.6, wobei eine sehr gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen als auch des Schnellebetrages vorliegt.

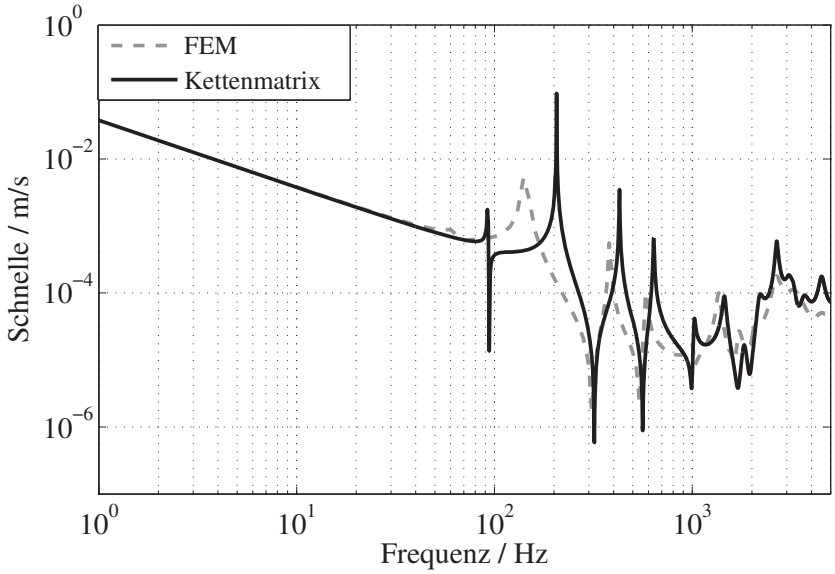


Abbildung A.5: Schnellespektrum am Verbingungsrohrende

Noch deutlicher wird der Effekt des Rohrbogeneinflusses, wenn die Kraft in der lateralen Richtung, entlang der x-Achse anregt und das ausgangsseitige Schnellespektrum, ebenfalls in x-Richtung berechnet wird. Abbildung A.7 zeigt, dass sowohl die Eigenfrequenzen nach der Kettenmatrixmethode zu hoch liegen, als auch der qualitative Verlauf nicht mit dem der FEM übereinstimmt. Besonders auffällig ist das Fehlen der Minima bei 240 Hz und 880 Hz. Durch die Erweiterung der Rotationsmatrix um die Flexibilitätswerte nach Gleichung A.11 erlangt man den Kurvenverlauf in Abbildung A.8, der mit der Referenzkurve qualitativ und quantitaiv weitgehend übereinstimmt. Eine weitere Annäherung der Kurvenverläufe würde sich durch Anpassung der Dämpfungskonstanten ergeben, die bei beiden Modellen jedoch willkürlich angenommen wurden und nur durch den Abgleich mit einem real exisitierenden Modell durch ein Experiment erlangt werden können.

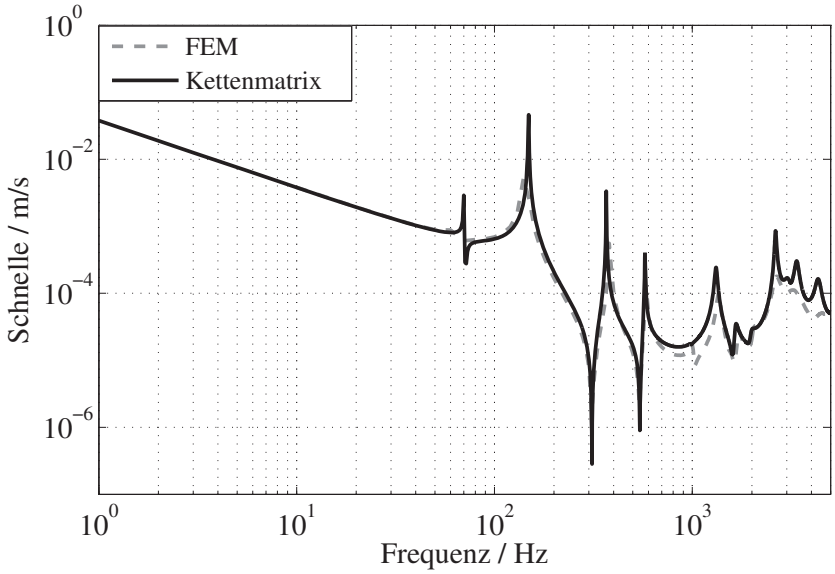


Abbildung A.6: Schnellespektrum am Verbingungsrohrende, erweiterte Rotationsmatrix

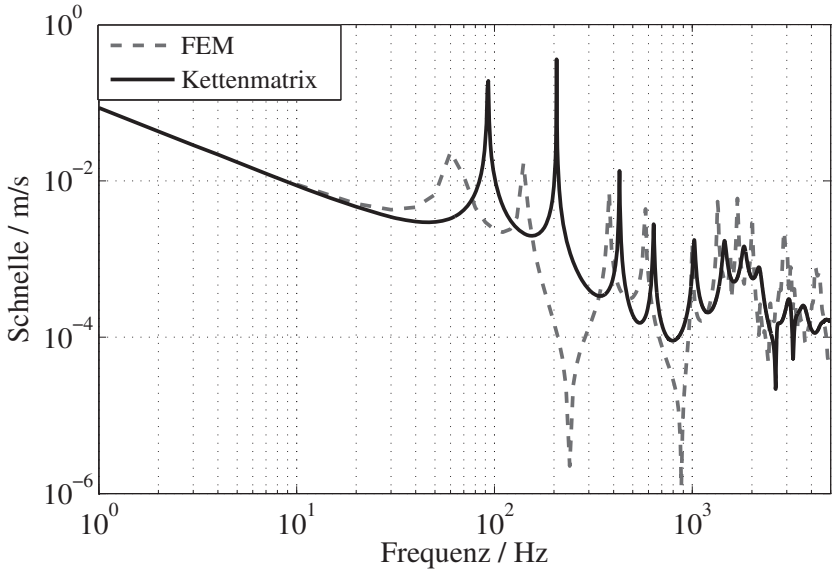


Abbildung A.7: Schnellespektrum entlang der x-Achse

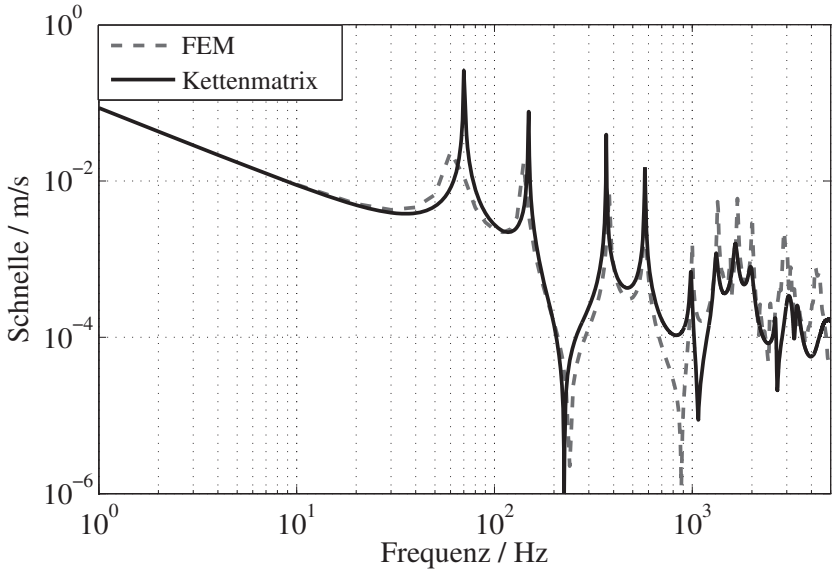


Abbildung A.8: Schnellespektrum entlang der x-Achse, erweiterte Rotationsmatrix

A.3 Modellierung des Endschalldämpfers

Als Endtopf wird ein einfacher Schalldämpfer mit einem durchgehenden Abgasrohr und drei, durch Trennwände separierte Resonanzräume modelliert [65]. Auf die Perforationen wird aus Gründen der einfacheren Vernetzbarkeit bei der FE-Modellierung verzichtet. Die Abmessungen sind in Abbildung A.9 angeben, die Blechdicke beträgt 1,5 mm. Eine numerische Umsetzung des Umkehrverfahrens nach Abschnitt 5.6 liefert sowohl den Vierpol der longitudinal schwingenden Struktur (Abbildung A.10), als auch der lateralen Richtung (Abbildung A.11), wobei die rotatorischen Freitheitsgrade mit einer reibungsfreien Lagerung unterdrückt werden. Der Einfluss der rotatorischen Nachgiebigkeiten ist in erster Näherung vernachlässigbar, der Anregung durch Biegemomente werden die entsprechenden Trägheitsmomente, die sich aus den statischen Eigenschaften ergeben, entgegengesetzt. Die Kurvenverläufe zeigen, dass der Endtopf bis etwa 100 Hz als Starrkörper schwingt. Da der Endschalldämpfer i.d.R. die am stärksten schallabstrahlende Komponente der Abgasanlage ist, ist aus akustischer Sicht dessen Eingangsimpedanz von besonderer Bedeutung.

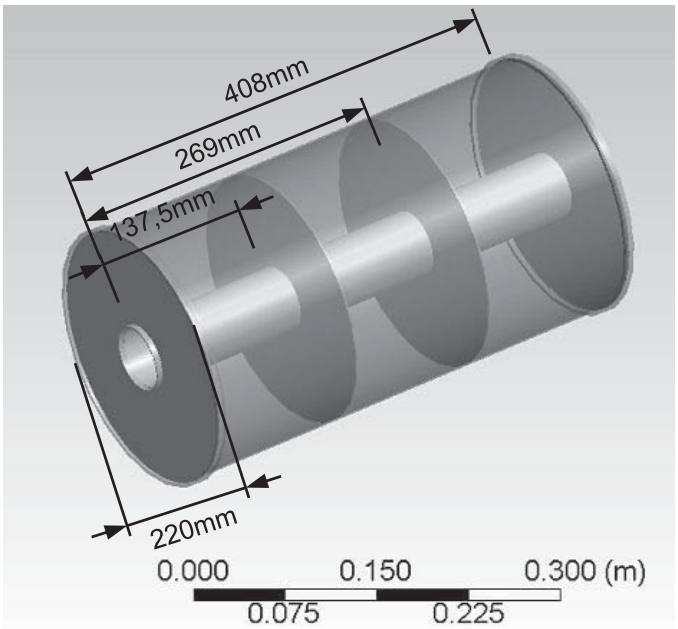


Abbildung A.9: Endtopfmodell

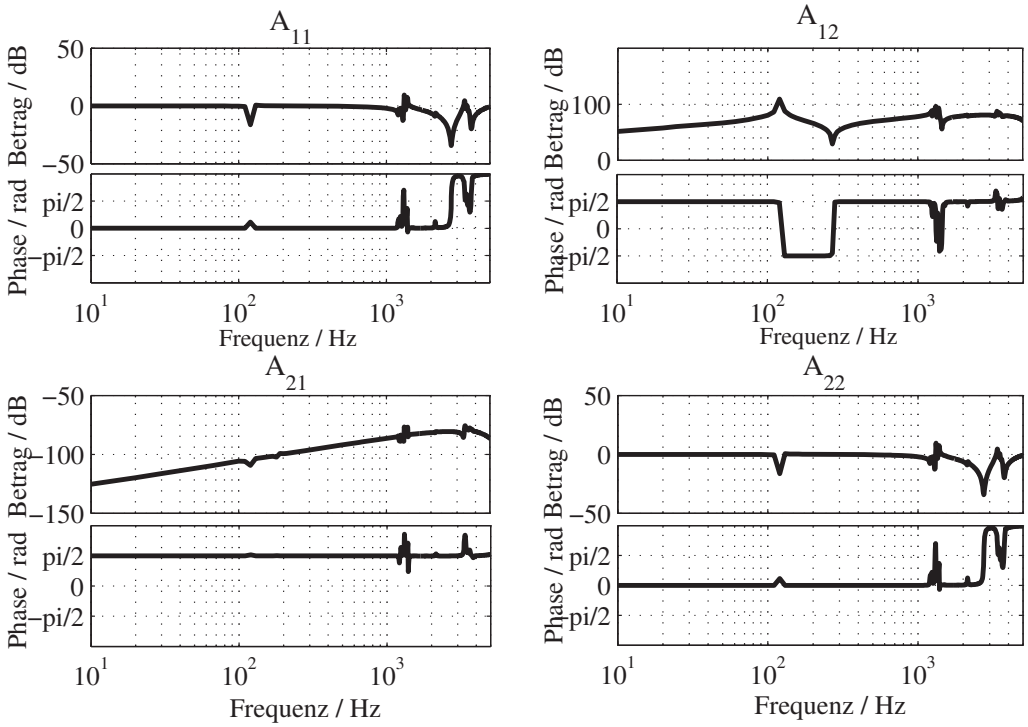


Abbildung A.10: longitudinaler Endtopf-Vierpolparameter nach Betrag und Phase

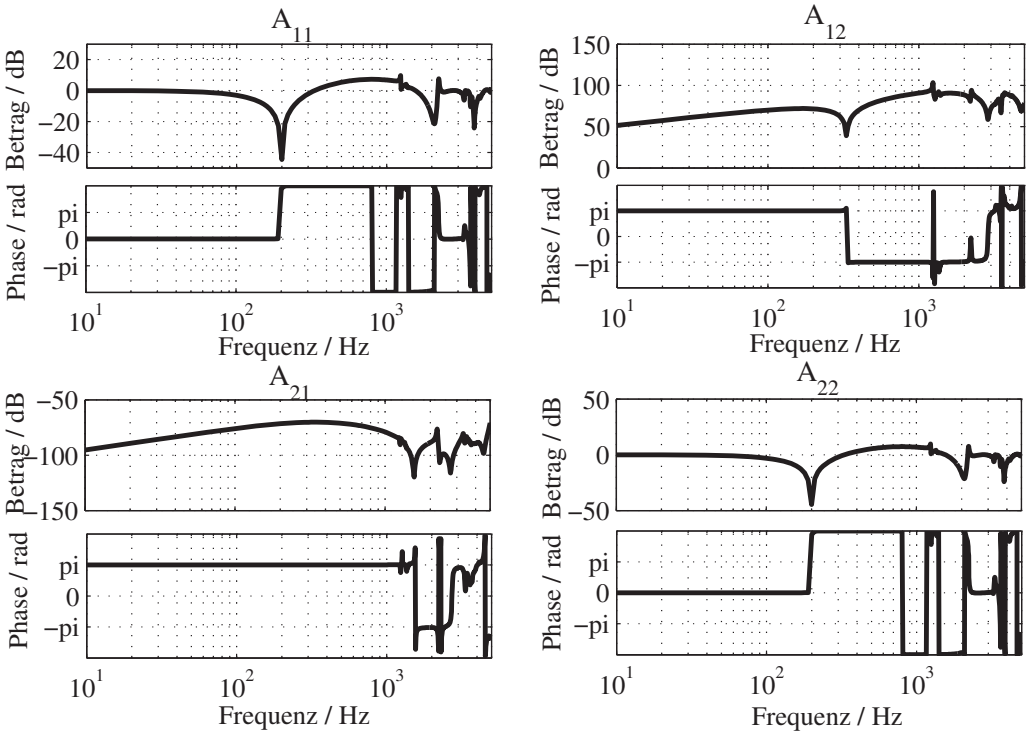


Abbildung A.11: lateraler Endtopf-Vierpolparameter nach Betrag und Phase

Anhang B

Transfersteifen der Entkoppelelemente

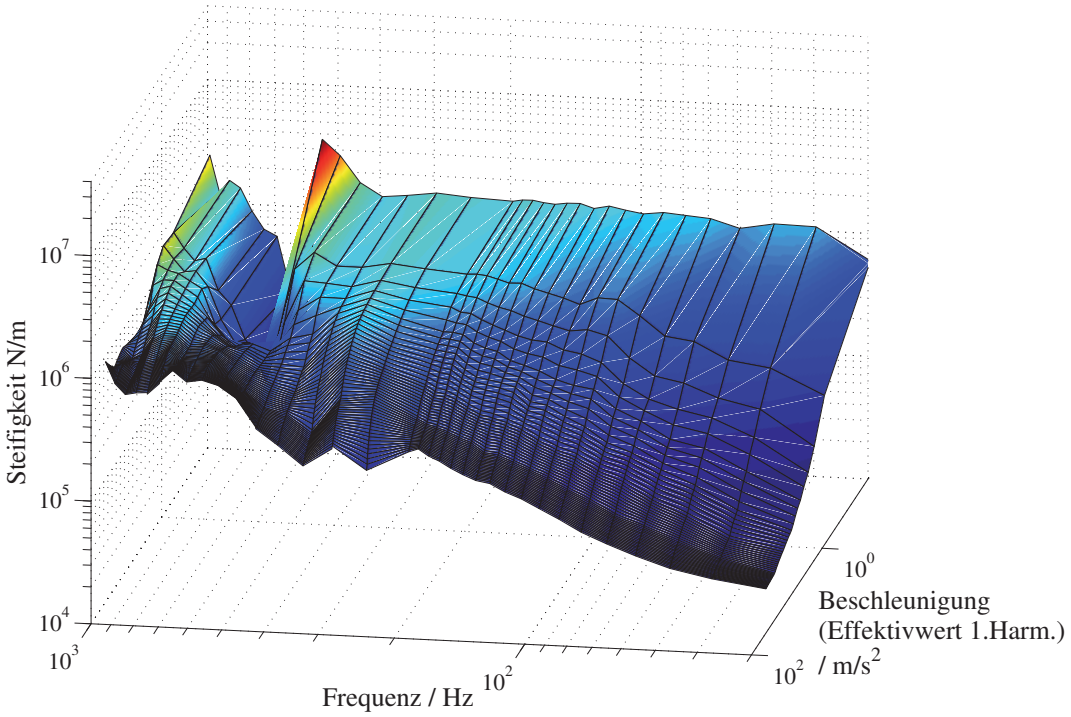


Abbildung B.1: Transfersteife von SL #1

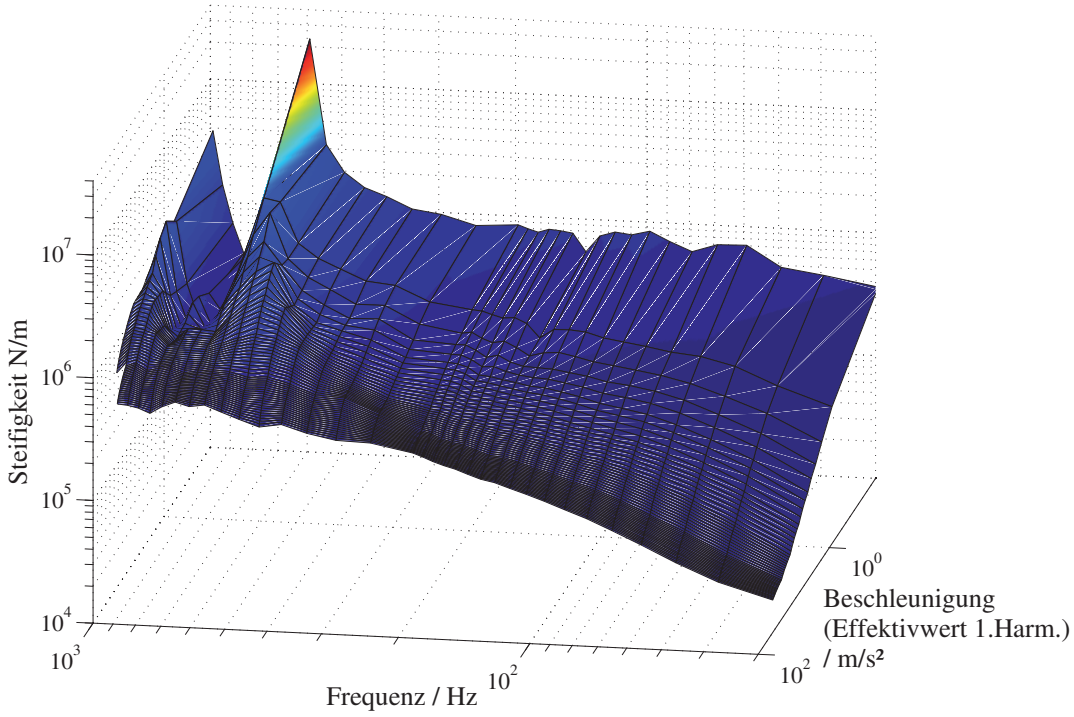


Abbildung B.2: Transfersteife von SL #2

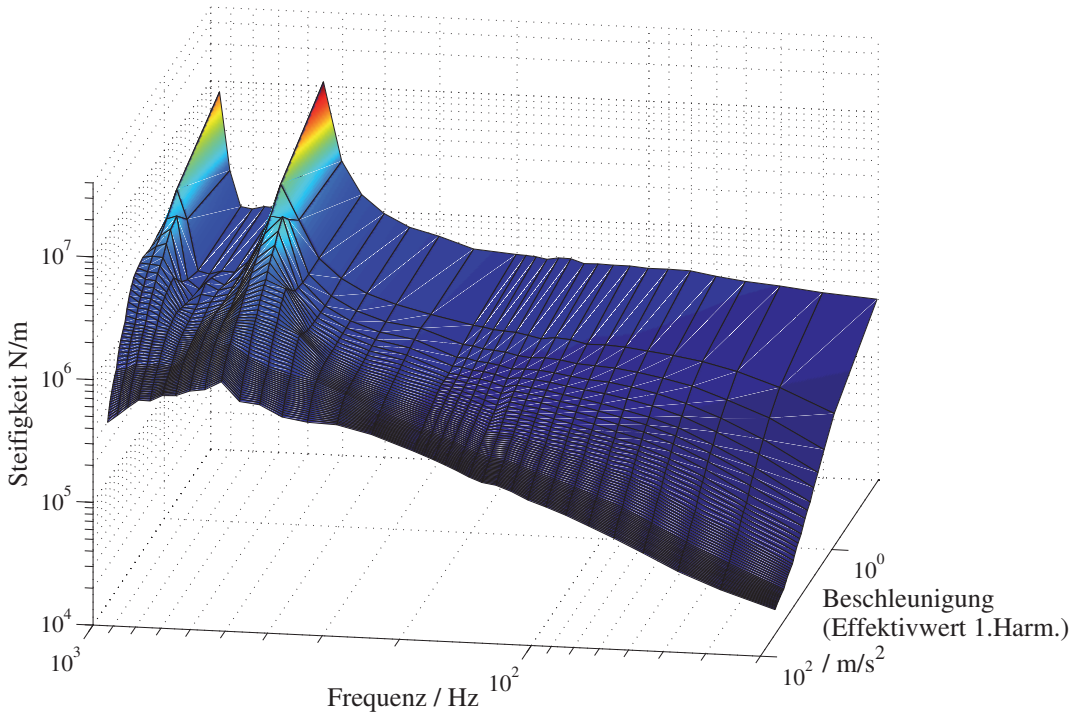


Abbildung B.3: Transfersteife von SL #3

C Symbolverzeichnis

Funktionen und Operatoren

$\ddot{x}$	Zweite Ableitung von x nach der Zeit	1
$\dot{x}$	Erste Ableitung von x nach der Zeit	1
$\hat{H}$	geschätzer Frequenzgang	
$\Im\{\underline{x}\}$	Imaginärteil der komplexen Variablen $\underline{x}$	j
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient	1
$\Re\{\underline{x}\}$	Realteil der komplexen Variablen $\underline{x}$	1
$\underline{F}_{0,q}(j\omega)$	Spektrum der Quellkraft in Richtung der Koordinate q	N
$\underline{V}_{s,q}(j\omega)$	Spektrum der Quellschnelle in Richtung der Koordinate q	m/s
$\underline{Z}_{s,q}(j\omega)$	Quellimpedanz bezüglich der Koordinate q	Ns/m
$E\{X\}$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X	1
$ggT(x,y)$	kleinster gemeinsamer Teiler von x und y	1
$H(j\omega)$	Frequenzgang	
$sgn(x)$	Signum-Funktion	1
Sxx	Autoleistungsspektrum von x	
Sxy	Kreuzleistungsspektrum von x und y	

Skalare Größen

α	Rohrbogenwinkel	rad
β	Abkürzung für $4\chi EI/(AG)$ (Kapitel 3.4.2)	m^2
χ	Schubfaktor	1
η	Verlustfaktor	1

$\gamma(j\omega)^2$	Kohärenzfunktion (Kap. 2.1)	1
$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$	Drehwinkel um die Achse x, y und z	rad
μ	Reibkoeffizient	N
ω	Kreisfrequenz	s^{-1}
σ	Standardabweichung	
Θ	Massenträgheitsmoment	kgm^2
$\underline{x}$	komplexe Größe x	1
a	Beschleunigung	m/s^2
B	Biegesteifigkeit	Nm^2
c_f	Crestfaktor	1
d	Dämpferkonstante	Ns/m
E	E-Modul	N/m^2
E_{kin}	kinetische Energie	Nm
F	Kraft	N
f	Frequenz	s^{-1}
f_G	Grenzfrequenz	s^{-1}
f_t	Abtastrate	s^{-1}
I	Flächenträgheitsmoment	m^4
i	Stromstärke	A
j	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
K	Anzahl der Frequenzen des diskreten Spektrums	1
k	Steifigkeit	N/m
k_f	Flexibilitätsfaktor	1
k_t	Transfersteife	N/m
l	Bauteillänge	m
M	Moment	Nm
m	Masse	kg

N	Anzahl abzählbarer Elemente	1
n	Exponent der Evolutionsgleichung 4.4, Zählvariable in Kapitel 5	1
R	Biegeradius eines Rohrkrümmers	m
U	Wegamplitude	m
u_x, u_y, u_z	Verschiebung entlang der Achse x, y und z	m
u_{el}	elektrische Spannung	V
v	Schnelle	m/s
Y	mechanische Admittanz	m/Ns
Y_{el}	elektrische Admittanz	A/V
Z	mechanische Impedanz	Ns/m
Z_{el}	elektrische Impedanz	V/A

Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A}$	Kettenmatrix	
$\mathbf{A}^x$	Kettenmatrix bezüglich der x-Achse	
$\mathbf{f}$	Kraftvektor	N
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix	N/m
$\mathbf{p}$	generalisierter Kraft- und Momentenvektor	
$\mathbf{q}$	Verschiebungsvektor mit generalisierten Koordinaten	
$\mathbf{r}$	Ortsvektor	m
$\mathbf{x}$	Vektor mit Abtastwerten	
$\mathbf{Z}$	Impedanzmatrix	Ns/m

Tabellarischer Lebenslauf

Name:	Hans-Jürgen Kammer
Geburtsdatum:	07.04.1981
Geburtsort:	Zweibrücken
Nationalität:	deutsch
Familienstand:	ledig
1986-1991	Grundschule Bottenbach
1991-2000	Helmholtz-Gymnasium Zweibrücken
2000-2001	Zivildienst, Evangelisches Krankenhaus Zweibrücken
2001-2006	Studium der Elektrotechnik, TU Kaiserslautern
	Vertiefungsrichtung: Kommunikationstechnik
	Abschluss: Dipl.-Ing.
2006-2010	Wissenschaflicher Mitarbeiter am
	Lehrstuhl für Strömungsmaschinen und Strömungsmechanik
	Fachbereich für Maschienenbau und Verfahrenstechnik
	TU Kaiserslautern
seit 2010	Entwicklungsingenieur bei der Sick AG, Waldkirch

Liste der Veröffentlichungen:

[1] Kammer, H.-J.; Fallen, M.; Böhle, M.; Pfeffer, T.: Verfahren zur Ermittlung der Körperschalldämmung durch Entkoppelelemente in Kfz-Abgasanlagen, Tagungsbeitrag Daga, Berlin 2010

[2] Kammer, H.-J.; Fallen, M.; Pfeffer, T.; Brand, J.-F.: Experimentelle Ermittlung des akustischen Übertragungsverhaltens von Entkoppelementen in Kfz-Abgasanlagen, VDI-Fachtagung Maschinenakustik, Böblingen, 2008

[3] Kammer, H.-J.; Brand, J.-F.; Fallen, M.: Übertragungsverhalten von Flex-Elementen in Abgasanlagen bei Frequenzen bis 5000 Hz, Tagungsbeitrag Daga, Desden, 2008

[4] Pfeffer, T.; Kammer, H.-J.; Womann, M.; Fallen, M.; Böhle, M.: Körperschalldämmung von Turboladergeräuschen in Abgasanlagen. In: ATZ Automobiltechnische Zeitschrift, 07-08 (2009), S.526-531

[5] Brand, J.-F.; Kammer, H.-J.; Fallen, M.: Future technologies against turbocharger noise transferred to exhaust systems. In: SAE International (2008), Nr. 2008-01-0891