



Raoul Piechatzek

**Werbemixplanung
bei mehrfacher,
psychographischer Zielsetzung**



Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung

Eine modellorientierte Analyse des Entscheidungsprozesses und Entwicklung von
Entscheidungshilfen zur Werbemixplanung

Von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Raoul Piechatzek, M.O.R.

Berichter: Univ.-Prof. Dr. rer. pol. Hartwig Steffenhagen
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Jürgen Sebastian

Tag der mündlichen Prüfung: 01.06.2010

Raoul Piechatzek

Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung

Eine modellorientierte Analyse des Entscheidungsprozesses und Entwicklung von
Entscheidungshilfen zur Werbemixplanung

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen: Cuvillier, 2010

Zugl.: Dissertation Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2010

D82 (Diss. RWTH Aachen University, 2010)

978-3-86955-474-7

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2010

Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen

Telefon: 0551-54724-0

Telefax: 0551-54724-21

www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage 2010

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

978-3-86955-474-7

Vorwort

Die Problemfelder der optimalen Budgetbestimmung und -allokation werden in der modellgestützten Theorie zur Werbebudget- und Werbestreuplanung ausführlich diskutiert, ebenso die Bestimmung des optimalen Marketing-Instrumente-Mix in der Theorie zur Marketing-Mix-Planung. Der Betrachtungsschwerpunkt liegt dabei stets auf der Verfolgung eines einzelnen, zu weit greifenden ökonomischen Ziels der Werbung im Marketing-Mix oder auf einem einzelnen zu kurz greifenden Kontaktmengenziel im Media-Mix. Im Gegensatz dazu bleibt die modellgestützte Werbemixplanung auf Ebene der Werbeinstrumente als analytisch-kompositionelle Werbebudgetplanung für mehrere, gleichzeitig zu verfolgende psychographische Werbeziele in der Literatur und Praxis weitestgehend unberücksichtigt. Es ist aber bekannt, dass psychographische Werbewirkungen als Ziele der Werbung eine sehr viel größere Wirkungsnahe zu den ausgeübten Werbeaktivitäten aufweisen, als die üblicherweise betrachteten ökonomischen Größen wie Gewinn oder Absatz. Auch Aufgabenstellungen mit mehreren zu optimierender Zielgrößen werden in der Marketing-Literatur nur ansatzweise betrachtet, obwohl die Theorie zum Multi-Criteria-Decision-Making sehr umfangreich in der Operations-Research-Literatur dargelegt wird. Deshalb war es mir wichtig mit der vorliegenden Arbeit die Erkenntnisse und Methoden des Operations Research auf typische Aufgabenstellungen der Werbemixplanung anzuwenden, um die künstliche Beschränkung auf ein einzelnes, zu verfolgendes Ziel in der modelltheoretischen Behandlung der Werbeplanung aufzuheben.

Für die großartige Unterstützung bei der Erstellung meiner Doktorarbeit schulde ich vielen lieben Freunden und Kollegen einen herzlichen Dank. Hierzu zählt insbesondere Dr. rer. pol. Marcus Kunter, der trotz seiner knapp bemessenen Zeit stets ein offenes Ohr für mich und meine Belange hatte und mit konstruktiver Kritik die Arbeit und den Promotionsprozess voran brachte. Sehr großer Dank kommt Dipl.-Kfm. Daniel Guhl zu, der auch in der heißesten Phase der Erstellung einen kühlen Kopf bewahrte und

mich mit den richtigen Fragen und Anmerkungen auf dem Weg hielt. Sehr dankbar bin ich Cathrin Urbanke MA., die die Arbeit hinsichtlich Formulierungsschwächen abklopfte und mir all die Jahre zur Seite stand. Dipl.-Kff. Juliet Reiss danke ich für all die Momente, in denen Sie ein offenes Ohr für mich hatte. Sie alle gaben mir mit ihrem fundierten Fachwissen viele Anregungen für meine wissenschaftliche Arbeit. Ohne ihr Wissen, ihre Ideen, ihre Kritik und Unterstützung wäre mein Forschungsprojekt niemals soweit gekommen.

Herrn Univ.-Prof. Dr. Hans-Jürgen Sebastian möchte ich für die Erstellung des Zweitgutachtens und dafür, dass er den Stein ins Rollen gebracht hat, danken. Ein herzliches Dankeschön gebührt meinem Doktorvater Univ.-Prof. Dr. Hartwig Steffenhagen, der meine Arbeit mit Geduld und wertvollen Ratschlägen auf Kurs brachte und damit den Grundstein für das Gelingen der Arbeit legte. Beide Professoren haben mit einer hervorragenden Lehre meine Begeisterung für die Themen des Operations Research und des Marketing geweckt und wesentlich zu meiner fachlichen Entwicklung beigetragen.

Raoul Piechatzek

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Abbildungsverzeichnis | vii |
| Tabellenverzeichnis | ix |
| Symbolverzeichnis | xi |
| Abkürzungsverzeichnis | xvii |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Problemstellung | 1 |
| 1.2 Gegenstand und Ziel der Arbeit | 2 |
| 1.3 Gang der Untersuchung | 4 |
| 2 Werbemixplanung und psychographische Werbewirkungen | 7 |
| 2.1 Die Werbeplanung in der Kommunikationspolitik | 7 |
| 2.2 Die Werbemixplanung im Planungsprozess der Werbung | 9 |
| 2.3 Psychographische Werbewirkungen als Ziele der Werbung | 13 |
| 2.4 Modellbasierte Werbemixplanung | 17 |
| 2.5 Fragestellungen zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung | 20 |
| 2.6 Literaturüberblick | 24 |
| 3 Werbewirkungsfunktionen als Grundlagen einer analytischen Werbemixplanung | 35 |
| 3.1 Verläufe von Wirkungsfunktionen | 35 |
| 3.2 Ermittlung von Wirkungsfunktionen | 42 |
| 3.3 Eigenschaften von Wirkungsfunktionen | 44 |
| 3.4 Wirkungsfunktionstypen in der Marketing-Literatur | 47 |
| 4 Werbemixplanung als Vektoroptimierungsproblem | 53 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.1 | Die Werbemix-Entscheidung als Multi-Criteria-Problem | 53 |
| 4.2 | Optimalitätskonzepte | 56 |
| 4.3 | Effektivität und Effizienz eines Werbemix | 61 |
| 4.4 | Lösungsansätze und Klassifizierung von MODM-Methoden | 62 |
| 5 | Entwicklung einer Prozessstrukturierungshilfe zur Werbemixplanung | 65 |
| 5.1 | Entscheidungssituation der Werbemixplanung | 65 |
| 5.2 | Aufbau einer normativen Prozessstrukturierungshilfe zur Werbemixplanung | 67 |
| 5.2.1 | Die Präferenzen des Entscheiders | 70 |
| 5.2.2 | Die Rahmenbedingungen | 73 |
| 5.2.3 | Auswahl relevanter Lösungsmethoden auf Grundlage der Eigenschaften der Werbemix-Aufgabe | 79 |
| 5.2.4 | Das Lösen der Werbemix-Aufgabe | 88 |
| 5.3 | Kritische Würdigung der Prozessstrukturierungshilfe | 88 |
| 6 | Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung | 97 |
| 6.1 | Systematisierung relevanter Werbemixentscheidungen | 97 |
| 6.2 | Optimalitätstheoreme bei einfacher psychographischer Zielsetzung | 99 |
| 6.3 | Optimalitätstheoreme bei mehrfacher psychographischer Zielsetzung | 103 |
| 6.3.1 | Isolierte Betrachtung mehrerer Werbeziele | 104 |
| 6.3.2 | Mehrfache Restriktionen | 105 |
| 6.3.3 | Simultane Betrachtung mehrerer Werbeziele | 112 |
| 6.4 | Kritische Würdigung der Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung | 118 |
| 7 | Anwendung der Prozessstrukturierungshilfe auf Beispiele zur Werbemixplanung | 121 |
| 7.1 | Modellannahmen und Systematisierung relevanter Planungssituationen | 121 |
| 7.2 | Exemplarische Werbemixaufgaben zu den Planungssituationen | 125 |
| 7.2.1 | Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-priori-Mitarbeit | 126 |
| 7.2.2 | Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit | 130 |
| 7.2.3 | Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-priori-Mitarbeit | 135 |
| 7.2.4 | Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit | 137 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.2.5 | Satisfizierung nichtkonkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit | 139 |
| 7.2.6 | Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei interaktiver Mitarbeit | 144 |
| 7.3 | Kritische Würdigung der exemplarischen Werbemixaufgaben | 149 |
| 8 | Schlussbetrachtungen | 151 |
| 8.1 | Zusammenfassung und Erkenntnisgewinn | 151 |
| 8.2 | Grenzen der vorliegenden Arbeit und Ausblick | 154 |
| | Anhang | 157 |
| A | Beschreibung von Lösungsmethoden | 157 |
| A.1 | „Weighting Method“ | 158 |
| A.2 | „ ϵ -constraint Method“ | 160 |
| A.3 | „Reference-Direction Method“ | 162 |
| B | Detaillierte Lösung der exemplarischen Werbemixaufgaben | 165 |
| B.1 | Bemerkungen zu den Lösungen | 165 |
| B.2 | Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen | 167 |
| B.2.1 | Beispiel zu Planungssituation 2 | 167 |
| B.2.2 | Beispiel zu Planungssituation 1 | 178 |
| B.3 | Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen | 179 |
| B.3.1 | Beispiel zu Planungssituation 5 | 179 |
| B.3.2 | Beispiel zu Planungssituation 4 | 190 |
| B.4 | Satisfizierung nichtkonkaver Wirkungsfunktionen | 191 |
| B.5 | Interaktive Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen | 200 |
| C | Optimalitätsinteraktion von Werbeinstrumenten in Werbewirkungsfunktionen | 205 |
| D | Wirkungsfunktionen | 211 |
| | Literaturverzeichnis | I |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Aufbau der vorliegenden Arbeit | 4 |
| 2.1 | Einordnung der Werbemixplanung in den Kontext der Marketingplanung | 8 |
| 2.2 | Der Planungsprozess der Werbung | 10 |
| 2.3 | Werbewirkungskategorien | 15 |
| 2.4 | Das Werbemix-Problem bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung | 21 |
| 2.5 | Überblick ausgewählter Literaturbeiträge | 25 |
| 2.6 | Klassifizierung von Beispielen und Modellen zur Werbeplanung | 27 |
| 3.1 | Schematische Darstellung grundlegender Funktionsverläufe | 37 |
| 5.1 | Struktur und Interdependenzen des Prozesses der Werbemixplanung . . | 68 |
| 5.2 | Bestimmung von Werbewirkungsfunktionen und ihrer Eigenschaften . . | 93 |
| 6.1 | Werbemixentscheidungen unterschiedlicher Komplexität | 98 |
| 6.2 | Der Gradient als negative Linearkombination der Gradienten der aktiven Restriktionen | 107 |
| 6.3 | Der Gradient als Linearkombination der Gradienten der aktiven Restrik- tionen in Beispiel 6.1 | 111 |
| 7.1 | Planungssituationen für Werbemixentscheidungen bei mehrfacher, psy- chographischer Zielsetzung | 123 |
| 7.2 | Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2) | 131 |
| 7.3 | Bildmengen der pareto-optimalen Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssi- tuation 2) | 133 |
| 7.4 | Vergleich von Funktionswerten für ausgewählte Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2) | 134 |
| 7.5 | Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung)) | 135 |
| 7.6 | Mögliche Lösungsmenge L_{Ps11} in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11) . . | 143 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 7.7 | Bildmengen der möglichen (lokal) pareto-optimalen Lösungen in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11) | 143 |
| 7.8 | Interaktiv generierte Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 6) . . | 147 |
| 7.9 | Bildpunkte interaktiv generierter Lösungen sowie Bildmenge der gesamten pareto-optimalen Lösungsmenge in Beispiel 7.1 (Planungssituation 6) | 148 |
| B.1 | Funktionsverläufe in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1, 2, 4, 5 u. 6) . . | 168 |
| B.2 | Zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1, 2, 4, 5 u. 6) | 169 |
| B.3 | Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ und zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2) | 170 |
| B.4 | Lösungsmenge $L_{P_{s5}}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 179 |
| B.5 | Lösungsmengen $L_{P_k(\bar{\epsilon})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 185 |
| B.6 | Funktionsverläufe in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11) | 192 |
| B.7 | Mögliche Lösungsmenge $L_{P_{s11}}$ und zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11) | 193 |
| B.8 | Lösungsmengen $L_{P_k(\bar{\epsilon})}$ in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11) | 199 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.1 | Polyinstrumentale Funktionen zur Modellierung von (Werbe-)Wirkungszusammenhängen | 51 |
| 5.1 | Liste ausgewählter MODM-Methoden | 83 |
| 7.1 | Kurzreferenz zu Beispielen der Planungssituationen | 126 |
| 7.2 | Iterativ generierte Lösungen für ausgewählte Gewichtungen der Werbeziele in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1) | 129 |
| 7.3 | Vergleich zweier Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1) | 130 |
| 7.4 | Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2) | 131 |
| 7.5 | Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2 ohne Werbebudgetrestriktion) | 133 |
| 7.6 | Iterativ generierte Lösungen für ausgewählte Satisfizierungsziele der Werbeziele in Beispiel 7.1 (Planungssituation 4) | 137 |
| B.1 | Lösungsmenge $L_{P(\vec{w})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2) | 171 |
| B.2 | Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung)) | 176 |
| B.3 | Lösungsmenge $L_{P(\vec{w})}$ in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung)) | 177 |
| B.4 | Lösungsmenge $L_{P_{s5}}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 180 |
| B.5 | Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 186 |
| B.6 | Lösungsmenge $L_{P_1(\vec{\epsilon})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 187 |
| B.7 | Lösungsmenge $L_{P_2(\vec{\epsilon})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 188 |
| B.8 | Lösungsmenge $L_{P_3(\vec{\epsilon})}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5) | 189 |
| C.1 | Bedingungen zur Optimalitätsinteraktion bei Werbewirkungsfunktionen | 209 |

Symbolverzeichnis

SYMBOLE

| | |
|-------------------------------|---|
| i, j, k, l, r, s | (Zähl-)Indices |
| p | Anzahl der Zielfunktionen |
| m | Anzahl der Restriktionen |
| n | Anzahl der Instrumente, d.h. der Entscheidungsvariablen |
| x_i | Aktivitätsniveau des i -ten Instrumentes, d.h. i -te Entscheidungsvariable |
| λ_r | Lagrange-Multiplikator für Restriktion r |
| h | Iterationszähler in der „Reference Direction Method“ |
| q | Anzahl zu berechnender Lösungen in der „Reference Direction Method“ |
| w_k | Gewichtung der Zielfunktion $f_k(\vec{x})$ |
| ϵ_k | Satisfizierungsziel für Zielfunktion $f_k(\vec{x})$ |
| t | Zähler in der „Reference Direction Method“ |
| ϵ_{x_i} | (partielle) Elastizität einer Funktion bzgl. der Instrumentvariablen x_i nach Definition 3.2 |
| \vec{x} | Entscheidungsvektor $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, dessen Komponenten x_i die Aktivitätsniveaus der Instrumente darstellen |
| $\vec{x}^0, \dots, \vec{x}^6$ | verschiedene Entscheidungsvektoren |
| \vec{x}^* | (individuelle) Optimallösung nach Definition 4.5 |
| $\vec{x}_{f_k}^*$ | (individuelle) Optimallösung der Funktion $f_k(\vec{x})$ nach Definition 4.5 |
| \vec{x}^{per} | perfekte Lösung nach Definition 4.6 |

| | |
|-------------------------------|---|
| \vec{x}^u | ideale (utopische) Lösung nach Definition 4.7 |
| \vec{z}^* | idealer (perfekter) Zielvektor nach Definition 4.8 |
| $\vec{\lambda}$ | Vektor $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, dessen Komponenten die Lagrange-Multiplikatoren der Restriktionen darstellen |
| $\epsilon_{x_i}^l$ | individuelle, partielle Elastizität der Funktion $f_l(\vec{x})$ bzgl. der Instrumentvariablen x_i |
| $\eta_{x_i}^F$ | (partielle) Elastizität der Skalarisationsfunktion $F(\vec{x})$ bzgl. der Instrumentvariablen x_i |
| \vec{x}^h | Lösung von $P(\psi, X_1)$ in der h-ten Iteration |
| \vec{w} | Vektor $\vec{w} := (w_1, \dots, w_p)^T$, dessen Komponenten w_k Gewichtungen der Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ darstellen |
| $\vec{w}^0, \dots, \vec{w}^6$ | verschiedene Gewichtsvektoren |
| $\vec{\epsilon}, \vec{z}$ | Vektor $\vec{\epsilon} := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)^T$ bzw. $\vec{z} := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)^T$, dessen Komponenten ϵ_k bzw. \bar{z}_k Satisfizierungsziele für die Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ darstellen |
| \vec{f}^h | Zielvektor der Lösung \vec{x}^h von $P(\psi, X_1)$ in der h-ten Iteration, d.h. $\vec{f}^h := \vec{f}(\vec{x}^h)$ |
| f_k^h | k-te Komponente des Zielvektors der Lösung \vec{x}^h von $P(\psi, X_1)$ in der h-ten Iteration, d.h. $f_k^h := f_k(\vec{x}^h)$ |
| y | Wirkung der Werbeinstrumente |
| G | Gewinnfunktion |
| y_h | Wirkung der Werbeinstrumente auf Produkt k |
| y_{kh} | k-te Wirkung der Werbeinstrumente auf Produkt h |
| g, g_r | Restriktionsfunktionen |
| f, f_k | Ziel- bzw. Wirkungsfunktionen |
| L | Lagrange-Funktion |
| F | Skalarisationsfunktion |
| P_{MODM} | Mehrfach-Zielsetzungsproblem nach Definition 4.1 |

| | |
|-----------------------|---|
| P_{Single} | Einfach-Zielsetzungsproblem nach Definition 4.2 |
| P_{Skalar} | transformiertes Mehrfach-Zielsetzungsproblem nach Definition 4.12 |
| $P(\vec{w})$ | Ersatzproblem für P_{MODM} in der „Weighting Method“ nach Definition A.1 |
| $P_k(\vec{\epsilon})$ | Ersatzproblem für P_{MODM} in der „ ϵ -constraint Method“ nach Definition A.2 |
| $P(\psi, X_1)$ | Ersatzproblem für P_{MODM} in der „Reference Direction Method“ nach Definition A.7 |
| P_{Init} | Hilfsproblem zur Bestimmung einer initialen Lösung von P_{MODM} nach Definition B.1 |
| B | Werbebudget |
| X | Menge der zulässigen Lösungen, meist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ |
| $\vec{f}(X)$ | zulässige Zielmenge $\vec{f}(X) := \{ \vec{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in X \}$, d.h. Bild der Menge der zulässigen Lösungen X |
| $I_A, I_A(\vec{x})$ | Indexmenge der in \vec{x} aktiven Restriktionen |
| L_i | i -te Teilmenge der pareto-optimalen Lösungen eines Ersatzproblems für P_{MODM} |
| $L_{P(\vec{w})}$ | Menge der pareto-optimalen Lösungen des Ersatzproblems $P(\vec{w})$ |
| L_{Ps2} | Menge der pareto-optimalen Lösungen in Planungssituation 2 |
| L_{Ps4} | Menge der pareto-optimalen Lösungen in Planungssituation 4 |
| L_{Ps5} | Menge der pareto-optimalen Lösungen in Planungssituation 5 |
| L_{Ps11} | Menge der pareto-optimalen Lösungen in Planungssituation 11 |
| X_1 | modifizierte Menge der zulässigen Lösungen in der „Reference Direction Method“ |
| W | Menge der Gewichtungen \vec{w} |
| X_w | Menge der Lösungen von $P(\vec{w})$ für ein \vec{w} |
| X'_w | Menge der Lösungen von $P(\vec{w})$ für ein $\vec{w} > \vec{0}$ |
| X''_w | Menge der eindeutigen Lösungen von $P(\vec{w})$ für ein \vec{w} |
| X^* | Menge der pareto-optimalen Lösungen von P_{MODM} |

| | |
|------------------------------|--|
| Y_k | Menge der Satisfizierungsziele $\vec{\epsilon}$ für die $P_k(\vec{\epsilon})$ zulässig ist |
| $X_{\vec{\epsilon}}^k$ | Menge der Lösungen von $P_k(\vec{\epsilon})$ für ein $\vec{\epsilon} \in Y_k$ |
| $\hat{X}_{\vec{\epsilon}}^k$ | Menge der eindeutigen Lösungen von $P_k(\vec{\epsilon})$ für ein $\vec{\epsilon} \in Y_k$ |
| H, L, E, K | Indexmengen in der „Reference Direction Method“ |
| S_i^l | Hilfsgröße nach Gleichung (6.30) |

MATHEMATISCHE SYMBOLE

| | |
|-----------------------|--|
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen |
| \mathbb{N} | Menge der natürlichen Zahlen |
| \emptyset | Leere Menge |
| \mathbb{R}^n | n-dimensionaler euklidischer Vektorraum der reellen Zahlen |
| \mathbb{R}_+^n | n-dimensionaler euklidischer Vektorraum der positiven, reellen Zahlen |
| $U_\delta(\vec{x}^*)$ | Umgebung von \vec{x}^* , $U_\delta(\vec{x}^*) := \{\vec{x} \mid \vec{x} - \vec{x}^* < \delta\}$ |
| \cdot^T | Transposition; es gilt: $(x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}$ |
| $:=$ | wird definiert als |
| \equiv | wird gleichgesetzt mit |
| \mapsto | wird abgebildet auf |
| $ $ | für die gilt |
| \notin | nicht enthalten in |
| \in | enthalten in |
| \vee | oder |
| \wedge | und |
| \subseteq | ist Teilmenge von |
| \cap, \bigcap | ist eine Schnittmenge von |

| | |
|--|--|
| \exists | es existiert (mindestens ein) |
| \nexists | es existiert kein |
| \forall | für alle |
| \cup, \bigcup | ist eine Vereinigungsmenge von |
| $\vec{0}$ | der Nullvektor $\vec{0} := (0, 0, \dots, 0)^T$ |
| $\min_{\vec{x} \in X}$ | minimiere über alle \vec{x} enthalten in X |
| $\max_{\vec{x} \in X}$ | maximiere über alle \vec{x} enthalten in X |
| $\nabla, \nabla_{\vec{x}}, \nabla_{\vec{\lambda}}$ | Nabla-Operator, d.h. $\nabla = \nabla_{\vec{x}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ bzw. $\nabla_{\vec{\lambda}} := \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \right)^T$ |
| \rightarrow | bei Übergang zu |
| $\nabla^2 f(\vec{x})$ | Hesse-Matrix einer Funktion $f(\vec{x})$, d.h. $\nabla^2 f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ |

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|---------------|-----------------|
| Abb. | Abbildung |
| bzw. | beziehungsweise |
| bzgl. | bezüglich |
| Bd. | Band |
| d.h. | das heißt |
| etc. | et cetera |
| f. | folgende |
| ff. | fortfolgende |
| ggfs. | gegebenenfalls |
| Hrsg. | Herausgeber |
| i.d.R. | in der Regel |
| No. | Number |
| Nr. | Nummer |
| S. | Seite |
| Tab. | Tabelle |
| u.a. | unter anderem |
| usw. | und so weiter |
| u.U. | unter Umständen |

| | |
|---------------|--|
| vs. | versus |
| vgl. | vergleiche |
| Vol. | Volume |
| et al. | et alii |
| z.B. | zum Beispiel |
| z.T. | zum Teil |
| DSS | D ecision S upport S ystem |
| EIA | E lastizitäts i nteraktion |
| IMK | I ntegrierte M arketing k ommunikation |
| KTB | (Karush-) K uhn- T ucker B edingungen |
| LP | L inear P rogramming bzw. L ineare P rogrammierung |
| MADM | M ulti A tttribute D ecision M aking |
| MODM | M ulti O bjective D ecision M aking |
| MOLP | M ulti O bjective L inear P rogramming |
| NLP | N onlinear P rogramming bzw. N ichtlineare P rogrammierung |
| OIA | O ptimalitäts i nteraktion |
| RIA | R eaktions i nteraktion |
| VOP | V ector O ptimization P roblem bzw. V ektor o ptimierungs p roblem |

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Investitionen der deutschen Wirtschaft in Werbung betragen im Jahr 2008 ca. 30,67 Mrd. €. ¹ Angesichts derartiger Größenordnungen scheint der viel zitierte, resignierende Ausspruch

Half the money I spend on advertising is wasted; the trouble is, I don't know which half. ²

unheilvoller denn je. Dieser Ausspruch zeigt wohl in aller Deutlichkeit das Unwohlsein, das alle Werbetreibenden erfasst, wenn es um die Verteilung des Werbebudgets auf mögliche Werbeaktivitäten geht. ³ Die Frage, **welche Werbeaktivitäten in welchem Ausmaß** verfolgt werden sollen, um das zur Verfügung stehende Werbebudget **bestmöglich** zur Erreichung der gesteckten Werbeziele zu nutzen, resultiert aus der **gleichzeitigen Verfolgung mehrerer, verschiedener Werbeziele** und ist geprägt durch die **unterschiedliche Effektivität der Aktivitäten**. Werbeaktivitäten weisen bei unterschiedlichen Einsatzkosten insbesondere im **Mix** unterschiedliche qualitative, quantitative und funktionsspezifische Eignungen auf. ⁴ Auch ist theoretisch und empirisch gezeigt worden, dass sich eine verbesserte Werbebudget-Allokation wesentlich

¹ Und in den Jahren 2002-2008 durchschnittlich 29,87 Mrd. €, vgl. ZAW (2007), ZAW (2008) und ZAW (2009).

² Der Ursprung dieser Äußerung und ihr genauer Wortlaut sind nicht zweifelsfrei geklärt. Nach Disch (2000) geht dieses „Bonmot“ wahrscheinlich auf den amerikanischen Kaufmann John Wanamaker (*11.07.1838–†12.12.1922) oder auf den amerikanischen Zeitungsverleger Adolph S. Ochs (*12.03.1858–†08.04.1935) zurück. Bei dem gern zitierten amerikanischen Unternehmer Henry Ford (*30.07.1863–†07.04.1947) hat Disch keinerlei Hinweise darauf gefunden.

³ Schuwirth/Packenius (2004) bezeichnen u.a. die Frage nach der Budgetallokation als die „(...) Gretchenfragen des Marketing“ (Schuwirth/Packenius (2004), S. 128).

⁴ Vgl. Köcher/Halleemann (2004), S. 85ff., HÖRZU FUNK UHR (1989), S. 23ff., HÖRZU FUNK UHR (1991), S. 7ff., Tsao/Sibley (2004), S. 140 und Vakratsas/Ma (2005), S. 250 oder die in Kall (1996), S. 19 zitierten Studien.

vorteilhafter auswirkt als eine Veränderung der Höhe des Werbebudgets.⁵ Von zentraler Bedeutung ist die Frage nach dem besten Mix ebenfalls für Konzepte wie die integrierte Marketingkommunikation, die u.a. die Integration verschiedenster Kommunikationsaktivitäten zur Erzeugung einer verbesserten Kommunikationseffektivität, zur Stärkung von Wettbewerbsvorteilen und zur Erzielung höherer Kontaktqualitäten anstrebt.⁶ Während für eine einzelne, ökonomische Zielsetzung die Mixproblematik auf Ebene der Marketing-Instrumente und die monetäre Verteilungsproblematik im Rahmen der Werbebudget- und Werbestreuplanung in der Literatur mannigfaltig diskutiert werden,⁷ bleiben diese Fragestellungen für **mehrfache, psychographische Zielsetzungen**, die eine größere Wirkungsnahe zu den Werbeaktivitäten aufweisen,⁸ weitestgehend unberücksichtigt.

1.2 Gegenstand und Ziel der Arbeit

Die Frage, wie ein monetäres Werbebudget auf Werbeaktivitäten verteilt werden kann, um die vom Werbetreibenden gesteckten Werbeziele möglichst effektiv und effizient zu erreichen, kann sowohl für ökonomische Ziele als auch für psychographische Werbeziele und insbesondere für mehrere Ziele gleichzeitig verfolgt werden. Dieses klassische Ressourcenallokationsproblem, das hier für die **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** betrachtet wird, ist **Gegenstand der vorliegenden Arbeit**.

Im Unterschied zu Beiträgen zur Marketing-Mix-Planung liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit nicht auf der Ebene der Marketing-Instrumente (z.B. *Preis* oder *Absatzförderungsbudget*) und ihrer Wirkung auf ein einzelnes, ökonomisches Ziel (z.B. Gewinn oder Umsatz).⁹ Vielmehr wird die Mixplanung auf der Ebene der Werbeinstrumente und für mehrere psychographische Werbeziele sowie unter Wahrung von Werbebudget- und Werbeinstrumentrestriktionen untersucht. Dies hebt die vorliegende Arbeit auch von den Literaturbeiträgen¹⁰ zur Werbebudgetierung und Werbestreuung ab. Sie ori-

⁵ Vgl. Albers (1998), S. 211. Mantrala et al. (1992), S. 162 vermuten, dass die Überzeugung, die Budgethöhe würde einen höheren Einfluss auf Absatz oder Profitabilität haben als die Budgetallokation, aus dem Top-Down-Budgetierungsansatz entsteht.

⁶ Vgl. Stockmann (2007), S. 15 oder Naik/Raman (2003), S. 375.

⁷ Vgl. z.B. Kotler (1971) oder Schmalen (1992).

⁸ Vgl. Sander (2004), S. 554.

⁹ Vgl. z.B. Kotler (1971).

¹⁰ Vgl. z.B. Schmalen (1992), Rahders (1989) oder Schubert (1979).

entiert sich dabei an einer (modell-)analytischen (im Gegensatz zu einer heuristischen) Bewältigung der Werbemix-Entscheidungsaufgabe.

Das **Ziel dieser Arbeit** ist es, den Praktiker bei der Lösung einer solchen Werbemixplanungsaufgabe zu unterstützen. Es gilt, den mit der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung verbundenen **Entscheidungsprozess darzulegen und zu strukturieren**. Dabei ist aufzuzeigen, wie bestimmte Entscheidungen und Eigenschaften der zugrunde liegenden Entscheidungssituation die Werbemixplanungsaufgabe und den dazugehörigen, mathematisch-formalen Lösungsprozess beeinflussen. Dies erscheint notwendig, da der Ausgabenbereich der Werbung einer Unternehmung über die am wenigsten gesicherte Informationsbasis in Form einer umfassenden, vollständigen und zusammenhängenden Entscheidungsunterstützung und Theorie in Relation zu seinem, wie oben erwähnt, erheblichen monetären Umfang verfügt.¹¹

Deshalb wird zunächst der Frage nachgegangen, wie der **Prozess der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** für den Entscheider überschaubar in ein **System aufeinander aufbauender Elemente und Teilentscheidungen** strukturiert werden kann und welche Elemente einer Entscheidungssituation zur Werbemixplanung den Lösungsprozess beeinflussen. Ein Planungs- und Analyse-Instrument in Form einer **Prozessstrukturierungshilfe** wird dann darauf aufbauend zur Unterstützung des Entscheiders entwickelt. Die Prozessstrukturierungshilfe soll sowohl wissenschaftlichen Anforderungen und den mit in den Entscheidungs- und Lernprozess einzubeziehenden Entscheider-Präferenzen gerecht werden, als auch praktische Rahmenbedingungen soweit wie möglich berücksichtigen.

Eine **Herleitung von Optimalitätstheoremen** für Entscheidungssituationen der Werbemixplanung hat dann zum Ziel, dem Entscheider in der Praxis **allgemeine Handlungsanweisungen** für Werbemixaufgaben mit mehrfacher, psychographischer Zielsetzung zu bieten.

Die darauf folgende exemplarische **Anwendung der Entscheidungshilfe auf modellgestützte, numerische Beispiele** zur Werbemixplanung verdeutlicht den Entscheidungsprozess und rundet in der vorliegenden Arbeit die Betrachtung der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung ab.

Die Arbeit unterstellt, dass es prinzipiell möglich ist, die für die analytische Bewältigung der Werbemixplanung erforderlichen Werbewirkungsfunktionen der psychographischen Wirkungszusammenhänge empirisch zu ermitteln. Die Ergebnisse der jüngeren empi-

¹¹ Vgl. Lilien et al. (1992), S. 263 und Simon/Möhrle (1993), S. 303.

rischen Forschung¹² ermutigen dazu, diese Annahme in naher Zukunft insbesondere in vielen Feldern des Konsumgüterbereiches als erfüllbar einzustufen.

1.3 Gang der Untersuchung

Für die Untersuchung zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung wird folgender, in Abbildung 1.1 dargestellter Aufbau gewählt:

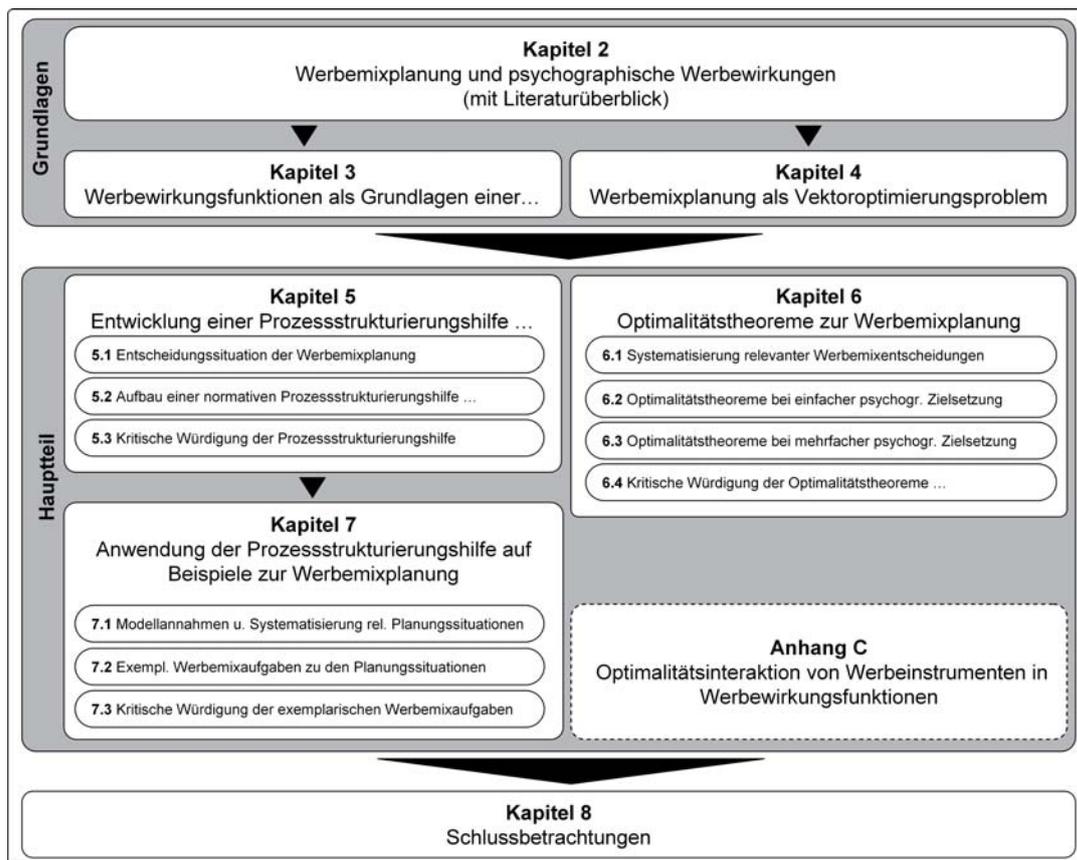


Abbildung 1.1: Aufbau der vorliegenden Arbeit

Um den Leser in die theoretischen **Grundlagen** und die **Terminologie** der **Werbemixplanung** und **psychographischen Werbewirkungen** einzuführen, erfolgt zunächst in **Kapitel 2** eine Einordnung der Werbeplanung in die Kommunikationspolitik und eine Benennung und Erläuterung der wichtigsten Entscheidungsfelder der Werbeplanung, der die Werbemixplanung zuzuordnen ist. Darauf aufbauend wird das Entscheidungsfeld der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung von den anderen Entscheidungsfeldern der Werbeplanung abgegrenzt und die in

¹² Vgl. z.B. Hallemann (2001), Köcher/Hallemann (2004) oder Vogel/Hallemann (2008).

der vorliegenden Arbeit untersuchten Aspekte in Form konkreter **Fragestellungen** präzisiert. Ein **Literaturüberblick** hinsichtlich des Gegenstandes der vorliegenden Arbeit folgt in **Abschnitt 2.6**.

Aus den konkreten Fragestellungen in Abschnitt 2.5 wird deutlich, dass eine Betrachtung von Wirkungsfunktionen als Kern mathematischer Entscheidungsmodelle, ihrer Eigenschaften und ihrer Behandlung im Marketing notwendig ist, da spätere Kapitel bei der Beantwortung der Fragestellungen auf diese Aspekte aufbauen. **Kapitel 3** behandelt das Themenfeld der **Werbewirkungsfunktionen** im Marketing, da diese die **Grundlage einer analytischen Werbemixplanung** bilden. Dazu werden Definitionen zu wichtigen Eigenschaften von Wirkungsfunktionen präsentiert und die häufigsten Wirkungsfunktionen aus der Marketing-Literatur und ihre Eigenschaften aufgelistet. Neben der Verfolgung psychographischer Werbeziele ist die Betrachtung der mehrfachen Zielsetzung ein wesentlicher Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. In **Kapitel 4** wird dazu die **Werbemixplanung als Vektoroptimierungsproblem** diskutiert. Es werden grundlegende Konzepte aus dem Operations Research präsentiert, auf die im Hauptteil zurückgegriffen wird.

Der **Hauptteil** der vorliegenden Arbeit beginnt in **Kapitel 5** mit der **Entwicklung einer Prozessstrukturierungshilfe** zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung. Nach der Strukturierung des Entscheidungsprozesses der Werbemixplanung werden in **Kapitel 6** auf Basis der Marginalanalyse und Operations-Research-Methoden **Optimalitätstheoreme** hergeleitet, um die Existenz und Möglichkeiten allgemeiner Handlungsempfehlungen zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung zu klären.

Aufgrund der eingeschränkten Nutzbarkeit der Optimalitätstheoreme werden in **Kapitel 7** exemplarische **Entscheidungsaufgaben zu Werbemixplanungssituationen** bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung betrachtet. Sie werden anhand der in Kapitel 5 vorgestellten Prozessstrukturierungshilfe analysiert, strukturiert und mittels ausgewählter Operations-Research-Methoden gelöst.

Die Ergebnisse in **Anhang C** zur **Optimalitätsinteraktion von Werbeinstrumenten in Werbewirkungsfunktionen** sind teilweise von den Ergebnissen der Kapitel 5 bis 7 losgelöst. Sie erwachsen aus der mathematischen Bestimmung und Behandlung der Optimalitätsinteraktion als charakterisierende Eigenschaft und als Bewertungskriterium zur Plausibilität von Werbewirkungsfunktionen für psychographische Werbeziele.

Mit der **Schlussbetrachtung** in **Kapitel 8** erfolgt eine Zusammenfassung der zentralen Ergebnisse und eine Darlegung des gewonnenen Erkenntnisgewinnes für die Marketing-Praxis. Mit einigen Anmerkungen zur ihren Grenzen und Herausforderungen für zukünftige Forschungsaktivitäten schließt die vorliegende Arbeit.

2 Werbemixplanung und psychographische Werbewirkungen

2.1 Die Werbeplanung in der Kommunikationspolitik

Der Ausgangspunkt zur Einordnung der Werbeplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung in das theoretische Grundgerüst des Marketings sei die Kommunikationspolitik eines Unternehmens. Unter **Kommunikationspolitik** werden sämtliche **Entscheidungen** und **Aktivitäten** zur Gestaltung und Übermittlung von Informationen an bestimmte Adressaten der Kommunikation zusammengefasst.¹ Dies dient der **Beeinflussung der Adressaten** in den Bereichen Wissen, Einstellungen, Präferenzen und Verhalten zur **Erreichung kommunikationspolitischer Ziele** des Unternehmens.²

Die Festlegung der Kommunikationspolitik ist, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, Bestandteil der **Marketing-Mix-Planung**, welche die Planung des Einsatzes der Marketing-Instrumente umfasst. **Marketing-Instrumente** repräsentieren Formen des auf Markteteiligte gerichtete Beeinflussungshandelns zur Förderung von Transaktionsprozessen. Dies sind z.B. die Produktinnovation und -differenzierung in der **Produktpolitik**, der Preis und die Konditionen in der **Kontrahierungspolitik**, der Vertrieb und der Verkauf in der **Distributionspolitik** und die Werbung in der **Kommunikationspolitik**.³

In der Kommunikationspolitik werden die Entscheidungen zum Einsatz der **Kommunikationsinstrumente**, d.h. *Werbung, Public Relations, Sponsoring, Product Placement*,

¹ Vgl. Sander (2004), S. 522.

² Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 623.

³ Vgl. Sander (2004), S. 349.

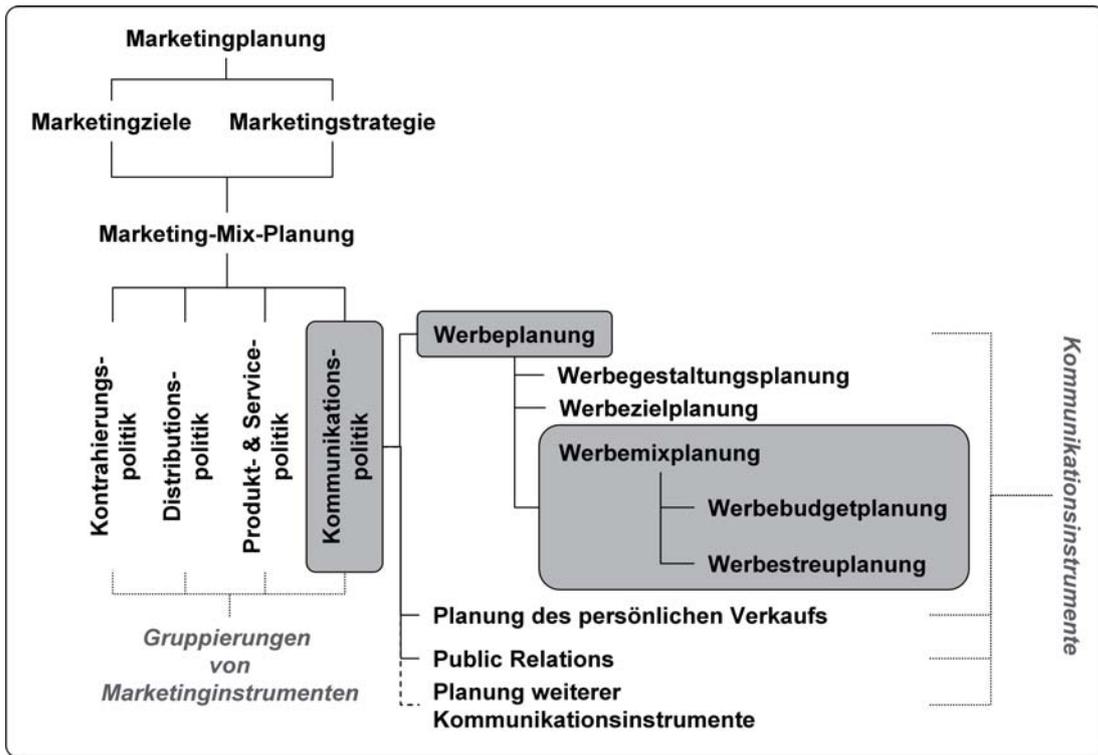


Abbildung 2.1: Einordnung der Werbemixplanung in den Kontext der Marketingplanung (in Anlehnung an Sander (1993), S. 267)

usw. getroffen.⁴ Die **Werbplanung** befasst sich mit der Planung der zu verfolgenden **Werbeziele**, der **Bestimmung des einzusetzenden Werbebudgets**, dessen zeitlicher und quantitativer **Verteilung auf die Werbeaktivitäten** und der **Gestaltung der Werbebotschaften**.

Gesteuert wird die Planung des Marketing-Mix durch die **Marketing-Ziele** und die **Marketing-Strategie** der Unternehmung. Die **Kommunikationsziele** leiten sich aus den übergeordneten Marketing-Zielen ab⁵ und bilden aufgrund ihrer Koordinations-, Steuerungs-, Kontroll- und Motivationsfunktion die Basis für den Einsatz der absatzpolitischen Instrumente, insbesondere – neben den Instrumenten aus der Preis-, Produkt- und Distributionspolitik – der **Kommunikationsinstrumente**.⁶ Dabei kommt dem **Kommunikationsinstrument Werbung** in vielen Branchen eine hohe Bedeutung zu.

⁴ Die Abgrenzung einzelner Kommunikationsinstrumente wie *Sponsoring*, *Direktmarketing*, *klassische Werbung (Mediawerbung)*, *Werbung mit neuen Medien (Online- und Mobile-Werbung)*, *Verkaufsförderung*, *Public Relations*, *Messen und Events*, *Corporate Identity* und *Product Placement*, ist nicht eindeutig und nicht völlig trennscharf darstellbar, vgl. dazu Sander (2004), S. 537 oder Homburg/Krohmer (2003), S. 649. Nach Steffenhagen (2008), S. 129ff. können bei Bedarf die Kommunikationsinstrumente nach den ihnen zugrunde liegenden Kommunikationsformen, z.B. persönlich, unpersönlich, direkt, indirekt, usw. kategorisiert werden.

⁵ Vgl. Berndt (1993), S. 9, Sander (2004), S. 527 oder Steffenhagen (2009), S. 359ff.

⁶ Vgl. Sander (2004), S. 522.

Die **Rolle der Werbung** als Teil einer Marketing-Strategie wird oft unterschätzt, da nach Hackley (2005) Marketing-Manager häufig die Liste der Aktivitäten, die notwendig sind, um ein Produkt in den Markt zu bringen – nämlich Produktgestaltung, Markt-Testing, Businessanalyse, Produktionsplanung, Materialbeschaffung, Vertrieb und Werbung – auch als Prioritäten-Liste ihrer relativen Wichtigkeit entsprechend ihrer Reihenfolge ansehen. Werbung und andere Kommunikationsaktivitäten garantieren zwar nicht den erfolgreichen Abschluss eines Transaktionsprozesses, jedoch sind sie eine Notwendigkeit für dessen Erfolg.⁷

Werbung und andere Kommunikationsaktivitäten sind aus Sicht eines Managers häufig der **letzte Schritt** zum Anstoß eines Transaktionsprozesses, aus Sicht der Nachfrager dagegen meistens der **erste (und einzige) Schritt** vor der Realisierung des eigenen Kauf- und Verwendungsverhaltens. **Werbung** ist also der typische **Nachfrager-Berührungspunkt** mit der **Marketing-Planung und -Koordination**. Sie hilft dem Nachfrager Kenntnisse über Produkte und Dienstleistungen zu erlangen und Einstellungen, Interessen und Verhaltensabsichten in Verbindung mit den angebotenen Produkten, Dienstleistungen und/oder der Marke der Unternehmung aufzubauen. Bei den Stakeholdern der Unternehmung hilft Werbung zudem Vertrauen in den wirtschaftlichen Erfolg der Marke und der Unternehmung selbst aufzubauen. Damit ist Werbung ein sichtbarer Beweis für die wirtschaftliche **Glaubwürdigkeit der Unternehmung** und deren **Präsenz in Markt und Wettbewerb**.⁸ Die Werbung nimmt somit neben ihren informativen und kommunikativen Eigenschaften auch eine **strategische Rolle** ein.⁹

2.2 Die Werbemixplanung im Planungsprozess der Werbung

Die **Werbeplanung** und die übergeordnete **Kommunikationsplanung** sind nach Bruhn (2005), Homburg/Krohmer (2003) und Sander (2004) „(...) ein systematisch-methodischer sowie integrativ ausgerichteter Prozess der Erkenntnis und Lösung kommunikationspolitischer Problemstellungen“¹⁰. Teilphasen des Planungsprozesses der Wer-

⁷ Vgl. Hackley (2005).

⁸ Dies gilt insbesondere für Internet-basierte Unternehmen deren Geschäftsmodell (Internet-)Werbung ist, vgl. Danaher/Mullarkey (2003), S. 263.

⁹ Vgl. Hackley (2005), S. 56.

¹⁰ Bruhn (2005), S. 61. Eine ausführliche Charakterisierung der Kommunikationsplanung ist ebenfalls in Bruhn (2005) zu finden.

bung sind nach Sander (2004) die **Werbezielplanung**, die **Werbebudgetplanung** (Werbebudgetierung), die **Werbegestaltungsplanung** und die **Werbestreuplanung**, die im Rahmen des Planungsprozesses werblicher Entscheidungen auf einer vorangehen-

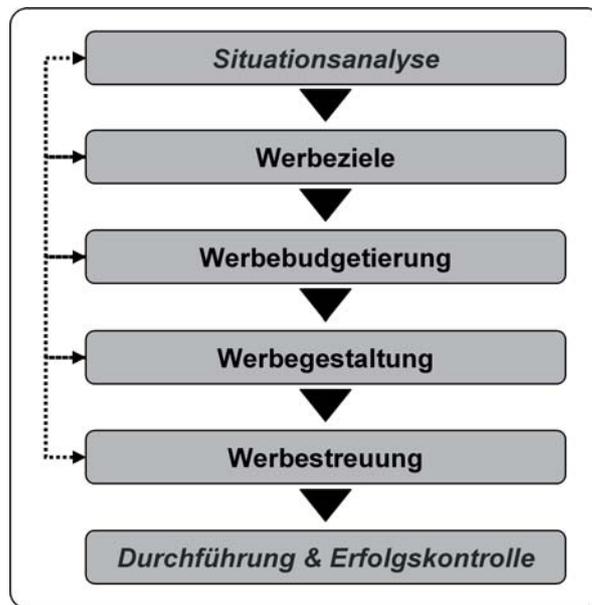


Abbildung 2.2: Der Planungsprozess der Werbung

den **Situationsanalyse** aufbauen. In dieser werden alle für die Planung der Werbung relevanten Faktoren, wie z.B. wirtschaftliche, rechtliche, technische oder gesamtgesellschaftliche Daten, identifiziert und analysiert. Durch eine zeitlich nachgelagerte **Erfolgskontrolle der durchgeführten Werbemaßnahmen** wird festgestellt, ob die gesteckten Ziele erreicht wurden und ob eventuell weitere Maßnahmen zur Zielerreichung notwendig sind.¹¹ Eine schematische Darstellung dieses Planungsprozesses der Werbung zeigt Abbildung 2.2.¹² Die einzelnen Planungsphasen stellen Entscheidungsfelder dar, die durch verschiedene Handlungsvariablen und darauf aufbauende, zu treffende Entscheidungen geprägt sind. Die gezeigte Reihenfolge der Teilplanungsphasen stellt den Standardfall dar, der aufgrund von Interdependenzen auch einen iterativen Charakter annehmen kann.

Die **Werbezielplanung** umfasst die **Abgrenzung und Gewichtung der relevanten Werbeziele** bzgl. der **Werbezielarten** (Gewinn, Umsatz, Markenbekanntheit, usw.), der **Werbezielgruppen** (die umworbenen Personengruppen), der **Werbeobjekte** (das/die zu bewerbende Produkt/Dienstleistung oder die Produktgruppe), des

¹¹ Vgl. Sander (2004), S. 535ff.

¹² Vgl. Kall (1996), S. 12 Abb. 1 und Sander (2004), S. 553 Abb. 3.162.

Zeitbezuges (bis wann die Ziele zu erreichen sind) und des zu erreichenden **Ziel- ausmaßes**.¹³ Erst eine Präzisierung hinsichtlich **Zielart**, **Objektbezug**, **Käuferseg- mentbezug**, **Zeitbezug** und **Zielausmaß** erfüllt die Anforderungen einer vollständi- gen Werbezielformulierung.¹⁴

Die **Werbebudgetierung** befasst sich mit der Festlegung der Höhe der finanziel- len Mittel für die Kommunikationsaktivitäten und deren Verteilung auf verschiedene **Kommunikations- bzw. Werbeinstrumente**¹⁵, wie z.B. *klassische Mediawerbung*, *Außenwerbung*, *Direktwerbung*, *Online-Werbung*, *Sponsoring*, *Messe- und Eventwer- bung* oder *Point-of-Sales-Werbung*.¹⁶ **Werbeaktivitäten** stellen unterschiedliche Be- legungen von Medien mit Werbemitteln zu gewissen Zeitpunkten dar. Unterschiedliche Erscheinungsformen der Werbung wie z.B. Anzeigen bei Zeitungen oder Zeitschriften, Spots in Funk, Fernsehen oder Kino, Plakate, Werbebriefe, Banner auf Websites usw. sind unterschiedliche Werbemittel bei unterschiedlichen Werbeträgern bzw. in unter- schiedlichen Mediagattungen. Die Mediagattungen können gedanklich auf die Ebene der Werbeinstrumente gehoben und somit ebenfalls als Werbeinstrumente bezeichnet werden.¹⁷

Der Aspekt der **Werbemittelgestaltung** umfasst die Gestaltung der Werbemittel bzgl. Format, Farbigkeit, Stilelemente, Auftreten von Personen, Handlungsstränge, Texte, Bilder aber auch Gesprächsinhalte, Argumentationsreihenfolge, Gestik, Mimik und vieles mehr.¹⁸

Innerhalb der **Werbestreuplanung** sind Entscheidungen zur **Belegung von Werbe- trägern**, zu dem auszuübenden **Werbedruck** (Belegungshäufigkeit der Medien bzw. Anzahl der Konfrontationen des Adressaten der Werbung mit den Werbeaktivitäten), zur **zeitlichen Zielung** (Zeitpunkt und zeitliche Verteilung der Werbeaktivitäten) und zur damit einhergehenden Verteilung des Werbebudgets auf diese Aspekte zu tref- fen.¹⁹

Zwischen den einzelnen Bereichen der Werbeplanung bestehen zahlreiche **Interdepen- denzen**²⁰ (gestrichelte Pfeile in Abbildung 2.2). So ist z.B. die Planung der Werbe-

¹³ Vgl. Sander (1993), S. 270.

¹⁴ Vgl. Steffenhagen (1993), S. 298.

¹⁵ Zur Abgrenzung der Begriffe Kommunikationsinstrument und Werbeinstrument vgl. Steffenhagen (2008), S. 131ff.

¹⁶ Vgl. Schmalen (1992), S. 47, Bruhn (2005), S. 233 und Sander (2004), S. 556.

¹⁷ Vgl. Steffenhagen (2006b), S. 200.

¹⁸ Vgl. Sander (2004), S. 571.

¹⁹ Vgl. Schmalen (1992), S. 125 und Sander (2004), S. 584.

²⁰ Vgl. Sander (2004), S. 552.

ziele eng verknüpft mit der Werbegestaltungplanung bzw. Werbebudgetplanung, da i.d.R. unterschiedliche Werbeziele unterschiedlicher Werbemittelgestaltungen bzw. unterschiedliche Werbezielausmaße unterschiedlicher Werbebudgets bedürfen. Die Interdependenzen zwischen der Werbebudgetplanung und der Werbestreuplanung werden insbesondere am Beispiel der Bestimmung der Höhe des Werbebudgets und seiner Allokation auf die Werbeinstrumente zur Erreichung der gesteckten Werbeziele deutlich, da sich diese beiden Entscheidungen gegenseitig bedingen. Zum einen ist nicht jede angestrebte Zielausprägung der Werbeziele mit jeder beliebigen Höhe des Werbebudgets zu erreichen. Zum anderen kann das zur Verfügung stehende Werbebudget eine feste Rahmenbedingung der Ausgangssituation sein, z.B. durch Vorgabe der Budgethöhe auf höherer Managementebene.

In der vorliegenden Arbeit soll unter **Werbemixplanung** die Bestimmung des quantitativ aufeinander abgestimmten Einsatzes verschiedener Werbeinstrumente zur Erreichung der festgelegten, quantitativen Werbeziele verstanden werden. Die Zusammenstellung der Werbeaktivitäten zu einem **Werbemix** wird in Abhängigkeit von zur Verfügung stehenden **Werbepudget** und **Werbeinstrumentbudgets** sowie der **Anzahl** und **Art** der zu verfolgenden Werbeziele betrachtet.²¹

Die Werbemix-Entscheidung umfasst ggfs. die **Werbepudget-Entscheidung** falls die Höhe des für die betrachtete Werbeperiode zur Verfügung stehenden Werbebudgets aus der Werbemix-Entscheidung dadurch bestimmt wird, dass die durch Geldeinheiten operationalisierten Werbeaktivitäten keiner Werbebudget-Restriktion unterliegen. Die Höhe des Werbebudgets ist damit neben dem optimalen Werbemix die resultierende Größe der Werbemixplanung bzw. der analytisch-kompositionellen Werbeetatplanung.²² Wie in der Literatur häufig betont,²³ sollten das Werbebudget und dessen Allokation auf Werbeinstrumente aufgrund der Interdependenzen der Entscheidungen **simultan** bestimmt werden, da sich die Werbebudgethöhe und die Verteilung des Werbebudgets gegenseitig bedingen.²⁴ Jedoch erfolgt wegen der damit verbundenen Erhöhung der Komplexität meist eine **sukzessive** Bestimmung.²⁵ Ein vorab festgelegtes Werbebudget ist wohl der in der Praxis am häufigsten anzutreffende Fall. Dies resultiert aus der hier-

²¹ Üblicherweise wird diese Thematik in der Marketing-Literatur auf den übergeordneten Ebenen der Kommunikationsinstrumente und der Marketing-Instrumente für den Kommunikationsmix und den Marketing-Mix diskutiert. Auf Ebene unterschiedlicher Medien spricht man von einem Mediamix, im Rahmen der Mediaselektion des Werbeinstrumentes *Klassische Werbung* von Werbestreuplanung.

²² Vgl. Steffenhagen (2009), S. 345.

²³ Vgl. Sander (2004), S. 558, Schmalen (1992), S. 168 und Bruhn (2005), S. 235.

²⁴ Vgl. Jaensch/Korndörfer (1967), S. 448.

²⁵ Gängige Methoden zur sukzessiven (Werbe-)Budgetierung behandelt z.B. Bruhn (2005), S. 233ff.

archischen und/oder zeitlich vorgezogenen Budgetierung in der Unternehmenspraxis, in der auf übergeordneten sachlichen und/oder organisatorischen Entscheidungsebenen zunächst funktionale Etatkonflikte bewältigt werden müssen (Top-down-Planung).²⁶ Auf die Werbemixplanung als Allokationsproblem wirkt sich ein fixiertes Werbebudget B als einzuhaltende Restriktion $B \geq \sum_{i=1}^n x_i$ aus, wobei x_i der Werbebudget-Anteil ist, der auf Werbeinstrument i entfällt. Ist das Werbebudget dagegen nicht in seiner Höhe fixiert, gilt es, mit der Werbemixplanung neben der Bestimmung desjenigen Werbeinstrumente-Mix, der die beste Wirkung in den Werbezielen erzeugt, gleichzeitig die daraus resultierende, optimale Werbebudgethöhe durch $B = \sum_{i=1}^n x_i$ zu bestimmen. Dieses Vorgehen entspricht der theoretischen Forderung nach simultaner Bewältigung der Werbebudgetierung und der Werbemixplanung.²⁷ Ein gänzlich unbeschränktes Werbebudget wird es jedoch in der Praxis nie geben, da Ergebnisse der Werbemixplanung denkbar sind, die eine Werbebudgethöhe fordern, die von der Unternehmung nicht aufgebracht werden kann. Werbemixplanungen sind damit stets unter der Prämisse eines „realistischen“ Budgets, d.h. einer Werbebudgetrestriktion, zu lösen. Bei sukzessiver Bestimmung müssen aufgrund der (möglicherweise zu niedrig angesetzten) Budgethöhe die gewünschten Zielausprägungen des Entscheiders nicht immer erreichbar sein. Zudem gilt es in der Werbemixplanung die Verfügbarkeit von Werberaum und Werbeträgern zu berücksichtigen. Die minimal und maximal mögliche Belegung von Werbeträgern ist in Form von einzuhaltenden **Werbeinstrumentrestriktionen** $0 < a \leq x_i \leq b < B$ in das Allokationsproblem mit einzubeziehen.

2.3 Psychographische Werbewirkungen als Ziele der Werbung

Die in der Werbezielplanung aus den Marketing-Zielen abzuleitenden kommunikationspolitischen Ziele können das äußere Verhalten der Nachfrager bzw. Verwender oder das innere Verhalten als Ansatzpunkt von Zielformulierungen betreffen.²⁸ Das **äußere Verhalten** von Verwendern spiegelt sich u.a. in deren Kauf- und Verwendungsverhalten wider. Es prägt daher die **ökonomischen Ziele** eines Anbieters, nach denen ein Unternehmen streben kann, wie z.B. Gewinn, Umsatz, Absatz etc.

²⁶ Vgl. Bruhn (2005), S. 235f. oder Sander (2004), S. 552f.

²⁷ Vgl. Bruhn (2005), S. 276f., Schmalen (1992), S. 168 und Rahders (1989), S. 218.

²⁸ Vgl. Sander (2004), S. 526 und Steffenhagen (2008), S. 68.

Werden derartige ökonomische Größen als Ziele der Werbung betrachtet, so stellt sich die Frage nach der **Zurechenbarkeit** der Ursache (Werbung) zur Wirkung (z.B. Erhöhung des Absatzes), denn in die beobachtete, ökonomische Wirkung gehen auch die Auswirkungen anderer Marketing-Instrumente wie *Preis* oder *Produktgestaltung*, d.h. des gesamten Marketing-Mix, ein.²⁹ Es fehlt ihnen im Allgemeinen an der Eigenschaft oder Fähigkeit, **sensibel** und **selektiv** auf Änderungen des Instrumentes *Werbung* zu reagieren, da sie **nicht überwiegend werbebedingt** sind. **Taugliche** und **sinnvolle Werbeziele** sind somit nur solche wünschenswerten, zu erzielenden Vorzugszustände werblicher Kommunikationsaktivitäten, welche ausschließlich oder primär durch Werbung herbeigeführt werden. Sie sollten eine selektive Steuerungskraft bzgl. der zu ergreifenden Werbeaktivitäten aufweisen und relevant für die Gesamtheit der Marketing-Ziele sein, d.h. eine Kauf- oder Verhaltensrelevanz aufweisen.³⁰ Dies sind die Größen des **inneren Verhaltens** der Verwender.

Nach verhaltenswissenschaftlicher Theorie über die Wirkungen kommunikativer Maßnahmen³¹ beeinflussen diese das **innere Verhalten** der Adressaten der Kommunikation, das die Vorstufen des äußeren, beobachtbaren Kauf-, Verwendungs- und Kommunikationsverhalten darstellt.³² Bevor es zu einer Beeinflussung des inneren Verhaltens kommen kann, muss zunächst ein **Werbemittelkontakt** zwischen Adressat der Werbung und Werbemittel hergestellt werden. Die Konsequenzen der Werbung lassen sich damit grob in zwei Kategorien unterteilen: Ziel bzw. Konsequenz der Werbung kann die **Erzeugung** bzw. **Entstehung von Kontakten** oder **Kontaktchancen** zwischen den Adressaten und der Werbebotschaft sein, oder die zeitlich darauf folgende **Erzeugung** bzw. **Entstehung von Werbewirkung**, d.h. einer tatsächlichen Reaktion oder Beeinflussung der Adressaten auf bzw. durch die Werbebotschaft. Darauf aufbauend folgen übergeordnete Konsequenzen, wie das Kauf- oder Verwendungsverhalten.³³

Die Vorstufen des äußeren Verhaltens der Nachfrager sind **außerökonomische, psychographische Größen** wie die *Kenntnisse, Interessen, Einstellungen, Präferenzen* und *Verhaltensbereitschaften* der Menschen, die durch Kommunikationsaktivitäten beeinflussbar sind.³⁴ Grundlage eines kognitiv geprägten Kauf- oder Verwendungsver-

²⁹ Vgl. Berndt (1978), S. 10, Sander (2004), S. 526 oder Steffenhagen (1993), S. 287.

³⁰ Vgl. Steffenhagen/Siemer (1996), S. 46.

³¹ Verhaltenswissenschaftliche Grundlagen und Modelle zur Kommunikationswirkung findet der interessierte Leser z.B. in Sander (2004), Homburg/Krohmer (2003), Stewart/Kamins (2003), Neslin (2003), Moser (2002), Steffenhagen (2000) und Vaughn (1980).

³² Vgl. Mayer (1993), S. 214.

³³ Vgl. Sander (2004), S. 526, Steffenhagen (1993), S. 288 oder Schmalen (1992), S. 152.

³⁴ Vgl. Steffenhagen (2008), S. 68ff.

haltens ist die **Kenntnis** oder auch die **Bekanntheit** des fraglichen Produktes, der Dienstleistung oder der Marke bzw. damit verbundene Objekt- und Eigenschaftskennnisse. Ein daraus folgender, produktbezogener Verwendungs- bzw. Besitzwunsch ist in die **Interessen** eines Menschen einzuordnen. **Einstellungen** stellen die (wertende) innere Haltung des Nachfragers gegenüber dem fraglichen Objekt dar, wohingegen die **Präferenzen** eines Menschen die subjektiven Rangordnungen dieser Einstellungen gegenüber dem beworbenen Objekt und seiner möglichen Alternativen sind. Unter **Verhaltensbereitschaft** ist die innere Geneigtheit zum Kauf oder zur Verwendung des fraglichen Objektes zu verstehen.

Aus der Vielfalt an möglichen Wirkungsgrößen (Reaktionsarten der Nachfrager), die als Werbewirkungen angesetzt werden können,³⁵ sind diejenigen zu identifizieren, die taugliche und sinnvolle Werbeziele darstellen. Die Größen lassen sich dazu nach ihrer Beobachtbarkeit und der Zeitspanne strukturieren, die zwischen dem Kontakt der Adressaten mit der Werbebotschaft und der eintretenden oder noch feststellbaren Reaktion auf diesen Reiz liegt. Abbildung 2.3 zeigt die daraus entstehenden **Werbewirkungskategorien**: die **momentanen Wirkungen**, die **dauerhaften Gedächtniswirkungen** und die **finalen Verhaltenswirkungen**.³⁶

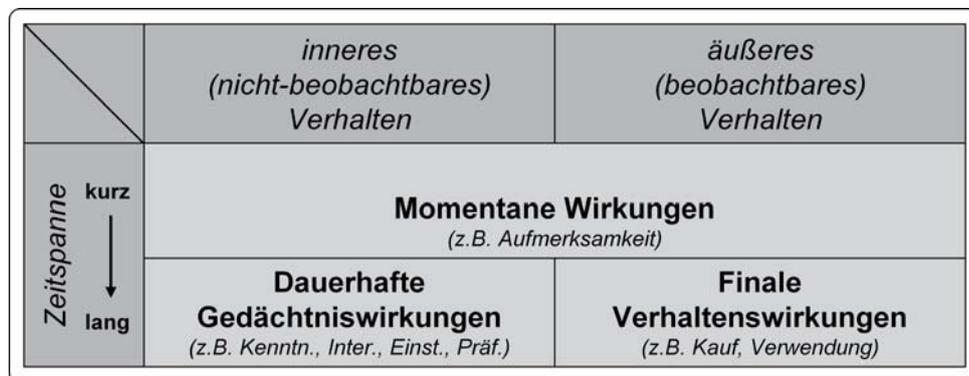


Abbildung 2.3: Werbewirkungskategorien (in Anlehnung an Steffenhagen (1993), S. 290)

Reaktionen der Adressaten, die in unmittelbarer zeitlicher Nähe zum werblichen Reiz auftreten, sind **momentane Wirkungen**. Sie umfassen sowohl nicht-beobachtbares, inneres Verhalten der Adressaten als auch beobachtbares, äußeres Verhalten, wie z.B.

³⁵ Dies sind Größen wie z.B. Aufmerksamkeitswirkung, Aufmerksamkeitsgrad, Wahrnehmungserfolg, Sinneswirkung, Informationswirkung, Information, Wahrnehmungserfolg, Sympathiegehalt, Produkt- und Markenidentifikation, Erwartungsspannung, Involvement, Firmenbild usw. Vgl. dazu Steffenhagen (2008), S. 156.

³⁶ Vgl. Steffenhagen (1993), S. 290.

die Zuwendung einer Person zum werblichen Reiz.

Alle physischen und/oder psychischen Reaktionen der Adressaten auf einen werblichen Reiz, die nach einer u.U. erheblichen Zeitspanne erfolgen oder (noch) feststellbar sind, fallen in die Kategorien der dauerhaften Gedächtniswirkungen bzw. der finalen Verhaltenswirkungen.

Die **dauerhaften Gedächtniswirkungen** umfassen die oben erwähnten Vorstufen – Kenntnisse, Interessen, Einstellungen, Präferenzen und Verhaltensbereitschaften – des äußeren, finalen Verhaltens. Diese Gruppierungen gleichartiger Wirkungsgrößen werden im Folgenden **Werbewirkungsklassen** genannt, umfassen sie doch eine Vielzahl verschiedener aber dennoch ähnlicher Werbewirkungen, wie z.B. die Markenbekanntheit und die Produktbekanntheit in der Klasse der Kenntnisse, und haben unterschiedliche Plausibilitätsüberlegungen zu relevanten Werbewirkungsfunktionen zur Folge, wie in Unterabschnitt 5.2.2 erläutert wird.

Die **finalen Verhaltenswirkungen** betreffen diejenigen Ausprägungen des äußeren, beobachtbaren Verhaltens der Adressaten der Werbung, die in einem Kauf-, Verwendungs- und/oder Informationssuch- und -abgabeakt (z.B. Produktempfehlungen) münden.

Lediglich die **dauerhaften Gedächtniswirkungen**, die in der vorliegenden Arbeit als **psychographische Werbewirkungen** bezeichnet werden, sind in hohem Maße **werbebedingt**, weisen eine hohe **Steuerungskraft** für die Schritte des **Werbeplanungsprozesses** auf und zeigen eine Verhaltensrelevanz, d.h. sie stehen in einer unmittelbaren Mittel-Zweck-Beziehung zu den erwünschten, finalen Verhaltenswirkungen.³⁷ Momentane Wirkungen sind zwar ebenfalls deutlich werbebedingt, weisen aber im Vergleich zu den dauerhaften Reaktionen aufgrund der i.A. längeren Zeitspanne zwischen Werbereiz und erwünschter, finaler Verhaltensweise nur eine geringe Ursache-Wirkungs-Beziehung zu den übergeordneten, ökonomischen Zielen auf. Sie bilden vielmehr die Grundlage für die Ausbildung dauerhafter Gedächtniswirkungen.³⁸

Während ökonomische Konsequenzen der Werbung aufgrund des Einflusses des gesamten Marketing-Mix als Werbeziele somit „zu weit“ gehen, greifen Kontaktmengenziele als Werbeziele „zu kurz“, da sie lediglich notwendige aber keine hinreichenden Resultate des Werbeeinsatzes sind.³⁹ Die Kontakte der Adressaten der Werbung mit dem Werbemittel stellen somit die Chancen für den Aufbau psychographischer Werbewirkungen

³⁷ Vgl. Steffenhagen (1993), S. 291.

³⁸ Vgl. Steffenhagen (1993), S. 291.

³⁹ Vgl. Steffenhagen (2000), S. 2.

dar. Die beim Kontakt mit dem Werbemittel entstehenden momentanen Wirkungen sind notwendige Voraussetzung für die Ausprägung dauerhafter Gedächtniswirkungen. Diese beeinflussen die momentanen Wirkungen und die finalen Verhaltenswirkungen, die wiederum die dauerhaften Gedächtniswirkungen formen.⁴⁰

2.4 Modellbasierte Werbemixplanung

Die in den Planungsphasen der Werbebudgetierung und Werbestreuung angestrebte Planung von Umfang und Streuung der Werbung basiert in wissenschaftlichen Quellen i.d.R. auf Entscheidungshilfen in Form mathematischer Optimierungsmodelle.⁴¹ In der Praxis⁴² werden jedoch häufig betriebswirtschaftliche Heuristiken im Sinne von Daumenregeln als Bewertungs- und Auswahlhilfen von Entscheidungsalternativen gewählt. Diese weisen allerdings erhebliche Begründungslücken oder eine Umkehr des Ursache-Wirkungsprinzips bei der Auswahl einer Entscheidungsalternative auf.⁴³ Analytische bzw. modellgestützte Entscheidungshilfen, zu denen Optimierungsmodelle gehören, zwingen den Entscheider dagegen zur Offenlegung seiner problemrelevanten (Wirkungs-)Hypothesen und seiner Annahmen über die Konsequenzen der in Frage kommenden Entscheidungsalternativen, da diese in Form von Funktionen und Variablen in die Formulierung des mathematischen Modells einfließen.⁴⁴

Zweck von **Modellen** ist es, den Entscheidungsträger bei seiner **Entscheidungsfindung** zu unterstützen. Nach Little (1970) ist das Problem dabei, dass der **Entscheider**⁴⁵ das (i.d.R. von einem Analysten⁴⁶ erstellte) Modell aus Zeit- oder Wissensgründen nicht versteht und das Modell sowie die damit generierten Ergebnisse wegen feh-

⁴⁰ Vgl. Steffenhagen (2000), S. 11.

⁴¹ Vgl. Schmalen (1992), S. 47.

⁴² Berndt/Cansier (2009) betrachten und kommentieren verschiedene heuristische Praktikerverfahren, die im Rahmen der Kommunikationsbudgetierung Verwendung finden.

⁴³ Vgl. Benz (1981), S. 2f.

⁴⁴ Vgl. Steffenhagen (2008), S. 198ff.

⁴⁵ Der Entscheider bzw. der Entscheidungsträger ist eine Rolle für eine Person oder Personengruppe. Er ist derjenige, der über die in die Entscheidungssituation mit einzubeziehenden Aspekte und Annahmen entscheidet und die Werbemixaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung nach seinen Vorstellungen formuliert. Im Falle einer Personengruppe sei vereinfachend angenommen, dass die Gruppe einstimmige Entscheidungen trifft, da Gruppenentscheidungen durch Verhandlungen und spezielle Methoden zur Kompromissfindung zwischen den einzelnen Interessensgruppierungen geprägt sind.

⁴⁶ Unterstützt wird der Entscheider durch den Analysten in Form einer Person oder eines dialogbasierten Computerprogramms (z.B. eines Decision Support Systems (DSS)). Der Analyst analysiert und strukturiert das vom Entscheider gestellte Problem und hilft ihm bei der mathematischen Lösung entsprechend den Entscheider-Präferenzen. Er bereitet die gewonnenen Ergebnisse zur Erkenntnisgewinnung für den Entscheider auf.

lendem Vertrauen nicht verwendet.⁴⁷ Dass ein Entscheider das Modell nicht in seiner ganzen Tiefe und Komplexität verstehen kann und soll, ist offensichtlich (dafür hat er seinen Analysten), jedoch muss der Entscheider das Modell mindestens so verstehen, dass er weiß, welche Unterstützung und Ergebnisse er vom Modell erwarten kann und welche Änderungen am Modell welche (Ergebnis-)Auswirkungen hervorrufen.

1970 schrieb John D.C. Little zur Behebung dieses Problems den bekannten Artikel über die **Konzeption eines Entscheidungskalküls**, den er wie folgt definiert:

„A *decision calculus* will be defined as a model-based set of procedures for processing data and judgments to assist a manager in his decision making.“⁴⁸

Die Definition weist drei wesentliche Aspekte auf: eine auf **Modellen** und informationsverarbeitenden **Vorgehensweisen** basierende **Entscheidungsunterstützung**. Unter Vorgehensweisen wird neben der Abbildung einer Entscheidungsproblemstruktur in ein oder mehrere Modelle eine Reihe von Verfahren zur Verarbeitung von (Input-)Daten bzw. subjektiven Urteilen des Entscheiders über die mit den Modellen generierten Ergebnisse verstanden.⁴⁹ Dazu notwendig ist eine explizite Einbeziehung des Entscheiders mit seinen Vorstellungen in den Entscheidungsprozess, in die Modellerstellung und in den Lösungsprozess in Form der Modellanwendung.

Der **Entscheidungskalkül** und damit auch das zu verwendende Modell sollten nach Little folgenden Anforderungen genügen:⁵⁰

Einfachheit: Das Modell sollte möglichst einfach sein, d.h. es sollten nur die nötigsten, relevanten Systemelemente und Relationen, die der Entscheider versteht, berücksichtigt werden.

Vollständigkeit: Alle wesentlichen Aspekte, welche die abzubildende Entscheidungssituation charakterisieren, sind vom Modell zu erfassen.

⁴⁷ Little stellt zudem fest, dass gute, der erlebbaren Realität des Entscheiders entsprechende Modelle kaum zu finden sind, die Eichung der Modelle, d.h. die Bestimmung von (Modell-)Parameterwerten trotz weit entwickelter statistischer Methoden schwierig ist und dass den meisten Modellen wesentliche, zu modellierende Aspekte fehlen, vgl. Little (1970), S. 467.

⁴⁸ Little (1970), S. 470.

⁴⁹ Lilien/Rangaswamy (2003) beschäftigen sich ebenfalls mit der modellbasierten Entscheidungsunterstützung. Sie prägen den Begriff des „Marketing Engineering“. Während Little die Entscheidungsunterstützung und ein theoretisches Grundgerüst zu deren Umsetzung in den Vordergrund seiner Überlegungen stellt, legen Lilien/Rangaswamy (2003) den Schwerpunkt ihrer Betrachtungen auf die Unterstützung bei der technischen Erstellung und Anwendung von Modellen zur Entscheidungsunterstützung im Marketing.

⁵⁰ Eng.: „(...) simple, robust, easy to control, adaptive, as complete as possible and easy to communicate with“, aus Little (1970), S. 470.

Robustheit: Es ist so zu gestalten, dass keine unsinnigen Ergebnisse bei extremen Wertausprägungen der Eingabedaten produziert werden.

Steuerbarkeit: Das Modell muss einfach verwendbar sowie abwandelbar sein, damit der Entscheider den Input und Output nach seinen Vorstellungen variieren kann und damit logische, nachvollziehbare Modellreaktionen entstehen.

Anpassungsfähigkeit: Systemelemente, Relationen und Eichung des Modelles müssen modifizierbar sein, falls neue Informationen vorliegen.

Einfache Kommunikation/Interaktion: Schließlich muss eine leichte Kommunikation mit dem Modell möglich sein, d.h. die Änderung der Dateneingabe muss leicht möglich sein und der Ergebnisoutput kurze Zeit nach der Dateneingabe, wenn möglich in Form einer Dialogverarbeitung, online zur Verfügung stehen.

Aufgrund ihres universellen und intuitiven Charakters treffen diese Eigenschaften nicht nur auf Modelle für Entscheider zu, sondern auf alle Modelle, d.h. gedankliche, mathematische, physikalische, stoffliche, strukturelle Modelle oder Simulationsmodelle. Allen gemeinsam ist die **Nachahmung realer Gegebenheiten, um daraus resultierende, nutzenbringende Erkenntnisse vorteilhaft in Entscheidungen einzubringen.**

Der Entscheider, der vor einer Entscheidungsaufgabe steht, befindet sich bei ihrer Lösung in einem **Analyse-Lern-Entscheidungs-Prozess** auf Basis einer Mensch-Modell-Maschine-Interaktion durch die er Verständnis und Erkenntnis über seine möglichen Entscheidungsalternativen sammeln kann.⁵¹ Dies ist nach Little das **Ziel** dieser **Interaktion im Rahmen des Entscheidungsprozesses** zur Unterstützung der Entscheidungsfindung.

Die **Werbepplanung als Prozess der Erkenntnis und Lösung** kommunikationspolitischer Problemstellungen und die Werbemixplanung als Teilprozess stellen einen solchen Little'schen Analyse-Lern-Entscheidungs-Prozess dar, durch den nach Little ein Entscheider zur Bewältigung einer Werbemixplanungsaufgabe zu führen ist. Um den Entscheider von der gefundenen Lösung zu überzeugen und um ihn bei der Entscheidungsfindung im Analyse-Lern-Entscheidungs-Prozess zu unterstützen, müssen

- der Entscheidungsprozess der Werbemixplanung und die darin zu treffenden Teilentscheidungen dem Entscheider offen gelegt und verdeutlicht werden,

⁵¹ Vgl. Little (1970), S. 469.

- eine Ordnung der relevanten Einflüsse und Elemente der Planungsaufgabe aufgestellt werden und
- Transparenz in der Aufgabenstellung, den Rahmenbedingungen sowie den Präferenzen des Entscheider hergestellt werden, um den Entscheider schließlich sequentiell an die Lösung und somit an seine Entscheidung heranzuführen.

Die Weiterentwicklung der Decision-Calculus-Idee mündete schließlich in die Entstehung computerbasierter **Decision Support Systeme** (DSS⁵²), welche Little in seinem 2004 erschienen Resümee⁵³ als „(...) natural step beyond Little (1970)“ ansieht.

2.5 Fragestellungen zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung

Die in Kapitel 2 dargelegten Entscheidungsfelder und die thematische Einordnung der Werbe- und Werbemixplanung in die Kommunikationspolitik führen zu der in Abbildung 2.4 dargestellten Problematik der **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung**, die nachfolgend erläutert und zusammengefasst wird. Das in einer Planungsperiode zur Verfügung stehende **Werbebudget** ist zu **bestimmen** und auf mehrere einzusetzende **Werbeinstrumente** wirtschaftlich so zu **verteilen**, dass alle zu verfolgenden **psychographischen Werbeziele** aus der Werbewirkungskategorie der dauerhaften Gedächtniswirkungen (Kenntnisse, Interessen, Einstellungen und Präferenzen) in den abgegrenzten Zielgruppen und für die beworbenen Objekte im vorgegebenen Zeitraum in den angestrebten **Zielausmaßen** erreicht werden.⁵⁴ Dabei sind ggfs. Restriktionen für einzelne Werbeinstrumente zu berücksichtigen, die aus einer beschränkten Verfügbarkeit von Werberaum oder Werbeträgern entstehen. Diese Ressourcenallokation ist notwendig, da **mehrere, verschiedene Ziele** verfolgt

⁵² Ein DSS beinhaltet Modelle ausgewählter Entscheidungssituationen und unterstützt verschiedene Phasen des Entscheidungsprozesses, vgl. Wierzbicki et al. (2000), S. 9. Verschiedene Definitionen zu DSS gibt z.B. Andriole (1989).

⁵³ Little (2004), S. 1856.

⁵⁴ Im Vordergrund der Betrachtungen steht dabei die Allokationsproblematik des Werbebudgets auf die Werbeinstrumente zur Erreichung mehrerer, psychographischer Werbeziele und nicht die Bestimmung umworbener Zielgruppen oder auszuwählender Werbeobjekte. Auch die qualitative Auswahl der Werbeinstrumente, die aufgrund funktionspezifischer Aktivitäteneignungen oder aktivitätenspezifischer Kontakt- oder Reichweitenleistungen unterschiedlich auf Werbeziele oder Werbezielgruppen wirken, sei nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Derartige Fragestellungen betrachtet z.B. Kall (1996) für den lokalen Automobilhandel.

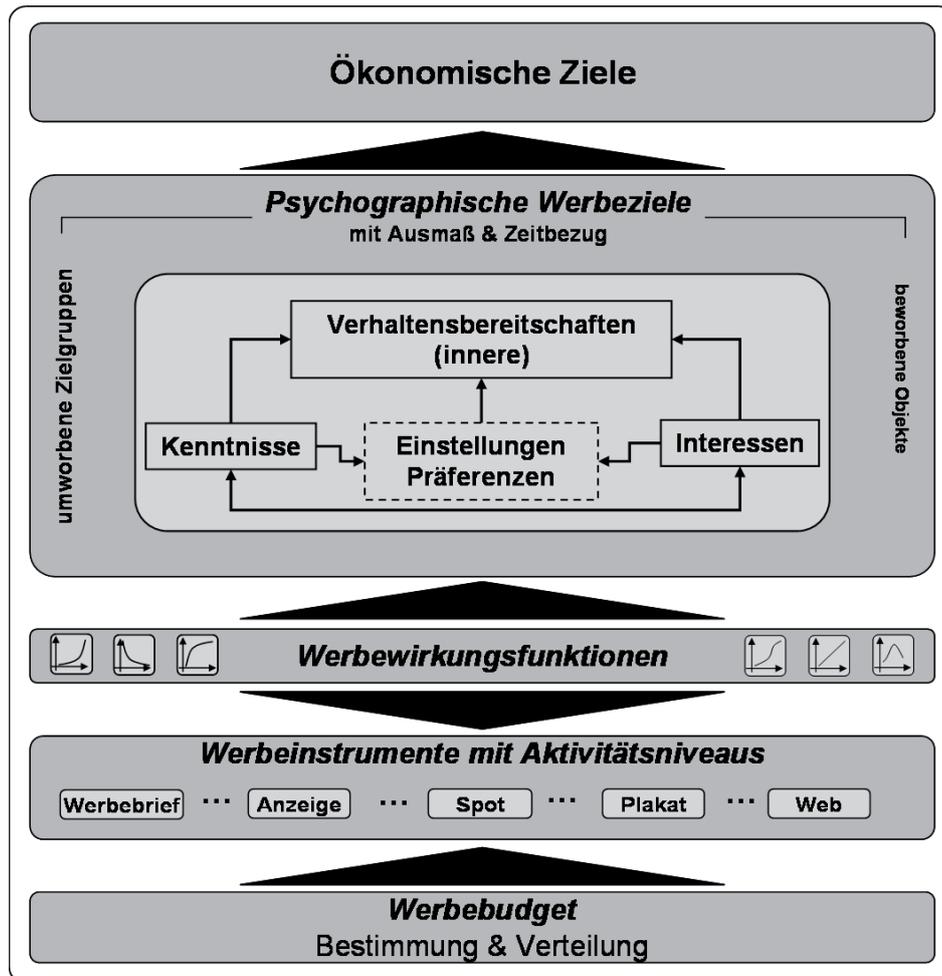


Abbildung 2.4: Das Werbemix-Problem bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung

werden und verschiedene Werbeinstrumente **unterschiedlich wirksam** sind. Insbesondere im Mix⁵⁵ zeigen Werbeinstrumente unterschiedliche qualitative und quantitative Eignungen (bei unterschiedlichen Einsatzkosten) zum Erreichen gewisser **Werbeziele**⁵⁶ (qualitative, funktionspezifische Aktivitäteneignung) sowie unterschiedliche Eignungen, auf gewisse **Zielgruppen**⁵⁷ (aktivitätenspezifische Kontakt- oder Reichweitenleistungen) und für gewisse **Werbeobjekte** (objektspezifische Wirksamkeit der Aktivitäten) zu wirken.⁵⁸ Die Überlegenheit eines Instrumenten-Mix gegenüber monoinstrumenteller Werbung ist in zahlreichen, empirischen Studien eindeutig nachgewiesen.⁵⁹

⁵⁵ Vgl. Köcher/Halleman (2004), S. 85ff., Tsao/Sibley (2004), S. 140 und Vakratsas/Ma (2005), S. 250.

⁵⁶ Vgl. Sneath et al. (2005), S. 379.

⁵⁷ Vgl. Vernet (2004), S. 105 und Bush et al. (2004), S. 115.

⁵⁸ Vgl. Kall (1996), S. 23.

⁵⁹ Vgl. z.B. Halleman (2001), S. 40, Köcher/Halleman (2004), S. 78, Vogel/Halleman (2008), HÖRZU FUNK UHR (1989) oder HÖRZU FUNK UHR (1991).

Zur konkreten und exakten Bestimmung und Bewertung der Wirkung des Einsatzes der Werbeinstrumente ist der Wirkungszusammenhang zwischen den Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente und den Zielerreichungsausmaßen der psychographischen Werbeziele in Form von **Werbewirkungsfunktionen** zu spezifizieren und zu quantifizieren. Dabei sind ggfs. sachliche und zeitliche Wirkungsinterdependenzen beim Einsatz mehrerer Werbeaktivitäten zu berücksichtigen.

Die **psychographischen Werbewirkungen** stellen die Vorstufen des Kauf- und Verwendungsverhaltens und der damit verbundenen **finalen, ökonomischen Ziele** wie Gewinn, Umsatz oder Absatz dar und weisen im Gegensatz zu ökonomischen Wirkungen eine direkte und starke Reaktionsnähe zu den ausgeübten Werbeaktivitäten auf. Auf die **ökonomischen Ziele** wirken nicht nur die psychographischen Werbewirkungen medierend ein, sondern neben der Werbung auch der gesamte Marketing-Mix aller weiteren absatzpolitischen Instrumente wie Preis, Produktgestaltung, Distribution, Service usw.

Die in der vorliegenden Arbeit verfolgte Aufgabenstellung zur **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** ist zweigeteilt und weist wesentliche Interdependenzen zwischen den Aufgabenteilen auf.

Da die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung noch nicht in der Literatur behandelt wurde, erfolgt zunächst eine **Systematisierung des Entscheidungsprozesses** der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung. Es gilt die relevanten zu treffenden (Teil-)**Entscheidungen zu identifizieren** und **zu ordnen**, um für den betriebswirtschaftlichen Entscheider **Transparenz im Entscheidungsprozess**, in den **Konsequenzen der Entscheidungsalternativen**, den **Entscheider-Präferenzen** und den zugrunde liegenden **Rahmenbedingungen** zu erzeugen. Eine daraus abgeleitete **prozessorientierte Entscheidungshilfe** erlaubt es, in einer vorliegenden Werbemix-Problemstellung eine klare Transparenz zu schaffen und den Entscheider methodisch gestützt und streng lösungs- und zielorientiert durch den Planungs- und Lösungsprozess zu führen.⁶⁰ **Ausgangspunkte** der Betrachtung dieser Problematik sind die **Entscheidungssituation** und das zur Lösung heranzuziehende **Entscheidungsmodell**, auf dem der Analyse-Lern-Entscheidung-Prozess der Werbemixplanung beruht, die **Modellerstellung aus der Entscheidungssituation**

⁶⁰ Anforderungen an eine umsetzungsorientierte und methodisch gestützte Entscheidungshilfe zur zielorientierten Werbeetat- und Werbemix-Planung sind nach Kall (1996), S. 78, die Benutzerorientierung, ein entscheidungsunterstützender Charakter und Aufzeigen einer Methodik des Entscheidens, eine starke Prozessorientierung, eine klare Systematisierung des Entscheidungsprozesses, die Erzielung einer „guten“ Lösung sowie eine Vermeidung logisch inkonsistenter Entscheidungen.

heraus sowie die **Verwendung des Modells zur Lösung** einer Werbemixplanungsaufgabe.

Die darauf aufbauende Bewältigung von **Werbemixplanungsaufgaben bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** auf Basis (mathematischer) Entscheidungsmodelle umfasst drei wesentliche Herausforderungen. In Form von Fragen sind dies:

- *Wie kann die Verwendung **plausibler Werbewirkungsfunktionen** zur Modellierung des Wirkungszusammenhangs zwischen den zu nutzenden Werbeinstrumenten und den ausgewählten psychographischen Werbewirkungen gewährleistet werden?*
- *Können allgemeine **Handlungsanweisungen** aus Optimalitätstheoremen für Entscheidungssituationen der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung abgeleitet werden?*
- *Welche Anforderungen müssen mögliche **Lösungsmethoden** zu konkreten Werbemix-Entscheidungsmodellen bei psychographischer Mehrfachzielsetzung erfüllen?*

Deren Beantwortung mündet in der **exemplarischen Formulierung und Lösung** mathematischer Entscheidungsmodelle zur Optimierung von Werbemixproblemen bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung, um den Entscheider bei Effektivitäts- und Effizienzbetrachtungen zur Bewertung von Werbemixen zu unterstützen.

Die Frage hinsichtlich möglicher allgemeiner Optimalitätstheoreme für die Werbemixplanung ist wichtig, da etwaige **Theoreme** einer Entwicklung von **Handlungsempfehlungen** dienen können. Marketing-Fragestellungen können mit den zu beachtenden Interaktionseffekten zwischen den Instrumenten sowie mit dynamischen und nichtlinearen Wirkungsmechanismen sehr schnell zu komplexen Entscheidungsmodellen führen, die sich einer Lösung selbst mittels komplexer Verfahren des Operations Research (OR) entziehen. Derartige Verfahren sind grundsätzlich nicht unkritisch einzusetzen, da bei komplexen Entscheidungsproblemen die geeigneten, anspruchsvollen Lösungsverfahren das Verständnis des Anwenders schnell überfordern und damit zu benutzerunfreundlichen Black-Box-Prozessen im Little'schen Sinne werden, so dass eine kritische Würdigung von OR-Verfahren in der Marketing- bzw. Werbemixplanung wichtig und notwendig ist.

Zum Aufstellen eines mathematischen Entscheidungsmodelles für die Werbemixplanung müssen zunächst die zur Modellierung in Frage kommenden **Werbewirkungsfunktionen** für die betrachtete Entscheidungssituation bestimmt werden.

Dieser Schritt ist hinsichtlich der möglichen, zur Lösungsfindung anzusetzenden Multi-Objective-Decision-Making-Methoden wichtig, da unter anderem die **mathematischen Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen** die Auswahl an Lösungsmethoden signifikant einschränken. Es ist weiter zu klären, welche anderen Aspekte diese Auswahl weiter einengen und wie ihnen Rechnung getragen werden kann. Aus der Prozessstrukturierungshilfe geht zudem eine Methodik hervor, die es erlaubt, plausible Werbewirkungsfunktionen für die Werbemixplanung mit psychographischen Zielen systematisiert abzuleiten. Die Idee dazu beruht auf Depluet's Ansatz, empirische Ergebnisse der Wirkungsforschung mit Logiküberlegungen zur Bestimmung von Wirkungsfunktionen zu kombinieren.⁶¹ Dies schließt die Lücke zwischen der rein empirischen und der rein deduktiven Bestimmung von Wirkungsfunktionen.

2.6 Literaturüberblick

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Themenschwerpunkte der **Werbemixplanung**, der **mehrfachen Zielsetzungen** und der **psychographischen Werbewirkungen** finden in der einschlägigen Fachliteratur in separater, voneinander unabhängiger Form vielfach Beachtung. Die Kombination dieser Themen, die **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung**, wird in der vom Autor gesichteten Literatur in dieser Form bislang nicht bearbeitet. Die der vorliegenden Arbeit am nächsten stehenden Literaturbeiträge behandeln Aspekte aus zwei der drei obigen Themengebiete. Die wichtigsten dieser Beiträge und zusätzlich Quellen, die einen wesentlichen, in der vorliegenden Arbeit betrachteten Aspekt ansprechen, wie z.B. Werbemixe oder Wirkungsfunktionen, werden im Folgenden vorgestellt. Abbildung 2.5 präsentiert ausgewählte Literaturbeiträge, die Aspekte der obigen Themenschwerpunkte behandeln, und die Einordnung der vorliegenden Arbeit.⁶²

Die Literaturbeiträge, die inhaltlich der vorliegenden Arbeit am nächsten stehen, sind: Depluet (1991), Hruschka (1991), Kall (1996) und Steffenhagen (2006a). Sie werden

⁶¹ Vgl. Depluet (1991).

⁶² Die Einordnung der Quellen ist subjektiv und nicht immer eindeutig.

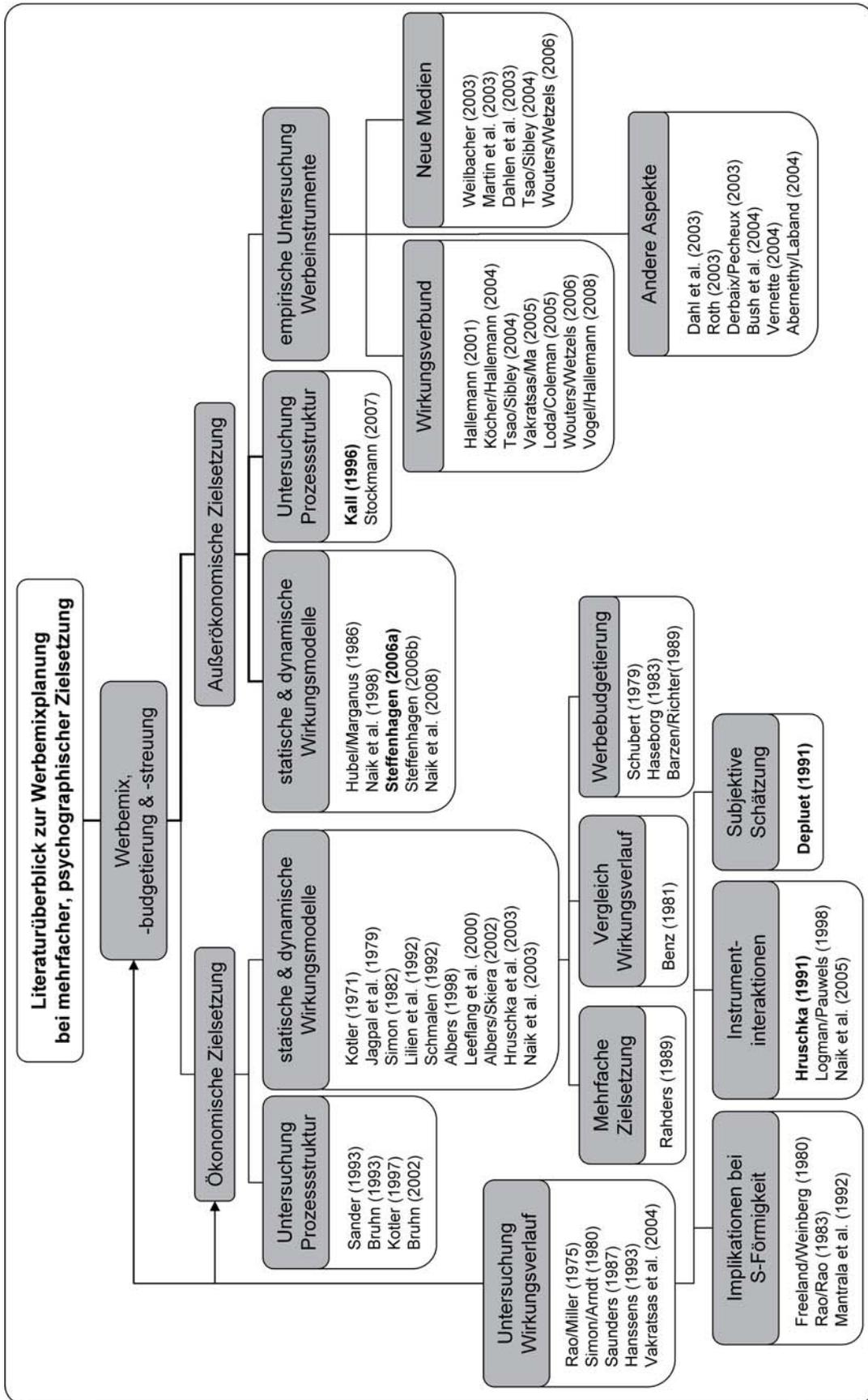


Abbildung 2.5: Überblick ausgewählter Literaturbeiträge mit thematischer Affinität zur vorliegenden Arbeit

im Nachfolgenden an gegebener Stelle besprochen. Der Einstieg in den Literaturüberblick erfolgt zunächst über einen Überblick von Beiträgen der Marketing-Literatur zur Werbebudget- und Werbestreuplanung, gefolgt von einem Vergleich der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Entscheidungsmodelle mit Modellen aus der Literatur anhand von Klassifikationskriterien zur Einordnung von Marketing-Modellen.

Die **Werbebudget-** bzw. die **Werbestreuplanung** wie sie in gängigen Fachbüchern zum Marketing und zur Kommunikationspolitik, wie z.B. Bruhn (2005), Sander (2004), Homburg/Krohmer (2003), Hanssens et al. (2001), Pepels (1994) und Schmalen (1992) behandelt wird, befasst sich in erster Linie mit Aspekten zur Anzahl einbezogener Instrumente, zu konkurrenzbezogenen Effekten, zu dynamischen Effekten wie Carry-Over oder Time-lag bzw. der Variation des Planungshorizontes und mit einem **einzigen ökonomischen Ziel** auf Basis der Marginalanalyse. Intention obiger Literaturbeiträge ist aufgrund ihres Lehrbuch-Charakters mehr die Einführung in diese Thematik und Konzeption der Theorie dazu, als eine umfassende Darlegung des Themas.

Die Abhandlung der Entwicklung des quantitativen Werbemix auf Ebene der Werbeinstrumente wird als Management-Aufgabe in derartigen Literaturbeiträgen nicht betrachtet. Im Vordergrund steht die quantitative Bestimmung des Marketing-Mix auf Ebene der Marketing-Instrumente⁶³ oder die Allokation eines Marketing-Budgets auf verschiedene Produkte oder Marktsegmente.⁶⁴ Zahlreiche Literaturbeiträge zur Werbebudget- bzw. Werbestreuplanung behandeln zudem die Allokation eines Werbebudgets auf Werbeträger im Rahmen von Mediaselektionsmodellen unter der anscheinend obligatorischen einzelnen, ökonomischen Zielsetzung bzw. unter der Verfolgung von **Kontaktmengenzielen**, wie z.B. Hruschka et al. (2003), ter Haseborg (1990), Barzen/Richter (1989), Rahders (1989), Benz (1981) oder Berndt (1978).

Ausprägungen von Klassifikationskriterien zur Einordnung von Beispielen und Modellen zur Werbebudget- bzw. Werbestreuplanung aus verschiedenen Publikationen zu diesem Thema sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Abbildung zeigt die in der Literatur vorherrschenden Betrachtungsschwerpunkte der Werbebudget- bzw. Werbestreuplanung (kleine Nummern) und im direkten Vergleich die der in der vorliegenden Arbeit (Sterne) verfolgte Fokussierung auf Mehrfach-Zielsetzung und -Restriktionen, Anwendung von Operations Research-Verfahren und außerökonomische Ziele.

⁶³ Vgl. Sander (2004), S. 722ff.

⁶⁴ Vgl. Albers (1998).

| Kriterium | Ausprägung | | | | |
|---|--------------------------|----------------------|--------------------------|--|--------------------------------|
| Informationssituation | ①②③ Sicherheit ④⑤ ★ | ①④ Risiko | Unsicherheit | | |
| Anzahl einbezogener (Marketing-)Instrumente | monoinstrumental ①②③⑤ | | polyinstrumental ②③④⑤ | | |
| Zeitliches Wirkungs- & Handlungsmuster | statisch ★ ①②③④⑤ | | dynamisch ①②③④⑤ | | |
| Art des Lösungsverfahrens | Marginalanalyse ①②③④⑤ | Vergleichsrechnungen | Simulation ② | Entscheidungsbaum ①② | Spieltheoretische Ansätze ④ |
| Ausmaß der Berücksichtigung von Konkurrenzaktivitäten | Monopol ★ ①②③④⑤ | Oligopol ①③④ | Polypol | allgemeine Konkurrenzorientierung ① | |
| Anzahl verfolgter Ziele | ①②③④⑤ | ein Ziel | ④ | ★ | mehrere Ziele |
| Anzahl Restriktionen | ①②③④ | keine | ④ | ★ | 1 bis n |
| Art verfolgter Ziele | ①②③④⑤ | ökonomisch | ★ außerökonomisch | | |
| Art der Bestimmung von Werbebudgethöhe & -Verteilung | ①②③④⑤ | sukzessiv | ④ | ★ | simultan |
| | 1: Sander (2004) | 2: Schmalen (1992) | 3: Schubert (1979) | 4: Rahders (1989) | 5: Benz (1981) |

Abbildung 2.6: Klassifizierung von Beispielen und Modellen zur Werbeplanung aus ausgewählten Literaturquellen (in Anlehnung an Sander (2004), S. 559)

Literatur speziell zu den Themen der Werbebudgetierung und Werbestreuung, wie z.B. Rahders (1989), ter Haseborg (1983), Benz (1981) und Schubert (1979) erweitern die Palette betrachteter Aspekte:

Rahders (1989) legt den Schwerpunkt der vorgestellten Betrachtungen auf **dynamische Aspekte** und auf **Mehrfachzielsetzung**, jedoch wiederum ausschließlich auf Basis ökonomischer Ziele, die wie erläutert die Wirkungsnahe zur Werbung vermissen lassen. Die Mehrfachzielsetzung wird dabei aufgrund **linearer Wirkungsfunktionen** mittels „Goal-Programming“⁶⁵ und einer modifizierten Simplex-Methode⁶⁶ bewältigt. Die Verwendung linearer Wirkungsfunktionen ist insoweit bedenklich als die Mehrzahl der Literaturbeiträge, so z.B. Sander (2004), S. 560, Homburg/Krohmer (2003), S. 632 sowie insbesondere Simon/Arndt (1980), Saunders (1987) oder Hanssens/Parsons (1993) einen linearen Verlauf der durch Marketing-Aktivitäten ausgelösten Wirkungen für unrealistisch bzw. zu einfach halten und für einen konkaven bzw. S-förmigen Verlauf plädieren.

Den Aspekt des (mathematischen) Verlaufstyps der Wirkungsfunktion greift Benz (1981) auf, wird doch wegen der Plausibilität des Verlaufes dort zwischen Modellen mit **linearer** und **konkaver Werbewirkungsfunktion** unterschieden. Die daraus

⁶⁵ Vgl. Charnes/Cooper (1961) oder Chankong/Haimes (1983), S. 303.

⁶⁶ Vgl. Neumann/Morlock (2002), S. 53 oder Chankong/Haimes (1983), S. 307.

resultierenden Optimierungsprobleme werden mittels der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen⁶⁷ gelöst.

ter Haseborg (1983), ter Haseborg (1984), ter Haseborg (1988) und ter Haseborg (1990) befassen sich mit einer Bestandsaufnahme zu **statischen und dynamischen Werbebudget-Absatzreaktionsmodellen**, um einen Anforderungskatalog für derartige Modelle zu entwickeln und so empirisch gehaltvolle Erweiterungen der Modellsätze zu erlauben. Ringbeck (1998) untersucht quantitative, dynamische Werbebudgetierungsmodelle mit **stärkerer verhaltenswissenschaftlicher Fundierung**, um einen Überblick über den Stand der Forschung zu gewinnen, und kommt zu dem Schluss, dass trotz erheblicher Fortschritte derartige Modelle bisher in der Praxis wenig Beachtung finden.

Insbesondere **Operations-Research-Methoden** werden eher „stiefmütterlich“ aufgegriffen. So scheint z.B. die für dynamische Aspekte bzw. für die Betrachtung eines aus mehreren Zeitperioden zusammengesetzten Planungshorizontes prädestinierte OR-Methode der **dynamischen Programmierung** zumindest in den vom Autor gesichteten Literaturquellen keinerlei Rolle zu spielen oder Verwendung zu finden. Ähnliches zeigt sich auch bei der (mathematischen) Behandlung S-förmiger bzw. allgemein nichtlinearer Wirkungsfunktionen.

Rahders (1989) wählt für Optimierungsprobleme mit nichtlinearen (aber konkaven) Zielfunktionen als Lösungsansatz die konvex-separable Programmierung⁶⁸, da damit das Ausgangsproblem auf lineare Programme zurückgeführt und das bekannte Lösungsverfahren des Simplex-Algorithmus verwendet werden kann. Er nimmt damit wohl wissend in Kauf, dass mit dieser **Näherungslösung** Präzisionsverluste verbunden sind.⁶⁹ Freeland/Weinberg (1980) und Rao/Rao (1983) beschäftigen sich mit allgemeinen **Ressourcen-Allokationsproblemen** unter Verwendung **monoinstrumentaler, S-förmiger Funktionen** zur Modellierung einer **zu maximierenden, additiv-separablen Gewinnfunktion**. Die Autoren leiten Optimalitätstheoreme ab und untersuchen die Implikationen der S-förmigen Funktionen für Entscheidungsmodelle und deren Lösung. Lösungsansatz ist aber auch hier eine stückweise lineare Approximation des nichtkonkaven Teils der ursprünglichen S-förmigen Funktionen. Als Ergebnis fin-

⁶⁷ Vgl. Horst (1979), S. 173ff.

⁶⁸ Die Idee der konvex-separablen Programmierung ist es, den Definitionsbereich einer Funktion so in adäquate Intervalle aufzuteilen, dass die gegebene nichtlineare Funktion durch eine Reihe auf diesen Intervallen stückweise linearer Funktionen hinreichend gut approximiert werden kann. Vgl. auch Bazaraa/Shetty (1979), S. 453.

⁶⁹ Vgl. Rahders (1989), S. 225.

den die Autoren, dass die Approximation zu zulässigen und „guten“ Lösungen führt und zudem eine Oberschranke für das Optimum liefert. Klassische Lösungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme wie z.B. die Gradienten-, Newton-, konjugierte Richtungen-, Strafkosten (Penalty)-Verfahren usw. werden in der Marketing-Literatur kaum verwendet.

Dieser Eindruck wird auch durch die **Marketing/Operations-Research-Literaturstudie** von Hildebrandt/Wagner (2000) bestätigt, befasst sich doch die Mehrheit der Publikationen der Jahre 1992–1998 mit den Themen *Structural Modeling*, *Measurement* und *Forecasting*.⁷⁰ *Optimization*-Themen nehmen lediglich den vorletzten Platz ein. Nur *Simulation*-Themen sind weniger häufig vertreten.

Die Vermutung liegt nahe, dass aufgrund der abschreckenden Komplexität von Optimierungsmethoden in der Praxis betriebswirtschaftliche Heuristiken⁷¹ verwendet werden und dass auch zur Bewältigung derartiger Problemstellungen Heuristiken in der Praxis als ausreichend angesehen werden. Dem steht gegenüber, dass Prognosemodelle (*Forecasting*), die ebenfalls eine erhebliche mathematische Komplexität und entsprechende Herausforderung für den Anwender bieten, sich anscheinend trotzdem hoher Beliebtheit erfreuen.⁷² Schweiger/Dabic (2009) stellen fest, dass die Verwendung von Optimierungs- und Simulationsmodellen in der Mediaselektion nicht zu den gewünschten Ergebnissen geführt haben und schlussfolgern, dass derzeit keine optimale Methode zur Intermediaselektion existiert.⁷³ Die Mediaselektion sei daher anhand von quantitativen und qualitativen Kriterien zu treffen.

Modell-analytische Themenschwerpunkte im Bereich Werbung sind **dynamische Aspekte**, wie z.B. „Pulsing Strategies“ in Feinberg (1992), aber neuerdings auch die **Integration qualitativer Aspekte** (Werbebotschaft, Farben, Musik, Logos, Texte usw.) in die Modelle und Betrachtungen.⁷⁴

Die Suche nach der „richtigen“ **Wirkungsfunktion** zur Formulierung von Wirkungsmodellen verfolgen Autoren unter verschiedenen Gesichtspunkten. Hanssens/Parsons (1993), Saunders (1987) und Simon/Arndt (1980) untersuchen Wirkungsfunktionen hinsichtlich ihres **grundlegenden Verlaufes** und ihrer **Plausibilität** anhand von

⁷⁰ Vgl. Hildebrandt/Wagner (2000), S. 12.

⁷¹ Heuristiken im Sinne von Fingerzeigen oder Daumenregeln, vgl. Steffenhagen (2008), S. 199 oder Berndt/Cansier (2009), S. 824.

⁷² Vgl. Hildebrandt/Wagner (2000), S. 12 Tabelle 13.

⁷³ Vgl. Schweiger/Dabic (2009), S. 850f.

⁷⁴ Vgl. Hildebrandt/Wagner (2000), S. 15f. Tabelle 4, Abernethy/Laband (2004), Roth (2003) und Dahl et al. (2003).

Wirkungshypothesen sowie Forschungsergebnissen und kommen zum Schluss, dass bislang lediglich der degressiv-konkave Wirkungsverlauf empirisch belegbar ist.

Hruschka (1991) und Logman/Pauwels (1998) untersuchen polyinstrumentale Wirkungsfunktionen hinsichtlich ihrer **Eignung zur Abbildung von Instrumentinteraktionen** wie Elastizitäts-, Reaktions- und Optimalitätsinteraktion. Deren konsistente Modellierung beim Einsatz von Marketing-Instrumenten muss nach Meinung der Autoren verstärkt berücksichtigt werden. Dies resultiert aus den Ergebnissen der Autoren, dass für gewinnmaximierende Marketing-Mix-Probleme die Optimalitätsinteraktion direkt auf der Elastizitätsinteraktion aufbaut.

Die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Ergebnisse zur Optimalitätsinteraktion bei psychographischen Werbemix-Problemen zeigen jedoch ein anderes Bild der Optimalitätsinteraktion. Für die üblicherweise zur Modellierung verwendeten Wirkungsfunktionen verschwindet bei der Betrachtung psychographischer Werbeziele die Optimalitätsinteraktion. Sie baut zudem auf der Reaktionsinteraktion auf, wie die Ergebnisse in Anhang C, S. 205, zeigen.

Der **subjektiven Wirkungsschätzung** und der Formulierung eines darauf basierenden computergestützten Decision Support Systems widmet sich Depluet (1991), indem er isolierte, empirische Ergebnisse der Wirkungsforschung und plausibel erscheinende Logiküberlegungen in einem ganzheitlichen Ansatz zur Entwicklung von Wirkungshypothesen verknüpft. Diese Idee wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen und modifiziert in die Analyse der Rahmenbedingungen von Entscheidungssituationen eingearbeitet, die zur Beurteilung der Plausibilität von Wirkungsfunktionen herangezogen werden.

Allen obigen Untersuchungen gemeinsam ist die Betrachtung des Wirkungszusammenhangs zwischen **ökonomischen (Sub-)Zielen**, wie *Marktanteil* oder *Absatz*, und der Ebene der **Marketing-Instrumente**, wie *Preis* oder einem pauschalen *Absatzförderungsbudget*.

In Steffenhagen (2006a) und Steffenhagen (2006b) wird gezeigt, dass eine quantitative **Werbemixplanung bei einfacher, psychographischer Zielsetzung**, die im Gegensatz zu den nicht adäquaten, ökonomischen (Gewinn-)Maximierungsaspekten oder zu den zu kurz greifenden Kontaktmengenzielen die direkte Wirkungsnahe zu den Werbeaktivitäten aufweist, nicht auf eine ökonomische Theorie in Form einer marginalanalytischen Betrachtung verzichten muss. Auch dynamische Effekte in einem mehrperiodigen Planungszeitraum können erfasst und untersucht werden. Zu Effektivitäts- und

Effizienzbetrachtungen können allgemeine Optimalitätstheoreme abgeleitet werden, die exemplarisch für einige Wirkungsfunktionen in konkrete, anwendbare Entscheidungsregeln umgesetzt werden. Dieser Ansatz der marginalanalytischen Untersuchung und Ableitung von Optimalitätstheoremen wird in der vorliegenden Arbeit auf die **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** übertragen. Hubel/Marganus (1986) untersuchen mittels einfacher linearer Modelle für die Werbewirkungsmessung von Erinnerungswerten zeitliche Ausstrahlungseffekte und finden, dass deren Nichtberücksichtigung zu erheblichen Fehlbeurteilungen von Werbekampagnen führen kann. Naik et al. (2008) entwickeln ein dynamisches Oligopol-Modell für die Markenbekanntheit, um die bestehende Lücke zwischen Theorie und Praxis zu schließen und dem Praktiker ein Instrument zur Bestimmung der Werbeeffektivität sowie der Prognose der Markenbekanntheit für ihre Marke und die ihrer Konkurrenten zu bieten.

Stockmann (2007) beschäftigt sich mit der Strukturierung des Prozesses der integrierten Marketingkommunikation (IMK) auf operativer und strategischer Ebene und der **Entwicklung eines Planungs- und Implementierungsmodelles** der IMK. Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt auf dem Einsatz der Kommunikationsinstrumente (Media-)Werbung und Sportsponsoring. Das entwickelte Modell baut auf psychographischen Kommunikationszielen auf. In der operativen Budgetierung jedoch bietet der Autor für die Lösung des Allokationsproblems lediglich die Verteilung des Gesamtbudgets nach einem festen Verteilungsschlüssel auf die Instrumente an. Die Bestimmung des besten Kommunikationsmix hinsichtlich der zu erreichenden Ziele bleibt offen.

Auch wenn die Werbemix- bzw. die Werbebudget- und Werbestreuplanung und der zugrunde liegende Entscheidungsprozess in gängigen Lehr- und Fachbüchern ausführlich und in großer detaillierter Tiefe mittels Aufzählung darauf anwendbarer Entscheidungsmodelle und -hilfen dargelegt wird, sieht Kall (1996) Bedarf an einer Analyse und Aufstellung einer normativen, prozessorientierten **Strukturierungshilfe** für den **Werbebudget- und Werbestreuplanungsprozess** (in der lokalen Automobilbranche). Diesen Bedarf schlussfolgert der Autor daraus, dass die streng modellgestützte und optimierende Planungstheorie aufgrund unrealistischer Anforderungen und fehlender Verfügbarkeiten von Wirkungszusammenhängen und -daten, unrealistischer aber notwendiger Annahmen und mangelnder Benutzer- und Anwendungsorientierung in der Realität nicht nutzbar und als alleinige Lösungshilfe in konkreten Planungssituationen

nicht geeignet ist. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte prozessorientierte Strukturierungshilfe des Entscheidungsprozesses der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung kann als neu entwickelter, vertiefender Teil der Kall'schen Strukturierungshilfe angesehen werden. Sie erfüllt die von Kall präsentierten Anforderungen an eine prozessorientierte Strukturierungshilfe für die Werbemixplanung.

Die Literaturbeiträge der **empirischen Forschung** zu **psychographischen Werbewirkungen** beschränken sich in den letzten Jahren nicht nur auf das Beispiel der **Markenbekanntheit** wie in z.B. Trappey/Woodside (2005), Dahl et al. (2003) oder Roth (2003). Es werden auch andere außerökonomische Größen wie **Einstellungen**⁷⁵ (z.B. Wang (2006), Sneath et al. (2005), Dahlen et al. (2003) oder Derbaix/Pecheux (2003)), **(aktive) Werbeerinnerung**⁷⁶ (z.B. Wouters/Wetzels (2006) oder Weilbacher (2003)) oder **Verhaltensabsichten**⁷⁷ (z.B. Loda/Coleman (2005)) betrachtet. Sogar **finale Verhaltenswirkungen** in Form von Informationssuch- und -abgabeverhalten werden in Untersuchungen (z.B. Sneath et al. (2005) oder Martin et al. (2003)) adressiert.

Dabei erfolgt eine starke Fokussierung auf Werbeinstrumente wie Websites, Banner etc. auf Basis der **neuen Medien** *eMail, Internet und Short Messages Service (SMS)* wie z.B. in Wouters/Wetzels (2006), Tsao/Sibley (2004), Weilbacher (2003), Martin et al. (2003) oder Dahlen et al. (2003), deren thematischer Schwerpunkt aufgrund der möglichen Interaktivität dieser Medien (auch mit klassischen wie Print- oder Fernseh/Hörfunk-Medien) auf der Untersuchung von **Intermedia-Mix-Effekten** liegt (Wouters/Wetzels (2006), Tsao/Sibley (2004)), die auch bei klassischen Print- und Fernseh/Hörfunk-Medien untersucht werden (vgl. Vakratsas/Ma (2005) und Loda/Coleman (2005)). Corell/Stoffers (2007) weisen im Zusammenhang von Intermedia-Mixe auf die **Verknüpfung von Werbebotschaften der Außenwerbung und lokalisierten, interaktiven Werbeträgern der neuen Medien** hin. Das **zentrale Ergebnis** dieser Studien ist die sich verstärkende Wirkung dieser Werbeinstrumente im Mix, auch infolge ihrer interaktiven Eigenschaften. Naik/Raman (2003) validieren diese gefundenen Synergie-Effekte der Multimedia-Kommunikation durch theoretische Untersuchungen an polyinstrumentalen, dynamischen Werbebudget-Absatz-Modellen. Es wird zudem die Verknüpfung von affektiv-geprägten psychographischen Werbewirkungen wie **Einstellung** und **Präferenz** mit Werbeinstrumenten wie dem *Event Mar-*

⁷⁵ Eng.: „Attitudes“.

⁷⁶ Eng.: „Recall“.

⁷⁷ Eng.: „Purchase Intent“.

keting untersucht, die den Adressaten der Kommunikationsaktivitäten eine erlebbare Möglichkeit zur greifbaren Interaktion mit dem umworbenen Wirtschaftsgut erlauben (Sneath et al. (2005)). Dies dient auch der Beobachtung von Instrumentinteraktionen. Die psychographischen Werbewirkungen werden zudem hinsichtlich ihrer Wirkung bei bestimmten **Zielgruppen** (Bush et al. (2004), Vernette (2004) oder Derbaix/Pecheux (2003)) untersucht (wie z.B. bei Frauen, Kindern, der Generation Y) und wie sich die **Werbemittelgestaltung** (Abernethy/Laband (2004), Dahl et al. (2003) oder Roth (2003)) bei ihnen bemerkbar macht.

Die Literaturbeiträge zeigen deutlich, dass nach wie vor **sehr isolierte, empirische Ergebnisse** für **sehr spezifische Rahmenbedingungen** der Entscheidungssituationen vorliegen. Im Vordergrund der Untersuchungen stehen Nachweis und Messung von Mix-Effekten bei Werbeinstrumenten und deren Auswirkungen auf psychographische Werbewirkungen. Die in den Literaturbeiträgen erbrachten Nachweise der Existenz von Mix-Effekten bei Werbeinstrumenten untermauern die Relevanz der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Werbemix-Fragestellung.

Einbezogen werden derartige Erkenntnisse in Werbemix-, Werbebudgetierungs- oder **Optimierungsfragestellungen** in den aktuellen Literaturbeiträgen kaum. Lediglich Naik et al. (2005) und Vakratsas/Ma (2005) untersuchen die zeitlichen Auswirkungen von Multimedia-Werbung auf Budget-Allokationsentscheidungen. Vakratsas/Ma (2005) schlussfolgern, dass die Budgetallokation unter Berücksichtigung der Langzeit-Effektivität der Werbeaktivitäten erfolgen muss. Erneut wird wiederum in der Untersuchung eine ökonomische Zielsetzung unterstellt. Dies trifft ebenfalls auf Naik et al. (2005) zu, die Interaktionseffekte von Marketing-Aktivitäten in dynamischen Oligopolen für Marktanteilsmodelle unter Berücksichtigung von Wettbewerbseffekten zur Bestimmung der optimalen Budgetierung der Aktivitäten im Mix untersuchen. Die Autoren finden, dass im dynamischen Wettbewerb Interaktionseffekte zwischen den Marketing-Aktivitäten der Unternehmung selbst und zwischen denen der Wettbewerber existieren und bei der optimalen Budget- und Allokationsentscheidung für eine Marktanteils-Zielsetzung mit zu berücksichtigen sind.

Ebenfalls selten werden **Werbeinstrumentrestriktionen**, die aufgrund einer beschränkten Verfügbarkeit von Werberaum und Werbeträgern für einzelne Werbeinstrumente entstehen, in obigen Allokationsmodelle integriert. Die vorliegende Arbeit verfolgt daher auch die Intention neben einer Werbebudgetrestriktion auch (Budget-) Restriktionen für einzelne Werbeinstrumente in die Modelle mit einzubeziehen.

3 Werbewirkungsfunktionen als Grundlagen einer analytischen Werbemixplanung

3.1 Verläufe von Wirkungsfunktionen

Die Betrachtung psychographischer Werbewirkungszusammenhänge und insbesondere ihrer mathematischen Operationalisierungen, die die Basis modell-analytischer Werbemixplanung bilden, legt es nahe, sich mit dem Arsenal möglicher Wirkungsoperationalisierungen aus dem Marketing und mit Befunden zu Wirkungsverläufen von Marketing-Zielgrößen auseinander zusetzen, die wiederum von den psychographischen Werbewirkungen mediiierend beeinflusst werden. Diese Auseinandersetzung hilft, plausible Verläufe sowie mögliche Operationalisierungen psychographischer Werbewirkungen zu identifizieren. Dies erscheint notwendig, da explizite Operationalisierungen psychographischer Werbewirkungen selten in der Literatur behandelt oder angegeben werden.

Der **Zusammenhang** zwischen einer Wirkungskomponente und einer Aktivitätskomponente wird in der Marketinglehre in vielfältiger Art und Weise in Form von Wirkungshypothesen systematisiert.¹ Eine gängige Verknüpfung der Komponenten ist die so genannte **Wirkungsfunktion**², die einen funktionalen Zusammenhang zwischen

¹ Vgl. Steffenhagen (2008), S. 159.

² In der Fachliteratur finden sich verschiedene, synonym verwendete Termini wie „Reaktionsfunktion“, „Marktreaktionsfunktion“, „Response-Function“, „Sales-Response-Function“, „Market-Response-Function“, „Preis-Absatzfunktion“, „Budget-Absatzfunktion“, usw., die allgemeine, spezifische und/oder unterschiedliche Instrument-Wirkung-Beziehungen bzw. Betrachtungsebenen darstellen. Vgl. auch Kotler (1971), S. 24ff., Meffert (2002), S. 819ff., Leeflang et al. (2000), S. 50ff. und Hanssens/Parsons (1993), S. 4ff.

einer (meist ökonomischen) Zielvariablen (Wirkungskomponente) und Marketing-Instrumentvariablen (eine oder mehrere, meist in Geldeinheiten operationalisierte, Aktivitätskomponenten) herstellt.³ Den Zusammenhang zwischen einer Werbewirkung und einem Werbebudget bzw. mehrerer Werbeinstrumentbudgets beschreibt die **Werbewirkungsfunktion**.⁴

Die Formalisierung des Wirkungszusammenhangs kann auf zwei Betrachtungsebenen erfolgen: der Mikro- und der Makroebene. Werden die individuellen Auswirkungen von Kommunikationsaktivitäten betrachtet, d.h. das individuelle Verhalten einzelner Personen bzw. Nachfrager, so spricht man von der **Mikroebene**. Wird ein Aggregat von Nachfragern betrachtet, also eine Personenmehrheit bzw. die anvisierte Käuferschaft als Ganzes, so spricht man von der **Makroebene**. Die unterschiedlichen Sichtweisen spielen u.a. bei der Bestimmung des funktionalen Wirkungszusammenhangs eine entscheidende Rolle.⁵

Wirkungsfunktionen bilden den **Kern mathematischer Entscheidungsmodelle** und nehmen damit eine entscheidende Rolle bei der Entscheidungsunterstützung ein.⁶ Die in Entscheidungsmodellen verwendeten Wirkungsfunktionen stellen in Form mathematischer Formulierungen das innere, mentale Modell des Entscheiders über die Wirkungszusammenhänge dar. Intention bei der Betrachtung und Analyse von Wirkungsfunktionen ist es, eine **plausible Funktion** zur Modellierung von Entscheidungsmodellen zu finden und zu verwenden, um so die **Prognose der Wirkung** von Marktbearbeitungsaktivitäten **zu verbessern und wissenschaftlich abzusichern**.⁷

Eine Vielzahl von Autoren beschäftigt sich mit der Gestalt von Funktionen, die zur Modellierung von Wirkungsfunktionen herangezogen werden können, welche Eigenschaften diese Funktionen aufweisen (sollten) und welche Konsequenzen sich daraus z.B. für Budget-Entscheidungen ergeben.⁸ Unter Gestalt wird zum einen der **grundlegende Verlauf der Wirkung** (mit dem Aktivitätsniveau steigend, fallend, linear, konkav, konvex, etc.) verstanden, zum anderen eine Präzisierung des Verlaufs durch Angabe eines konkreten Funktionstyps, d.h. einer **mathematischen Notation einer Funktion** zu dem grundlegenden Verlauf der Wirkung.

³ Vgl. Bruhn (2005), S. 33.

⁴ Vgl. Steffenhagen (2000), S. 195 und die dort zitierten Quellen.

⁵ Vgl. Steffenhagen (2008), S. 161f.

⁶ Vgl. Lilien/Rangaswamy (2003), S. 7f., S. 10 und S. 30.

⁷ Vgl. Depluet (1991), S. 161.

⁸ Vgl. Vakratsas/Ma (2005), Vakratsas et al. (2004), Hanssens/Parsons (1993), Saunders (1987), Hruschka (1991), Johansson (1979) und Rao/Miller (1975).

Ausgangspunkt der Betrachtung sind i.d.R. **Plausibilitätsüberlegungen** bzgl. des Wirkungsverlaufs. Mögliche elementare Verläufe von Wirkungsfunktionen sind in Abbildung 3.1 schematisch dargestellt.⁹

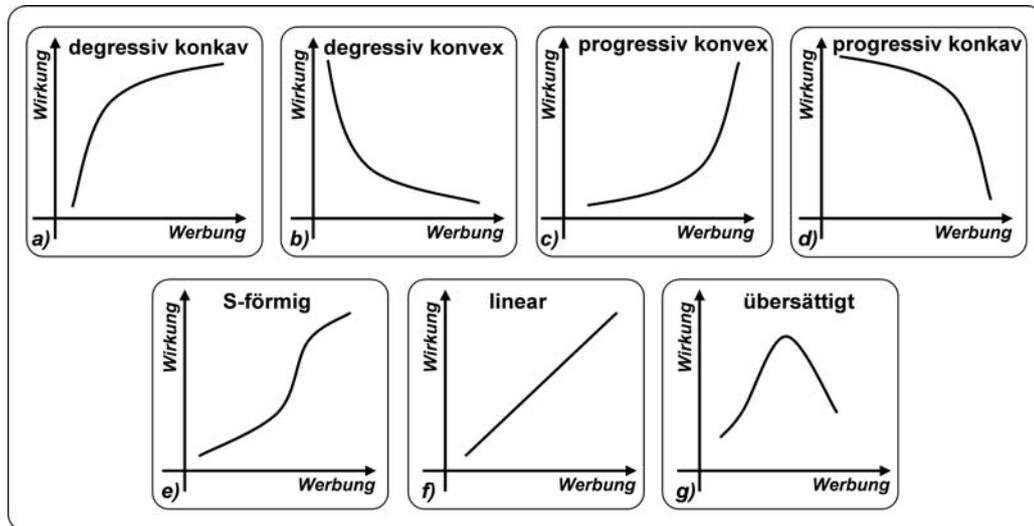


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung grundlegender Funktionsverläufe

Die wesentliche Annahme zur Wirkung von Werbung bei ökonomischen Marketing-Größen ist, dass ein **positiver** Zusammenhang zwischen Werbeaktivitäten und der betrachteten Wirkung existiert (vgl. Abbildung 3.1a, c, e, f und g): mit steigenden Anstrengungen bzw. damit verbundenen Werbeausgaben verstärkt sich auch die Wirkung.¹⁰

Nicht nur für ökonomische Werbeziele, sondern insbesondere für außerökonomische Werbeziele in den Wirkungsklassen Interessen, Präferenzen und Einstellungen, die stark subjektiv und affektiv geprägt sind, ist auch ein **negativer** Zusammenhang grundsätzlich denkbar (vgl. Abbildung 3.1b und d)¹¹, da emotionale Werbereize auch zu negativen Auswirkungen aufgrund von Wear-Out-Effekten wie Übersättigung, Ablenkung oder Abnutzung bei den Adressaten der Werbung führen können.¹² Üblicherweise wird jedoch der negative Wirkungszusammenhang nicht explizit betrachtet.

Für den positiven Wirkungszusammenhang finden sich in der Literatur zwei grundlegende, unterschiedliche Annahmen über den generellen Wirkungsverlauf der Werbung

⁹ Die Abszisse repräsentiert das Aktivitätsniveau des Instrumentes, die Ordinate die erzeugte Wirkung.

¹⁰ Vgl. Bruhn (2005), S. 245, Little (1979), S. 635 und Lambin (1976), S. 94.

¹¹ Denkbar sind auch S-förmige oder lineare Verläufe mit negativer Steigung.

¹² Vgl. Bruhn (2005), S. 461 oder Mesak (1992), Henderson-Blair (1987), Simon (1982), Axelrod (1980), Pekelman/Sethi (1978). Gogarten (1993), S. 69 wirft sogar die Frage auf, ob Werbung möglicherweise nur dann bewusst wahrgenommen wird, wenn sie schlecht ist oder den Adressaten auf die Nerven geht.

bei ökonomischen Wirkungsgrößen.¹³

- Die Wirkung der Werbung steigt degressiv an (degressiv-konkaver Verlauf).
- Die Wirkung der Werbung steigt zunächst progressiv, dann degressiv an (S-förmiger Verlauf).

Diese werden aus den folgenden, elementaren Überlegungen abgeleitet: Mit steigendem Werbeaufwand werden durch die Werbung immer resistenter Adressaten in der anvisierten Zielgruppe erreicht und es stellen sich Sättigungseffekte ein, so dass der Marktwiderstand ansteigt und die Wirkung der Werbung mit wachsendem Aufwand nicht gleichermaßen weiter steigt. Alternative Überlegungen bauen auf dem Umstand abnehmender Reichweitzuwächse in der Zielgruppe und auf der abnehmenden Leistungsfähigkeit der bei höherem Geldeinsatz zunehmend zwingend einzubeziehenden Werbeträger auf.¹⁴

Bei geringem Werbemittelleinsatz kann möglicherweise die Werbung von den Adressaten nur unzureichend wahrgenommen werden; sie dringt durch den allgemeinen „Werbelärm“ (eng.: „advertising clutter“) nicht hindurch. Ein höherer Werbeaufwand würde zunächst einen überproportionalen Effekt erzielen, der dann durch steigenden Marktwiderstand bei sehr hohem Werbeaufwand wieder zurückgehen würde.¹⁵

Mit diesen beiden verschiedenen Überlegungen sind die zwei obigen Verläufe verbunden: im ersten Falle ein **degressiv-konkav** steigender Verlauf, im zweiten Falle ein **S-förmiger**¹⁶ Verlauf (siehe Abbildung 3.1a und e).

Der **lineare** Funktionstyp (Abbildung 3.1f), der aufgrund seiner Einfachheit gern verwendet wird, impliziert im Falle einer Werbebudget-Wirkungsfunktion die (unrealistische) Eigenschaft, dass das „optimale“ Budget gleich Null oder unendlich ist. Des Weiteren hätte jede Einheit des Werbebudgets stets die gleiche betragsmäßige Wirkung (weil die Steigung konstant ist), so dass ein linearer Verlauf i.d.R. als unrealistisch angesehen wird.¹⁷

Ein rein **progressiv-konvexer** Funktionsverlauf (Abbildung 3.1c) ist für Werbeaktivitäten wegen der obigen Betrachtung zum degressiv-konkaven Verlauf eher unplausibel. Denkbar ist, dass der progressiv-konvexe Verlauf als Näherung für den unteren Teil

¹³ Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 632, ter Haseborg (1984), S. 106 oder Schmalen (1992), S. 48.

¹⁴ Vgl. Jagpal et al. (1979), S. 42 und Saunders (1987), S. 21.

¹⁵ Vgl. Kotler (1997), S. A-4.

¹⁶ progressiv-konvex → degressiv-konkav

¹⁷ Vgl. Depluet (1991), S. 172 und Kotler (1971), S. 64.

eines S-förmigen Wirkungsverlaufs verwendet wird. Alternativ kann auch eine Monopolstellung des Werbetreibenden angenommen werden. Der **degressiv-konvexe** oder **progressiv-konkave** Verlauf (Abbildung 3.1b und d) ist für einen negativen Werbewirkungszusammenhang möglich oder als Näherung des oberen Teils eines Übersättigungsverlaufes (Abbildung 3.1g). Für Preis-Absatz-Wirkungsfunktionen sind diese beiden Verläufe in dem Falle plausibel, in dem mit steigenden Preisen ein überproportionaler Abbruch der Nachfrage erfolgt, wobei Substitutionsmöglichkeiten und die Nachfragerstruktur den Unterschied zwischen den beiden Ausprägungen ausmachen.¹⁸

In der Literatur¹⁹ existieren weitere, zum Teil explizitere Aussagen und Hypothesen über die Gestalt und Eigenschaften (meist monoinstrumenteller,) ökonomischer Marketing-Wirkungszusammenhänge in Abhängigkeit eines Marketing-Instrumentes, u.a.:²⁰

Hypothese 1 (Nullpunkt)

Keine Wirkung ohne Aufwand.

Hypothese 2 (Linearität)

Es gibt einen linearen Zusammenhang zwischen Aufwand und Wirkung.

Hypothese 3 (Konkavität)

Mit steigendem Aufwand steigt die Wirkung unterproportional.

Hypothese 4 (Sättigung)

Eine maximale Wirkung kann nicht überschritten werden.

Hypothese 5 (Konvexität)

Mit steigendem Aufwand steigt die Wirkung überproportional.

Hypothese 6 (S-Förmigkeit)

Mit steigendem Aufwand steigt die Wirkung zunächst überproportional, dann unterproportional.

Hypothese 7 (Mindestaufwand)

Es gibt einen Mindestaufwand bevor eine Wirkung eintritt.

Hypothese 8 (Übersättigung)

Es gibt einen Aufwand, ab dem die Wirkung (wieder) abnimmt.

Hypothese 9 (Offset)

Es gibt einen Offset in der Wirkung bei verschwindendem Aufwand.

Hierbei stellt die „Wirkung“ die Höhe der abhängigen Variablen, d.h. der Wirkungskomponente, und der „Aufwand“ die Höhe der unabhängigen Variablen, d.h. der Aktivitätskomponente eines (Marketing-)Instrumentes, dar.

¹⁸ Vgl. Depluet (1991), S. 179.

¹⁹ Vgl. Simon/Arndt (1980), Lilien et al. (1992), Hanssens/Parsons (1993), S. 413, Saunders (1987), S. 17 und die dort zitierten Quellen.

²⁰ Vgl. Saunders (1987), S. 17ff. Hypothesen 3 und 6 sind hier der Vollständigkeit halber nochmals aufgelistet, da sie Teil der Saunders'schen Untersuchung sind.

Eine ausführliche Diskussion über das Für und Wider und (empirische) Befunde zu diesen Hypothesen zu Wirkungsfunktionen findet der Leser in Saunders (1987) und Depluet (1991), die jedoch hier nicht wiederholt geführt werden muss, da sie keine neuen Erkenntnisse zur Werbemixplanung beisteuern kann. Lediglich die wesentlichen Ergebnisse seien wiedergegeben.

Saunders (1987) geht der Frage nach, welche der obigen Aussagen plausibel bzw. wahr sind und kommt zu dem Schluss, dass der Großteil dieser Behauptungen entweder nicht wahr ist (Hypothesen 4 bis 9) oder nicht belegt/widerlegt werden kann (Hypothesen 1 und 2). Lediglich der konkave Wirkungszusammenhang (Hypothese 3) scheint durch empirische Befunde belegbar zu sein.²¹ Zu diesem Schluss kommt auch Depluet (1991) unter dem Hinweis, dass es **keine eindeutigen, überschneidungsfreien Hinweise oder Belege für die „richtige“ Wirkungsfunktion** im Marketing zu geben scheint.

Erwähnenswert ist auch die in den 1960er/1970er Jahren vorherrschende und bis heute andauernde Diskussion „konkav vs. S-förmig“ über den grundlegenden Funktionsverlauf von Wirkungsfunktionen. Obwohl Simon/Arndt (1980) in ihrer Literaturstudie zu dem Schluss kommen, dass ein S-förmiger Wirkungsverlauf nicht gefunden bzw. nachgewiesen werden konnte,²² wird in der Marketing-Literatur der S-förmige Wirkungsverlauf bis heute als plausibel und als Alternative zum konkaven Wirkungsverlauf betrachtet.²³ Dies resultiert aus der Betrachtung des Aktivitätsmaßes *Kontakthäufigkeit* für die Aktivitätskomponente, dem in der Literatur durchgehend ein S-förmiger Wirkungsverlauf zugeschrieben wird. Zudem wird die Vorteilhaftigkeit von Pulsationsstrategien²⁴ einem S-förmigen Wirkungsverlauf zugerechnet,²⁵ der somit implizit als empirisch fundiert

²¹ Vgl. aber Hallemann (2006), S. 11 sowie Czap (1980), S. 28, die auch Belege für Hypothese 4 (*Sättigung*) finden. Auch für Marktanteilsmodelle ist die Richtigkeit von Hypothese 4 anzunehmen, da die einzelnen Marktanteile bzw. ihre Summe die 100% nicht übersteigen dürfen. Marktanteilsmodelle (eng.: „market-share models“) betrachten den Marktanteil z.B. eines Produktes, einer Marke oder des Absatzes eines Anbieters im Verhältnis zu der Summe aller Anbieter. Vorteil dieser Art von Modellen ist, dass sie logisch konsistent sind, denn für die modellierte Größe gilt, dass sie zwischen 0 und 100% liegt und die Summe aller Marktanteile 100% ergeben muss. Abweichungen von diesen Bedingungen offenbaren deshalb Inkonsistenzen in den Modellannahmen, vgl. dazu Hanssens/Parsons (1993), S. 418, Homburg/Krohmer (2003), S. 770 oder Bell et al. (1975). Saunders (1987) betont, dass das Konzept der Sättigung in der Marketing-Literatur weit verbreitet ist, aber außerhalb von Marktanteilsmodellen wenige Belege für Hypothese 4 existieren.

²² Vgl. Simon/Arndt (1980), S. 24.

²³ Vgl. Bruhn (2005), S. 246, Sander (2004), S. 560, Homburg/Krohmer (2003), S. 632 und Schmalen (1992), S. 48.

²⁴ Bei der Verfolgung einer Pulsationsstrategie für Werbeaktivitäten wechseln sich Perioden mit hohen Werbeaktivitäten/-ausgaben mit Perioden geringerer Werbeaktivitäten/-ausgaben ab. Dies ist insbesondere für saisonale Produkte, wie z.B. Eiscreme, vorteilhaft. Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 649, Mahajan/Muller (1986) und Naik et al. (1998).

²⁵ Vgl. ter Haseborg (1983), S. 113 und Mahajan et al. (1984), S. 101f.

angesehen wird. Hierbei wird aber eine dynamische, zeitablaufbezogene Wirkungsbeobachtung durch einen statischen Wirkungszusammenhang erklärt.

Fast allen Betrachtungen zu Wirkungsfunktionen in Abschnitt 3.1 ist gemeinsam, dass vornehmlich **ökonomische Wirkungen** wie *Absatz* oder *Umsatz* und **Marketing-Instrumente** wie *Preis* oder ein pauschales *Absatzförderungsbudget* für die aufgeführten Überlegungen betrachtet werden. Betrachtet man **psychographische Werbewirkungen** (wie Eigenschaftskennnisse, Markensympathie, Produktinteresse u.a.) und insbesondere die üblichen Befragungstechniken und Wirkungsmessungen der empirischen Ermittlung psychographischer Werbewirkungen in Form so genannter Rating-Skalen²⁶, so entstehen auf der Makroebene nach der Aggregation der individuellen Messwerte ein (nach oben und unten) beschränkter Wertebereich psychographischer Werbewirkungsfunktionen (z.B. in Form einer 0-100%-Skala). Der an empirischen Daten zu schätzende funktionale Wirkungszusammenhang sollte diese Beschränktheit widerspiegeln, d.h. für große Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente muss das Wirkungsniveau gegen eine obere Schranke streben.

Während obige (eher nicht belegbare) Aussagen und Plausibilitätsüberlegungen eine (theoretische) Begründung für oder wider einen bestimmten grundlegenden Wirkungsverlauf liefern sollen, der ggfs. den psychographischen Werbewirkungen – d.h. den Vorstufen der ökonomischen Wirkungen – ebenfalls zu unterstellen ist, sagen sie noch nichts über den zugrunde liegenden, mathematischen Funktionstyp aus. Dieser ist von wesentlichem Interesse, da ein spezifischer Wirkungsverlauf durch verschiedene Funktionstypen repräsentiert werden kann. Die **unterschiedlichen Funktionstypen** haben aber **unterschiedliche mathematische Eigenschaften**, die **unterschiedliche Ausprägungen der zugrunde liegenden Entscheidungssituation** und **unterschiedliche betriebswirtschaftliche Interpretationen** der Ausprägungen dieser Eigenschaften darstellen.

Der nachfolgende Abschnitt 3.2 befasst sich daher zunächst mit den Möglichkeiten der Bestimmung von (psychographischen) Wirkungsfunktionen. Abschnitt 3.3 gibt dann Definitionen von Eigenschaften, die zur Charakterisierung und Beurteilung der Plausibilität von (psychographischen) Werbewirkungsfunktionen herangezogen werden können. Abschnitt 3.4 listet gängige Funktionstypen zur Modellierung von Wirkungsfunktionen auf.

²⁶ Vgl. Steffenhagen (2000), S. 90ff.

3.2 Ermittlung von Wirkungsfunktionen

Auf der Makroebene fehlen theoretische Ansätze sowie umfangreiche empirische Untersuchungen zur Konstruktion des Wirkungszusammenhangs zwischen den eingesetzten Aktivitätsniveaus der Instrumente und der Wirkungskomponente in Form einer Werbewirkungsfunktion, da eine allgemeingültige, geschlossene und umfassende Theorie über den Einsatz von Marketing- und Werbeinstrumenten und ihrer (psychographischen) Wirkungen z.Z. nicht existiert.²⁷ Es können jedoch verschiedene Ansätze zur Ermittlung von Wirkungsfunktionen verfolgt werden.

Die **Ermittlung einer Wirkungsfunktion** kann durch eine (zeitlich vorgelagerte) theoretische Herleitung sowie durch eine empirische Schätzung auf Basis „probeweise“ verwendeter, theoretisch hergeleiteter Wirkungsfunktionen erfolgen. Die empirische Ermittlung kann nach Sander (2004) auf drei Arten erfolgen: erstens durch Analyse von (historischen) Daten, zweitens durch Befragung von Experten und/oder Nachfragern und drittens durch Experimente. Allen drei Ermittlungsweisen gemeinsam ist der Versuch, den funktionalen Zusammenhang zwischen der Wirkungskomponente und der Aktivitätskomponente durch Analyse quantitativer Daten **induktiv** herzustellen. Nach dem Erfassen der Daten zur Wirkungsleistung von Kommunikationsaktivitäten im Rahmen der Werbeerfolgskontrolle bzw. der Werbewirkungsanalyse durch z.B. eine Tracking-Studie wird mit einer Regressionsanalyse die Beziehung zwischen der abhängigen und der unabhängigen Variablen bestimmt.

Da eine erhebliche Bandbreite von Funktionen existiert, die zur Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Daten und der gemessenen Wirkung herangezogen werden können, stellt eine aus rein mathematisch-statistischer Sicht sehr gute Näherung des funktionalen Zusammenhangs nicht notwendigerweise die tatsächliche Wirkungsfunktion oder den vom Entscheider erwarteten Funktionsverlauf dar. Bei der rein mathematisch-statistischen Bestimmung der Werbewirkungsfunktion anhand empirischer, historischer Daten fehlt eine theoretische Basis, die den Zusammenhang zwischen der Wirkungskomponente und der Aktivitätskomponente hinreichend erklären kann. Schon vor der empirischen Schätzung muss daher **deduktiv** versucht werden, mittels Plausibilitäts- und Logiküberlegungen den vermutlich gültigen Verlauf und die zu unterstellenden Eigenschaften einer Wirkungsfunktion zu bestimmen.

²⁷ Vgl. Nieschlag et al. (1997), S. 879.

Beide Ansätze liefern nicht unumstrittene Ergebnisse wie im Falle des S-förmigen Verlaufs, der zwar mit einer plausibel erscheinenden Logiküberlegung begründbar ist, aber empirisch nicht nachgewiesen²⁸ wurde.

Ein **Synthese** beider Ansätze verfolgt Depluet (1991), um eine konsistentere Bestimmung von Wirkungsfunktionen zu erzielen. Durch Kombination isolierter, empirischer Ergebnisse mit Plausibilitätsüberlegungen wird versucht, für Preis-Absatz- und Budget-Absatz-Wirkungsfunktionen zunächst die Gestalt des grundlegenden Wirkungsverlaufs und dann einen konkreten Funktionstyp abzuleiten. Dazu werden für aus der Literatur bekannte Wirkungshypothesen über Preis-Absatz- und Budget-Absatz-Wirkungszusammenhänge **Tendenzaussagen** über die **Gestalt und Struktur der Wirkungsfunktionen** abgeleitet, indem u.a. Eigenschaften wie die Elastizität oder – im Falle polyinstrumentaler Wirkungsfunktionen – Instrumentinteraktionen betrachtet werden. Die Hypothesen werden dazu hinsichtlich gewisser charakterisierender Elemente der vorliegenden Entscheidungssituation untersucht, um die Tendenzaussagen entsprechend bestimmter Konstellationen dieser Elemente zu strukturieren. Dies erlaubt es dann bestimmte Funktionstypen für bestimmte Kombinationen dieser strukturierenden Elemente auszuschließen. Als Beispiel lässt sich aus der Hypothese *Die Elastizität der Budget-Wirkungsfunktion ist abhängig vom bislang erzielten Marktanteil. Je höher der Marktanteil, desto geringer sollte die Budgetelastizität sein.*²⁹ schlussfolgern, dass eine multiplikative Wirkungsfunktion (Potenzfunktion) unplausibel ist, da sie die Eigenschaft der Iso-Elastizität aufweist. Das maßgebende und strukturierende Element der Entscheidungssituation, für die diese Hypothese zutreffen kann, ist die Höhe des erreichten Marktanteils des zu bewerbenden Produkts.

Eine mögliche alternative Herleitung von Wirkungsfunktionen für **psychographische Werbeziele** auf der Makroebene ist die Ableitung dieser Funktionen aus dem Konglomerat individueller Wirkungsfunktionen, d.h. der Schluss von der Mikroebene auf die Makroebene mittels geeigneter Aggregation. Dieser Ansatz scheitert jedoch aufgrund von Datenproblemen, die für die Aggregation individueller Wirkungsfunktionen gelöst werden müssen.³⁰ Da bislang trotz der intensiven empirischen Erforschung des Konsumentenverhaltens nicht absehbar ist, dass die für eine konsistente Aggregation erforderlichen Daten mit vertretbarem Aufwand beschafft werden können,³¹ kann auf

²⁸ Vgl. Simon/Arndt (1980) und Lambin (1969).

²⁹ Vgl. Cooper/Nakanishi (1990), S. 33.

³⁰ Vgl. Steffenhagen (1979), S. 490.

³¹ Vgl. Steffenhagen (1979), S. 491.

individual-verhaltenswissenschaftliche Theorien zur „Marketing-Reaktion“ von Konsumenten nicht zurückgegriffen werden, um den realitätsbezogenen Verlauf einer Wirkungsfunktion auf der Makroebene einzugrenzen.

Deshalb bietet es sich an, die in der Marketing-Literatur häufig verwendeten Wirkungsfunktionen auch zur Operationalisierung psychographischer Werbewirkungen heranzuziehen, und zur Eingrenzung einer im Einzelfall in Betracht zu ziehenden Funktion auf allgemeine Eigenschaften dieser Funktion einzugehen; solche Eigenschaften seien im folgenden Abschnitt näher erläutert.

3.3 Eigenschaften von Wirkungsfunktionen

In Wirkungsfunktionen mit mehreren veränderlichen Variablen (Aktivitätsniveaus unterschiedlicher Marketing-Instrumente) gilt es, **Interaktionseffekte** zwischen diesen Aktivitätsniveaus zu beachten, d.h. funktionale Abhängigkeiten in Form sachlicher bzw. inhaltlicher Wirkungszusammenhänge zwischen den Aktivitätsniveaus der Marketing-Instrumente.³² Nicht nur auf der Ebene der Marketing-Instrumente existieren solche Interdependenzen bzw. Interaktionseffekte, sondern auch auf der Ebene der Werbeinstrumente, so dass die theoretischen Konzepte zu Interaktionseffekten auch auf diese Betrachtungsebene projiziert bzw. in allgemeiner Form formuliert werden können.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist die **(Werbe-)Wirkungsfunktion**, d.h. der funktionale Wirkungszusammenhang f zwischen den Instrumentvariablen x_1, \dots, x_n der (Werbe-)Instrumente ($i = 1, \dots, n$), die die Aktivitätsniveaus der Instrumente beschreiben und der betrachteten Wirkung y , also $y = f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Für die folgenden Definitionen wird vorausgesetzt, dass die Wirkungsfunktion $f(\vec{x})$ zweimal stetig differenzierbar ist. Nach Hruschka (1991) und Logman/Pauwels (1998) lassen sich u.a. die folgenden Interaktionsformen bzw. Operationalisierungen der Interaktionen unterscheiden: **Marginale Reaktionsinteraktion**, **Elastizitätsinteraktion** und **Optimalitätsinteraktion**, die im Folgenden definitionsartig erläutert werden. In der deutschsprachigen Literatur hat insbesondere Hruschka³³ die Untersuchung von Interaktionseffekten bei Wirkungsfunktionen geprägt. Auf ihn gehen auch die nachfolgenden Definitionen 3.1, 3.3 und 3.4 zurück.

³² Vgl. Meffert (2002), S. 973f. Neben funktionalen Abhängigkeiten existieren zeitliche und hierarchische Interdependenzen der Marketing-Instrumente.

³³ Vgl. Hruschka (1991) und Hruschka (1996).

3.1 Definition (Marginale Reaktionsinteraktion)

Eine **marginale Reaktionsinteraktion** (RIA) liegt dann vor, wenn die Auswirkungen einer (beliebig kleinen) Änderung einer Instrumentvariablen x_i vom Niveau der Instrumentvariablen x_j abhängt, d.h. wenn

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} \neq 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (3.1)$$

Die Funktion $f(\vec{x})$ weist also eine marginale Reaktionsinteraktion genau dann auf, wenn die partielle Ableitung zweiter Ordnung der Wirkungsfunktion $f(\vec{x})$ nach den beiden Instrumentvariablen x_i, x_j von Null verschieden ist. ■

Die **Elastizitätsinteraktion** baut auf der Größe der *Elastizität* einer Funktion auf. Sie ist ein Maß für die Stärke der Wirkung eines Instrumentes auf die funktional-abhängige Variable.

3.2 Definition (Elastizität)

Die (partielle) **Elastizität** ϵ_{x_i} einer Zielgröße $f(\vec{x})$ bezüglich einer Instrumentvariablen x_i ist definiert als das Verhältnis einer relativen (bzw. marginalen) Änderung $\frac{\partial f(\vec{x})}{f(\vec{x})}$ der Zielgröße $f(\vec{x})$ zu der sie verursachenden, relativen (bzw. marginalen) Änderung $\frac{\partial x_i}{x_i}$ der Instrumentvariablen x_i

$$\epsilon_{x_i} := \frac{\frac{\partial f(\vec{x})}{f(\vec{x})}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\vec{x})} \quad (3.2)$$

■

Bemerkung 3.1

Ausprägungen der Elastizität.³⁴

- Ein positiver (bzw. negativer) Wert der Elastizität bedeutet, dass die Zielgröße $f(\vec{x})$ mit zunehmendem Wert der Instrumentvariablen x_i zunimmt (bzw. abnimmt).
- Ist die Elastizität betragsmäßig größer als Eins, so liegt eine überproportionale Reaktion der Zielgröße vor, d.h. die relative Änderung der Zielgröße $f(\vec{x})$ liegt über der relativen Änderung der Instrumentvariablen x_i

³⁴ Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 763f. und S. 568f.

3.3 Definition (Elastizitätsinteraktion)

Elastizitätsinteraktion (EIA) zwischen zwei Instrumentvariablen x_i und x_j liegt dann vor, wenn die Elastizität der Zielgröße $f(\vec{x})$ bzgl. x_i vom Wert der Instrumentvariablen x_j abhängt, d.h. wenn

$$\frac{\partial \epsilon_{x_i}}{\partial x_j} \neq 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (3.3)$$

■

Bemerkung 3.2

Liegt bei einem Funktionstyp keine marginale Reaktionsinteraktion aber Elastizitätsinteraktion vor (wie z.B. bei linearen Funktionen), so bedeutet dies, dass sich das Niveau einer Instrumentvariablen auf die relative Auswirkung, nicht aber auf die absolute Auswirkung der Veränderung einer anderen Instrumentvariablen auswirkt.³⁵

3.4 Definition (Optimalitätsinteraktion)

Optimalitätsinteraktion (OIA) liegt dann vor, wenn der optimale Wert x_i^* einer Instrumentvariablen x_i für eine zu optimierende Funktion $f(\vec{x})$ vom Wert einer anderen Instrumentvariablen x_j abhängt, d.h.

$$\frac{dx_i^*}{dx_j} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i^* = x_i^*(x_j) \quad \text{für } i \neq j \quad (3.4)$$

■

Bemerkung 3.3

Zu beachten ist, dass i.d.R. für die Instrumentinteraktionen **unterschiedliche Betrachtungsebenen** herangezogen werden. Während für Reaktions- und Elastizitätsinteraktion die **Wirkungsfunktion** $f(\vec{x})$ direkt betrachtet wird, so wird für die Optimalitätsinteraktion eine **übergeordnete Funktion** $G(f(\vec{x}))$ angesetzt. In der einschlägigen Fachliteratur³⁶ wird aufgrund einer verfolgten ökonomischen Zielsetzung für G meist eine Gewinnfunktion³⁷ in Abhängigkeit der Marketing-Instrumente Preis und Absatzförderungsbudget angesetzt, in die die Wirkungsfunktion $f(\vec{x})$ z.B. als Absatzfunktion eingeht.

³⁵ Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 767.

³⁶ Vgl. Hruschka (1991), S. 341, Logman/Pauwels (1998), S. 344 oder Homburg/Krohmer (2003), S. 767.

³⁷ Z.B. $G = p \cdot f(p, W) - K(f(p, W)) - W$ wobei G der Gewinn, p der Preis (1. Instrument), W das Werbebudget (2. Instrument), $f(p, W)$ der Absatz, $K(f(p, W))$ die Kosten sind und p unabhängig von der Absatzmenge ist.

Da für **psychographische Werbeziele** keine solche übergeordnete Funktion angesetzt, sondern $f(\vec{x})$ als Wirkungsfunktion für den (zu optimierenden) Wirkungszusammenhang direkt betrachtet wird, werden sich für die Optimalitätsinteraktion für bestimmte Funktionstypen andere Ergebnisse einstellen als die aus der Literatur bekannten, wie die Ergebnisse aus Anhang C, S. 205 zeigen.

Bemerkung 3.4

Obige Definitionen und Betrachtungen setzen den gleichen Werbeobjektbezug voraus. Möglich ist aber auch die Betrachtung von **Interaktionseffekten bei unterschiedlichem Objektbezug**. Dabei geht es um Ausstrahlungseffekte zwischen verschiedenen Wirtschaftsobjekten ($h = 1, \dots, q$), wie z.B. verschiedene zu bewerbende Produkte. Die Wirkungsfunktion muss nun den Zusammenhang zwischen den unabhängigen Instrumentvariablen x_i auf die unterschiedlichen Objekte h darstellen, d.h. $y_h = f(x_{11}, \dots, x_{1q}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nq})$ für das h -te Objekt.

Prinzipiell lassen sich obige Überlegungen zu Instrumentinteraktionen auch auf diesen Fall übertragen. Da sich die Komplexität von Entscheidungsmodellen durch den unterschiedlichen Objektbezug insbesondere für eine Mehrfach-Zielsetzung aufgrund der sehr viel höheren Anzahl an Variablen erheblich vergrößert – da in diesem Fall die Größen $y_{kh} = f_k(x_{11}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nq})$ zu betrachten wären –, wird in der vorliegenden Arbeit von Interaktionseffekten bei unterschiedlichem Objektbezug abgesehen. Zudem sind keine wesentlich anderen Ergebnisse zu erwarten, da die mathematischen Mechanismen dieser Interaktionseffekte gleich bleiben.

3.4 Wirkungsfunktionstypen in der Marketing-Literatur

Die Funktionstypen, die in der Marketing-Literatur üblicherweise zur Modellierung von (Werbe-)Wirkungszusammenhängen herangezogen werden (und einige alternative Funktionstypen), sind in Tabelle 3.1 mit ihren Eigenschaften wie Elastizität, marginale Reaktionsinteraktion, Elastizitätsinteraktion und Optimalitätsinteraktion aufgelistet.³⁸ Einige Literaturbeiträge beschränken sich auf eine monoinstrumentale Darstellung der

³⁸ Eine ausführliche Darstellung der Funktionen, ihrer Eigenschaften und ihrer Herkunft kann Anhang D entnommen werden.

Funktionen,³⁹ häufiger ist jedoch eine polyinstrumentale Darstellung.⁴⁰ Die Bezeichnungen der Funktionstypen (z.B. „quadratisch“) und die damit verbundene Funktionsnotation unterscheiden sich in ihrer konkreten mathematischen Operationalisierung von Beitrag zu Beitrag.⁴¹

Welche tatsächliche Größe die Wirkungskomponente einer Funktion darstellt, ist in der Literatur ebenfalls nicht eindeutig. Allen Betrachtungen zu funktionalen Wirkungszusammenhängen ist gemeinsam, dass verschiedene Autoren die gleichen Funktionen zur Modellierung verschiedener Wirkungsgrößen heranziehen.⁴² Da die Funktionen in der Literatur für unterschiedliche Wirkungsgrößen stehen und für mathematische Zusammenhänge die konkrete Einheit der Wirkungskomponente keine Rolle spielt, soll in der vorliegenden Arbeit die Einheit der Wirkungskomponenten Prozent sein oder unbestimmt bleiben.⁴³

Für die in der vorliegenden Arbeit verfolgte Fokussierung auf eine Werbemixplanung mit mehrfachen, psychographischen Werbewirkungen sind im Kontext der Verwendung plausibler Werbewirkungsfunktionen zwei Aspekte zu diskutieren:

Zum einen erweitert sich das Spektrum an möglichen Wirkungsfunktionen. Aufgrund von Zielkonflikten bei der Verfolgung mehrerer Werbeziele können für die Mehrfach-Zielsetzungsproblematik auch solche polyinstrumentalen Wirkungsfunktionen berücksichtigt werden, die bei der Maximierung eines *einzelnen* Zieles lediglich zu der trivialen Mix-Lösung führen, das Werbebudget vollständig auf ein einzelnes Werbeinstrument zu verteilen.⁴⁴

Denkt man zum anderen an die übliche befragungs- und messmethodische Skalierung bei der Wirkungsmessung psychographischer Größen, aus der sich ein beschränkter

³⁹ Vgl. Saunders (1987) und Depluet (1991).

⁴⁰ Vgl. Hruschka (1991), Hanssens/Parsons (1993) und Johnston/DiNardo (1997).

⁴¹ Vgl. z.B. Funktionsnotation 2 und 3 der quadratischen Funktion in Tabelle 3.1, S. 51.

⁴² Homburg setzt z.B. den multiplikativen Funktionstyp 28 aus Tabelle 3.1 zur Modellierung der Größe *Absatz* und der Größe *Attraktivität* an, vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 765ff. Die Weibull-Funktion (Tabelle 3.1, Nr. 17) wird von Halleemann (2001), S. 39 zur Modellierung der Größe *Werbearbeit* verwendet, von Hruschka (1996), S. 24 für die Größe *Absatz*. Saunders (1987) und Hanssens/Parsons (1993) betrachten generell die Größe *Absatz*, Depluet (1991) betrachtet die Größe *Marktanteil*.

⁴³ In Morey/McCann (1983), S. 194 wird z.B. allgemein von „(...) a marketing outcome variable (...)“ in Verbindung mit „(...) marketing mix variables“ gesprochen.

⁴⁴ Als Beispiel seien die Funktionen 1, 9, 18 und 21 aus Tabelle 3.1 für den Zwei-Instrumente-Fall genannt. Der effiziente Werbemix, d.h. diejenige Verteilung des Werbebudgets B auf die zwei Werbeinstrumente, die die maximale Wirkung in $f(\vec{x})$ erzeugt, hängt von den Koeffizienten a_i der Aktivitätsniveaus x_i der Instrumente ab. Jede Einheit des Budgets B erzeugt die höchste Wirkung bei demjenigen Instrument, welches den höchsten Koeffizienten a_i aufweist. Im effizienten Werbemix wird also das gesamte Budget B auf das Instrument mit dem höchsten Koeffizienten a_i gesetzt. Zielkonflikte zwischen den zu verfolgenden Zielen können durch unterschiedlich „wirksame“ Werbeinstrumente in den verschiedenen Wirkungsfunktionen (d.h. durch unterschiedliche Koeffizienten a_i eines Werbeinstrumentes in den verschiedenen Wirkungsfunktionen) den obigen trivialen Werbemix in der Mehrfach-Zielsetzungsproblematik verhindern.

Wertebereich der Werbewirkungsfunktionen ergibt, so sollte sich diese Beschränktheit in dem mit empirischen Daten zu schätzenden funktionalen Wirkungszusammenhang widerspiegeln. In den nachfolgenden Kapiteln wird jedoch zur mathematischen Vereinfachung und zur Anschaulichkeit teilweise von dieser Prämisse aus verschiedenen Gründen Abstand genommen.⁴⁵

Der erste Grund dafür ist, dass in der vorliegenden Arbeit die Entwicklung einer normativen Entscheidungsunterstützung für einen betriebswirtschaftlichen Entscheider in der Werbemixplanung mit mehrfacher Zielsetzung im Vordergrund der Betrachtung steht und nicht die robuste Schätzung von Werbewirkungsfunktionen an real existierenden, empirischen Messdaten. Im vorliegenden Beitrag wird „anwendend“ mit (möglichst plausiblen) psychographischen Wirkungsfunktionen gearbeitet.

Der zweite Grund ist, dass die Forderung nach der Verwendung beschränkter Werbewirkungsfunktionen die Menge möglicher Funktionstypen jedoch in erheblicher und unpraktikabler Weise einengt, so dass sie teilweise gegen andere theoretische Überlegungen zu plausiblen Verläufen von psychographischen Werbewirkungen – wie einem Übersättigungsverlauf bei affektiv geprägten Werbewirkungen – abgewogen werden muss.

Als dritter Grund kann angeführt werden, dass die (in der vorliegenden Arbeit betrachtete) Werbemixplanung stets mit einem realen, endlichen – von einer Unternehmung aufzubringenden – Werbebudget B bewältigt werden muss (für die Werbeinstrumentbudgets gilt also $0 \leq x_i \leq B \ll +\infty$). Für das daraus folgende abgeschlossene beschränkte Definitionsintervall $[0, B]$ der Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente gilt, dass jede stetige Funktion beschränkt ist.⁴⁶ Daher können auch für $x_i \rightarrow +\infty$ unbeschränkte Funktionen bei entsprechender Skalierung im Intervall $[0, B]$ an empirischen Daten im Intervall $[0, 100\%]$ geschätzt werden. Der Fall $x_i \rightarrow +\infty$, für den möglicherweise ein Robustheitsdefizit vorliegt, da das Sättigungsniveau nicht bei 100% liegt, ist aus betriebswirtschaftlicher Sicht zudem ein theoretischer Fall, da ein (nahezu) unbeschränktes Werbebudget von keiner Unternehmung aufgebracht werden kann sowie ein Werbeinstrument nicht unbeschränkt belegbar ist.

Zudem dürfte der fehlende beschränkte Verlauf für die Bestimmung effizienter bzw. pareto-optimaler Werbemixe bei einer Verfolgung mehrerer Ziele und unter Wahrung einer Werbebudgetrestriktion keine wesentlich beeinträchtigende Rolle spielen, da die

⁴⁵ Im Marketing ist die Verwendung nicht-robuster Wirkungsfunktionen durchaus üblich. In der Preispolitik werden z.B. unbeschränkte lineare oder multiplikative Funktionstypen zur Modellierung von Preis-Absatz-Funktionen angesetzt, vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 561ff. Obwohl die logische Konsistenz von Marktanteilsdaten und -Modellen wünschenswert ist, ist dies jedoch nicht immer für psychographische Größen wie die Markenbekanntheit gegeben, wie Naik et al. (2008) betonen.

⁴⁶ Vgl. Forster (1983a), S. 67.

Ziele aufgrund von Zielkonflikten um die beschränkten Ressourcen konkurrieren und pareto-optimale Werbemixe in Bereichen niedriger Aktivitätsniveaus ($x_i \ll +\infty$) der Werbeinstrumente zu finden sein werden.

Daher und da in der Marketing-Literatur Angaben zu expliziten Operationalisierungen psychographischer Werbewirkungen selten bis gar nicht gegeben werden, werden die aus der Marketing-Literatur bekannten Wirkungsfunktionen auch zur Operationalisierung psychographischer Werbewirkungen herangezogen.

Tabelle 3.1: Polyninstrumentale Funktionen zur Modellierung von (Werbe-)Wirkungszusammenhängen und ihre Eigenschaften

| # Funktion | Funktionstyp | ε | EIA | RIA | OIA | S-förmig | ÜS | B | # |
|--------------------|---|---|-----|-----|-----|----------|----|---|-----------------|
| 01 Linear | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 01 ⁺ |
| 02 Quadratisch | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i^2$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | ∅ | 02 ⁺ |
| 03 Quadratisch | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i - \sum b_i x_i^2$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | ∅ | 03 ⁺ |
| 04 Wurzel | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i \sqrt{x_i}$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 04 ⁺ |
| 05 Reziprok | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i^{-1}$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 05 ⁺ |
| 06 Saturation | $f(\vec{x}) := f_0 - \sum a_i x_i^{-b_i}$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | ∅ | 06 ⁺ |
| 07 Polynomial | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i + \sum b_i x_i^2 + \sum c_i x_i^3 \dots$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ✓ | ✓ | ∅ | 07 ⁺ |
| 08 Semi-Log | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i \ln x_i$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 08 |
| 09 Exponential (3) | $f(\vec{x}) := f_0 \cdot \sum e^{a_i x_i}$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 09 |
| 10 Exponential (4) | $f(\vec{x}) := f_0 \cdot \sum e^{-a_i x_i}$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 10 |
| 11 Little | $f(\vec{x}) := f_{min} + (f_{max} - f_{min}) \cdot \sum \left(\frac{x_i^{c_i}}{b_i + x_i^{c_i}} \right)$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 11 |
| 12 Gamma | $f(\vec{x}) := a \cdot \left(\sum x_i^{a_i} \cdot e^{-c_i x_i} \right)$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ✓ | ✓ | ✓ | 12 |
| 13 Logistisch | $f(\vec{x}) := \frac{f_{max}}{1 + e^{b + \sum a_i x_i}}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 13* |
| 14 Logistisch | $f(\vec{x}) := \frac{f_{max}}{1 + e^{-b - \sum a_i x_i}}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 14* |
| 15 Logistisch | $f(\vec{x}) := \frac{f_{max}}{1 + e^{b - \sum a_i x_i}}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 15* |
| 16 Exponential (1) | $f(\vec{x}) := a + b \cdot e^{-\sum a_i x_i}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | 16* |

ε = Elastizität EIA = Elastizitätsinteraktion RIA = Reaktionsinteraktion OIA = Optimalitätsinteraktion ÜS = Übersättigungsverlauf B = Beschränktheit
 ✓ = existiert/möglich ∅ = existiert nicht/nicht möglich

Fortsetzung von Tabelle 3.1 folgt ...

| # Funktion | Funktionsstyp | ϵ | EIA | RIA | OIA | S-förmig | ÜS | B | # |
|------------------------------------|---|------------|-----|-----|-----|----------|----|---|-----|
| 17 modifiziert Expo. ⁴⁷ | $f(\vec{x}) := f_{max} \cdot (1 - e^{-\sum a_i x_i^{c_i}})$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | 17* |
| 18 modifiziert Expo. (1) | $f(\vec{x}) := f_{max} \cdot (1 - e^{-b_0 - \sum a_i x_i})$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | 18* |
| 19 modifiziert Expo. (2) | $f(\vec{x}) := f_{max} \cdot (1 - b_0 \cdot e^{-\sum a_i x_i})$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ✓ | 19* |
| 20 Johansson | $f(\vec{x}) := \frac{f_{min} + b \cdot c \cdot \sum x_i^{a_i}}{1 + c \cdot \sum x_i^{a_i}}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | 20 |
| 21 Exponential (2) | $f(\vec{x}) := f_0 \cdot e^{\sum a_i x_i}$ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 21* |
| 22 Exponential (5) | $f(\vec{x}) := f_0 \cdot e^{-\sum a_i x_i}$ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 22* |
| 23 Log-Reziprok | $f(\vec{x}) := e^{a - \sum a_i x_i^{-1}}$ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 23* |
| 24 Log-Reziprok | $f(\vec{x}) := e^{a + \sum a_i x_i^{-1}}$ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | 24* |
| 25 Gompertz | $f(\vec{x}) := f_{max} \cdot b \sum x_i^{a_i}$ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | 25 |
| 26 Zentler & Ryde | $f(\vec{x}) := \frac{a \cdot \prod (\frac{x_i}{a_i})^2}{1 + \sum (\frac{x_i}{a_i}) + \sum (\frac{x_i}{a_i})^2}$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | 26 |
| 27 Log-Log | $f(\vec{x}) := e^{a + \sum a_i \ln(x_i)}$ | a_i | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | ∅ | ∅ | 27 |
| 28 Multiplikativ | $f(\vec{x}) := a \cdot \prod x_i^{a_i}$ | a_i | ∅ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | 28 |
| 29 Allg. Funktion * | $f(\vec{x}) := r \cdot (a + b \cdot e^{c + \sum a_i x_i^{c_i}})^d$ | ✓ | ✓ | ✓ | ∅ | ✓ | ∅ | ∅ | 29 |
| 30 Allg. Funktion + | $f(\vec{x}) := f_0 + \sum a_i x_i^{d_i} + \sum b_i x_i^2 + \sum c_i x_i^3 \dots$ | ✓ | ✓ | ∅ | ∅ | ✓ | ✓ | ∅ | 30 |

ϵ = Elastizität EIA = Elastizitätsinteraktion RIA = Reaktionsinteraktion OIA = Optimalitätsinteraktion ÜS = Übersättigungsverlauf B = Beschränktheit
 ✓ = existiert/möglich ∅ = existiert nicht/nicht möglich

Ende von Tabelle 3.1

⁴⁷ Funktion 17 ist auch bekannt als Weibull-Funktion.

4 Werbemixplanung als Vektoroptimierungsproblem

4.1 Die Werbemix-Entscheidung als Multi-Criteria-Problem

Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung sind **Multi-Criteria-Entscheidungen**. Diese können nach der Struktur des zugrunde liegenden Multi-Criteria-Problems und unter Bezugnahme auf den verwendeten Lösungsansatz untergliedert werden.¹ Bei den Lösungsansätzen unterscheidet man entscheidungstechnologische Ansätze, Multi-Attribute-Decision-Making- und Multi-Objective-Decision-Making-Ansätze.

Entscheidungstechnologische Ansätze versuchen den Entscheidungs- oder Problemlösungsprozess durch Anwendung geeigneter Methoden und Instrumente zur Informationsverarbeitung effizienter zu gestalten.²

Multi-Attribute-Decision-Making-Ansätze (MADM) wählen aus einer diskreten und endlichen Menge vorbestimmter Alternativen durch Vergleich und Abwägung von Eigenschaften (eng.: „attributes“) der Alternativen und damit verbundener Ziele des Entscheiders die für den Entscheider günstigste Handlungsalternative aus. Die Attribute und Ziele müssen nicht notwendigerweise durch Zahlen beschreibbar sein. Die Menge der zulässigen, meist wenigen Handlungsalternativen ist dabei vollständig dem Entscheider offenbart.³

Das in dieser Arbeit betrachtete Werbemixproblem bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung ist in die Kategorie der **Multi-Objective-Decision-Making-Probleme** einzuordnen. Es handelt sich um ein **Vektoroptimierungsproblem** (VOP), das mit

¹ Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991), S. 27.

² Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991), S. 26.

³ Vgl. Miettinen (1999), S. xiii.

dem dritten Ansatz bewältigt werden kann. **Multi-Objective-Decision-Making-Ansätze** (MODM) wählen aus einer nicht explizit vorbestimmten und damit meist unendlich großen Menge an zulässigen Alternativen durch Berechnung die „beste“ Alternative aus. Unter zulässigen Alternativen versteht man die möglichen Lösungen des zugrunde liegenden mathematischen Entscheidungsmodelles, die gewisse, wohldefinierte Nebenbedingungen erfüllen. Die Ziele werden durch eindeutige, quantifizierbare Zielfunktionen (eng.: „objectives“) beschrieben und sollen (möglichst⁴) gleichzeitig optimiert werden. Die Menge der zulässigen Lösungen ist meist eine Teilmenge des n -dimensionalen, euklidischen Vektorraumes.⁵

Eine allgemeine mathematische Formulierung eines restringierten MODM-Problems (mit zu maximierenden Zielfunktionen), die als Grundlage für die mathematische Darstellung von Entscheidungsmodellen zur Werbemixplanung angesetzt wird, gibt folgende

4.1 Definition (Mehrfach-Zielsetzungsproblem)

Es seien die Funktionen $f_k, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $k=1, \dots, p$ und $r=1, \dots, m$ gegeben. Ein **Mehrfach-Zielsetzungsproblem** ist dann

$$P_{MODM} : \quad \max_{\vec{x} \in X} \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\} \quad (4.1)$$

wobei $p, m, n \in \mathbb{N}$ mit $p, n > 1$ und $m \geq 1$. (Für Minimierungsprobleme ist max durch min sowie \geq durch \leq zu ersetzen.) Es gilt weiter:

X ist die **Menge der zulässigen Lösungen**,

$\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein **Entscheidungsvektor** aus X ,

$\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ der Vektor der Restriktionen, die X definieren, mit

$\vec{g}(\vec{x}) := (g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))^T$ und

$\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ der **Zielfunktionsvektor** mit

$\vec{f}(\vec{x}) := (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_p(\vec{x}))^T$ aus der **zulässigen Zielmenge** $\vec{f}(X)$,

$\vec{z} := (z_1, z_2, \dots, z_p)^T$ mit $z_k = f_k(\vec{x})$ für ein $\vec{x} \in X$ ein **Zielvektor** und

$\vec{0} := (0, 0, \dots, 0)^T$ der Nullvektor.

⁴ Eine Ausnahme bildet z.B. das Lexikographische Zielprogrammieren, bei dem die Ziele sequentiell nach ihrer Wichtigkeit optimiert werden, vgl. Mietinen (1999), S. 118 und Zimmermann/Gutsche (1991), S. 125f.

⁵ Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991), S. 26.

Das Problem P_{MODM} wird auch **Vektoroptimierungsproblem** oder kurz **VOP** genannt, da die Zielfunktionen und Restriktionen in Form von Vektoren vorliegen. ■

Für **Probleme der Werbemixplanung** bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung stellen die Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ die **Werbewirkungsfunktionen** für die betrachteten psychographischen Werbewirkungen dar. Die Funktionen $g_r(\vec{x})$ stehen für einzuhaltende **Restriktionen**, wie z.B. eine Werbebudgetrestriktion, unter denen eine Werbemixplanungsaufgabe zu lösen ist. Die Komponenten x_i des Entscheidungsvektors \vec{x} repräsentieren die **Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente**. Werden die Aktivitätsniveaus x_i der betrachteten Instrumente z.B. in Geldeinheiten oder Kontaktzahlen operationalisiert, so ist zu beachten, dass $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n$ gilt.⁶

In der **Werbemixplanung** bzw. allgemein bei der Betrachtung von Marketing-Zielen, deren Ausprägungen aus betriebswirtschaftlicher Sicht als positiv bewertet werden, wie z.B. Gewinn, Umsatz, Markenbekanntheit etc., erfolgt gewöhnlicherweise eine **Maximierung der Ziele**, d.h. der positiven Auswirkungen. Üblich in der OR-Literatur ist es jedoch, zur Vereinheitlichung der Theorien eine Minimierungs-Fragestellung zu betrachten⁷ bzw. auf eine **Formulierung von Minimierungsproblemen** aufzubauen. Minimierungs- und Maximierungsformulierungen sind äquivalent und können ineinander überführt werden, da

$$\max_{\vec{x} \in X} f_k(\vec{x}) = - \min_{\vec{x} \in X} (-f_k(\vec{x})) \quad (4.2)$$

gilt.⁸

Die betrachteten Werbemixprobleme zu optimierender psychographischer Werbewirkungen und ihre Lösungen werden in der vorliegenden Arbeit **stets in zum Werbemixproblem passenden Maximierungsformulierungen präsentiert**. Die Maximierung konkaver Zielfunktionen wird mit (4.2) zu der in der Nichtlinearen Programmierung (NLP) üblicherweise betrachteten Minimierung konvexer Zielfunktionen und die Konkavität der zu maximierenden Zielfunktionen bestimmt die Möglichkeiten zum Auffinden globaler Optimallösungen.

⁶ Die zugehörigen Restriktionen $x_i \geq 0$ werden ggfs. zur übersichtlicheren Darstellung nicht explizit bei den zur Lösung einer Werbemixaufgabe heranzuziehenden Kuhn-Tucker-Bedingungen berücksichtigt, jedoch bei der Interpretation der Ergebnisse.

⁷ Vgl. Chankong/Haimes (1983), Miettinen (1999), Neumann/Morlock (2002) und Zimmermann/Gutsche (1991).

⁸ Vgl. Elster et al. (1977), S. 13 oder Zimmermann/Gutsche (1991), S. 98.

Zum Vergleich und besseren Verständnis wird hier eine allgemeine mathematische Formulierung eines restringierten Einfach-Zielsetzungsproblems (mit zu maximierender Zielfunktion) angegeben.

4.2 Definition (Einfach-Zielsetzungsproblem)

Es seien die Funktionen $f, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $r=1, \dots, m$ gegeben. Ein **Einfach-Zielsetzungsproblem** ist dann

$$P_{Single} : \quad \max_{\vec{x} \in X} f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\} \quad (4.3)$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $m \geq 1$. ■

Die nachfolgenden Entscheidungsmodelle zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung beruhen ausschließlich auf einem stetigen und deterministischen funktionalen Zusammenhang für die Wirkungs- und Restriktionsfunktionen, so dass es sich bei den Entscheidungsmodellen um deterministische, stetige MODM-Probleme handelt.

4.2 Optimalitätskonzepte

Optimierungsprobleme mit mehrfacher Zielsetzung haben im Allgemeinen die unangenehme Eigenschaft, dass keine zulässige Lösung existiert, für die die Zielfunktionen gleichzeitig ihre individuellen Optimalwerte annehmen.⁹ Der Grund dafür sind **Zielkonflikte** und eine mögliche **Unvergleichbarkeit der Zielfunktionen**. Zur Bewertung möglicher Lösungen muss also geklärt werden, wie eine „gute“ **Lösung** eines MODM-Problems aussieht, welche Eigenschaften sie aufweist und wie **ökonomische Effizienz- und Effektivitätsbetrachtungen** in sie einfließen. Dazu notwendig sind alternative Konzepte zur Beurteilung der Qualität bzw. Optimalität einer Lösung und eine **Klärung der damit verbundenen Terminologie**. Aus Anschaulichkeitsgründen wird für den Praktiker, der „von Werbezielen möglichst viel erreichen will“, in der vorliegenden Arbeit durchweg auf Maximierungsformulierungen der präsentierten Definitionen abgestellt.¹⁰

⁹ Vgl. Neumann/Morlock (2002), S. 135.

¹⁰ Für (konvexe) Minimierungsprobleme und ihre Minimallösungen sind in den nachfolgenden Definitionen *max* durch *min* sowie \geq durch \leq zu ersetzen.

4.3 Definition (lokale Optimallösung)

Eine zulässige Lösung $\vec{x}^* \in X$ heißt (**lokale**) **Maximal-** oder **Optimallösung** von $f(\vec{x})$, falls es ein $\delta > 0$ und eine Umgebung $U_\delta(\vec{x}^*)$ gibt, so dass

$$f(\vec{x}^*) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in X \cap U_\delta(\vec{x}^*) \quad (4.4)$$

gilt.¹¹ ■

4.4 Definition (globale Optimallösung)

Eine zulässige Lösung $\vec{x}^* \in X$ heißt (**globale**) **Maximal-** oder **Optimallösung** von $f(\vec{x})$, falls

$$f(\vec{x}^*) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in X \quad (4.5)$$

gilt. ■

4.5 Definition (Individuelle Optimallösung)

Eine **individuelle Optimallösung** ist eine zulässige Lösung \vec{x}^* bzw. $\vec{x}_{f_k}^*$ von P_{MODM} , die bezüglich mindestens einer Zielfunktion $f_k(\vec{x})$ optimal ist, d.h. $\vec{x}^* \in X$ und es gibt mindestens ein $k \in \{1, \dots, p\}$ mit

$$f_k(\vec{x}^*) = \max_{\vec{x} \in X} f_k(\vec{x}) \quad (4.6)$$

Der Wert $f_k(\vec{x}^*)$ heißt **individuelles Optimum**.¹² ■

4.6 Definition (Perfekte Lösung)

Eine **perfekte Lösung** ist eine zulässige Lösung \vec{x}^{per} , die bezüglich **aller** Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ **gleichzeitig** optimal ist, d.h. $\vec{x}^{per} \in X$ und

$$f_k(\vec{x}^{per}) = \max_{\vec{x} \in X} f_k(\vec{x}) \quad \forall k \in \{1, \dots, p\} \quad (4.7)$$

4.7 Definition (Ideale (utopische) Lösung)

Eine **ideale (utopische) Lösung** ist eine meist unzulässige Lösung \vec{x}^u , die bezüglich **aller** Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ **gleichzeitig** optimal ist, d.h. $\vec{x}^u \in \mathbb{R}^n$ (**beliebig!**) und

$$f_k(\vec{x}^u) = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} f_k(\vec{x}) \quad \forall k \in \{1, \dots, p\} \quad (4.8)$$

¹¹ Die Definitionen 4.3 und 4.4 sind Horst (1979) entnommen.

¹² Die Definitionen 4.5 bis 4.7 und 4.10 sind Zimmermann/Gutsche (1991) entnommen.

4.8 Definition (Idealer (perfekter) Zielvektor)

Ein Zielvektor $\vec{z}^* \in \mathbb{R}^p$ heißt **idealer (perfekter) Zielvektor**, falls alle seine Komponenten den **individuellen Optima** $f_k(\vec{x}_{f_k}^*)$ der Zielfunktionen f_k entsprechen, d.h. falls

$$z_k^* = f_k(\vec{x}_{f_k}^*) = \max_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} f_k(\vec{x}) \quad \forall k \in \{1, \dots, p\} \quad (4.9)$$

Nicht notwendigerweise gilt: $\vec{x}_{f_k}^* = \vec{x}_{f_l}^*$ oder $\vec{x}_{f_k}^* \neq \vec{x}_{f_l}^*$ für $k, l = 1, \dots, p$.¹³ ■

4.9 Definition (Satisfizierungsziele)

Für den Entscheider wünschenswerte oder befriedigende Wertausprägungen \bar{z}_k für $k = 1, \dots, p$ der Komponenten eines Zielvektors $\vec{z} \in \mathbb{R}^p$ heißen **Satisfizierungsziele**. Der aus Satisfizierungszielen bestehende Vektor \vec{z} wird **Referenzpunkt** genannt. ■

Aufgrund von Zielkonflikten ist die Existenz sowohl der perfekten als auch der idealen Lösung sehr unwahrscheinlich, so dass sich Lösungsverfahren für VOP auf das Auffinden derjenigen Lösungen $\vec{x}^* \in X$ konzentrieren, deren Zielfunktionsvektor $\vec{f}(\vec{x}^*)$ nicht schlechter als der Zielfunktionsvektor $\vec{f}(\vec{x})$ anderer Lösungen \vec{x} ist. Aus der Menge der zulässigen Lösungen werden all diejenigen Lösungsvektoren identifiziert, von denen keine Komponente ihrer Bilder verbessert werden kann, ohne dass mindestens eine andere Bildkomponente verschlechtert wird.

Dieses Konzept wurde 1896 von dem französisch-italienischen Ökonomen Vilfredo Federico Pareto (*1848 – †1923) eingeführt.¹⁴ Derartige Lösungen von VOP werden in der Literatur auch als **nicht-dominierte** (eng.: „nondominated“), **nicht-untergeordnete** (eng.: „noninferior“), **pareto-optimale** oder im deutschsprachigen Raum als **funktional-effiziente** Lösungen bezeichnet. Hintergrund dieses Ansatzes ist, dass MODM-Probleme in einem gewissen Sinne schlecht definiert sind, denn auf dem Zielraum $\vec{f}(X) \subset \mathbb{R}^p$ besteht keine **vollständige Ordnung(-srelation)**¹⁵, d.h., dass z.B. die Vektoren $(1, 1)^T$ und $(3, 3)^T$ aus dem euklidischen Vektorraum miteinander in Form von besser/schlechter oder größer/kleiner verglichen werden können, die Vektoren $(1, 3)^T$

¹³ Die Definitionen 4.8, 4.9 und 4.11 sind Miettinen (1999) entnommen.

¹⁴ Nach Miettinen (1999), S. 11, geht eine frühere Definition aus dem Jahre 1881 auf Francis Ysidro Edgeworth (*1845 – †1926) zurück.

¹⁵ Eine vollständige Ordnungsrelation ist eine binäre Relation auf einer Menge A, die linear, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Relationen beschreiben Beziehungen zwischen den Elementen einer oder verschiedener Mengen. Eine binäre Relation zwischen zwei Mengen ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts dieser Mengen. Als Beispiel für eine vollständige Ordnungsrelation ist die \leq -Beziehung auf den Zahlenbereichen der natürlichen Zahlen \mathbb{N} oder der reellen Zahlen \mathbb{R} zu nennen, vgl. Bronstein et al. (2005), S. 307. Für eine Definition der Ordnungsrelation im Kontext der Nutzentheorie vgl. Zimmermann/Gutsche (1991), S. 15.

und $(3, 1)^T$ dagegen nicht.¹⁶ Eine allgemeine, formale Beschreibung von Pareto-Optimalität gibt folgende

4.10 Definition (globale Pareto-Optimalität)

Eine (*global*) **pareto-optimale Lösung** ist eine zulässige Lösung \vec{x}^* , falls es **keine** zulässige Lösung \vec{x} gibt, die in allen Zielfunktionswerten mindestens so gut wie \vec{x}^* ist und bezüglich mindestens einer Zielfunktion echt besser als \vec{x}^* ist, d.h. zu $\vec{x}^* \in X$ existiert für ein **Maximierungsproblem** kein $\vec{x} \in X$ mit

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, p\} & : f_k(\vec{x}) \geq f_k(\vec{x}^*) \\ \exists l \in \{1, \dots, p\} & : f_l(\vec{x}) > f_l(\vec{x}^*) \end{aligned} \quad (4.10)$$

■

Eine Vielzahl von MODM-Methoden baut auf Methoden der **nichtlinearen Programmierung** auf, in der die **Konkavität** der eingehenden, zu maximierenden Funktionen eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung von Optimallösungen einnimmt, da NLP-Methoden in der Regel (ohne Konkavität) lediglich lokale Optimallösungen bestimmen können. Interessant ist deshalb die

4.11 Definition (lokale Pareto-Optimalität)

Eine zulässige Lösung \vec{x}^* ist (**lokal**) **pareto-optimal**, falls es ein $\delta > 0$ und eine Umgebung $U_\delta(\vec{x}^*)$ gibt, so dass \vec{x}^* in $X \cap U_\delta(\vec{x}^*)$ pareto-optimal ist. ■

Analog zu den Überlegungen zu lokalen und globalen Optimallösungen in der NLP, gilt

4.1 Satz

*Global pareto-optimale Lösungen sind lokal pareto-optimal. Für konvexe MODM-Probleme gilt auch die Umkehrung, d.h. lokal pareto-optimale Lösungen sind auch global pareto-optimal.*¹⁷ ■

Beweis 4.1

Siehe Miittinen (1999), S. 12. □

¹⁶ Dies gilt sogar für den Fall, dass Vektoren in allgemeinen Räumen verglichen werden, wie Chankong/Haimes (1983), S. 63-72, im Rahmen der Nutzen-Theorie (eng.: „Utility (Function) Theory“) zeigen.

¹⁷ Ein MODM-Problem ist konvex, wenn alle Zielfunktionen und die Menge der zulässigen Lösungen konvex ist. Aus Sicht der Werbemixplanung mit zu maximierenden Zielfunktionen gilt die Umkehrung für konkave Funktionen und einen konvexen Lösungsbereich.

Im Nachfolgenden wird zur Vereinfachung lediglich der Terminus **pareto-optimal** verwendet. Es muss jedoch in Erinnerung behalten werden, dass MODM-Methoden gewöhnlich lokal pareto-optimale Lösungen generieren, es sei denn zusätzliche Bedingungen wie z.B. Konkavität der zu maximierenden Funktionen sind erfüllt.

Aus Sicht des Konzeptes der Pareto-Optimalität ist jede generierte, pareto-optimale Lösung eines Mehrfach-Zielsetzungsproblems gleichwertig. Generell wünschenswert und praktisch ist jedoch eine möglichst kleine Lösungsmenge oder sogar eine einzelne Lösung. Um diese eine Lösung aus der Menge der pareto-optimalen Lösungen auszuwählen, sind Informationen und Entscheidungskriterien notwendig, die nicht im mathematischen Entscheidungsmodell oder im mathematischen Lösungsprozess enthalten sind. Zur Identifizierung dieser Lösung, d.h. **zur allgemeinen Bewertung der Lösungsmenge, ist eine dem Entscheidungsprozess übergeordnete, bewertende Instanz** notwendig, die die Entscheidung über die finale Lösung trifft. Diese Rolle nimmt der **Entscheider** ein. Dem Entscheider wird unterstellt, dass er aufgrund speziellen Wissens oder umfangreicher Erfahrung in der Lage ist, über das zugrunde liegende Entscheidungsproblem zu urteilen und eine Präferenzäußerung über die verschiedenen Lösungen zu treffen.

Neben dem Konzept der Pareto-Optimalität existieren noch weitere, der Pareto-Optimalität verwandte Optimalitätskonzepte wie z.B. schwach und echt pareto-optimal (eng.: „*weak*“ und „*proper pareto optimal*“) oder schwach effizient, effizient und streng effizient (eng.: „*weakly efficient*“, „*efficient*“ und „*strictly efficient*“), die die Menge der pareto-optimalen Lösungen einschränken oder ausdehnen (schwache und echte Pareto-Optimalität) oder die Definition der (Pareto-)Optimalität mathematisch verallgemeinern (schwache Effizienz, Effizienz und strenge Effizienz).¹⁸ Sie seien hier zur Vollständigkeit nur erwähnt,¹⁹ da sie zwar in der Theorie des MODM eine wichtige Rolle spielen, aber Definition 4.10 für das Thema dieser Arbeit ausreicht.²⁰ Obige Effizienz ist nicht zu verwechseln mit der im Nachfolgenden erläuterten und für die Werbemixplanung interessanteren ökonomischen Effizienz. Alle obigen Konzepte haben gemeinsam, dass sie versuchen, Optimalitätsaussagen über Entscheidungsvektoren \vec{x} zu treffen, **indem**

¹⁸ Vgl. Miettinen (1999), S. 19-23.

¹⁹ Weitergehende Informationen bieten z.B. Ehrgott/Wiecek (2005), Miettinen (1999) oder Weidner (1988).

²⁰ Gleichzeitig sei auf die in der Produktionstheorie und im Controlling geführte Diskussion um die Begriffe der Effektivität und Effizienz hingewiesen, die auf dem Dominanz- bzw. Pareto-Prinzip aufbauen, vgl. Ahn (2003) und Esser (2001).

sie die Bilder der Entscheidungsvektoren, d.h. die Zielfunktionsvektoren $\vec{f}(\vec{x})$, bewerten.

4.3 Effektivität und Effizienz eines Werbemix

Im Gegensatz zu (obigen) **Optimalitätsüberlegungen** stehen bei betriebswirtschaftlichen Fragestellungen auch Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen von Handlungsalternativen im Vordergrund. Neben dem Gewinnstreben als Leitbild des werblichen Handelns oder des Handelns im Markt, werden auch **Effektivitäts- und Effizienzbetrachtungen zur Bewertung von Handlungsalternativen** eingesetzt.²¹ Insbesondere bei der Betrachtung außerökonomischer Ziele, wie den psychographischen Werbewirkungen, stehen die Wirtschaftlichkeitsmaße Effektivität und Effizienz im Vordergrund.²²

Unter der **Effektivität** eines **Werbemix**, also eines **Entscheidungsvektors** \vec{x}^1 aus der Menge der zulässigen Lösungen X , versteht man das Erreichen der angestrebten Werbezielausmaße. Ein Werbemix \vec{x}^1 ist zudem **effizient**, falls es keinen alternativen Werbemix $\vec{x}^2 \in X$ gibt, der mit geringerem oder gleichem (Geld-)Miteleinsatz die gleichen oder höheren Werbezielausmaße erreicht.²³ Damit sind bei ökonomischer Analyse die Effektivität und die Effizienz die Anforderungen, die an die zu generierende Lösung der Werbemixplanungsaufgabe zu stellen sind.²⁴

Die durch MODM-Methoden generierte Menge der pareto-optimalen Lösungen umfasst all diejenigen Lösungen, die hinsichtlich der Gesamtheit ihrer Zielausmaße nicht gegeneinander abgewogen werden können. Die pareto-optimalen Lösungen sind unabhängig von dem in der Werbezielformulierung gewählten Ausmaß der gewünschten Zielerreichung, d.h. Satisfizierung oder Extremierung.

Im Falle einer **Satisfizierung** von Werbezielen sind all diejenigen Lösungen **effektiv**, die die vorgegebenen Satisfizierungsziele entweder erreichen oder sogar übertreffen. Da viele MODM-Methoden Satisfizierungsziele zur Bestimmung der pareto-optimalen Lösungsmenge heranziehen, ist für derartige Methoden die Menge der effektiven Lösungen gleich der Menge der pareto-optimalen Lösungen.

²¹ Zur begrifflichen Präzisierung von Effizienz und Effektivität als Maßstäbe des zweckrationalen Handelns vgl. Ahn (2003), S. 92ff und Dyckhoff/Ahn (2001).

²² Vgl. Steffenhagen (2006a), S. 501.

²³ Vgl. Lasslop (2003), S. 10-13.

²⁴ Vgl. Steffenhagen (2006a), S. 501.

Im Falle einer **Extremierung** von Werbezielen sind alle pareto-optimalen Lösungen **effektiv**, da nach den bestmöglichen Zielausprägungen gestrebt wird.

In beiden Fällen sind die nicht-pareto-optimalen Lösungen auch nicht effektiv, denn entweder erreichen sie die Satisfizierungsziele nicht oder es gibt pareto-optimale Lösungen, die in mindestens einer Komponente besser und in den restlichen Komponenten gleich gut sind.

Die Frage nach der **Effizienz** pareto-optimaler Lösungen gestaltet sich schwieriger, geht es doch um die Beurteilung eines effizienten Mitteleinsatzes. Hier sind nicht nur wie bei der Pareto-Optimalität die Komponenten der Zielfunktionsvektoren und deren wertmäßige Ausprägungen zu betrachten, sondern auch die Komponenten der Entscheidungsvektoren selbst. Werden die Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente in Form eingesetzter Geldeinheiten operationalisiert, so ist zur Beurteilung der Effizienz pareto-optimaler Lösungen, d.h. der Werbemixe, die Summe der Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente, also $\sum_{i=1}^n x_i$, zu betrachten und zu vergleichen. Dabei ist zu erwarten, dass eine Vielzahl pareto-optimaler Lösungen mit verschiedenen Summen für gleichwertige pareto-optimale Lösungen existieren.²⁵ Entscheidender als die Beurteilung der Effizienz dieser Lösungen ist die Abwägung einzelner pareto-optimaler Lösungen durch den Entscheider unter der Berücksichtigung der Größe $\sum_{i=1}^n x_i$, da die zu den pareto-optimalen Lösungen gehörigen Zielfunktionsvektoren nicht methodisch gegeneinander abgewägt werden können und der Entscheider die „beste“ Lösung benennen muss (etwa die effiziente Lösung mit dem geringsten Mitteleinsatz oder weil ein spezieller Zielfunktionsvektor besonders „gefällt“). Dies setzt aber die Beteiligung des Entscheiders am Lösungsprozess voraus.

4.4 Lösungsansätze und Klassifizierung von MODM-Methoden

Zur Lösung von Vektoroptimierungsproblemen lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Lösungsansätze verfolgen. Beim **Skalarisationsansatz** wird das Problem P_{MODM}

²⁵ Eine interessante Fragestellung ist, wie die Menge der effizienten pareto-optimalen Lösungen bestimmt werden können. Eine Möglichkeit ist eine Werbebudgetrestriktion als Gleichheitsrestriktion der Form $B = \sum_{i=1}^n x_i$ zu formulieren und in das Optimierungsmodell mit einzubeziehen. Die mit diesem Optimierungsmodell generierten pareto-optimalen Lösungen weisen somit den gleichen Mitteleinsatz auf und sind daher alle effizient (allerdings nur für das vorgegebene Budget).

mit seinen p Zielfunktionen in ein einzelnes oder in eine Folge von Problemen mit einer einzelnen, reellwertigen Zielfunktion, der Skalarisationsfunktion, transformiert.

4.12 Definition (Skalarisationsproblem)

Es seien die Funktionen $f_k, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $k=1, \dots, p$ und $r=1, \dots, m$ gegeben. Ein **Skalarisationsproblem** mit einer **Skalarisationsfunktion** $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto F(\vec{f}(\vec{x})) = F(\vec{x})$ ist dann

$$P_{Skalar} : \quad \max_{\vec{x} \in X} F(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \right\} \quad (4.11)$$

wobei $p, m, n \in \mathbb{N}$ mit $p, n > 1$ und $m \geq 1$. ■

Zur Lösung dieses Skalarisationsproblems können dann die **Theorie und die Methoden** der skalaren Optimierung, d.h. der Linearen Programmierung (LP) und der Nicht-linearen Programmierung, herangezogen werden. Die **pareto-optimalen Lösungen des Mehrfach-Zielsetzungsproblems** P_{MODM} werden durch die **optimalen Lösungen des Skalarisationsproblems** P_{Skalar} charakterisiert.²⁶

Der alternative **Non-Skalarisationsansatz** verwendet keine Skalarisationsfunktion, sondern baut auf anderen Optimalitätskonzepten wie *schwacher Effizienz*, *Effizienz* und *strenger Effizienz*²⁷ oder auf anderen Hilfsmengen auf.²⁸

Methoden zur Bewältigung von MODM-Optimierungsproblemen können auf vielfältige Art und Weise kategorisiert werden. Dies ist u.a. eine Folge der erheblichen Anzahl existierender MODM-Methoden, der Vielzahl möglicher MODM-Problem-Formulierungen und der Notwendigkeit, problemspezifische Eigenheiten zu bewältigen. Neben technischen Aspekten wie der Verwendung von Trade-Offs, Gewichtungen oder Satisfizierungszielen, den mathematischen Eigenschaften der durch die Methoden produzierten Lösungen oder der Art und Weise, wie die Lösungen generiert werden, kann auch die **Teilnahme des Entscheiders am Lösungsprozess** zur Kategorisierung von MODM-Methoden herangezogen werden.²⁹ Diese letzte Kategorisierung sei in der vorliegenden Arbeit herangezogen. Sie spielt insofern eine wichtige Rolle für den Entscheidungsprozess der Werbemixplanung, als sie explizit die Einteilung der Methoden am Mitwirken des Entscheiders und an seinen Möglichkeiten zur Äußerung von Präferenzen ausrichtet und damit ein Abschwächen des Little'schen Modell-Black-Box-Problems für

²⁶ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 117.

²⁷ Vgl. Abschnitt 4.2, S. 60.

²⁸ Vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 687.

²⁹ Für eine detaillierte Übersicht möglicher Kategorisierungen vgl. Miettinen (1999), S. 63.

den Entscheider bedeutet.

MODM-Methoden werden danach klassifiziert, **ob** und **wann** der Entscheider etwaige Präferenzen bzgl. der von ihm verfolgten Ziele äußern kann oder will: Bei **No-Preference-Methoden** werden keinerlei Präferenzäußerungen vom Entscheider benötigt, **A-priori-Methoden** fragen vorab (**a priori**) Präferenzäußerungen vom Entscheider ab und **A-posteriori-Methoden** beziehen nachträglich (**a posteriori**) Präferenzäußerungen des Entscheiders mit ein. **Interaktive Methoden** verwenden schrittweise (**interaktiv**) die Präferenzäußerungen des Entscheiders.

Eine alternative Kategorisierung von MODM-Methoden zeigen z.B. Ehrgott/Wiecek (2005). Dort wird die Art des Lösungsansatzes zu Bewältigung von MODM-Problemen (Skalarisation vs. Non-Skalarisation) als Klassifizierungskriterium herangezogen, das aufgrund seines technischen Charakters den Entscheider, sofern er sich nicht auf diese technisch-mathematische Ebene einlassen will, nicht miteinbezieht.

5 Entwicklung einer Prozessstrukturierungshilfe zur Werbemixplanung

5.1 Entscheidungssituation der Werbemixplanung

Zur Analyse und Strukturierung des Entscheidungsprozesses der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung werden die Methoden der **Problemfaktorisierung** und der **Problemstrukturierung durch Hierarchiebildung** verwendet.¹ Dies dient der **Komplexitätsreduktion** des Ausgangsproblems und der **Aufdeckung von Hierarchiestufen** innerhalb der zu treffenden Entscheidungen. Dazu werden Annahmen zur grundlegenden Entscheidungssituation aufgezeigt und in ihre wesentlichen Elemente zerlegt, um daraus den Prozess der Erkenntnis und Lösung der kommunikationpolitischen Aufgabenstellung zu strukturieren.

Betrachtet wird folgende Situation: Ein betriebswirtschaftlicher Entscheider steht vor der Aufgabe, eine Werbemixplanung z.B. für ein Produkt einer Marke oder für die Marke selbst (*Objektbezug*) und für einen einperiodigen Entscheidungszeitraum (*Zeitbezug*) aufzustellen. Er verfolgt mehrere Werbeziele aus den Werbewirkungsklassen der dauerhaften Gedächtniswirkungen. Dies könnten z.B. Werbeziele der Art „Auf- oder Ausbau von Markenbekanntheit (*brand awareness*)“ und gleichzeitig „Auf- oder Ausbau von Eigenschaftskennntnissen über das Produkt“ sein. Eine vollständige Werbezielformulierung für diese zwei psychographischen Werbeziele liegt nach Festlegung der weiteren Zieldimensionen *Ausmaß der Zielarten* und angestrebte *Zielgruppe* vor.

¹ Unter *Problemfaktorisierung* versteht man die Zerlegung des ursprünglich zu komplexen Problems in zu bewältigende Teilprobleme. Unter *Problemstrukturierung durch Hierarchiebildung* versteht man die Ordnung der Teilprobleme zu einer Problem- bzw. Entscheidungshierarchie. Für Details vgl. Kühn (1983), S. 187f.

Der Entscheider steht somit vor der Aufgabe, die ihm zur Verfügung stehenden Werbeinstrumente derart einzusetzen, dass die von ihm gesteckten Ziele gegebenenfalls unter einzuhaltenden Restriktionen (für Werbebudget und/oder Werbeinstrumente) aber ohne Berücksichtigung konkurrenzbezogener und dynamischer Effekte erreicht werden. Dabei steht dem Entscheider ein Analyst zur technisch-mathematischen Bewältigung dieser Aufgabe zur Seite.

Verschiedene Elemente dieser Entscheidungssituation haben einen entscheidenden Einfluss auf die Bewältigung dieser Aufgabe. Diese sind: die Präferenzen des Entscheiders, die Rahmenbedingungen, unter denen der Entscheider agiert, und die Eigenschaften der Werbemix-Aufgabe, die sich daraus ergeben.

Die **Präferenzen** des Entscheiders umfassen all diejenigen Aspekte, die der Entscheider vorgibt und vorgeben kann, wie z.B. die Wahl der zu verfolgenden Werbeziele, die angestrebten Werbezielausmaße, die Aktivitätsniveaus der einzusetzenden Werbeinstrumente, die Werbebudgethöhe oder auch die Beteiligung des Entscheiders am (technisch-mathematischen) Lösungsprozess.

Die **Rahmenbedingungen** sind die Aspekte der Entscheidungssituation und der Umwelt, die dem Einfluss des Entscheiders entzogen sind, aber Auswirkungen auf die Lösung des Werbemixproblems haben. Dies sind z.B. die Zugehörigkeit eines Werbeziels zu einer Werbewirkungsklasse, die Voraussetzung, dass dynamische oder konkurrenzbezogene Aspekte (nicht) berücksichtigt werden, oder dass eine bestimmte Werbebudgethöhe eingehalten werden muss. Unter die Rahmenbedingungen fallen auch Ausprägungen von Umweltvariablen, wie z.B. das Alter der Bevölkerung oder industrielle Kapazitäten.

Die Rahmenbedingungen und Präferenzen legen die **Eigenschaften des mathematischen Entscheidungs- bzw. Optimierungsmodells** fest. Der Analyst muss zu diesem Entscheidungsmodell eine geeignete Lösungsmethode finden und damit die Optimierungsaufgabe lösen.

Der Little'sche **Analyse-Lern-Entscheidungs-Prozess** der oben genannten kommunikationspolitischen Problemstellung besteht damit aus dem Aufzeigen der möglichen Entscheidungsalternativen bzgl. der Präferenzen des Entscheiders, aus der Offenlegung ihrer Konsequenzen für den Lösungsprozess und dem Lösungsprozess der Werbemixaufgabe selbst, d.h. dem Auffinden derjenigen Lösung, die der Entscheider unter seinen Präferenzen und den gegebenen Rahmenbedingungen für am besten hält.

5.2 Aufbau einer normativen Prozessstrukturierungshilfe zur Werbemixplanung

Die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung kann als ein **3-stufiger Entscheidungsprozess** aufgefasst werden, der in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Auf der **ersten Ebene** sind die Entscheider-Präferenzen und die Rahmenbedingungen zu bestimmen und zu analysieren. Diese bilden im Wesentlichen die Ausgangssituation ab. Daraus leiten sich auf der **zweiten Ebene** die Eigenschaften eines geeigneten Entscheidungsmodelles ab und daraus wiederum die Anforderungen an die zu verwendende Lösungsmethode. Die **dritte Ebene** befasst sich mit der Lösung der Optimierungsaufgabe und der Frage, ob die gefundene Lösung den Ansprüchen des Entscheiders genügt. Gegebenenfalls ist dieser Prozess **iterativ** zu durchlaufen, bis der Entscheider eine Lösung für gut befindet. Mögliche „Stellschrauben“ zur Variation des Problems zwischen den Iterationen sind die Entscheider-Präferenzen, denn (umweltbezogene) Rahmenbedingungen lassen sich von Iteration zu Iteration wegen ihres nicht bzw. kaum beeinflussbaren Charakters nicht modifizieren. Die **Prozessstrukturierungshilfe** dieses **iterativen, 3-stufigen Entscheidungsprozesses der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

Dem Entscheider, seinen Präferenzen und deren Einbeziehung in den Lösungsprozess kommen entscheidende Bedeutung für den Erfolg der Werbemixplanung bzw. für den erfolgreichen Einsatz eines Entscheidungsmodelles zu, gilt es doch die nach Little entscheidende Schwierigkeit von Entscheidungsmodellen zu lösen, nämlich „ (...) managers practically never use them”². Dies gelingt durch Strukturierung des Entscheidungsprozesses, die Erzeugung von Transparenz in den Konsequenzen der Entscheidungsalternativen und deren Offenlegung vor dem Entscheider. Insbesondere die explizite Einbindung des Entscheiders in den Entscheidungsprozess und die Ausrichtung des Entscheidungsprozesses auf den Entscheider können zur Lösung dieses Problems führen.

Ansatzpunkt für die **Analyse und Strukturierung** des Entscheidungsprozesses der Werbemixplanung sind das zu entwickelnde Entscheidungsmodell und besonders des-

² Little (1970), S. 466.

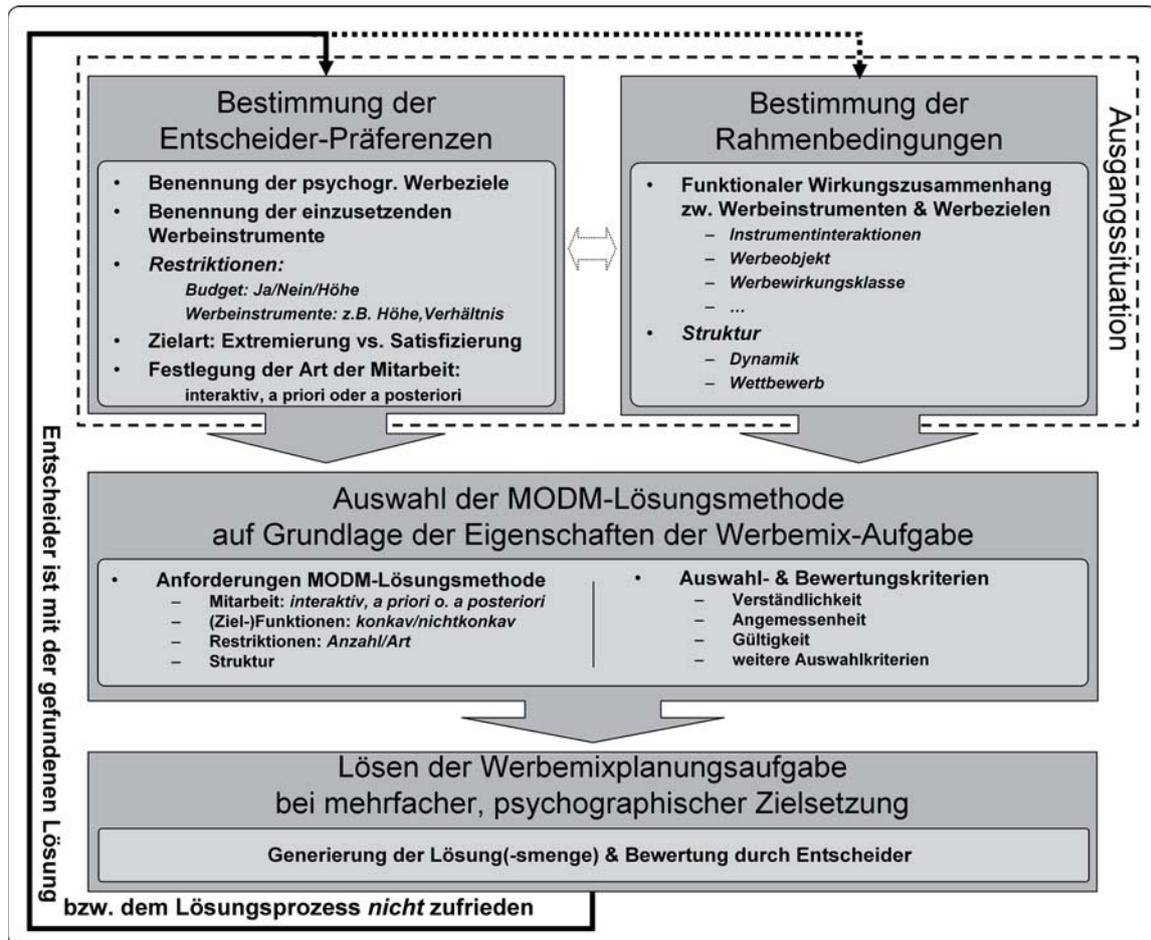


Abbildung 5.1: Struktur und Interdependenzen des Prozesses der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung

sen Elemente und die darauf anzuwendenden Lösungsmethoden. Die Elemente sind u.a. die Werbewirkungsfunktionen, die allgemeinen Eigenschaften und die Struktur des Entscheidungsmodelles. Es sind also diejenigen Aspekte der Entscheider-Präferenzen und der Rahmenbedingungen zu identifizieren, die das Entscheidungsmodell in charakteristischer Weise beeinflussen. Die Entscheider-Präferenzen und die Rahmenbedingungen sind somit dahingehend zu analysieren, welche **Auswirkungen** sie auf die **Struktur des mathematischen Modelles**, die einzubeziehenden **Werbewirkungsfunktionen** und die möglichen anzuwendenden **Lösungsmethoden** haben. Erst wenn Klarheit in den Entscheider-Präferenzen und den Rahmenbedingungen herrscht, kann darauf aufbauend das Entscheidungsmodell erstellt, eine Lösungsmethode ausgewählt und die Lösung gefunden werden.

Aufgrund der Vielzahl existierender MODM-Lösungsmethoden und der beliebig hohen Komplexität von MODM-Aufgaben ist es leicht ersichtlich, dass nicht für jedes MODM-

Problem jede beliebige Lösungsmethode herangezogen werden kann. Es stellt sich also nach Erstellung eines Entscheidungsmodelles die Frage, welche Lösungsmethode zur Lösung einer Werbemixplanungsaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung verwendet werden kann. Damit die Lösung der Werbemixaufgabe nicht in einem Black-Box ähnlichen Verfahren erfolgt, nutzbar für den Entscheider ist und die Art der Lösung den Erwartungen des Entscheiders genügt, ist zum einen der Entscheider an der Wahl der Lösungsmethode zu beteiligen. Das geschieht derart, dass seine Präferenzen bei der Auswahl berücksichtigt werden und sie sich in der Lösungsmethode wieder finden. So wird das Misstrauen des Entscheiders gegenüber den erzielten Lösungen reduziert.³ Zum anderen hängt die Wahl der Lösungsmethode zwangsläufig vom Entscheider bzw. von seinem Wissen und seinen Präferenzen ab, da viele MODM-Methoden Informationen wie z.B. Zielausprägungen, Gewichtungen der Ziele, Priorisierung der Ziele oder Ähnliches vom Entscheider abfragen.

Die wesentlichen **Entscheider-Präferenzen** in einer Entscheidungssituation zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung, welche Auswirkung auf das Entscheidungsmodell, den Lösungsprozess und die Lösungsmethode haben, sind: die verfolgten **psychographischen Werbeziele**, die in die Auswahl einbezogenen **Werbeinstrumente**, die bewusst formulierten **Restriktionen**, die gewünschte **Zielerreichungsart** und der **Zeitpunkt** bzw. die **Art der Mitarbeit**.

Die Auswahl der zur betrachtenden **psychographischen Werbeziele** durch den Entscheider legt die Werbewirkungsklassen fest, zu denen die Werbeziele gehören. Mit unterschiedlichen Werbewirkungsklassen sind verschiedene, grundlegende Verläufe der Werbewirkungsfunktionen verbunden. Die Auswahl der **Werbeinstrumente** aus dem zur Verfügung stehenden Instrumentarium an Kommunikationsaktivitäten legt z.B. die Anzahl der einzusetzenden Werbeinstrumente fest, und damit, ob das Entscheidungsmodell mono- oder polyinstrumental ist, sowie zu berücksichtigende Interaktionseffekte zwischen den betrachteten Instrumenten. Im Falle einer Werbemixplanungsaufgabe muss das Modell polyinstrumental sein, da sonst die Werbemixfragestellung nicht be-

³ Der kritische Leser mag einwerfen, dass in der Praxis der Großteil der Entscheider kein Interesse an der Lösungsmethode, ihrer Auswahl oder dem Lösungsprozess hat. Dem steht aber die folgende Forderung gegenüber: Als Konsequenz des Little'schen Entscheidungskalküls und die von Kall (1996) aufgestellte Anforderung der Benutzerorientierung für eine prozessorientierte Entscheidungshilfe, muss der Entscheider auch bei diesen Aspekten des Entscheidungsprozesses mit einbezogen werden. Miittinen (1999), S. 63 oder S. 132, betont, dass bei Auswahl der Lösungsmethode die spezifischen Eigenheiten des zu lösenden Problems und der Entscheider bzw. seine Vorstellungen mit einzubeziehen sind. Hobbs (1986) gibt als mögliches Auswahlkriterium die Angemessenheit der Methode für den Entscheider an, die durch Einbeziehung des Entscheiders und seiner Vorstellungen erzeugt werden kann. Und letzten Endes bauen auch DSS auf der expliziten Einbeziehung des Entscheiders und seines Wissens und Präferenzen auf.

rücksichtigt wird. Die vom Entscheider gesetzten **Restriktionen**, wie die einzuhalten- de Werbebudgethöhe oder auch Teilwerbebudgethöhen für einzelne Werbeinstrumente, bestimmen die Komplexität des Entscheidungsmodelles. Auch die vom Entscheider an- gestrebte **Optimierungsart**, d.h. Satisfizierung oder Extremierung der Werbeziele, beeinflusst das Entscheidungsmodell bzw. die Auswahl der anzuwendenden Lösungs- methoden. Die **Art der Mitarbeit** bzw. der **Zeitpunkt** zu dem der Entscheider seine Präferenzen und Meinung über eine Lösung in den Lösungsprozess einbringen möchte oder kann (a priori, a posteriori oder interaktiv), hat ebenfalls Auswirkungen auf die einzusetzenden Lösungsmethoden.

Die **Rahmenbedingungen** umfassen neben den Umweltvariablen und konkreten Funktionsparametern auch Aspekte wie Dynamik, Eigenschaften des zu bewerbenden Produktes oder der Marke, Wettbewerb, Art des Marktes, Kaufmenge, Käufer- schaft, Art der Werbebotschaft, Werbebudgetniveau usw., d.h. all diejenigen Aspekte der Realität, die im Entscheidungsmodell berücksichtigt werden sollen. Die Ausprägungen dieser Aspekte bzw. deren Einbeziehung in die Werbemixaufgabe bestimmen den grundlegenden Funktionsverlauf bzw. legen die **Eigenschaften** der einzubeziehenden **Werbewirkungsfunktionen** und des **Entscheidungsmodelles** fest.

Aus den Entscheider-Präferenzen und den Rahmenbedingungen sind die **Eigenschaf- ten der Werbemixaufgabe** abzuleiten, insbesondere die Art der Mitarbeit und die mathematischen Eigenschaften der Funktionen der Ziele und Restriktionen. Diese be- stimmen die Anforderungen an die zu verwendende Lösungsmethode.

5.2.1 Die Präferenzen des Entscheiders

Der folgende Abschnitt befasst sich mit dem ersten Aspekt der Ausgangssituation aus Abbildung 5.1, den **Präferenzen des Entscheiders**. Die eigentlichen Ziele des Ent- scheiders, also die zu betrachtenden **Werbeziele** und deren **zu erreichende wert- mäßigen Ausprägungen**, bilden den Kern seiner Präferenzen. Allerdings hängt die erfolgreiche Erfüllung seiner Ziele und die Zufriedenheit des Entscheiders mit der gefun- denen Lösung der Werbemixaufgabe auch von anderen Vorstellungen bzw. Präferenzen ab. Dies sind die Elemente, die einen Einfluss darauf haben, wie die Lösung der Wer- bemixaufgabe zu erfolgen hat.

Die Vorstellung des Entscheider über das erwünschte Ausmaß der Zielerreichung (die **Zielerreichungsart** bzw. die **Optimierungsart**), nämlich Satisfizierung vs. Extremierung, legt in entscheidender Weise die Art der zur Bewältigung der Werbemixaufgabe heranzuziehenden MODM-Lösungsmethoden fest.⁴ Sie erwächst aus der vom Entscheider gewählten **Werbezielformulierung**, d.h. ob der Entscheider möglichst gute oder bestimmte Wertausprägungen seiner verfolgten Werbeziele anstrebt. Zudem bedeuten diese beiden alternativen Zielerreichungsarten auch **unterschiedliche Herausforderungen an den Entscheider** und insbesondere **unterschiedliche Konsequenzen für die Qualität** der möglichen Lösungen.

Der Fall der **Extremierung** entspricht der belegten Tatsache, dass Werbeziele in der Praxis häufig in Bezug auf Werbezielart, Zielgruppen und Werbeobjekt definiert sind, aber nicht in dem zu erreichenden Zielniveau oder im Zeitbezug festgelegt sind.⁵

Dagegen wird ein wertmäßig fixiertes Zielausmaß wie z.B. „*Bekanntheitsgrad der Marke von 75% erreichen*“ oder „*das Interesse am Produkt um 20% steigern*“ in der Praxis als satisfizierende Zielausprägung verstanden⁶ und stellt die Optimierungsart der **Satisfizierung** dar.

Wenn sich der Entscheider für eine **Satisfizierung** seiner Werbeziele entscheidet,⁷ muss er *realistische* Zielausprägungen für Unter- bzw. Obergrenzen (**Satisfizierungsziele**⁸) seiner Werbeziele angeben können. Dies hängt aber vom Wissen und der Erfahrung des Entscheiders ab. Im Falle *unrealistischer* Zielvorstellungen, d.h. von Zielwerten, die nicht in der Bildmenge der zulässigen Lösungen liegen, kann lediglich eine bestmögliche Annäherung an die gesteckten Ziele erreicht werden. Bei der Wahl der zu erreichenden Zielvorstellungen ist Vorsicht geboten, denn die Zielvorstellungen müssen so gewählt sein, dass die Pareto-Optimalität der Lösung gewahrt bleibt.⁹ Ohne Kenntnis der Menge der zulässigen Lösungen oder der idealen Lösung¹⁰ wird eine Wahl akzep-

⁴ Die Zielerreichungsart einer MODM-Lösungsmethode kann aus dem Lösungskonzept der Methode abgeleitet werden. Lösungsmethoden bieten i.d.R. wegen des zugrunde liegenden, mathematischen Lösungskonzeptes nur die Möglichkeit einer einzelnen Zielerreichungsart. Eine Ausnahme ist z.B. die „ ϵ -constraint-Method“, vgl. auch Abschnitt A.2. Gewöhnlich wird in der OR-Literatur die Zielerreichungsart nicht als Auswahl- bzw. Bewertungskriterium der Methoden angesetzt (vgl. auch Unterabschnitt 5.2.3, S. 79). Die Zielerreichungsart findet in der vorliegenden Arbeit jedoch Beachtung, da sie aus der Werbezielformulierung hervorgeht, wie nachfolgend erläutert wird.

⁵ Vgl. Prochazka (1998), S. 25, Moriarty (1996), S. 57f. und Steffenhagen/Siemer (1996), S. 48.

⁶ Vgl. Bitz (1981), S. 35.

⁷ Es ist ebenso möglich, dass der Entscheider unbewusst eine Werbezielformulierung wählt, aus der eine Satisfizierungsaufgabenstellung hervorgeht.

⁸ In der Literatur finden sich auch häufig Begriffe wie *Ziele* oder *Anspruchsniveaus* bzw. „*Aspiration Levels*“ oder „*Goals*“ aus der englischsprachigen Literatur für die angestrebten, wertmäßigen Ausprägungen von Zielfunktionen, vgl. auch Definition 4.9, S. 58.

⁹ Vgl. Mietinen (1999), S. 129.

¹⁰ Vgl. Definition 4.7, S. 57.

tabler Zielausprägungen für den Entscheider schwierig. MODM-Lösungsmethoden, die Satisfizierungsziele verwenden, sind vornehmlich A-priori-Methoden, wie z.B. das bekannte „Goal Programming“¹¹, die Methoden des „Compromise Programming“¹² und des „Displaced Ideal“¹³ oder auch interaktive Methoden wie z.B. die STEP Methode¹⁴ oder die „Reference Direction Method“¹⁵, vgl. dazu Tabelle 5.1. Sie streben im Allgemeinen eine Minimierung des Abstandes möglicher Lösungen zu den Satisfizierungszielen an.

Entscheidet sich der Entscheider für die **Extremierung** seiner Werbeziele, so gilt es diejenige Lösung zu finden, die die **beste Wirkung** in den zu verfolgenden Werbezielen erzeugt. Derartige MODM-Lösungsansätze fragen vom Entscheider i.d.R. keine weiteren Angaben, wie z.B. Schranken oder Zielwerte, ab. Nachteil dieser Optimierungsart ist, dass eine generierte Lösung u.U. **nicht den Erwartungen des Entscheiders** entspricht, da sie nach der mathematisch besten Lösung sucht und nicht nach der Lösung, die der Entscheider für am besten hält. Derartige Lösungsmethoden sind vornehmlich, aber nicht ausschließlich, No-Preference- oder A-posteriori-Methoden, wie z.B. die „ ϵ -Constraint-Method“¹⁶, die „Weighting-Method“¹⁷ oder die „Multiobjective Proximal Bundle Method“¹⁸. Die No-Preference-Methoden sind relativ einfach strukturiert und anwendbar. Sie liefern meist eine **einzelne Lösung**, d.h. die im mathematischen Sinne beste Lösung, mit der sich der Entscheider dann zufrieden geben muss.¹⁹ Die A-posteriori-Methoden liefern dagegen eine **Lösungsmenge**, aus der der Entscheider dann die ihm am besten erscheinende Lösung auswählen kann. Meistens handelt es sich dabei um die Menge der pareto-optimalen Lösungen.²⁰

Die Art der **Mitarbeit** bzw. der **Zeitpunkt** zu dem der Entscheider etwaige Präferenzen, z.B. wünschenswerte Zielausprägungen, in den Lösungsprozess einbringen kann oder will, beeinflusst ebenfalls die Wahl der Lösungsmethode und hängt vom Wissen und Willen des Entscheider ab. Die in der vorliegenden Arbeit verfolgte Unterteilung der MODM-Lösungsmethoden in No-Preference-, A-priori-, A-posteriori- oder interak-

¹¹ Vgl. Charnes/Cooper (1961).

¹² Vgl. Yu (1973) und Zeleny (1973).

¹³ Vgl. Zeleny (1975).

¹⁴ Vgl. Benayoun et al. (1971).

¹⁵ Vgl. Narula et al. (1994a) und Narula et al. (1994b).

¹⁶ Vgl. Haimes et al. (1971).

¹⁷ Vgl. Saaty/Gass (1954), Gass/Saaty (1955a), Gass/Saaty (1955b) und Zadeh (1963).

¹⁸ Vgl. Mäkelä/Neittaanmäki (1992).

¹⁹ Vgl. Miettinen (1999), S. 68.

²⁰ Vgl. Miettinen (1999), S. 77.

tive Methoden greift die unterschiedlichen Herausforderungen auf, die derartige Methoden an den Entscheider stellen. Dies sind z.B. die **Benennung von Schranken**, die **Interaktion mit Modell und Analysten** oder aber die **Auswahl einer Lösung** aus einer u.U. recht erheblichen Anzahl von zulässigen Lösungen. Mit den unterschiedlichen Herausforderungen sind jeweils auch **unterschiedlich viel Wissen, Zeit und Willen zur Mitarbeit** für den Entscheider verbunden.

Die **Restriktionen** und die **Anzahl der Werbeinstrumente**, die der Entscheider mit in die Werbemix-Aufgabe einbeziehen will, erhöhen die Komplexität des mathematischen Entscheidungsmodelles. Der Entscheider kann Restriktionen z.B. für die einzelnen Werbeziele, Werbeinstrumente oder auch für die Werbebudgethöhe aufstellen. Im Vergleich zu Optimierungsproblemen aus der Produktions- oder Transportplanung²¹ ist die Anzahl der Restriktionen in der Werbemixplanung eher gering²². Es werden vornehmlich Restriktionen für das Gesamtwerbebudget oder für Teilwerbebudgets einzelner Instrumente in Entscheidungsmodelle einbezogen.²³ Für dynamische Entscheidungsmodelle in der Werbemixplanung erhöht sich die Anzahl der Restriktionen aufgrund der Betrachtung mehrerer Entscheidungsperioden.

Die zu betrachtenden **Werbeziele** haben insofern einen Einfluss auf das mathematische Entscheidungsmodell, als der Entscheider durch ihre Benennung die Werbewirkungsklasse, zu der sie gehören, festlegt. Die **Werbewirkungsklasse** hat jedoch unterschiedliche Implikationen für die Plausibilität von Funktionstypen, die zur Operationalisierung des Wirkungszusammenhangs herangezogen werden können.

5.2.2 Die Rahmenbedingungen

Der zweite Aspekt der Ausgangssituation, die Rahmenbedingungen aus Abbildung 5.1, sei in diesem Abschnitt betrachtet. Er zeigt auf, dass bestimmte **Rahmenbedingungen der Entscheidungssituation existieren bzw. angenommen werden können**, die sich in der **Gestalt und den Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen** widerspiegeln müssen. Die Rahmenbedingungen wirken sich damit auf

²¹ Hier gehören Entscheidungsprobleme mit einigen tausend Entscheidungsvariablen und Restriktionen noch zu den „kleineren“ Optimierungsproblemen, vgl. Neumann/Morlock (2002), S. 16.

²² In Beispielen aus Steffenhagen (2006a), Rahders (1989) oder Schmalen (1992) werden z.B. nur einige wenige Restriktionen betrachtet.

²³ Vgl. z.B. Meffert (2002), S. 825f. oder Rahders (1989), S. 223ff.

die Bewertung der **Plausibilität** möglicher Werbewirkungsfunktionen im Entscheidungsmodell und für die betrachtete Entscheidungssituation aus. Es wird dargestellt, welche Aspekte der Entscheidungssituation dies sein können und wie sie sich in der Gestalt und in den Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen wieder finden müssen. Um möglichst plausible Werbewirkungsfunktionen zu verwenden, ist eine Berücksichtigung dieser Rahmenbedingungen bei der Auswahl oder der Gestaltung der Werbewirkungsfunktionen notwendig. Gewisse Ausprägungen von Rahmenbedingungen finden sich bereits in der Literatur als Plausibilitätskriterien bzw. Hypothesen über den (Werbe-)Wirkungsverlauf wieder und werden an der entsprechenden Textstelle kurz aufgezeigt. Die Betrachtung der Thematik wird dann in der kritischen Würdigung der Prozessstrukturierungshilfe, Abschnitt 5.3, fortgeführt und mündet im Aufzeigen eines methodischen Ansatzes zur Bestimmung plausibler Wirkungsfunktionen.

Zur Erstellung eines Modelles eines betriebswirtschaftlichen Systems gehört stets eine **Analyse des Systems**. Dies dient der **Identifizierung der relevanten Systemelemente und deren Relationen**, die in das zu erstellende Modell einfließen müssen, um zu gewährleisten, dass das Modell die entscheidenden Eigenschaften des realen Systems abbildet. Die **Akzeptanz der spezifischen Abbildung des Realsystems** in das formale Entscheidungsmodell bestimmt in der Praxis maßgeblich die **Bereitschaft zur Nutzung** des quantitativen Planungsansatzes und die **Glaubwürdigkeit der Ergebnisse**.²⁴

Eine genaue Analyse der Ausgangssituation und der Rahmenbedingungen unter denen mathematische Entscheidungsmodelle für die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung erstellt werden, offenbart eine Reihe von Aspekten, die einen wesentlichen Einfluss auf die Gestalt und die Kernelemente (wie etwa die **Werbewirkungsfunktionen**) des Modelles ausüben. Dies bedeutet, dass eine sorgfältige Ableitung von Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen aus den Rahmenbedingungen plausible Werbewirkungsfunktionen für die Entscheidungssituation erzeugt. Um aus Sicht des Entscheiders möglichst plausibel den Wirkungszusammenhang widerzuspiegeln und damit für ihn vertrauenswürdige Ergebnisse zu produzieren, ist also zu hinterfragen, wie sich die – die Entscheidungssituation charakterisierenden – **Rahmenbedingungen auf welche Eigenschaften der zu verwendenden Werbewirkungsfunktionen** auswirken.

²⁴ Vgl. Böcker (1978), S. 234.

Die für Entscheidungsmodelle der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung relevanten **Rahmenbedingungen** und ihre möglichen Ausprägungen seien in der vorliegenden Arbeit in Form von **Dimensionen des Modelles** inhaltlich systematisiert. Aspekte dieser Dimensionen sind situationsbedingt und deren Einbeziehung in das Modell hängt z.T. davon ab, ob der Entscheider bzw. der Analyst eine Notwendigkeit sieht, sie in das Modell zu integrieren und welche Zielsetzung mit dem Entscheidungsmodell verfolgt werden soll. Sie sind aber grundlegenderer Natur als die Entscheider-Präferenzen, da sie die wesentlichen, abzubildenden Relationen des zu modellierenden Systems widerspiegeln, die einen Einfluss auf die Wirkungsfunktionen ausüben.

Die Dimension *Instrumentinteraktionen* umfasst den „Einbau“ von Interaktionseffekten der Instrumente, wie z.B. Elastizitäts-, Reaktions- und Optimalitätsinteraktion, in das Entscheidungsmodell. Die Werbewirkungsfunktionen des Modelles müssen bei Einbeziehung oder bei Existenz eines Wirkungsverbundes unter den Werbeinstrumenten entsprechende Instrumentinteraktionen aufweisen. Dies schränkt in entscheidender Weise die Auswahl möglicher Funktionstypen ein, die zur Modellierung der Werbewirkungsfunktionen herangezogen werden können. Die Tabelle 3.1 aus Abschnitt 3.4 zeigt mögliche Funktionstypen und deren Eignung zur Abbildung von Instrumentinteraktionen.

Dabei ist zu beachten, dass bei Verwendung gängiger Funktionstypen zur Formulierung psychographischer Werbewirkungsfunktionen **keine Optimalitätsinteraktion modelliert werden kann**. Dies zeigt Anhang C.

Die Dimension *Werbewirkungsklasse* bestimmt den grundlegenden Verlauf der Werbewirkungsfunktionen. Für die unterschiedlichen Werbewirkungsklassen – Kenntnisse, Einstellungen, Interessen, Präferenzen und Verhaltensbereitschaften – in der Werbewirkungskategorie der dauerhaften Gedächtniswirkungen sind unterschiedliche Verläufe der Werbewirkungsfunktionen plausibel und damit zu verwenden. Für **affektiv** geprägte Werbewirkungsklassen wie Interessen, Einstellungen oder Präferenzen sind Werbewirkungsfunktionen mit einem Übersättigungsverlauf aufgrund von Wear-Out-Effekten anzusetzen,²⁵ so dass Hypothese 8 (*Übersättigung*)²⁶ aus Abschnitt 3.1 für derartige Werbewirkungen als gültig angenommen werden kann. Für Werbewirkungsklassen wie

²⁵ Vgl. ter Haseborg (1983), S. 114.

²⁶ Vgl. Abschnitt 3.1, S. 35.

Aufmerksamkeit oder Kenntnisse, die auf **kognitiven** Prozessen beruhen, ist ein Übersättigungsverlauf wenig plausibel, dafür aber Hypothese 3 (*Konkavität*) oder Hypothese 6 (*S-förmig*).²⁷ Zudem ist aufgrund des messwertbedingten Funktionswert-Intervalls (z.B. 0-100%), welches durch die üblichen Befragungstechniken zu psychographischen Werbewirkungen²⁸ auf der Makroebene nach der Aggregation der individuellen Messwerte entsteht, ebenfalls Hypothese 4 (*Sättigung*) zu unterstellen.²⁹

Die Dimension **Werbezielobjekt** bestimmt mathematische Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen, falls ein Produkt Werbeobjekt der Werbezielformulierung ist. So verlangt das Produktalter (neu vs. etabliert) plausiblerweise die Berücksichtigung von Schwellenwerten (eng.: „Thresholds“) für die Wirkungs- bzw. Aktivitätskomponente. Für ein in einen Markt einzuführendes Neu-Produkt ist anzunehmen, dass bei geringen Aktivitätsniveaus der Werbeaktivitäten auch keine signifikante Wirkung bei psychographischen Werbezielen in der Käuferschaft feststellbar ist bzw. dass erst ab einem bestimmten Mindestbudget der Werbung eine messbare Wirkung eintritt, vgl. dazu Hypothese 1 (*Nullpunkt*) bzw. Hypothese 7 (*Mindestaufwand*) aus Abschnitt 3.1. Eine analoge Betrachtung für im Markt etablierte Produkte verlangt dagegen bei geringen oder verschwindenden Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente eine nicht verschwindende Wirkung (Hypothese 9 (*Offset*)). Die Produkteigenschaft Produktalter sollte sich also im Verlauf der Werbewirkungsfunktion derart widerspiegeln, dass für etablierte Produkte ein Offset in der Wirkungskomponente existiert bzw. für neue Produkte ein Mindestbudget erreicht werden muss, bevor eine merkliche Wirkung erzeugt wird.³⁰

Das mit dem Produktalter bereits erreichte **Ausgangsniveau** bei psychographischen Werbewirkungen wirkt sich auf die Werbebudgetelastizität aus. Es ist anzunehmen,

²⁷ Vgl. Halleemann (2001) und Köcher/Halleemann (2004), die für die kognitiven, psychographischen Wirkungsgrößen *Werbeerinnerung*, *Werbeawareness* und *Markenbekanntheit* S-förmige bzw. konkave Wirkungsverläufe finden.

²⁸ Vgl. Steffenhagen (2000), S. 90ff.

²⁹ Vgl. 3.1, S. 41 sowie Abschnitt 3.4, S. 48.

³⁰ Bei der Betrachtung möglicher, plausibler Eigenschaften wie Schwellenwerte oder Offsets für Werbewirkungsfunktionen sei daran erinnert, dass derartige Eigenschaften bislang nicht empirisch nachgewiesen werden konnten, vgl. Abschnitt 3.1 bzw. Benjamin/Maitland (1958) und Saunders (1987). Depluet (1991), S. 223f., weist in diesem Zusammenhang jedoch darauf hin, dass Praktiker an die Existenz derartige Phänomene bei z.B. Budget-Absatz-Wirkungsfunktionen glauben, wie z.B. auch Bliemel (1986), S. 124f anführt. Dies erklärt sich durch einen vorhandenen Mindestbedarf der Nachfrager an verschiedenen Artikeln wie Zucker, Kaffee, usw. Dieser Offset oder Sockelabsatz verschiebt den Wirkungsverlauf auf der Ordinate vom Nullpunkt in positiver Richtung. Für einen derartigen Mindestwert in der Nachfrage ist aber auch ein Mindestwert an Kenntnissen bei den Nachfragern notwendig. Die Existenz eines Mindestaufwands ist zudem denkbar, wenn in einem stark durch Werbung geprägten Markt geringe Werbeaktivitäten wirkungslos bleiben, da der „Share-Of-Voice“ oder der „Share-Of-Advertising“ zu gering ist. Erst ab einen bestimmten Schwellenwert der Ausgabenhöhe zeigt sich dann eine messbare Reaktion. Der Wirkungsverlauf verschiebt sich in diesem Fall in positiver Richtung auf der Abszisse.

dass die mit zunehmendem Anteil größer werdende Gruppe von bereits mit der Werbung oder dem Werbezielobjekt in Kontakt gekommenen Adressaten der Werbung schwächer auf Werbeaktivitäten reagiert als die Gruppe der bislang nicht erreichten Adressaten. Die Werbeelastizität sollte umso geringer sein, je höher das bereits erreichte Ausgangsniveau ausfällt. Diese Überlegung leitet sich aus Analogie zum Marktanteilsdenken bei ökonomischen Zielen und zugehörigen Wirkungsfunktionen ab. Eine Hypothese über den Marktanteil besagt, dass die Elastizität der Werbebudget-Marktanteil-Wirkungsfunktion abhängig vom erzielten Marktanteil ist und somit die (absolute) Budgetelastizität umso geringer ist, je höher der Marktanteil ausfällt.³¹ Die mit zunehmendem Marktanteil größer werdende Gruppe der eigenen Käufer wird aufgrund von Produkterfahrungen schwächer auf Werbeaktivitäten reagieren als die Gruppe der bisherigen Nichtkäufer. Gleichzeitig nimmt bei zunehmendem Marktanteil die Gruppe der Nichtkäufer ab und die verbleibenden Nichtkäufer werden immer schwerer erreichbar.³²

In der Dimension **Budget** wird bestimmt, ob in der vorliegenden Situation ein unbeschränktes oder ein nach oben fixiertes Budget betrachtet wird. Im Falle eines beschränkten Budgets B gilt für stetige Funktionen, die zur Modellierung der Werbewirkung verwendet werden, dass sie im beschränkten Intervall $[0, B]$ ebenfalls beschränkt sind³³ und sich Hypothese 4 (*Sättigung*) somit automatisch einstellt. Diese Betrachtung entschärft die Forderung, dass keine Wirkungsfunktion verwendet wird, die bei einem gegen Unendlich gehend hohen Werbebudgeteinsatz eine gegen Unendlich gehend hohe Wirkung erzeugen kann.³⁴ Ein gänzlich unbeschränktes Werbebudget wird es in der Praxis nie geben. Deshalb müssen Werbemixplanungen stets unter der Prämisse eines „realistischen“ Budgets erfolgen, d.h. unter einer Werbebudgetrestriktion gelöst werden.

Ebenso muss die **Budgethöhe** (hoch vs. niedrig) und in dynamischen Modellen die **Budgetänderung** (starke vs. geringe Änderung sowie Erhöhung vs. Senkung) bei der Modellierung von Werbewirkungsfunktionen berücksichtigt werden. Im Verlauf der Elastizität der Werbewirkungsfunktion muss sich bei Budgetänderungen widerspiegeln,³⁵ dass die Absatzförderung asymmetrisch wirkt,³⁶ d.h. dass die Wirkung der

³¹ Vgl. Cooper/Nakanishi (1990), Guadagni/Little (1983) und Depluet (1991).

³² Vgl. Depluet (1991), S. 200.

³³ Vgl. Forster (1983a), S. 67.

³⁴ Vgl. Bruhn (2005), S. 246.

³⁵ Vgl. Depluet (1991), S. 200.

³⁶ Vgl. Little (1979), S. 634ff., Simon (1983), S. 60ff. und Simon (1982).

Werbung im Zeitverlauf auf eine Budgetsenkung weniger stark als auf eine betragsmäßig gleiche Budgetsteigerung reagiert. Auch wenn dynamische Modelle in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet werden, so sei doch zumindest der Einfluss derartiger Größen auf die Wirkungsfunktionen hier erwähnt.

Die Dimension **Werbepbotschaft** umfasst die Art und inhaltliche Gestaltung der Werbepbotschaft bzw. des Werbemittels, was sich im Funktionstyp über den Verlauf der Elastizität der Werbewirkungsfunktion widerspiegelt. Für Budget-Absatz-Wirkungsfunktionen untersuchte Depluet (1991) Hypothesen über die Auswirkung der Werbepbotschaft auf den Verlauf der Funktionen. Ist die zentrale Werbepbotschaft der 'Preis' eines Produktes, so wird eine schnelle und relativ hohe Nachfrageänderung und damit eine höhere Budgetelastizität erwartet. Wird ein informativer und qualitativer Inhalt übermittelt, der eine künstliche Produktdifferenzierung, Markentreue oder Markteintrittsbarrieren erzeugt,³⁷ so stellt sich der Erfolg der Kommunikationsmaßnahme erst mittelfristig ein und die Budgetelastizität ist eher niedrig.³⁸ Für psychographische Werbeziele als Vorstufen des Kauf- und Verwendungsverhalten ist, abhängig von der Art der Werbepbotschaft, ein ähnliches Verhalten der Werbeinstrumentelastizitäten zu erwarten. Dies legen die Ergebnisse von Dahl et al. (2003) nahe, die für die psychographischen Werbewirkungen *Attention*, *Recall* und *Recognition* bei schockierender oder Furcht einflößender Werbepbotschaft sehr viel höhere Werte in der Zielgruppe messen als bei rein informativer Werbepbotschaft.

Die nachfolgenden zwei Dimensionen wirken sich mehr auf die Struktur des Entscheidungsmodelles aus als auf die Eigenschaften anzusetzender Wirkungsfunktionen. Dennoch seien sie hier zumindest erwähnt, da sie in charakteristischer Weise das Entscheidungsmodell prägen und auch für sie die gleichen Überlegungen in Bezug auf die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung gelten.³⁹ Die Dimension **Wettbewerb** beinhaltet die Einbeziehung von Effekten aufgrund von Werbeaktivitäten der Konkurrenz. Dazu können konkurrenzbedingte Größen, wie z.B. der Share-of-Advertising, direkt in die Wirkungsfunktionen integriert werden.⁴⁰ Ein anderer Modellierungsansatz ist die Verwendung von Anteilsmodellen für die Zielvariablen.⁴¹

³⁷ Vgl. Farris/Albion (1980).

³⁸ Vgl. Depluet (1991), S. 201.

³⁹ Weitere Kriterien wie die Informationssituation aus Abbildung 2.6 können zudem als zusätzliche Dimensionen angesetzt werden.

⁴⁰ Vgl. Wittink (1977), Chintagunta (1993) oder Yoo/Mandhachitara (2003).

⁴¹ Vgl. Cooper (1993) und D'Souza/Rao (1995).

Alternativ werden in der Literatur auch spieltheoretische Ansätze verfolgt.⁴²

Die Dimension **Dynamik** beinhaltet die Integration dynamischer Phänomene der Werbewirkung in das Entscheidungsmodell, wie Carry-over oder Time-lag. Damit werden Entscheidungsmodelle zur Werbemixplanung zu dynamischen Wirkungsmodellen, da sie mehrere Planungsperioden betrachten und daher zeitliche Handlungs- und Wirkungsmuster berücksichtigen müssen. Dies wirkt sich dahingehend aus, dass Wirkungsfunktionen und/oder Restriktionen einer Entscheidungsperiode von praktizierten bzw. erreichten Werten vorangegangener Perioden abhängen.

5.2.3 Auswahl relevanter Lösungsmethoden auf Grundlage der Eigenschaften der Werbemix-Aufgabe

Obige Ausführungen zusammenfassend kann die Werbemix-Aufgabe also durch die **Präferenzen des Entscheiders**, die – aus den Rahmenbedingungen erwachsenden – **mathematischen Eigenschaften der Werbewirkungs- und Restriktionsfunktionen** sowie durch die **Struktur des Entscheidungsmodelles** charakterisiert werden. Alle drei bestimmen **Anforderungen**, die eine mögliche Lösungsmethode erfüllen muss.

Insbesondere die mathematischen **Eigenschaften der Wirkungsfunktionen** und der Restriktionsfunktionen schränken die Auswahl möglicher MODM-Methoden ein. Maßgebliche mathematische Eigenschaft ist die Konvexität bzw. Nichtkonvexität der Funktionen. Diese bestimmt die Möglichkeiten zur Auffindung (global) pareto-optimaler und damit effektiver Lösungen durch die MODM-Methode. Weitere einschränkende Eigenschaften sind die Linearität, die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit der Funktionen. Diese spielen jedoch in der Werbeplanung eine eher untergeordnete Rolle, da die in der Literatur am häufigsten betrachteten, relevanten Wirkungsfunktionen in der Regel stetig differenzierbar und insbesondere nichtlinear sind, vgl. Tabelle 3.1. Die Voraussetzungen, die sich an den **Präferenzen des Entscheiders** und am Entscheider selbst orientieren, sind neben dem Zeitpunkt, zu dem er seine Präferenzen in den Lösungsprozess einbringen will, auch die wertmäßigen Ausprägungen seiner Präferenzäußerungen.

Aufgrund der Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen und der Restriktionen, ferner der Struktur des Entscheidungsmodelles, der Art der Mitarbeit und dem Wissen

⁴² Vgl. Leeflang et al. (2000), S. 215ff.

des Entscheiders muss der Analyst eine mögliche Lösungsmethode für Werbemixplanungsaufgaben bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung auswählen, die den Anforderungen genügt. Damit bestimmt er die Lösung, die den Entscheider am meisten überzeugt.

Eine Übersicht über eine Auswahl verschiedener MODM-Lösungsmethoden zeigt Tabelle 5.1. Auch Lösungsmethoden für eine Einfach-Zielsetzung sind in der Tabelle aufgelistet, da verschiedene MODM-Lösungsmethoden auf einem Skalarisationsansatz aufbauen und in einem zweiten Schritt Lösungsmethoden für eine Einfach-Zielsetzung heranziehen. Die in dieser Arbeit verwendeten Lösungsmethoden „Weighting Method“, „ ϵ -Constraint Method“, „Reference Direction Method“ und die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen sind der Übersicht halber zu Beginn der Tabelle aufgelistet.

Es ist aufgrund der oben erwähnten charakterisierenden Eigenschaften der Werbemixaufgabe und der Vielzahl der zur Auswahl stehenden MODM-Methoden offensichtlich, dass die Auswahl einer geeigneten MODM-Methode für die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung nicht einfach ist. Keine MODM-Methode kann als die „Beste“ angesehen werden,⁴³ ist doch eine **Vielfalt an Aspekten der Entscheidungssituation bei der Auswahl zu beachten** und eine Abwägung der Aspekte gegeneinander aufgrund des Fuzzy-Charakters kaum möglich.

Neben den oben erläuterten **Voraussetzungen** gilt dies insbesondere für mögliche weitere einzubeziehende **Auswahl-** oder **Bewertungskriterien**, wie z.B. Angemessenheit, Handhabung, Gültigkeit und die Sensitivität der Ergebnisse auf die Auswahl der Methode.⁴⁴ Die Angemessenheit umfasst neben der Verhältnismäßigkeit der Methode für das Problem auch die Einbeziehung des Entscheiders, da die zu verwendende Methode auf den Entscheider, sein Wissen, seine Erfahrung und seine Präferenzen passen muss: die Methode darf das Wissen und die Erfahrung des Entscheiders nicht überfordern. Die Handhabung bezieht sich auf den Aufwand und das Wissen, welche vom Analysten und Entscheider eingefordert werden. Beruht die zu treffende Entscheidung signifikant auf den Ergebnissen, so sollte die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Methode gering sein.

Andere Kriterien sind z.B., dass der Input, der vom Entscheider abgefragt wird, aussagekräftig und unmissverständlich sein muss und dass die Methode (für den Entscheider)

⁴³ Vgl. Miettinen (1999), S. 63.

⁴⁴ Vgl. Hobbs (1986) und die in Little (1970) angegebenen, geforderten Eigenschaften eines Entscheidungsmodelles „(...) simple, robust, easy to control, adaptive, as complete as possible and easy to communicate with (...)“, die auch als Auswahlkriterien auf eine Lösungsmethode angewendet werden können, da diese Teil des Entscheidungskalküls ist.

so transparent, einfach und effizient wie möglich sein muss.⁴⁵

Auch die Einfachheit der Lösungskonzepte, die Möglichkeiten zur Interaktion mit dem Modell und der Methode, die Interpretationsmöglichkeiten der generierten Ergebnisse, die Wahl der meist-präferierten Lösung aus einer repräsentativen Lösungsmenge oder die Unterstützung der Denkweise des Entscheiders durch die Lösungsmethode sind mögliche, weitere Auswahlkriterien. Ist der Entscheider mit dem zu lösenden Problem nicht vertraut, d.h. kennt er nicht dessen Grenzen, Möglichkeiten und Potenziale, so wird eine Methode benötigt, die es ihm erlaubt, sich mit dem Problem vertraut zu machen. Im umgekehrten Falle benötigt der Entscheider eine Methode, die es ihm erlaubt, sich auf einen ausgewählten Aspekt des Problems zu konzentrieren. Die Lösungsmethode muss den Intentionen des Entscheiders Rechnung tragen.⁴⁶

Die dargestellten möglichen, einzubeziehenden **Auswahl-** oder **Bewertungskriterien** stellen im Wesentlichen die **abzuwägenden Vor- und Nachteile** der Methoden dar, während sich die obigen **Anforderungen** auf „neutrale“ **Eigenschaften der Methoden** beziehen. Auf welche Alternativen der Bewertungskriterien die Wahl des Entscheiders bei isolierter Betrachtung fallen wird, ist offensichtlich. Bei den Anforderungen hängt dies von den Vorstellungen und dem Wissen des Entscheiders ab. Auf die Frage also, ob ein Entscheider z.B. eine verständliche oder eine unverständliche Methode präferiert, wird seine Wahl im Zweifelsfall auf die verständlichere Methode fallen. Bei der Frage, ob er denn a priori, a posteriori oder interaktiv mitarbeiten will, hängt die Entscheidung hingegen von seinen Präferenzen und seinem Wissen ab. Sehr deutlich wird also die entscheidende Rolle des Entscheiders und seiner Präferenzen im Auswahlprozess der Lösungsmethode. Durch explizites Einbeziehen des Entscheiders und seiner Präferenzen bei den Voraussetzungen wird die von Little (1970) geforderte **Benutzerorientierung** des Entscheidungsmodelles und der Strukturierungshilfe ermöglicht. Dadurch erhöht sich sowohl das Vertrauen in die Lösungsmethode und die damit gewonnenen Ergebnisse als auch der daraus resultierende Nutzen des Entscheiders. Je einfacher und verständlicher die Methode und der Lösungsweg sind, desto mehr hat der Entscheider das Gefühl, die Kontrolle zu haben, desto eher setzt er das Entscheidungsmodell in der Praxis ein und vertraut er den Ergebnissen. Auch die Art und Weise wie und vor allem welche Informationen von ihm im Rahmen des Lösungsprozesses abgefragt werden, beeinflussen das Vertrauen des Entscheiders in die Methode

⁴⁵ Vgl. Stewart (1992).

⁴⁶ Vgl. Miettinen (1999), S. 228.

und die gewonnenen Ergebnisse.⁴⁷

Eine Bestimmung der geeignetsten Lösungsmethode ist aufgrund des Fuzzy-Charakters der Auswahlkriterien und Anforderungen selbst wieder eine Herausforderung, die mit MADM-Methoden angegangen werden kann.

⁴⁷ Vgl. Bischoff (1986).

Tabelle 5.1: Liste ausgewählter MODM-Methoden, ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten

| Methode | # Ziele | | Linearität | Konvexität | Stetigkeit | Diff.- barkeit | Referenz- punkt | Art der Lösung | Art der Methode | Quelle | Anmerkungen |
|---|---------|---|------------|------------|------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------|---|
| | n | 1 | | | | | | | | | |
| Weighting Method ⁴⁸ | n | 1 | - | ! | ! | ! | - | w(PO) | A, (B) | † † | Skalarisationsmethode; in dieser Arbeit verwendet |
| ϵ -Constraint Method ⁴⁹ | n | - | - | - | ! | ! | (-) | w(PO) | A, (B) | † † | Skalarisationsmethode; Konstruktion von n Ersatzproblemen; in dieser Arbeit verwendet |
| Reference Direction Method ⁵⁰ | n | - | - | - | ! | - | ! | w(PO) | C | ‡ | Basiert auf Reference Direction Approach; Verbesserung schlechter Wertausrägungen der Ziele auf Kosten guter; in dieser Arbeit verwendet |
| Kuhn-Tucker-Bedingungen ⁵¹ | 1 | - | - | (!) | ! | ! | - | O | D | † † | In dieser Arbeit verwendet |
| <i>Methoden basierend auf zulässigen Richtungen</i> | | | | | | | | | | | |
| Zulässige Richtungen | 1 | - | - | - | ! | ! | - | O | D | † † | Lineare Restriktionen und quadratische Zielfunktion; z.B. Verfahren der projizierten Gradienten nach Rosen (1960), Linearisierungsverfahren nach Frank/Wolfe (1956) |
| <i>Methoden basierend auf Strafkosten</i> | | | | | | | | | | | |
| Penalty-Methoden | 1 | - | - | - | ! | ! | - | O | D | † † | Approximieren von restringierten durch unrestringierte Aufgaben; „Bestrafung“ von schlechten (unzulässigen) Lösungen |
| Barriere-Methoden | 1 | - | - | - | ! | ! | - | O | D | † † | Nicht anwendbar auf Gleichheitsrestriktionen |

! = wird vorausgesetzt, - = wird nicht vorausgesetzt, PO = pareto-optimal, wPO = weakly PO, O = Optimallösung, c = Kompromiss-Lösung, A, B, C, D = a posteriori, a priori, interaktiv, No-Preference
 () = sek. Klassifizierung/ gilt unter best. Voraussetzungen, † = Beschreibung entnommen aus Chankong/Haimes (1983), † † ... aus Horst (1979), ‡ ... aus Miettenin (1999)
 Fortsetzung von Tabelle 5.1 folgt ...

⁴⁸ Vgl. Saaty/Gass (1954), Gass/Saaty (1955a), Gass/Saaty (1955b) und Zadeh (1963).

⁴⁹ Vgl. Haimes et al. (1971).

⁵⁰ Vgl. Narula et al. (1994a) und Narula et al. (1994b).

⁵¹ Vgl. Kuhn/Tucker (1951).

| Methode | # Ziele | Linearität | Konvexität | Stetigkeit | Diff.-barkeit | Referenzpunkt | Art der Lösung | Art der Methode | Quelle | Anmerkungen |
|--|---------|------------|------------|------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|--------|--|
| Multiplikator Methoden | 1 | - | - | ! | ! | - | O | D | †† | Verallg. Strafkostenverfahren; Verbesserung von Konvergenzverhalten durch Ausnutzen von Dualität |
| <i>Methoden basierend auf Schnittebenen</i> | | | | | | | | | | |
| Schnittebenen-Verfahren | 1 | - | ! | ! | ! | - | O | D | †† | Transformation in ein Problem mit linearer Zielfunktion |
| <i>Methoden basierend auf globaler Präferenz-Struktur („Value Function“)</i> | | | | | | | | | | |
| Ad Hoc Pref. Function Approach | n | - | - | ! | ! | - | (PO) | B | † | ∃ „Value Function“ → Anwendung einer passenden skalaren Optimierungsmethode |
| Geoffrion's Bicriterion Method ⁵² | 2 | - | ! | ! | ! | - | (PO) | B | † | Deterministisch, kontinuierliche Entscheidungsvariablen, konvexe Funktionen, monotone und stetige „Value Function“ |
| Modified PROTRADE Method ⁵³ | n | ! | ! | ! | ! | - | (PO) | B | † | Zielfunktion linear, Nebenbedingungen konvex; vollständige Bekanntheit der Präferenzstruktur („Value Function“) bei Unsicherheit |
| <i>Methoden basierend auf Goal Programming</i> | | | | | | | | | | |
| Linear Goal Programming ⁵⁴ | n | ! | ! | ! | ! | ! | c(PO) | B | † † | Entscheider setzt (optimistische) Aspirationslevels (ALs); Minimierung der Differenz zu ALs → Anwendung einer skalaren Optimierungsmethode |
| Nonlinear Goal Programming | n | - | - | ! | - | ! | c(PO) | B | † † | Entscheider setzt Aspirationslevels (ALs); Minimierung der Differenz zu ALs → Anwendung einer skalaren Optimierungsmethode |

= wird vorausgesetzt, = PO = pareto-optimal, = wPO = weakly PO, = O = Optimallösung, = c = Kompromiss-Lösung, A, B, C, D = a posteriori, a priori, interaktiv, No-Preference
 = sek. Klassifizierung/gilt unter best. Voraussetzungen, † Beschreibung entnommen aus Chankong/Haines (1983), †† ... aus Horst (1979), † † ... aus Miettinen (1999)

Fortsetzung von Tabelle 5.1 folgt ...

⁵² Vgl. Geoffrion (1966) und Geoffrion (1967).
⁵³ Die ursprüngliche PROTRADE Methode geht auf Goicoechea et al. (1979) zurück.
⁵⁴ Vgl. Charnes/Cooper (1961).

| Methode | # Ziele | Linearität | Konvexität | Stetigkeit | Diff-barkeit | Referenzpunkt | Art der Lösung | Art der Methode | Quelle | Anmerkungen |
|--|---------|------------|------------|------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|--------|---|
| Goal Attainment Method ⁵⁵ | n | - | - | ! | - | ! | c(PO) | B | † | Gewichtung der Abweichungen von den Aspirationslevels; weniger Variablen als beim Goal Programming |
| Compromise Programming ⁵⁶ | n | - | - | ! | - | ! | c(PO) | B | † | Verwendung perfekter bzw. utopischer Zielvektoren, Gewichtungen und diverser Abstandsmetriken |
| Displaced Ideal ⁵⁷ | n | - | - | ! | - | ! | c(PO) | B | † | Wie Goal Programming; Goal wird während des LöSENS modifiziert |
| STEP Method (STEM) ⁵⁸ | n | (!) | - | ! | - | ! | wPO | C | † † | Verbesserung schlechter Zielausprägungen auf Kosten guter |
| SEMOPS Method ⁵⁹ | n | - | - | ! | - | ! | c(PO) | C | † | Verwendung von Referenzintervallen anstatt eines Referenzpunkts |
| Methoden basierend auf Trade Offs | | | | | | | | | | |
| Zoits-Wallenius Method ⁶⁰ | n | (!) | ! | ! | - | - | c(PO) | C | † | Nebenbedingungen linear, Zielfunktion linear oder konvex, \exists monoton fallende „Value Function“ |
| No-Preference-Methoden | | | | | | | | | | |
| Proximal Bundle Method ⁶¹ | n | - | - | - | - | - | wPO | D | ‡ | Suche nach Lösungen in der Richtung, in der sich alle Zielfunktionen gleichzeitig verbessern |
| A-posteriori-Methoden | | | | | | | | | | |

! = wird vorausgesetzt, - = wird nicht vorausgesetzt, PO = pareto-optimal, wPO = weakly PO, O = Optimallösung, c = Kompromiss-Lösung, A, B, C, D = a posteriori, a priori, interaktiv, No-Preference
 () = sek. Klassifizierung/gilt unter best. Voraussetzungen, † = Beschreibung entnommen aus Chankong/Haimes (1983), †† ... aus Horst (1979), ‡ ... aus Mietinen (1999)

Fortsetzung von Tabelle 5.1 folgt ...

⁵⁵ Vgl. Gembicki/Haimes (1975).
⁵⁶ Vgl. Yu (1973) und Zeleny (1973).
⁵⁷ Vgl. Zeleny (1975).
⁵⁸ Vgl. Benayoun et al. (1971).
⁵⁹ Vgl. Monarchi et al. (1973).
⁶⁰ Vgl. Zoits/Wallenius (1976).
⁶¹ Vgl. Mäkelä/Neittaanmäki (1992).

| Methode | # Ziele | | Linearität | Konvexität | Stetigkeit | Diff.-barkeit | Referenzpunkt | Art der Lösung | Art der Methode | Quelle | Anmerkungen |
|--|---------|-----|------------|------------|------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|--|-------------|
| | | | | | | | | | | | |
| Hybrid Method ⁶² | n | - | - | ! | ! | - | PO | A (B) | † | Kombination von „Weighting Method“ u. „ ϵ -Constraint Method“ | |
| Method of Weighted Metrics | n | - | - | ! | ! | w(PO) | w(PO) | A | † | Kombination von „Weighting Method“ u. „Method of the Global Criterion (Compromise Programming)“ | |
| ASF Approach ⁶³ | n | - | - | ! | ! | w(PO) | w(PO) | A | † | Verwendung einer „Achievement Scalarizing Function“, die stetig, ordnungserhaltend und steigend ist | |
| A-priori-Methoden | | | | | | | | | | | |
| Lexicographic Ordering ⁶⁴ | n | - | - | - | - | PO | PO | B | † | Entscheider priorisiert Ziele nach absoluter Wichtigkeit, dann sequentielles Lösen von Einfach-Zielsetzungsproblemen | |
| Interaktive Methoden | | | | | | | | | | | |
| Surrogate Worth Trade-Off ⁶⁵ | n | - | - | ! | ! | - | c(PO) | C | † | Kombination von ϵ -Constraint Methode, einer (impliziten) „Value-Function“ und Trade-Offs | |
| Geoffrion-Dyer-Feinberg Method ⁶⁶ | n | (!) | ! | ! | ! | - | c(PO) | C | † | Kombination von einer (impliziten) „Value-function“, Gradient-basierenden Methode (Frank & Wolfe) und Trade-Offs | |
| SPO ⁶⁷ | n | - | ! | ! | ! | - | c(PO) | C | † | Sequential Proxy Optimization Technique: Kombination von Geoffrion-Dyer-Feinberg & Surrogate Worth Trade-Off Methode | |

! = wird vorausgesetzt, PO = pareto-optimal, wPO = weakly PO, O = Optimallösung, c = Kompromiss-Lösung, A, B, C, D = a posteriori, a priori, interaktiv, No-Preference
 () = sek. Klassifizierung/gilt unter best. Voraussetzungen, † = Beschreibung entnommen aus Chankong/Haimes (1983), †† ... aus Horst (1979), † ... aus Mietinen (1999)

Fortsetzung von Tabelle 5.1 folgt ...

⁶² Vgl. Corley (1980) und Chankong/Haimes (1983).

⁶³ Vgl. Wierzbicki (1981), Wierzbicki (1986b) und Wierzbicki (1986a).

⁶⁴ Einen ausführlichen Überblick über das lexikographische Zielprogrammieren gibt Fishburn (1974).

⁶⁵ Vgl. Chankong/Haimes (1978) und Chankong/Haimes (1983).

⁶⁶ Vgl. Geoffrion et al. (1972).

⁶⁷ Vgl. Sakawa (1982).

| Methode | # Ziele | | Linearität | Konvexität | Stetigkeit | Diff-barkeit | Referenzpunkt | Art der Lösung | Art der Methode | Quelle | Anmerkungen |
|--|---------|---|------------|------------|------------|--------------|---------------|----------------|-----------------|--------|--|
| | | | | | | | | | | | |
| Tchebycheff Method ⁶⁸ | n | - | - | - | ! | - | ! | PO | C | ‡ | Reduzierung der pareto-optimalen Lösungsmenge durch eine interaktive Gewichtungsvektor-Menge via Variation der Gewichte und der Tchebycheff-Metrik |
| Reference Point Method ⁶⁹ | n | - | - | - | - | - | ! | w(PO) | C | ‡ | Minimierung der Abweichungen von einem Referenzpunkt und einer „achievement function“ |
| GUESS Method ⁷⁰ | n | - | - | - | - | - | ! | w(PO) | C | ‡ | Basiert auf (Nadir-)Referenzpunkt und einer Metrik-ähnlichen Funktion, die die Abweichungen minimiert |
| Satisficing Trade-Off Method ⁷¹ | n | - | - | - | ! | ! | - | w(PO) | C | ‡ | Minimierung einer Skalarisationsfunktion unter Verwendung von Trade-Offs |
| Light Beam Search ⁷² | n | - | - | - | ! | ! | ! | w(PO) | C | ‡ | Basiert auf Reference Point Method, eines (Nadir) Referenzpunktes u. einer MADM-Methode |
| Reference Direction Approach ⁷³ | n | - | - | ! | ! | ! | ! | w(PO) | C | ‡ | Kombination von „Reference Point Method“ u. „Geoffrion-Dyer-Feinberg Method“ |
| NIMBUS Method ⁷⁴ | n | - | - | - | - | - | ! | w(PO) | C | ‡ | Entworfen zur Handhabung von nicht differenzierbaren Funktionen |

! = wird vorausgesetzt, - = wird nicht vorausgesetzt, PO = pareto-optimal, wPO = weakly PO, O = Optimallösung, c = Kompromiss-Lösung, A, B, C, D = a posteriori, a priori, interaktiv, No-Preference
 () = sek. Klassifizierung/ gilt unter best. Voraussetzungen, † = Beschreibung entnommen aus Chankong/Haimes (1983), †† ... aus Horst (1979), ‡ ... aus Miettinen (1999)

Ende von Tabelle 5.1

68 Vgl. Steuer (1986).
 69 Vgl. Wierzbicki (1980a), Wierzbicki (1980b) and Wierzbicki (1981).
 70 Vgl. Buchanan (1997).
 71 Vgl. Nakayama (1989) und Nakayama (1995).
 72 Vgl. Jaszkiwicz/Slowinski (1994) und Jaszkiwicz/Slowinski (1995).
 73 Vgl. Korhonen/Laakso (1984), Korhonen/Laakso (1985) und Korhonen/Laakso (1986).
 74 Vgl. Miettinen/Mäkelä (1996).

5.2.4 Das Lösen der Werbemix-Aufgabe

Nach Bestimmung der Eigenschaften der Werbemixaufgabe und Auswahl einer Lösungsmethode kann die konkrete Werbemixaufgabe gelöst werden. Der Entscheider urteilt über die generierten Lösungen bzw. die einzelne Lösung und kann bei Nichtgefallen der Lösung seine Präferenzen ändern, so dass die Werbemixaufgabe unter einer veränderten **Ausgangssituation** erneut zu lösen ist. Wie sich Entscheider-Präferenzen und Rahmenbedingungen konkret auf den Lösungsprozess auswirken, wird in Kapitel 7 anhand der dort betrachteten numerischen Beispiele verdeutlicht.

5.3 Kritische Würdigung der Prozessstrukturierungshilfe

Die vorgestellte prozessorientierte Strukturierungshilfe zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung erfüllt alle von Kall (1996) geforderten Eigenschaften: Sie ist **prozess- und benutzerorientiert** und weist einen **entscheidungsunterstützenden Charakter** auf. Sie strebt nach einer „guten“ **Lösung** und der **Vermeidung inkonsistenter Entscheidungen**, indem sie den Entscheidungsprozess der Werbemixplanung strukturiert und die Entscheidungsalternativen des Entscheider offenbart. Die Strukturierungshilfe ermöglicht die simultane oder sukzessive Werbebudget- und Werbemixplanung auf Basis eines Entscheidungsmodelles.

Neben der Einfachheit der aufgezeigten Entscheidungsstruktur liegt auch eine **einfache Steuerungsmöglichkeit der Vorgehensweise des Entscheiders** vor, indem die Entscheidungen und Analysen der Elemente der beiden ersten Ebenen **sukzessive abgearbeitet** werden. Die Entscheidungshilfe ist flexibel anwendbar auf beliebige Entscheidungssituationen zur Werbemixplanung, da sie die in einer Entscheidungssituation wesentlichen, zu analysierenden Elemente aufzeigt und strukturiert. Sie unterstützt die praktische Anwendung, welche die Einbindung der subjektiven Erfahrungen des Entscheiders in Form seiner Präferenzen fordert, so dass der Entscheider vom zu durchlaufenden Planungsprozess überzeugt und durch seine konkrete Mitwirkung motiviert sein sollte.

Die Gliederung des Entscheidungsprozesses in die wesentlichen Elemente Entscheider-Präferenzen, Rahmenbedingungen, Auswahl einer Lösungsmethode auf Basis der Eigen-

schaften der Werbemixaufgabe und den darauf folgenden, eigentlichen Lösungsprozess zeigt die **Methodik des Entscheidens** für die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung auf. Sie bietet die Möglichkeit, die wesentlichen Elemente der vorliegenden Entscheidungssituation zu identifizieren und erlaubt es, auch subjektive Erfahrungen des Entscheiders und neue, bisher nicht berücksichtigte Elemente in die entsprechenden Gebiete einzubeziehen.

Der **entscheidungsunterstützende Charakter** obiger prozessorientierter Strukturierungshilfe liegt im **iterativen** Durchlaufen der drei Entscheidungsebenen. Dies bietet dem Entscheider die Möglichkeit, sich durch Variation seiner Präferenzen (und falls möglich der Rahmenbedingungen) eine Meinung über die Problemstruktur und die möglichen Entscheidungsalternativen sowohl bzgl. alternativer Präferenzen als auch alternativer Lösungen zu bilden, um ihn so dabei zu unterstützen, die für ihn geeignetste Lösungsmethode und Lösung zu bestimmen. So ergibt sich die für ihn **„beste“ Lösung auf vertrauenswürdige Weise**.

Die Entscheidungshilfe vermeidet **logisch inkonsistente Entscheidungen** für die Werbemixplanung, indem sie die Ableitung der Eigenschaften der einzubeziehenden Werbewirkungsfunktionen aus den in der Entscheidungssituation vorherrschenden Rahmenbedingungen fordert, sofern die für die betroffenen Werbeziele geltenden Werbewirkungsfunktionen nicht anderweitig vorgegeben sind.

Der **Grad der Fixierung** von Entscheider-Präferenzen und Rahmenbedingungen unterscheidet sich. Die Entscheider-Präferenzen können zwischen einzelnen Iterationen nach Belieben des Entscheiders variieren, da sie seine Wünsche und Vorstellungen repräsentieren und vom Wissens- und Erfahrungsstand des Entscheiders abhängen. Insbesondere die abgefragten, wertmäßigen Entscheiderinformationen, die gegebenenfalls in den Lösungsprozess einfließen, können sich im Rahmen des sich vollziehenden Lernprozesses in Art und Höhe ändern. Während die Entscheider-Präferenzen also variabel sind, bilden dagegen die Rahmenbedingungen ein eher starres Korsett der abzubildenden Elemente und Relationen der Entscheidungssituation. Haben Entscheider und Analyst die Aspekte identifiziert, die die wesentlichen Eigenschaften der Entscheidungssituation bilden, so müssen diese charakterisierenden Elemente in das Entscheidungsmodell integriert werden. In Verlauf des Entscheidungsprozesses kann jedoch die Erkenntnis entstehen, dass bestimmte Dimensionen der Entscheidungssituation, z.B. Dynamik oder Wettbewerb, die zunächst nicht berücksichtigt wurden, nachträglich einbezogen werden müssen. Umgekehrt können ursprünglich berücksichtigte, aber sich

im Verlauf des Prozesses als eher weniger bedeutsam entpuppende Aspekte aus dem gewählten Ansatz wieder herausgenommen werden.

Die **Vollständigkeit** der in der Strukturierungshilfe vorgeschlagenen Elemente der Entscheider-Präferenzen und Rahmenbedingungen variiert ebenfalls zwischen den Elementen der ersten Entscheidungsebene. Die aufgelisteten **strukturellen Entscheider-Präferenzen** erwachsen aus der Betrachtung möglicher Werbezielformulierungen⁷⁵, der zur Verfügung stehenden Mittel (Werbeinstrumente und Restriktionen) und der möglichen Beteiligung des Entscheiders am Lösungsprozess. Aufgrund ihrer die Werbewirkungsfunktion charakterisierenden Eigenschaften fallen Objekt- und Zeitbezug der Werbezielformulierung in Form von Dimensionen der Entscheidungssituation unter die Rahmenbedingungen. Werbeziele und Zielerreichungsart folgen aus den Aspekten Zielart und Zielausmaß der Werbezielformulierung. Bei den aufgelisteten Entscheider-Präferenzen der *psychographischen Werbeziele*, der *Werbeinstrumente*, der *Restriktionen*, der *Zielerreichungsart* und der *Art der Mitarbeit* handelt es sich um die den Lösungsprozess prägenden Elemente, bei denen der Entscheider eine tatsächliche Wahlmöglichkeit hat und deren Alternativen sich auf den Lösungsprozess auswirken. Sie sind grundlegenderer Natur und im Wesentlichen nicht von der Erfahrung des Entscheiders sondern von dessen Vorlieben und Wünschen abhängig. Daher prägen sie den Entscheidungsprozess stärker als spezielle technische Elemente von Lösungsmethoden, die der Entscheider womöglich nicht benennen kann.

Diese (**lösungstechnischen**) **Informationen**, die im Lösungsprozess von der Lösungsmethode abgefragt werden und vom Lösungskonzept der verwendeten Methode abhängen, wie z.B. Schranken, Referenzpunkte oder Trade-Offs, könnten auch unter die Entscheider-Präferenzen gezählt werden. Jedoch ist nicht zu erwarten, dass jeder Entscheider alle von möglichen Lösungsmethoden geforderten Informationen beliebig beisteuern kann. Der Entscheider hat bei solchen Informationen keine wirkliche Wahlalternative zwischen unterschiedlichen Arten derartiger technischer Informationen.

Die Vollständigkeit der angegebenen **Dimensionen der Entscheidungssituation** hängt davon ab, ob alle die Entscheidungssituation charakterisierenden Eigenschaften identifiziert wurden. Eine Analyse von Wirkungshypothesen zu psychographischen Werbewirkungen erlaubt die Aufdeckung weiterer, zu berücksichtigender Dimensionen.

⁷⁵ Vgl. Abschnitt 2.1, S. 13.

Die **Zuordnung** einzelner Aspekte zu den Entscheider-Präferenzen bzw. den Rahmenbedingungen ist nicht eindeutig und hängt von der Entscheidungssituation ab. Genießt der Entscheider ein hohes Maß an Entscheidungsfreiheit, so dass er z.B. über die Werbebudgethöhe oder andere Restriktionen selbst entscheiden kann, so fallen derartige Restriktionen auch unter die Entscheider-Präferenzen. Wird jedoch z.B. das Werbebudget im Rahmen eines Top-Down-Planungsansatzes durch eine hierarchisch übergeordnete Entscheidungsebene festgelegt, dann fallen derartige Restriktionen unter die Rahmenbedingungen.

Die Entscheider-Präferenzen wirken sich z.T. auf die Rahmenbedingungen aus. So bestimmt die Wahl der Werbeziele die Ausprägungen in den Dimensionen Werbeobjekt und Werbewirkungsklasse. Erst wenn der Entscheider die zu bewerbenden Objekte durch Benennung der Werbeziele festlegt, stehen die Rahmenbedingungen in diesen Dimensionen fest. Ähnlich verhält es sich mit dem Budget. Dies bedeutet, dass die Rahmenbedingungen teilweise von den Entscheider-Präferenzen abhängen und daher im Prozess nach den Entscheider-Präferenzen abzuarbeiten sind. In Abbildung 5.1 ist dies mit dem kleinen, horizontalen Pfeil angedeutet.⁷⁶ Eine Abhängigkeit unter den **Kategorien der Entscheider-Präferenzen** (Werbeziele, Werbeinstrumente, Restriktionen, Optimierungsart und Mitarbeit) existiert im Allgemeinen nicht. Jedoch sind Entscheidungssituationen denkbar, in denen sich eine Reihenfolge des Abarbeitens aufgrund des Wissens und der Erfahrung des Entscheiders einstellt. Es gibt aber i.d.R. aufgrund elementarer Überlegungen eine „natürliche“ Reihenfolge unter den Elementen Werbeziele, Werbeinstrumente und Restriktionen bei ihrer sukzessiven Festlegung. Zunächst werden die Werbeziele festgelegt. Dann können die Werbeinstrumente, die die Ziele beeinflussen, identifiziert und aus diesen die gewünschten Werbeinstrumente ausgewählt werden. Danach werden mögliche, einzuhaltende Restriktionen formuliert.⁷⁷ Derartige Reihenfolge-Überlegungen spiegeln jedoch den Standardfall wider, für den beliebig viele Ausnahmen existieren.

Interessanter ist die Frage nach einer Reihenfolge unter den **Dimensionen der Entscheidungssituation**, d.h. den Rahmenbedingungen. Es sind Entscheidungssituationen vorstellbar, in denen die Ausprägungen der Dimensionen zu einer Situation führen, für die anscheinend keine plausible Wirkungsfunktion existiert. Unter der Annahme,

⁷⁶ Eine Abhängigkeit der Entscheider-Präferenzen von den Rahmenbedingungen ist in dem Fall denkbar, in dem gewisse Rahmenbedingungen die Entscheider-Präferenzen wesentlich beeinflussen. Dies bedeutet aber, dass der Entscheider in seiner Rolle als Entscheidungsträger eingeschränkt wird und ihm seine Handlungsmöglichkeiten genommen werden.

⁷⁷ Diese idealtypische Reihenfolge für die Formulierung von Wirkungsmodellen findet sich z.B. in Rahders (1989).

dass in einer Entscheidungssituation die Wirkungsfunktion eine konstante Elastizität für die Werbeinstrumente (und damit eine verschwindende Elastizitätsinteraktion) aufweisen soll, kann z.B. keine Wirkungsfunktion mit einem Übersättigungsverlauf gefunden werden, vgl. Tabelle 3.1. Um eine solche Situation z.B. durch eine Priorisierung der Dimensionen zu lösen, ist (wieder) die Mitwirkung des Entscheiders als übergeordnete, bewertende Instanz notwendig.

Die hier zur Strukturierung des Planungsproblems eingeführten Dimensionen können zur **Bewertung der Plausibilität** von Werbewirkungsfunktionen herangezogen werden. Grundsätzlich ist eine rein deduktive **Ableitung von Eigenschaften** der Werbewirkungsfunktionen mittels elementarer Logiküberlegungen möglich. Sie ist aber nicht ausreichend geeignet zur umfassenden, widerspruchsfreien Bestimmung von Werbewirkungsfunktionen, denn empirische Ergebnisse stehen z.T. im Widerspruch zu den theoretischen Überlegungen. Dies stellt schon Depluet fest.⁷⁸ Eine **Analyse von Wirkungshypothesen über psychographische Werbewirkungen** aus der **Literatur**, kombiniert mit **Ergebnissen der empirischen Forschung**, erlaubt dagegen eine fundiertere Ableitung von Werbewirkungsfunktionen und der Eigenschaften, die diese in einer vorliegenden Entscheidungssituation zur Werbemixplanung aufweisen müssen. Die Prozessstrukturierungshilfe zeigt durch die vorgeschlagene Systematisierung der Rahmenbedingungen in Form von Dimensionen eine **systematische Herangehensweise** an diese Aufgabe auf, dargestellt in Abbildung 5.2.

Stehen in einem ersten Schritt nach einer **Analyse** der Entscheidungssituation die charakterisierenden Elemente, d.h. die explizit zu beachtenden **Dimensionen** und deren mögliche Ausprägungen für eine Entscheidungssituation fest, so können auf die Entscheidungssituation passende **Wirkungshypothesen** und **empirische Befunde** über die zu verfolgenden, psychographischen Werbewirkungen sowie deren Verknüpfung mit den einzusetzenden Werbeinstrumenten in einem zweiten Schritt in der Literatur gefunden und analysiert werden. Dies ermöglicht dann ein darauf folgendes **Aufstellen von Ableitungsregeln (Plausibilitätsüberlegungen) für die Eigenschaften der Werbewirkungsfunktionen** aus den in der Entscheidungssituation vorliegenden Ausprägungen der Dimensionen.

⁷⁸ Vgl. Depluet (1991), S. 162.

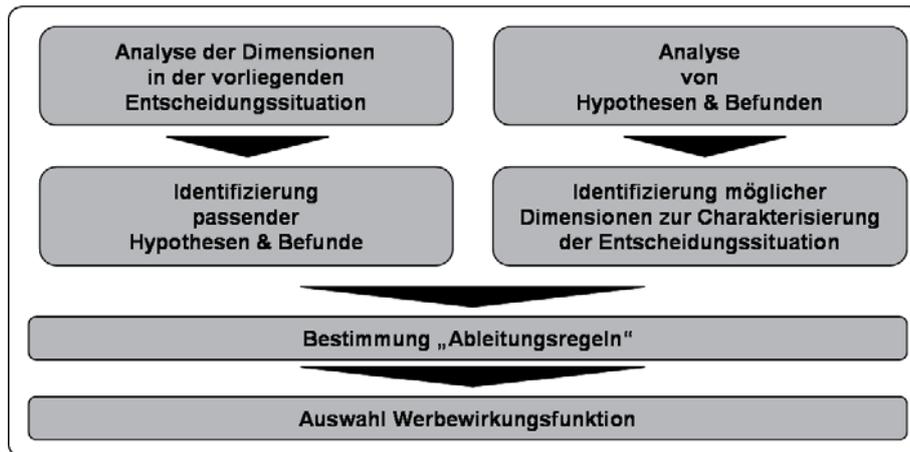


Abbildung 5.2: Bestimmung von Werbewirkungsfunktionen und ihrer Eigenschaften durch Analyse von Dimensionen und Wirkungshypothesen in einer Entscheidungssituation

Anhand der bereits erwähnten Hypothese über die ökonomische Wirkungsgröße *Marktanteil*⁷⁹ sei diese systematische Herangehensweise verdeutlicht. Wurde im ersten Schritt die Größe Marktanteil als eine die vorliegende Entscheidungssituation prägende Dimension identifiziert, so gilt es in einem zweiten Schritt in der Literatur passende Wirkungshypothesen (z.B. die obige Marktanteil-Hypothese) und empirische Befunde über den Marktanteil aufzufinden. Eine Analyse der derartiger Hypothesen – die obige Hypothese sei exemplarisch dafür ausgewählt – deckt dann die Verbindung zwischen der Höhe des Marktanteils und der Budgetelastizität der Wirkungsfunktion auf sowie die möglichen Ausprägungen der Dimension, nämlich hoch vs. niedrig.

Aus der obigen Marktanteil-Hypothese könnte damit in einem dritten Schritt folgende Regel zur Bestimmung plausibler Werbebudget-Marktanteil-Wirkungsfunktionen abgeleitet werden: In Entscheidungssituationen, die u.a. durch die Marktanteilshöhe des zu bewerbenden Werbezielobjektes charakterisiert werden, sind für Werbebudget-Marktanteil-Wirkungszusammenhänge Funktionstypen anzusetzen, die mit steigendem Marktanteil eine geringere Budgetelastizität aufweisen.⁸⁰ Wirkungsfunktionen, die die Eigenschaft der Iso-Elastizität aufweisen, sind somit im letzten Schritt bei der Auswahl

⁷⁹ Die Hypothese besagt, dass die Elastizität der Werbebudget-Marktanteil-Wirkungsfunktion abhängig vom erzielten Marktanteil ist und somit die (absolute) Budgetelastizität umso geringer ist, je höher der Marktanteil ausfällt. Vgl. Cooper/Nakanishi (1990), Guadagni/Little (1983) und Depluët (1991).

⁸⁰ Tellis (2004) listet weitere aus der Marketing-Literatur bekannte Hypothesen und empirische Befunde zur Werbebudgetelastizität für den Wirkungszusammenhang zwischen *Werbung* und den ökonomischen Zielen *Marktanteil* und *Absatz* auf. Aus diesen können weitere Dimensionen zur Charakterisierung von Entscheidungssituationen und Plausibilitätsüberlegungen zum funktionalen Wirkungszusammenhang entwickelt werden. Der Autor zeigt z.B. Ergebnisse zur Abhängigkeit der Werbebudgetelastizität von der *Produktsegmentierung* oder dem *Produktalter* auf.

an möglichen Wirkungsfunktionstypen auszuschließen.

Ist der Ansatzpunkt die **Analyse von Befunden** der empirischen Forschung oder Wirkungshypothesen, so offenbart diese die **Existenz** möglicher **Dimensionen** und deren Ausprägungen, die in Entscheidungssituationen berücksichtigt werden können bzw. müssen. Geht man diesmal im ersten Schritt von der Analyse obiger Marktanteil-Hypothese aus, so ist der Marktanteil die strukturierende Größe, die als die vorliegende Entscheidungssituation charakterisierende Dimension angesetzt werden kann.

Die Analyse von Wirkungshypothesen und Befunden der empirischen Forschung hinsichtlich der Ausprägungen von Dimensionen offenbart so den Einfluss der Dimension auf den Wirkungszusammenhang der (psychographischen) Werbewirkungen. Die kombinierte Analyse von Dimensionen und Hypothesen bzw. Befunden erlaubt dann das Aufstellen allgemeiner Ableitungsregeln bzw. Plausibilitätsüberlegungen für Werbewirkungen und daraus die Auswahl plausibler Werbewirkungsfunktionen. Dies kommt einer deduktiven Ableitung von Werbewirkungsfunktionen, deren Plausibilitätsüberlegungen auf Ergebnissen der Forschung beruhen, gleich.

Für psychographische Werbewirkungen kann exemplarisch eine Hypothese zu kognitiv-geprägten Einstellungsbildungen bei hohem Involvement der Adressaten der Werbung in Abhängigkeit der Anzahl der Werbekontakte angeführt werden: Mit geringer, aber steigender Anzahl von Werbekontakten nehmen positive Einstellungen zu, ab einer höheren Anzahl von Werbekontakten nehmen positive Einstellungen aufgrund von Ermüdungserscheinungen bei den Adressaten ab.⁸¹ Als Dimension lässt sich das *Involvement* der Adressaten identifizieren und für Wirkungsfunktionen kognitiv-geprägter Einstellungen bei hohem Involvement sollten Funktionstypen mit einem Übersättigungsverlauf angesetzt werden.

Huber (1989) findet durch Auswertung empirischer Daten für den Zusammenhang zwischen Werbeausgaben und der psychographischen Werbewirkung *gestützte Werbeerinnerung* für bestimmte Produktbereiche einen degressiv-konkaven Verlauf. Damit könnte eine Dimension *Produktbereich* berücksichtigt werden.

Ein „Baukasten“ an – Entscheidungssituationen charakterisierenden – Dimensionen, deren Ausprägungen und mögliche Ableitungsregeln lässt sich für die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit den obigen exemplarisch auf-

⁸¹ Eine Erklärung dieser Hypothese, die sich aus dem Elaboration-Likelihood-Modell von Petty/Cacioppo (1986) ableiten lässt, findet sich in Cacioppo/Petty (1985). Eine alternative Erklärung bietet Berlyne (1970) mit der Zwei-Faktoren-Theorie. In Steffenhagen (2000), S. 163ff., erfolgt eine ausführliche Diskussion dieser Hypothese, die empirisch nicht immer bestätigt werden konnte.

geführten Hypothesen und empirischen Befunden nicht aufstellen, da diese entweder eine ökonomische Zielgröße betrachten oder auf der Mikroebene gültig sind sowie ein pauschales Werbebudget als Instrument verwenden.

Das Auffinden von Wirkungshypothesen und empirischen Befunden zu psychographischen Werbewirkungen in Abhängigkeit verschiedener Werbeinstrumente und die Anwendung der vorgeschlagenen systematischen Herangehensweise darauf, ist in weitergehenden Forschungsaktivitäten in Form einer Literaturstudie noch zu erbringen.

Für das einzelne ökonomische Marketing-Ziel *Absatz* in Abhängigkeit der Marketing-Instrumente *Absatzförderung* und *Preis* hat Depluet (1991) diesen Ansatz teilweise verfolgt und plausible Preis-Absatz- bzw. Budget-Absatz-Wirkungsfunktionen aus empirischen Befunden abgeleitet. Ein Rückschluss auf eine Systematisierung der Rahmenbedingungen in Form der hier vorgestellten Dimensionen, die Einbeziehung der Entscheider-Präferenzen, die Strukturierung des Entscheidungsprozesses und die Systematisierung möglicher, fortführender Forschung erfolgte jedoch nicht. Ebenfalls neu an der hier vorgestellten Prozessstrukturierungshilfe ist die Schlussfolgerung bzw. die deutliche Hervorhebung, dass die Strukturierungen einzelner Hypothesen, wie z.B. niedriger vs. hoher Marktanteil, und z.T. die einzelnen Logiküberlegungen lediglich unterschiedliche Ausprägungen der Rahmenbedingungen in der betrachteten Entscheidungssituation widerspiegeln.

6 Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung

6.1 Systematisierung relevanter Werbemixentscheidungen

Die betriebswirtschaftliche Theorie strebt im Zusammenhang mit der Verwendung von Optimierungsmodellen u.a. danach, allgemeingültige Optimalitätsaussagen für Entscheidungssituationen aufzufinden. Es wird die Zielsetzung verfolgt, aus einem für eine (möglichst) allgemeine Entscheidungssituation erzeugten Optimierungsmodell **Aussagen über optimale Handlungen** in der betrachteten Situation durch analytische und/oder logische Schlussfolgerungen abzuleiten.

Optimalitätstheoreme stellen einen wesentlichen Bestandteil der wirtschaftswissenschaftlichen Theorie dar. Sie erlauben Aussagen über die Bedingungen, unter denen eine Lösung optimal ist, oder sie erleichtern es, eine fallspezifische Entscheidungsregel als unmittelbare Handlungsempfehlung für eine betrachtete Entscheidungssituation abzuleiten.¹

Auch eine ökonomisch-orientierte, d.h. auf Effektivität und Effizienz ausgerichtete Werbemixplanung bei *psychographischer* Zielsetzung muss nicht auf eine ökonomische Theorie und die Herleitung allgemeiner Optimalitätstheoreme verzichten. In Steffenhagen (2006a) und Steffenhagen (2006b) wird dies für die ökonomische Werbemixplanung bei *einfacher*, psychographischer Zielsetzung aufgezeigt.

Zur Verdeutlichung der Problematik und als Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen sei zunächst in Abschnitt 6.2 ein Beispiel für die ökonomische Theorie der

¹ Eine umfangreiche Übersicht über Optimalitätstheoreme zu Marketing-Entscheidungen bietet Steffenhagen (2008), S. 211ff.

Werbemixplanung aus beiden obigen Quellen aufgeführt.

Die Überlegungen münden dann in die **Fragestellung** (und deren Beantwortung), ob eine ökonomische Optimalitätstheorie, wie sie für die Werbemixplanung bei *einfacher*, psychographischer Zielsetzung existiert, auch für eine Werbemixplanung bei *mehrfacher*, psychographischer Zielsetzung entwickelt werden kann, und welche Gestalt und Eigenschaften mögliche Optimalitätstheoreme aufweisen.

| | | Restriktion(en) | |
|--------------|---------|-----------------|---------------|
| | | höchstens eine | mehr als eine |
| Werbeziel(e) | ein | ① | ③ |
| | mehrere | ② | ④ |

Diagramm zur Werbemixentscheidung unterschiedlicher Komplexität. Ein 2x2-Matrix-Diagramm mit den Achsen 'Werbeziel(e)' (ein/mehrere) und 'Restriktion(en)' (höchstens eine/mehr als eine). Die Zellen sind mit den Nummern ①, ②, ③ und ④ beschriftet. Gestrichelte Pfeile verbinden ② mit ③ und ④ mit ③.

Abbildung 6.1: Werbemixentscheidungen unterschiedlicher Komplexität

Werbemixentscheidungen bei **einfacher** bzw. **mehrfacher Zielsetzung** unter **einer** bzw. **mehreren einzuhaltenden Restriktionen** stellen verschiedene Situationen der Werbemixplanung dar, aus denen ein Werbemix hervorgehen kann. Sie weisen wesentliche Komplexitätsunterschiede auf, die unterschiedliche **Einstiege** in die analytische Auseinandersetzung mit dem vorliegenden Allokationsproblem und der Herleitung von Optimalitätstheoremen fordern. In Abbildung 6.1 sind die vier in den nachfolgenden Abschnitten behandelten Situationen aufgezeigt, aus denen ein Werbemix hervorgehen kann. Die **Systematisierung** greift als Unterscheidungsmerkmale die **Anzahl der Werbeziele** und **Restriktionen** auf.

Feld 1 aus Abbildung 6.1 umfasst die in der Literatur am häufigsten behandelte Entscheidungssituation mit **einem zu verfolgenden Werbeziel unter (höchstens) einer (Werbebudget-)Restriktion**. Dies entspricht dem Fall einer etatbezogenen Werbemixaufgabe, in der das Werbebudget im Rahmen eines Top-Down-Planungsansatzes durch eine hierarchisch übergeordnete Entscheidungsebene unter Verfolgung der übergeordneten marketing- und kommunikationspolitischen Ziele der Unternehmung vorab bestimmt wurde und als Restriktion bei den Planungsaktivitäten zur Bestimmung des Werbemix einzubeziehen ist.²

² In Steffenhagen (2006a) und Steffenhagen (2006b) erfolgt eine Spezialisierung auf diese Planungssituation unter Berücksichtigung der Zielerreichungsarten der Satisfizierung und Extremierung.

Feld 2 kennzeichnet die erweiterte Situation der Werbemixplanung, in der **mindestens zwei Ziele** unter Wahrung (**höchstens**) **einer (Werbebudget-)Restriktion** verfolgt werden sollen. Die Annahme, dass ein Entscheider lediglich ein einziges Ziel optimieren möchte, entspricht häufig nicht den Gegebenheiten einer realen Entscheidungssituation, in der mehrere Ziele und deren Erfüllung um beschränkte Ressourcen konkurrieren.³

Feld 3 erweitert die Situationen aus Feld 1 um **weitere Restriktionen**, die z.B. für einzelne oder Kombinationen einzelner Werbeinstrumente gelten und umweltbedingt sind, wie im Falle beschränkt möglicher Belegung von Werbeträgern aufgrund deren hoher Auslastung.⁴

Feld 4 beinhaltet die Situationen, in denen die **Anzahl der Werbeziele und Restriktionen nicht begrenzt** ist. Solche Situationen erwachsen aus der Notwendigkeit, dass bei der Verfolgung mehrerer Ziele diese häufig nicht an einem einheitlichen Maßstab zu vergleichen sind, so dass bestimmte Ziele als Restriktionen in die betreffende Planungssituation eingehen müssen.⁵

Die gestrichelten *Pfeile* in Abbildung 6.1 stehen für den Umstand, dass Entscheidungsmodelle zu Werbemixaufgaben⁶ aus Feld 2 und 4 in Entscheidungsmodelle des Feldes 3 transformiert werden können,⁷ indem MODM-Lösungsmethoden mit einem Skalarisationsansatz angewendet werden.⁸ Dahinter steht die Idee, gängige MODM-Lösungsmethoden zur Herleitung von Optimalitätstheoremen zu Werbemixaufgaben der Felder 2 und 4 heranzuziehen.

6.2 Optimalitätstheoreme bei einfacher psychographischer Zielsetzung

Betrachtet sei die Entscheidungssituation in der ein Entscheider nur *eine* psychographische Werbezielart für *ein* Werbeobjekt in *einer* Zielgruppe, in *einer* Entscheidungsperiode mittels *mindestens* n Werbeinstrumenten mit $n \geq 2$ *maximieren* will unter *einer*

³ Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 133.

⁴ Vgl. Bruhn (2005), S. 312.

⁵ Vgl. Rahders (1989), S. 262.

⁶ Dies sind Probleme der Form P_{MODM} , vgl. Definition 4.1, S. 54.

⁷ Dies sind Probleme der Form P_{Skalar} , vgl. Definition 4.12, S. 63.

⁸ Vgl. Unterabschnitt 6.3.3, S. 112.

Werbekbudgetrestriktion mit Budgethöhe B aber *ohne* Berücksichtigung konkurrenzbezogener und dynamischer Effekte (Feld 1 aus Abbildung 6.1). Die Aktivitätsniveaus x_i der Werbeinstrumente seien in Geldeinheiten operationalisiert. Das zugehörige Entscheidungsmodell P_{Single} mit einfacher Zielsetzung für diese Werbemixaufgabe lautet dann:⁹

$$\max_{\vec{x} \in X} f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0 \right\} \quad (6.1)$$

wobei $f(\vec{x})$ die polyinstrumentale Werbewirkungsfunktion bzw. Zielfunktion repräsentiert. Bei analytischer Bestimmung der Optimallösung \vec{x}^* dieses Problems, d.h. derjenigen Verteilung des Budgets B auf die Werbeinstrumente i , die $f(\vec{x})$ maximiert, ist die Art der gefundenen Optimallösung (lokal oder global) entscheidend für die Effektivitäts- und Effizienzbetrachtungen.

Nach der Theorie der NLP ist eine gefundene Lösung \vec{x}^* eines regulären Minimierungsproblems¹⁰ global optimal, falls die Zielfunktion und die Restriktionen des Entscheidungsmodelles konvex oder falls die Zielfunktion pseudokonvex und die Restriktionen quasikonvex sind. Andernfalls ist die Lösung nur lokal optimal.¹¹

Ein zulässiger Werbemix \vec{x}^* , der lokal optimal ist, ist **nur** in einer Umgebung $U_\delta(\vec{x}^*)$ effektiv, da das betrachtete Werbeziel bestmöglich in $X \cap U_\delta(\vec{x}^*)$ erreicht wird. Er ist zudem auch **nur** in $X \cap U_\delta(\vec{x}^*)$ effizient, da mit dem durch \vec{x}^* gegebenen Werbebudget $B^* = \sum_{i=1}^n x_i^*$ nicht zielwirksamer in der Umgebung umgegangen werden kann. Für einen zulässigen Werbemix \vec{x}^* , der global optimal ist, gilt diese Überlegung für den **gesamten zulässigen Bereich X** .

Sind die Zielfunktion $f(\vec{x})$ und die Restriktion differenzierbar, so lässt sich obige Optimierungsaufgabe (6.1), d.h. P_{Single} , durch den **Lagrange-Multiplikatoren-Ansatz**¹²

⁹ Vgl. auch Definitionen 4.2 und 4.1.

¹⁰ Das Maximierungsproblem (6.1) kann nach Gleichung (4.2), S. 55 in ein Minimierungsproblem überführt werden.

¹¹ Vgl. Horst (1979), S. 191f. Eine Funktion ist konvex, falls die Verbindungsstrecke zweier Punkte ihres Graphen nirgends unterhalb des Graphen verläuft (vgl. Horst (1979), S. 47). Zur Behandlung von NLP-Problemen werden nicht immer alle Eigenschaften von konvexen Funktionen benötigt. Pseudokonvexe bzw. quasikonvexe Funktionen stellen Klassen von Funktionen dar, die lediglich einen Teil der nützlichen Eigenschaften konvexer Funktionen aufweisen, die aber ausreichend sind, um eine hinreichende Bedingung für eine globale Optimallösung zu formulieren, vgl. dazu Horst (1979), S. 54ff. Ein Optimierungsproblem P_{Single} ist regulär, falls es nicht degeneriert ist, d.h. falls eine von mehreren möglichen Regularitätsbedingungen (eng.: „constraint qualifications“) erfüllt ist (vgl. z.B. Elster et al. (1977), S. 155ff.). Das Problem ist degeneriert, falls für die notwendige Bedingung die Eigenschaften der Funktion $f(\vec{x})$ keine Rolle spielen und nur die Geometrie der Nebenbedingungen relevant ist.

¹² Der Lagrange-Multiplikatoren-Ansatz bietet lediglich die Möglichkeit zur Betrachtung von Gleichungsrestriktionen. Für Ungleichungsrestriktionen ist die Verallgemeinerung in Form der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen anzusetzen, vgl. z.B. Meyberg/Vachenauer (1999), S. 409 oder Horst (1979), S. 188.

oder mit Hilfe der **Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen**¹³ analytisch lösen.

Im Falle des Lagrange-Multiplikatoren-Ansatzes wird aus der Ungleichheitsrestriktion die Gleichheitsrestriktion $\sum_{i=1}^n x_i = B$ und mit der Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \lambda) := f(\vec{x}) + \lambda \cdot (B - \sum_{i=1}^n x_i)$ gelten in der Optimallösung \vec{x}^* und λ^* die Bedingungen $\frac{\partial L(\vec{x}, \lambda)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$ und $\frac{\partial L(\vec{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$. Daraus folgt nach Steffenhagen (2006b) ein **erstes Optimalitätstheorem**:

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \lambda^* \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \wedge \quad B - \sum_{i=1}^n x_i^* = 0 \quad (6.2)$$

Setzt man für ein Maximierungsproblem eine (streng) konkave (bzw. für ein Minimierungsproblem eine (streng) konvexe) Zielfunktion $f(\vec{x})$ voraus, so hat man auch ohne die Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung zu prüfen das globale Optimum gefunden und es folgt:

Im gesuchten optimalen Werbemix \vec{x}^ sind die Grenzwirkungen $\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$ der Aktivitätsniveaus x_i eingesetzter Werbeinstrumente gleich (und gleich λ^*). Sie verkörpern mit λ^* den Wert („Schattenpreis“) einer über das Werbebudget hinaus fiktiv einsetzbaren Geldeinheit, der dem Werbetreibenden in Folge der Budgetrestriktion entgeht.¹⁴*

(in Anlehnung an Steffenhagen (2006b), S. 211)

Verwendet man die (partiellen) Elastizitäten ϵ_{x_i} bzgl. der einzelnen Werbeinstrumente nach Definition 3.2, d.h. $\epsilon_{x_i} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\vec{x})}$, zur Umformulierung der ersten Gleichung aus (6.2), so folgt für die Aktivitätsniveaus zweier Werbeinstrumente i und j ein **zweites Optimalitätstheorem**:

$$\epsilon_{x_i} \cdot \frac{f(\vec{x}^*)}{x_i^*} = \lambda^* \quad \wedge \quad \epsilon_{x_j} \cdot \frac{f(\vec{x}^*)}{x_j^*} = \lambda^* \quad \Rightarrow \quad \frac{x_i^*}{x_j^*} = \frac{\epsilon_{x_i}}{\epsilon_{x_j}} \quad (6.3)$$

mit folgender Bedeutung:

Im gesuchten optimalen Werbemix \vec{x}^ ist das Verhältnis $\frac{x_i^*}{x_j^*}$ der instrumentellen Aktivitätsniveaus gleich dem Verhältnis $\frac{\epsilon_{x_i}}{\epsilon_{x_j}}$ der dort geltenden partiellen*

¹³ Im Folgenden werden diese als Kuhn-Tucker-Bedingungen bzw. als KTB verkürzt bezeichnet. Zur Theorie der Kuhn-Tucker-Bedingungen vgl. Kuhn/Tucker (1951), Horst (1979) oder Elster et al. (1977).

¹⁴ Erwähnenswert ist, dass der Lagrange-Multiplikator bei Gleichungsrestriktionen (wie sie beim Lagrange-Ansatz vorliegen) keinerlei Vorzeichenbeschränkung unterliegt. Das Vorzeichen des Multiplikators ist dadurch bestimmt, ob man sich auf dem steigenden oder fallenden Funktionsast der Optimallösung nähert. Vgl. Horst/Hoang (1990), S. 192.

Elastizitäten der Zielvariablen in Bezug auf die Höhe dieser instrumentellen Aktivitätsniveaus. (in Anlehnung an Steffenhagen (2006b), S. 212)

Wird dieses zweite Theorem kombiniert mit der letzten Gleichung aus (6.2), der Werbebudgetrestriktion, so findet man ein **drittes Optimalitätstheorem**:

$$x_i^* = \frac{\epsilon_{x_i}}{\sum_{k=1}^n \epsilon_{x_k}} \cdot B \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (6.4)$$

mit folgender Bedeutung:

Im optimalen Werbemix \vec{x}^ entfällt auf das jeweils einzubeziehende Werbeinstrument anteilig jener Teil des vorgegebenen Werbebudgets B , der der Höhe des Verhältnisses der betreffenden, partiellen Werbewirkungselastizitäten zur Summe der partiellen Elastizitäten entspricht.*

(in Anlehnung an Steffenhagen (2006b), S. 212)

Diese drei für die ökonomische Werbemixplanung bei *einfacher*, psychographischer Zielsetzung hergeleiteten Theoreme entsprechen nach Steffenhagen (2006b) den Erkenntnissen des Dorfman-Steiner-Theorems bzw. denen aus Morey/McCann (1983), was ebenfalls nach Steffenhagen (2006b) nicht überrascht, denn die hier betrachtete Zielfunktion $f(\vec{x})$ bleibt in ihrer konkreten mathematischen Definition und insbesondere in ihrer betriebswirtschaftlichen Bedeutung unbestimmt. Da es für die marginalanalytischen Überlegungen unerheblich ist, ob die Wirkungsfunktion $f(\vec{x})$ einen ökonomischen oder außerökonomischen Wirkungszusammenhang formalisiert, stellen sich die gleichen Ergebnisse ein. Obige Überlegungen zeigen jedoch, dass sich marginalanalytische Ansätze der Mikroökonomie von der dort ausschließlich betrachteten monetären Zielsetzung auf eine psychographische Zielsetzung übertragen lassen.¹⁵

Nach Steffenhagen (2006b) zeigt sich der ökonomische Charakter obiger Überlegungen in Effektivitäts- und Effizienzbetrachtungen, denn aus der der Marginalanalyse zugrunde liegenden Optimierungsart der Extremierung folgt automatisch die **Effektivität** der gefundenen Lösung (weil \vec{x}^* die Optimallösung und damit bestmöglich ist), und die **Effizienz** der Lösung folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung (bei strenger Konvexität¹⁶).

Die entscheidende Frage, die sich nun stellt, ist: Können derartige ökonomische Optimalitätsaussagen, wie sie für die Werbemixplanung bei *einfacher*, psychographischer

¹⁵ Vgl. Steffenhagen (2006b), S. 212.

¹⁶ Vgl. Elster et al. (1977), S. 74f.

Zielsetzung aufgestellt wurden, auch für eine Werbemixplanung bei *mehrfacher*, psychographischer Zielsetzung entwickelt werden?

6.3 Optimalitätstheoreme bei mehrfacher psychographischer Zielsetzung

Betrachtet sei nun die Entscheidungssituation in der ein Entscheider *mehrere* psychographische Werbezielarten für *ein* Werbeobjekt in *einer* Zielgruppe, in *einer* Entscheidungsperiode mittels mindestens n Werbeinstrumenten mit $n \geq 2$ *maximieren* will unter *einer* Werbebudgetrestriktion B aber *ohne* Berücksichtigung konkurrenzbezogener und dynamischer Effekte (Feld 2 in Abbildung 6.1). Die Aktivitätsniveaus x_i der Werbeinstrumente seien in Geldeinheiten operationalisiert.

Das zugehörige mathematische Entscheidungsproblem ist mit P_{MODM} nach Definition 4.1 gegeben und besitzt für die Entscheidungssituation folgende konkrete Ausprägung:

$$\max_{\vec{x} \in X} \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0 \right\} \quad (6.5)$$

Der Lagrange-Multiplikator-Ansatz und die Kuhn-Tucker-Bedingungen sind für mehrfache Restriktionen zugänglich, aber bei mehrfacher Zielsetzung nicht direkt anwendbar.¹⁷ Deshalb verfolgt die vorliegende Arbeit den Ansatz, gängige MODM-Lösungsmethoden zur Herleitung von Optimalitätstheoremen für Werbemixaufgaben bei mehrfacher Zielsetzung heranzuziehen.

Zunächst wird für diese Entscheidungssituation eine **isolierte Optimierung mehrerer Werbeziele** unabhängig von der Anzahl der Restriktionen betrachtet, welche einen Spezialfall für Werbemixaufgaben aus den Feldern 2 und 4 darstellt. Diese weist i.d.R. keine einzelne, für alle Werbeziele einheitliche Lösung auf.

Dann erfolgt eine Betrachtung bei Vorliegen mehrfacher Restriktionen und einem einzigen Werbeziel (Feld 3), um danach den Fall mehrfacher Zielsetzungen mit einer oder mehreren Restriktionen, also Entscheidungsproblem P_{MODM} , zu analysieren (Feld 2

¹⁷ Kuhn/Tucker (1951) verwenden zur Lösung von Vektroptimierungsproblemen eine Skalarisationsfunktion in Form einer gewichteten Summe der Zielfunktionen und formulieren zur Bestimmung von zulässigen Lösungen des VOP die Kuhn-Tucker-Bedingungen für diese Skalarisationsfunktion. Vgl. dazu Kuhn/Tucker (1951), S. 487ff.

und 4). Diese Reihenfolge bietet sich an, da Werbemixaufgaben der Felder 2 und 4 auf Aufgaben aus Feld 3 zurückgeführt werden können, wie in Unterabschnitt 6.3.3 gezeigt wird.

6.3.1 Isolierte Betrachtung mehrerer Werbeziele

Die Einstiege zur Werbemixplanung zu Situationen der Felder 2 und 4 enthalten als Spezialfall die **isolierte Optimierung der Werbeziele**. Bei der isolierten Betrachtung, d.h. einer sukzessiven und unabhängigen Optimierung der Ziele in unbestimmter Reihenfolge, also

$$\begin{aligned} & \max_{\vec{x} \in X} && f_1(\vec{x}) \\ & \quad \vdots \\ & \max_{\vec{x} \in X} && f_p(\vec{x}) \\ \text{mit} &&& X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

liefert der Lagrange- bzw. KTB-Ansatz mit einer (Feld 2) oder mehreren Restriktionen (Feld 4) die **individuellen Optimallösungen** $\vec{x}_{f_k}^*$ (vgl. Definition 4.5) der einzelnen Zielfunktionen $f_k(\vec{x}) \forall k = 1, \dots, p$ und die in Abschnitt 6.2 nach Steffenhagen (2006b) abgeleiteten Theoreme (6.2)–(6.4) für die **einzelnen** Werbewirkungsfunktionen $f_k(\vec{x})$.

Im Falle der **perfekten Lösung** \vec{x}^p oder der **idealen (utopischen) Lösung** \vec{x}^u (vgl. Definition 4.6 und 4.7) haben die abgeleiteten allgemeinen Theoreme die in Steffenhagen (2006b) beschriebene Aussagekraft für das betrachtete Werbemixproblem bei mehrfacher Zielsetzung.

Die Existenz der perfekten und idealen Lösung ist jedoch höchst unwahrscheinlich und in der Regel ist von $\vec{x}_{f_1}^* \neq \dots \neq \vec{x}_{f_p}^*$ auszugehen. So weisen die für die isolierte Betrachtung gefundenen allgemeinen Theoreme **für das Mehrfach-Zielsetzungsproblem keine Aussagekraft auf**, da sie für unterschiedliche Optimallösungen gelten.

6.3.2 Mehrfache Restriktionen

Anders sieht es bei Werbemixplanungsaufgaben mit Einfach- oder Mehrfach-Zielsetzungen und mehr als einer Restriktion aus (Feld 3 und 4). Dies sind Aufgaben mit z.B. einer Budget-Restriktion ($\sum_{i=1}^n x_i \leq B$) und Restriktionen für einzelne Werbeinstrumente ($0 \leq a \leq x_i \leq b \in \mathbb{R}_+$), also Entscheidungsmodelle der Form P_{Single} oder P_{MODM} mit einer Anzahl $m > 1$ an Restriktionen.¹⁸ Eine Ableitung allgemeiner Theoreme wie (6.2)–(6.4) ist grundsätzlich möglich. Auf Grund der höheren Anzahl von Lagrange-Multiplikatoren fällt eine sinnvolle, betriebswirtschaftliche Interpretation für das Werbemixproblem allerdings sehr viel schwerer, und die Voraussetzungen, unter denen die Theoreme gültig sind, sind nur schwer zu erfüllen. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für Situationen der Werbemixplanung aus Feld 3, d.h. für Probleme P_{Single} mit $m > 1$. Aufgaben aus den Feldern 2 und 4 können aber bei simultaner Optimierung durch den Einsatz von Skalarisationsmethoden darauf zurückgeführt werden.¹⁹

Für die **Lagrange-Funktion** des Problems P_{Single} gilt dann:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := f(\vec{x}) + \sum_{r=1}^m \lambda_r \cdot g_r(\vec{x}) \quad (6.7)$$

Um keiner Einschränkung auf Gleichheitsbedingungen zu unterliegen, werden als Lösungsansatz diesmal die Kuhn-Tucker-Bedingungen zum Auffinden der Lösung herangezogen. Sind die zu maximierende Zielfunktion (streng) quasikonkav und die Restriktionen konvex, so sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen notwendig und hinreichend für eine globale Optimallösung,²⁰ was im Nachfolgenden unterstellt sei.

Die **Kuhn-Tucker-Bedingungen**, dargestellt mit der Lagrange-Funktion, lauten:²¹

$$\nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0} \quad (6.8)$$

$$\nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \geq \vec{0} \quad (6.9)$$

$$\vec{\lambda} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 0 \quad (6.10)$$

$$\vec{\lambda} \geq \vec{0} \quad (6.11)$$

¹⁸ Vgl. Definition 4.1, S. 54 und Definition 4.3, S. 56.

¹⁹ Vgl. Unterabschnitt 6.3.3, S. 112.

²⁰ Vgl. Takayama (1985), S. 116.

²¹ Vgl. Wismer/Chattergy (1978), S. 83ff. und Elster et al. (1977), S. 149. Es ist: $\vec{\lambda} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \sum_{r=1}^m \lambda_r \cdot g_r(\vec{x}) \cdot \vec{\lambda} \geq \vec{0}$ wird als verkürzte Schreibweise für $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ verwendet.

die in der Optimallösung \vec{x}^* und $\vec{\lambda}^*$ erfüllt sein müssen.

Bei mehr als einer **aktiven Nebenbedingung**²² folgt aus (6.8) $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad (6.12)$$

mit der Indexmenge der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen I_A . Die Indexmenge ist definiert als $I_A = I_A(\vec{x}^*) := \{r \in \{1, \dots, m\} \mid g_r(\vec{x}^*) = 0\}$. Für die Grenzwirkungen $\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$ der Zielfunktion $f(\vec{x})$ von P_{Single} gilt dann ($\forall i = 1, \dots, n$):²³

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = - \sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_i} \quad (6.13)$$

Im Gegensatz zu Theorem (6.2) ergibt sich damit ein sehr viel schwerer zu interpretierendes **erstes Optimalitätstheorem**, da für mehr als einen Lagrange-Multiplikator gelten kann: $\lambda_r^* \neq 0 \forall r \in I_A$. Im Falle *einer* aktiven Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x}) := B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$ und *einer* aktiven Werbeinstrumentrestriktion $g_2(\vec{x}) := b - x_1 \geq 0$ lauten die Grenzwirkungen (im Zwei-Instrumente-Fall mit $n = 2$):²⁴

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_1} = \lambda_1^* + \lambda_2^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_2} = \lambda_1^* \quad (6.14)$$

Die Situation für (6.14) ist schematisch in Abbildung 6.2 dargestellt.²⁵

Das **erste Optimalitätstheorem** (6.13) bzw. im konkreten Fall (6.14) besagt:

Im gesuchten optimalen Werbemix \vec{x}^ sind die Grenzwirkungen $\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$ der Aktivitätsniveaus x_i eingesetzter Werbeinstrumente gleich der Summe der λ_r^* der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen, die das jeweilige Werbeinstrument betreffen. $\sum_{r \in I_A} \lambda_r^*$ verkörpert den Wert einer über das Werbebudget B und der des Werbeinstrumentbudgets b hinaus fiktiv einsetzbaren Geldeinheit, aufgeteilt auf die λ_r^* , der dem Werbetreibenden in Folge der Werbebudget- und/oder Werbeinstrumentrestriktionen entgeht.*

²² Für nicht aktive Nebenbedingungen, also $g_r(\vec{x}) \neq 0$, gilt $\lambda_r^* = 0$, da sonst (6.10) nicht erfüllt sein kann. Dies folgt aus (6.9) und (6.11).

²³ Dies entspricht der aus der NLP bekannten Erkenntnis und der nachfolgenden, geometrischen Interpretation der KTB: Für in (lokalen) Optimallösungen \vec{x}^* reguläre Optimierungsprobleme ist der Gradient der Zielfunktion eine nichtpositive Linearkombination der Gradienten der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen, d.h.: $\nabla f(\vec{x}^*) = - \sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \nabla g_r(\vec{x}^*)$. Vgl. dazu Horst (1979), S. 174.

²⁴ Da $\nabla g_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\nabla g_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

²⁵ Es ist: $X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid g_1(\vec{x}) := B - \sum_{i=1}^2 x_i \geq 0 \quad \wedge \quad g_2(\vec{x}) := b - x_1 \geq 0 \right\}$.

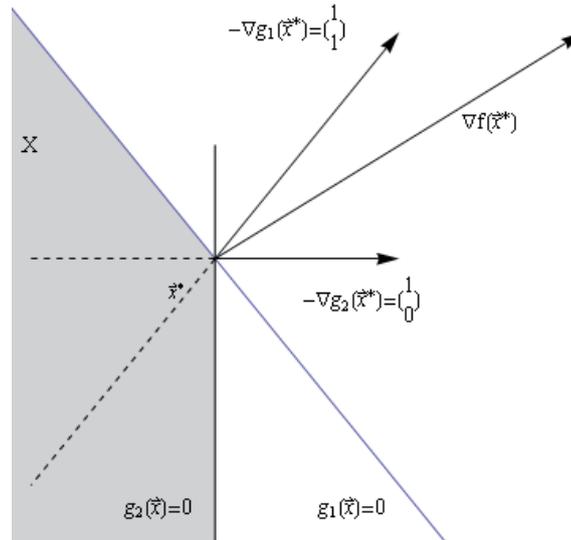


Abbildung 6.2: Der Gradient $\nabla f(\vec{x}^*)$ als negative Linearkombination der Gradienten der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen für eine Werbebudget- und eine Werbeinstrumentrestriktion

Analog zum zweiten Teil von (6.2) ergeben sich aus (6.9) die Restriktionen $g_r(\vec{x}^*) \geq 0$ $\forall r = 1, \dots, m$, d.h. im obigen Zwei-Instrumente-Fall ($n=2$):

$$B - \sum_{i=1}^2 x_i^* \geq 0 \quad \wedge \quad b - x_1^* \geq 0 \quad (6.15)$$

Werden zur Umformulierung die (partiellen) Elastizitäten ϵ_{x_i} von $f(\vec{x})$ bzgl. der einzelnen Werbeinstrumente x_i , d.h. $\epsilon_{x_i} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\vec{x})}$ verwendet, so folgt mit (6.13) das aus (6.3) bekannte **zweite Optimalitätstheorem** zum Verhältnis der instrumentellen Aktivitätsniveaus zweier Werbeinstrumente i und j ($\forall i, j = 1, \dots, n \quad \wedge \quad i \neq j$):

$$\epsilon_{x_i} \cdot \frac{f(\vec{x}^*)}{x_i^*} = - \sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_i^*}{x_j^*} = \frac{\epsilon_{x_i}}{\epsilon_{x_j}} \quad (6.16)$$

allerdings **nur** unter der Voraussetzung, dass $\forall i, j = 1, \dots, n \quad \wedge \quad i \neq j$ gilt:

$$\sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_j} \quad (6.17)$$

die i.d.R. **nicht erfüllt**²⁶ ist! Die Bedingung (6.17) wird mit (6.13) zu

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j} \quad (6.18)$$

Das **zweite Optimalitätstheorem** besagt dann:

Im gesuchten optimalen Werbemix \vec{x}^ ist das Verhältnis $\frac{x_i^*}{x_j^*}$ der instrumentellen Aktivitätsniveaus zweier Werbeinstrumente i und j gleich dem Verhältnis $\frac{\epsilon_{x_i}}{\epsilon_{x_j}}$ der dort geltenden partiellen Elastizitäten der Zielvariablen in Bezug auf die Höhe dieser instrumentellen Aktivitätsniveaus, falls im optimalen Werbemix \vec{x}^* die Grenzwirkungen $\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_j}$ der Werbeinstrumente i und j gleich sind.*

Zur Ableitung eines weiteren Optimalitätstheoremes stehen mehr als eine Restriktion aus (6.9) zur Verfügung. Mit der Werbebudgetrestriktion und dem Verhältnis aus (6.16) gilt $\forall i = 1, \dots, n$:

$$x_i^* \leq \frac{\epsilon_{x_i}}{\sum_{j=1}^n \epsilon_{x_j}} \cdot B \quad (6.19)$$

wiederum **nur** unter der Voraussetzung von (6.17). Die **Gleichheit** gilt im Falle einer **aktiven Werbebudgetrestriktion**. Dieses **dritte Optimalitätstheorem** besagt:

Im optimalen Werbemix \vec{x}^ entfällt auf das jeweils einzubeziehende Werbeinstrument anteilig (höchstens) jener Teil des vorgegebenen Werbebudgets B , welcher der Höhe des Verhältnisses der betreffenden, partiellen Werbewirkungselastizitäten zur Summe der partiellen Elastizitäten entspricht. Erfüllt der optimale Werbemix die Werbebudgetrestriktion genau, so entspricht das Werbeinstrumentbudget genau diesem Verhältnis.*

Die Mehrfach-Restriktionsproblematik sei anhand des folgenden, numerischen Beispiels veranschaulicht.

Beispiel 6.1

Betrachtet sei die Entscheidungssituation, in der ein Entscheider **eine** psychographische Werbezielart für **ein** Werbeobjekt, in **einer** Zielgruppe, in **einer** Entscheidungsperiode mittels **zweier** Werbeinstrumente, deren Aktivitätsniveaus x_1 und x_2 in Geldeinheiten operationalisiert werden, **maximieren** will unter zunächst **einer** Werbebudgetre-

²⁶ Vgl. z.B. die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_j}$ der Restriktionen $B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$ und $b - x_1 \geq 0$ für den Fall, dass beide Restriktionen aktiv sind.

striktion $B - \sum_{i=1}^2 x_i \geq 0$, später zusätzlich mit **einer** Werbeinstrumentrestriktion²⁷ $b - x_1 \geq 0$ aber **ohne** Berücksichtigung konkurrenzbezogener und dynamischer Effekte:

$$\max_{\vec{x} \in X} f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid g_1(\vec{x}) := B - \sum_{i=1}^2 x_i \geq 0 \right\} \quad (6.20)$$

Für das Werbeziel wird eine multiplikative, streng konkave Wirkungsfunktion der Form $f(\vec{x}) = \alpha_0 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$ angesetzt. Die Parameter α_1 und α_2 stellen bei multiplikativen Wirkungsfunktionen die (konstanten) Elastizitäten dar.²⁸ Der multiplikative Funktionstyp unterstellt eine vorhandene Reaktionsinteraktion zwischen den Werbeinstrumenten und wegen der konstanten Elastizitäten eine verschwindende Elastizitätsinteraktion, vgl. Tabelle 3.1 oder Anhang D, S. 228.

Mit einem verfügbaren Werbebudget von $B = 15$ Mio. € und den geschätzten Elastizitäten $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_2 = 0.23$ und $\alpha_0 = 100$ liefert Optimalitätstheorem (6.4) bzw. (6.19), d.h. $x_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot B$, den folgenden, optimalen monetären Werbemix:²⁹

$$x_1^* \approx 5.921 \text{ Mio. €} \quad \text{und} \quad x_2^* \approx 9.079 \text{ Mio. €}$$

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für dieses Entscheidungsproblem

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + 15x_2^{0.23} \cdot x_1^{-0.85} &= 0 & 15 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ -\lambda_1 + 23x_1^{0.15} \cdot x_2^{-0.77} &= 0 & \lambda_1 &\geq 0, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(15 - x_1 - x_2) &= 0 & x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

und ihre Lösung bestätigen dieses Ergebnis:

$$x_1^* \approx 5.92105 \text{ Mio. €} \quad \wedge \quad x_2^* \approx 9.07895 \text{ Mio. €} \quad \text{mit} \quad \lambda_1^* \approx 5.49415$$

wobei λ_1^* der Lagrange-Multiplikator der ersten Restriktion $g_1(\vec{x}^*)$ ist.

Die zusätzliche Werbeinstrumentrestriktion $b - x_1 \geq 0$ mit $b = 3$ Mio. € führt zu der **erweiterten Werbemixaufgabe**

$$\max_{\vec{x} \in X} f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := 3 - x_1 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (6.21)$$

²⁷ Diese Art der Restriktion kann z.B. aus einer Begrenzung der maximal möglichen Belegung eines Werbemediums, wie bei einer monatsweise erscheinenden Zeitschrift, erfolgen. Vgl. Meffert (2002), S. 825f.

²⁸ Vgl. Hruschka (1991), S. 347.

²⁹ Das Beispiel basiert bis hierhin auf dem Beispiel aus Steffenhagen (2006b), S. 213, welches im Folgenden um die Mehrfach-Restriktionen-Problematik erweitert wird.

und zu den Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\begin{aligned} -\lambda_1 - \lambda_2 + 15x_2^{0.23} \cdot x_1^{-0.85} &= 0 & 15 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ -\lambda_1 + 23x_1^{0.15} \cdot x_2^{-0.77} &= 0 & 3 - x_1 &\geq 0 \\ \lambda_1(15 - x_1 - x_2) &= 0 & \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_2(3 - x_1) &= 0 & x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

sowie der Lösung

$$x_1^* = 3.0 \text{ Mio. } \text{€} \quad \wedge \quad x_2^* = 12.0 \text{ Mio. } \text{€} \quad \text{mit} \quad \lambda_1^* \approx 4.00246 \quad \wedge \quad \lambda_2^* \approx 6.43873$$

wobei λ_1^* und λ_2^* die mit der ersten ($g_1(\vec{x}^*)$) bzw. der zweiten Restriktion ($g_2(\vec{x}^*)$) verbundenen Lagrange-Multiplikatoren sind.

Hier sind beide Restriktionen bindend und die Voraussetzung (6.17) bzw. (6.18) ist nicht erfüllt,³⁰ so dass das Optimalitätstheorem (6.19) nicht gültig ist; denn mit der vorliegenden, **aktiven** Werbebudgetrestriktion sollte in (6.19) die Gleichheit gelten: **mit** Restriktion $x_1 \leq b$ ist $x_1^* = 3.0 \neq 5.92105 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot B = x_1^*$ **ohne** die zusätzliche Restriktion.

Die Situation aus Beispiel 6.1 ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Die Abbildung zeigt die Menge der zulässigen Lösungen $X_{ur\,sp}$ (hellgrau), die nur durch die Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x})$ gegeben ist, und die durch die zusätzliche Werbeinstrument-Restriktion $g_2(\vec{x})$ weiter eingeschränkte Lösungsmenge X (dunkelgrau).

Für vorbestimmte f -Niveaus (a^* , $a_{ur\,sp}^*$, b , c und d mit $a^* < a_{ur\,sp}^* < b < c < d$) sind die f -Isoquanten (Höhenlinien) von $f(\vec{x})$ dargestellt.³¹ Sie weisen aufgrund der konkaven Zielfunktion einen konvexen Verlauf auf.

$\vec{x}_{ur\,sp}^*$ bzw. \vec{x}^* sind die globalen Optimallösungen von (6.20) bzw. (6.21), d.h die effektiven und effizienten Werbemixe dieser beiden Werbemixaufgaben. \vec{x}^* liegt auf der Ecke der konvexen Lösungsmenge X durch die die f -Isoquante mit dem höchsten f -Niveau für Lösungen aus X verläuft. In \vec{x}^* ist der Gradient von $f(\vec{x})$ eine negative Linearkombination der Gradienten der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen. $\nabla f(\vec{x}^*)$ steht senkrecht auf (der Tangente) der durch den Punkt \vec{x}^* gehenden Höhenlinie $f(\vec{x}) = a^*$ und zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktionswerte von $f(\vec{x})$. Die Kuhn-Tucker-

³⁰ Es ist $\nabla f(\vec{x}^*) \approx \begin{pmatrix} 10.4412 \\ 4.00246 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$. Die Grenzwirkungen der Werbeinstrumente sind in der Optimallösung ungleich.

³¹ Für $f(\vec{x})$ stellen $f(\vec{x}) = \alpha \in \mathbb{R}$ Hyperflächen dar, die in einer zweidimensionalen Darstellung im (x_2, x_1) -Raum zu Höhenlinien werden.

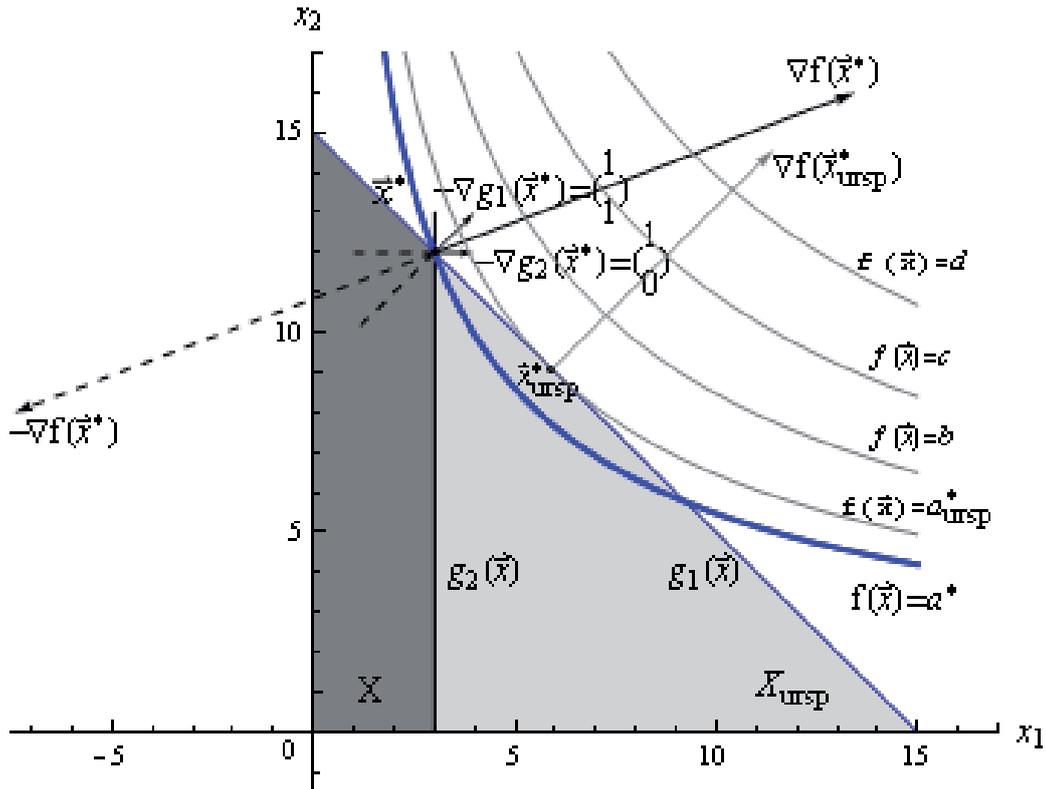


Abbildung 6.3: Der Gradient $\nabla f(\vec{x}^*)$ als Linearkombination der Gradienten der in \vec{x}^* aktiven Restriktionen für den Zwei-Instrumente-Fall aus Beispiel 6.1

Bedingungen sind in diesem Beispiel wegen der zu maximierenden, streng konkaven Zielfunktion und der konvexen Restriktionen notwendig und hinreichend.³² \square

³² Anmerkungen zu Abbildung 6.3:

Es gilt für die Höhenlinien: $d > c > b > a_{ursp}^* > a^*$ und $a^* := f(\vec{x}^*) \approx 208.824$, $a_{ursp}^* := f(\vec{x}_{ursp}^*) \approx 216.195$ mit $\vec{x}^* = (3, 12)^T$ bzw. $\vec{x}_{ursp}^* \approx (5.92105, 9.07895)^T$ aus

$X := \{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \wedge g_2(\vec{x}) := 3 - x_1 \geq 0\}$ bzw.

$X_{ursp} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0\}$.

Für das Werbemixproblem (6.21) ist $\nabla f(\vec{x}^*)$ gegeben durch die negative Linearkombination $-\sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_k}$. Es gilt also im Optimum \vec{x}^* (vgl. (6.13)):

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 15x_2^{0.23}x_1^{-0.85} \\ 23x_1^{0.15}x_2^{-0.77} \end{pmatrix} \wedge \vec{x}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\vec{x}^*) \approx \begin{pmatrix} 10.4412 \\ 4.00246 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$\sum_{r \in I_A} \lambda_r^* \cdot \frac{\partial g_r(\vec{x}^*)}{\partial x_k} = 4.00246 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6.43873 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -10.4412 \\ -4.00246 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Für einen zulässigen Punkt $\vec{x}^0 = (1, 14)^T$ aus X z.B., für den nur $g_1(\vec{x})$ bindend ist, gilt, dass $\nabla f(\vec{x}^0) \approx (27.5233, 3.01446)^T$ keine neg. Linearkombination von $\nabla g_1(\vec{x}^0) = (-1, -1)^T$ ist. Somit kann \vec{x}^0 keine Optimallösung sein.

6.3.3 Simultane Betrachtung mehrerer Werbeziele

Kern des Problems bei der Verfolgung mehrerer Werbeziele (Felder 2 und 4) ist eine **gleichzeitige Optimierung** der Werbeziele unter den gegebenen Restriktionen, d.h. das Auffinden derjenigen Lösung(en), für die die Werbeziele gleichzeitig eine bestmögliche Ausprägungen annehmen. Mehrfach-Zielsetzungsprobleme wie P_{MODM} können, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, auf zwei Weisen angegangen werden: Bewältigung der Aufgabe durch **Skalarisationsmethoden** oder durch **Non-Skalarisationsmethoden**.

Im ersten Fall wird das Mehrfach-Zielsetzungsproblem P_{MODM} in ein Problem mit einer einzelnen Zielfunktion oder in eine Serie derartiger Probleme transformiert.³³ Dabei wird i.d.R. die zulässige Lösungsmenge durch zusätzliche, von den ursprünglichen Zielfunktionen beeinflusste Restriktionen modifiziert.³⁴ Dies überführt Entscheidungsmodelle zu Werbemix-Situationen der Felder 2 und 4 in Modelle aus Feld 3,³⁵ was in Abbildung 6.1 durch die gestrichelten Pfeile angedeutet ist.

Im zweiten Fall wird P_{MODM} in ein verwandtes Mehrfach-Zielsetzungsproblem umgewandelt, das mathematisch handhabbarer ist bzw. andere Optimalitätskonzepte und Hilfsmengen verwendet.³⁶

Weisen die ursprünglichen Zielfunktionen und Nebenbedingungen bestimmte mathematische Eigenschaften auf (z.B. Konvexität) oder werden bestimmte (neue) Bedingungen erfüllt, so entsprechen die (optimalen) Lösungen der Transformationsprobleme den (pareto-optimalen) Lösungen des ursprünglichen Mehrfach-Zielsetzungsproblems.³⁷

6.3.3.1 Skalarisationsansatz

Beim Skalarisationsansatz wird das Problem P_{MODM} durch Verwendung einer Skalarisationsfunktion in P_{Skalar} umgeformt. Hier hängt die Ableitung von allgemeingültigen Theoremen mittels des Lagrange- bzw. Kuhn-Tucker-Ansatzes von den **Eigenschaften** bzw. der **Art der Skalarisationsfunktion** $F(\vec{f}(\vec{x}))$ ab, was stellvertretend anhand der Skalarisationsmethoden „Weighting Method“ und „ ϵ -Constraint-Method“ verdeutlicht sei. Wie die bestehende, sehr umfangreiche (marginal-)analytische Theorie zu diesen

³³ Vgl. Miettinen (1999), S. 62.

³⁴ Vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 677.

³⁵ Ggfs. werden die ursprünglichen Modelle auch in Modelle aus Feld 2 überführt, falls keine neuen Restriktionen hinzukommen.

³⁶ Vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 687.

³⁷ Vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 676 oder Chankong/Haimes (1983), S. 114f.

Methoden³⁸ zeigt, sind diese beiden Methoden für (marginal-)analytische Untersuchungen gut geeignet.

Skalarisationsmethode „Weighting Method“

Die Skalarisationsfunktion F wird als gewichtete Summe der ursprünglichen Zielfunktionen wie folgt definiert:³⁹

$$F(\vec{x}) := \sum_{k=1}^p w_k \cdot f_k(\vec{x}) \quad (6.24)$$

Die Ableitung von Theoremen mittels des Lagrange- bzw. Kuhn-Tucker-Ansatzes ist möglich, falls die Funktionen f_k mathematische Eigenschaften wie z.B. Differenzierbarkeit und Konvexität aufweisen. Da Faktor- und Summenregel derartige Eigenschaften erhalten, gelten diese Eigenschaften auch für $F(\vec{x})$.

Nach der Überführung von P_{MODM} nach P_{Skalar} mit einer Skalarisationsfunktion der Art (6.24) gilt dann für die **Lagrange-Funktion** mit einer einzelnen (Werbefbudget-) Restriktion $B - \sum_{i=1}^n x_i \geq 0$ (Feld 2):

$$L(\vec{x}, \lambda) := F(\vec{x}) + \lambda \cdot (B - \sum_{i=1}^n x_i) \quad (6.25)$$

Die Anwendung der **Kuhn-Tucker-Bedingungen** (6.8)–(6.11) führt dann mit (6.8) für alle Werbeinstrumente $i = 1, \dots, n$ zu

$$\frac{\partial L(\vec{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\vec{x}^*)}{\partial x_i} + \lambda^* \cdot (-1) = 0$$

bzw. zu

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^p w_k \cdot \frac{\partial f_k(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \lambda^* \quad (6.26)$$

und mit (6.9) und (6.10) zu

$$B - \sum_{i=1}^n x_i^* \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda^* \cdot (B - \sum_{i=1}^n x_i^*) = 0 \quad (6.27)$$

wobei die Gleichungen (6.26) und (6.27) nur in der Optimallösung (\vec{x}^*, λ^*) gelten. Also

³⁸ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 113-153.

³⁹ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158, für eine Beschreibung der „Weighting Method“.

folgt aus (6.26) ein **erweitertes erstes Optimalitätstheorem** für eine Werbemixaufgabe mit mehrfacher Zielsetzung und einer Werbebudgetrestriktion:

Im gesuchten optimalen Werbemix \vec{x}^ ist die gewichtete Summe der Grenzwirkungen gleich λ^* , wobei λ^* der Wirkung einer – über das Werbebudget $B = \sum_{i=1}^n x_i^*$ hinaus eingesetzten – Geldeinheit entspricht, die dem Werbetreibenden aufgrund der Budget-Restriktion entgeht. Dies wird zudem ersichtlich aus $\frac{\partial L(\vec{x}^*, \lambda^*)}{\partial B} = \lambda^*$.*

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da die beim Ableiten der Lagrange-Funktion anzuwendenden Faktor- und Summenregeln die bekannten Ergebnisse aus Abschnitt 6.2 auf $F(\vec{x})$ hervorbringen. Es stellt sich jedoch die Frage nach der **betriebswirtschaftlichen Nutzbarkeit** bzw. **Bedeutung** der Skalarisationsfunktion im Kontext der Werbemixplanung. Stellen in einer Entscheidungssituation mit zwei Werbezielen, etwa *Markenbekanntheit* und *Produktkenntnisse*, $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$ den betreffenden funktionalen Wirkungszusammenhang dar, so weist die gewichtete Summe $\sum_{k=1}^2 w_k \cdot f_k(\vec{x})$ dieser Größen keine tatsächliche betriebswirtschaftliche oder psychographische Bedeutung auf. Dies gilt für alle gewichteten Skalarisationsfunktionen, deren einzelne Komponenten unterschiedliche Größenordnungen und/oder Dimensionen aufweisen.

Setzt man die **individuellen, partiellen Elastizitäten** $\epsilon_{x_i}^l$ für das Werbeinstrument i und die Wirkungsfunktion $f_l(\vec{x})$ mit $1 \leq l \leq p$ an, also

$$\epsilon_{x_i}^l := \frac{\partial f_l(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f_l(\vec{x})} \quad (6.28)$$

so folgt mit (6.26) in Form von $\lambda^* = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^p w_k \frac{\partial f_k(\vec{x}^*)}{\partial x_i} + w_l \cdot \frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$

$$\epsilon_{x_i}^l = \frac{\lambda^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^p w_k \frac{\partial f_k(\vec{x}^*)}{\partial x_i}}{w_l} \cdot \frac{x_i^*}{f_l(\vec{x}^*)} \quad (6.29)$$

oder es gilt dann in verkürzter Darstellung mit der Hilfsgröße⁴⁰ $\mathcal{S}_i^l := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^p w_k \frac{\partial f_k(\vec{x}^*)}{\partial x_i}$

$$\epsilon_{x_i}^l = \frac{\lambda^* - \mathcal{S}_i^l}{w_l} \cdot \frac{x_i^*}{f_l(\vec{x}^*)} \quad (6.31)$$

oder in Analogie zu (6.3) bzw. (6.16) umgestellt

$$\epsilon_{x_i}^l \cdot \frac{w_l \cdot f_l(\vec{x}^*)}{x_i^*} = \lambda^* - \mathcal{S}_i^l \quad (6.32)$$

Betrachtet man diese Gleichung für zwei Werbeinstrumente i und j und setzt sie aufgelöst nach $f_l(\vec{x}^*)$ gleich, so gilt für das Verhältnis der Aktivitätsniveaus der zwei Werbeinstrumente ($\forall i, j = 1, \dots, n \quad \wedge \quad i \neq j$ und $\forall l = 1, \dots, p$):

$$\frac{x_i^*}{x_j^*} = \frac{\epsilon_{x_i}^l}{\epsilon_{x_j}^l} \cdot \frac{\lambda^* - \mathcal{S}_j^l}{\lambda^* - \mathcal{S}_i^l} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_i^*}{x_j^*} = \frac{\epsilon_{x_i}^l}{\epsilon_{x_j}^l} \cdot \frac{\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i}} \quad (6.33)$$

Dies entspricht dem in (6.3) bzw. (6.16) angegebenen zweiten Theorem, modifiziert durch das Verhältnis der Grenzwirkungen des Werbeziels l der betrachteten Instrumente in der Optimallösung. Sind die Grenzwirkungen gleich, so lässt sich (6.33) wie (6.3) bzw. (6.16) sinnvoll interpretieren und nutzen.

Zu beachten ist, dass (im unrestringierten Fall) i.d.R. $\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i} \neq 0$ ist, da die gefundene Optimallösung $\vec{x}^* = \vec{x}_F^*$ für $F(\vec{x})$ nicht mit den individuellen Optimallösungen $\vec{x}_{f_l}^*$ der einzelnen Zielfunktionen $f_l(\vec{x})$ übereinstimmen muss. Es gilt aber $\frac{\partial}{\partial x_i} f_l(\vec{x}^*) = 0$ für

Fall 1: In der perfekten bzw. utopischen Lösung gilt $\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = 0$ für **alle** $f_l(\vec{x})$ und (6.33) ist nicht definiert. Allerdings gelten dann die Aussagen zur isolierten Betrachtung der Werbeziele aus Unterabschnitt 6.3.1.

Fall 2: Bei einer nichtaktiven Budgetrestriktion kann $\frac{\partial}{\partial x_i} f_l(\vec{x}^*) = 0$ zufällig oder durch explizite Wahl der Gewichte durch den Entscheider gewollt der Fall sein, nämlich für $w_l = 1 \quad \wedge \quad w_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \wedge \quad j \neq l$.⁴¹

⁴⁰ Es gilt:

$$\mathcal{S}_i^l := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^p w_k \frac{\partial f_k(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\vec{x}^*)}{\partial x_i} - w_l \cdot \frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i} \stackrel{(6.26)}{=} \lambda^* - w_l \cdot \frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i} \quad (6.30)$$

⁴¹ Vgl. dazu auch die Bedingungen für die w_k zur Bestimmung der vollständigen pareto-optimalen Lösungsmenge in Abschnitt A.1, S. 158.

Fall 3: Bei einer aktiven Budgetrestriktion, d.h. $\sum x_i^* = B$, kann $\frac{\partial}{\partial x_i} f_l(\vec{x}^*) = 0$ nur der Fall sein, falls eine oder mehrere individuelle Optimallösungen $\vec{x}_{f_l}^*$ die Budgetrestriktion erfüllen.

Wird (6.33) zusammen mit der (aktiven) Budget-Restriktion $\sum_{i=1}^n x_i = B$ betrachtet, so gilt für $\forall i, j = 1, \dots, n \quad \wedge \quad i \neq j$ analog zu dem dritten Theorem aus (6.4) bzw. (6.19)

$$x_j^* = \frac{\frac{\epsilon_{x_j}^l}{\lambda^* - S_j^l}}{\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{x_i}^l}{\lambda^* - S_i^l}} \cdot B \quad (6.34)$$

oder mit (6.30)

$$x_j^* = \frac{\frac{\epsilon_{x_j}^l}{\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_j}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_{x_i}^l}{\frac{\partial f_l(\vec{x}^*)}{\partial x_i}}} \cdot B \quad (6.35)$$

Verwendet man dagegen die **partiellen Elastizitäten der Skalarisationsfunktion** $F(\vec{x})$, also

$$\eta_{x_i}^F := \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{F(\vec{x})} \quad (6.36)$$

so ergeben sich analog zu (6.3) bzw. (6.16) und (6.4) bzw. (6.19) die Theoreme 2 und 3 für die Skalarisationsfunktion $F(\vec{x})$:

$$\frac{x_i^*}{x_j^*} = \frac{\eta_{x_i}^F}{\eta_{x_j}^F} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad \wedge \quad i \neq j \quad (6.37)$$

$$x_j^* = \frac{\eta_{x_j}^F}{\sum_{i=1}^n \eta_{x_i}^F} \cdot B \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (6.38)$$

Dass sich die gleichen Theoreme einstellen, ist nicht überraschend, bleibt doch die Funktion $F(\vec{x})$ (wieder) unspezifiziert. Sie wird hier lediglich als Skalarisationsfunktion anstelle *einer* reinen Werbewirkungsfunktion interpretiert. Jedoch stellt sich wieder die Frage nach der Nutzbarkeit in Bezug zum ursprünglichen Werbemixproblem, insbesondere was die Elastizität einer derartigen Skalarisationsfunktion betrifft und wie diese bestimmt werden kann.

Skalarisationsmethode „ ϵ -Constraint-Method“

Die Integration der ursprünglichen Zielfunktionen in eine Skalarisationsfunktion wie die der „Weighting Method“ verhindert aufgrund von Interpretationsproblemen eine sinnvolle Nutzung der abgeleiteten Theoreme für das Werbemixproblem. Theoreme wie (6.33) sind zudem nur unter schwer zu erfüllenden Voraussetzungen sinnvoll nutzbar. Ein alternativer Ansatz ist, eine Skalarisationsmethode zu verwenden, die die Zielfunktionen in die Nebenbedingungen integriert. Dieser Umstand trifft z.B. auf die „ ϵ -Constraint-Method“ zu, die aus dem Problem P_{MODM} mit p zu optimierenden Zielfunktionen eine Serie von p Einfach-Zielsetzungsproblemen $P_k(\vec{\epsilon})$ generiert.⁴² Die Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ weisen insgesamt $m + p - 1 > 1$ Restriktionen auf, die durch die ursprünglichen m Restriktionen und $p - 1$ zusätzliche, durch die Zielfunktionen erweiterten Restriktionen gegeben sind. Das Problem P_{MODM} des Feldes 2 oder des Feldes 4 in Abbildung 6.1 wird damit zu p Problemen P_{Skalar} aus Feld 3. Damit gelten für die einzelnen Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ die in Unterabschnitt 6.3.2 beschriebenen Erkenntnisse für mehrfache Restriktionen.

Bei der Herleitung von Optimalitätstheoremen für $P_k(\vec{\epsilon})$ entsprechend zu Unterabschnitt 6.3.2 (Feld 3) ist zu beachten, dass die Ergebnisse lediglich für die Zielfunktion $f_k(\vec{x})$ bzw. $P_k(\vec{\epsilon})$ gelten, da jedes Ersatzproblem $P_k(\vec{\epsilon})$ seine eigene Lösungsmenge $X_{\vec{\epsilon}}^k$ aufweist und die pareto-optimale Lösungsmenge X^* von P_{MODM} in diesem Falle durch $\bigcap_{k=1}^p X_{\vec{\epsilon}}^k \subseteq X^*$ gegeben ist. Die Theoreme besitzen deshalb nur dann eine Aussagekraft für das ursprüngliche Mehrfach-Zielsetzungsproblem, falls die optimale Lösung, für die die Theoreme gültig sind, auch gültige Lösung der anderen $P_k(\vec{\epsilon})$ -Probleme ist.

Die Summe der Lagrange-Multiplikatoren λ_l ($l = 1, \dots, p$ mit $l \neq k$) der $p - 1$ zusätzlichen und aktiven Restriktionen $f_l(\vec{x}) \geq \epsilon_l$ verkörpern den Wert von $f_k(\vec{x})$, der dem Werbetreibenden in Folge der Unterschranken ϵ_l für $f_l(\vec{x})$ in der Optimallösung entgeht (vgl. auch das 1. Theorem in Unterabschnitt 6.3.2, S. 106).

6.3.3.2 Non-Skalarisationsansatz

Die meisten Methoden dieser Art generieren Folgen von Teil- oder Ersatzproblemen, in denen die Anzahl der Zielfunktionen reduziert und im Gegenzug die Anzahl der Nebenbedingungen erhöht wird.

⁴² Vgl. Abschnitt A.2, S. 160 und Definition A.2 für eine Beschreibung des „ k^{th} -objective ϵ -constraint problem“ $P_k(\vec{\epsilon})$ und der „ ϵ -Constraint-Method“. Zur Einordnung der „ ϵ -constraint Method“ als Skalarisationsmethode vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 678f.

Als Beispiel für Non-Skalarisationsmethoden⁴³ sei hier das Lexikographische Programmieren angeführt. Bei diesem Ansatz priorisiert der Entscheider die Zielfunktionen nach ihrer jeweiligen absoluten Wichtigkeit. Danach erfolgt eine sukzessive Optimierung der einzelnen Ziele ausgehend vom wichtigsten Ziel unter Berücksichtigung der ursprünglichen Restriktionen. Weist das erste Problem (mit der wichtigsten Zielfunktion) nur eine einzige, eindeutige Lösung auf, so ist diese Lösung des Teilproblems die Lösung des Mehrfach-Zielsetzungsproblems. Existiert mehr als eine Lösung, so erfolgt wieder eine einzelne Optimierung des nächst weniger wichtigen Zieles unter Ergänzung einer neuen Restriktion: Die vorherige (und wichtigere) Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern. Ist die neue gefundene Lösung eindeutig, so ist diese Lösung des Teilproblems die Lösung des Mehrfach-Zielsetzungsproblems. Andernfalls geht der obige Prozess solange weiter, bis alle Zielfunktionen berücksichtigt wurden.

Existieren die perfekte oder utopische Lösung, so stellen sich die aufgezeigten Erkenntnisse bei isolierter Betrachtung ein, weil eine Lösung existiert, die alle Ziele gleichzeitig optimiert. Existieren sie nicht, so gelten die Ergebnisse aus Unterabschnitt 6.3.2 aufgrund der sukzessiven Erhöhung der Anzahl der Restriktionen. Eine sinnvolle Interpretation von Theoremen für derartige Teil- bzw. Ersatzprobleme fällt allerdings wesentlich schwerer, da eine mathematische Formulierung dieser Probleme auf der Verwendung mathematischer Hilfsvariablen in erheblicher Anzahl aufbaut.⁴⁴

6.4 Kritische Würdigung der Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung

Die grundlegende Schwierigkeit von Mehrfach-Zielsetzungsproblemen, nämlich die **Existenz von Zielkonflikten**, zeigt sich wegen ihres universellen Charakters auch bei der Herleitung von Optimalitätstheoremen zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung. **Zielkonflikte verhindern i.d.R. die Existenz der idealen oder perfekten Lösung**, für deren Fall Optimalitätstheoreme für das Mehrfach-Zielsetzungsproblem hergeleitet werden können.

Der **Ansatz, gängige Lösungsmethoden bei der Herleitung** von Optimalitätstheoremen zur Bewältigung dieser Schwierigkeit zu verwenden zeigt, dass die **Ergeb-**

⁴³ Dies sind z.B. das Lexikographische Programmieren, der MinMax-Ansatz, der „Equitability Approach“ u.a. Vgl. Ehr Gott/Wiecek (2005), S. 687f.

⁴⁴ Vgl. das Beispiel aus Zimmermann/Gutsche (1991), S. 126ff.

nisse und deren Interpretierbarkeit sowie deren praktischer Nutzen aufgrund der unterschiedlichen Lösungskonzepte **von den Lösungsmethoden abhängig** sind. Dies verdeutlicht die begrenzten Möglichkeiten marginalanalytischer Untersuchungen zur Werbemixplanung bei mehrfacher Zielsetzung.

Auch die **Anwendbarkeit** der Resultate ist **nicht generell** gegeben, da die in den Methoden verwendeten mathematischen Hilfskonstrukte, wie z.B. eine gewichtete Summe inhaltlich unterschiedlicher Ziele, nur schwer einer Formulierung sinnvoller Handlungsanweisungen für die Werbemixplanung zugänglich sind und die abgeleiteten Theoreme von nur schwer zu erfüllenden Bedingungen abhängen.

Die Idee, die hinter der Verwendung von Skalarisationsmethoden zur Bewältigung von Vektoroptimierungsproblemen steht, ist der Rückschluss von der Lösungsmenge des Ersatzproblems der Skalarisationsmethode auf die Lösungsmenge des ursprünglichen Vektoroptimierungsproblems. Dieser Rückschluss ist nur dann zulässig, falls bestimmte im Lösungskonzept begründete Bedingungen erfüllt sind. Für die „Weighting Method“ sind dies die Bedingungen für die Gewichtungen, für die „ ϵ -Constraint-Method“ die Bedingungen für die Lösungsmengen der Ersatzprobleme. Die Lösungen, für die die abgeleiteten Theoreme der Ersatzprobleme gültig sind, stellen also nur dann auch Lösungen des ursprünglichen Werbemixproblems mit mehrfacher Zielsetzung dar, falls diese Bedingungen eingehalten werden.

7 Anwendung der Prozessstrukturierungshilfe auf Beispiele zur Werbemixplanung

7.1 Modellannahmen und Systematisierung relevanter Planungssituationen

Die Herleitung allgemeiner Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung (Felder 2 und 4 aus Abbildung 6.1) hängt nach Abschnitt 6.3 von der verwendeten Lösungsmethode ab und eine sinnvolle betriebswirtschaftliche Interpretation und Anwendung solcher Theoreme ist schwierig bis unmöglich. Über **numerische Beispiele** soll daher eine Perspektive eröffnet werden, wie man mehr über die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung lernen kann. Die nachfolgenden Beispiele liefern für typische Entscheidungsprobleme der Werbemixplanung Erkenntnisse über optimale Handlungsalternativen bzw. optimale Werbemixe für die jeweils betrachteten Entscheidungsprobleme. Auch die in Abschnitt 5.2 entwickelte Prozessstrukturierungshilfe und die aufgezeigten, durch den Entscheider zu treffenden Entscheidungen, die möglichen Rahmenbedingungen und deren Konsequenzen für die Lösung eines Werbemixproblems seien hier anhand dieser Beispiele verdeutlicht.

Die Beispiele bauen auf der nachfolgend geschilderten, grundlegenden Entscheidungssituation auf und werden hinsichtlich der Elemente und Ebenen der vorgestellten Prozessstrukturierungshilfe zur Werbemixplanung (Abbildung 5.1), d.h. den Entscheider-Präferenzen, den Rahmenbedingungen und den Eigenschaften der Werbemixaufgabe, analysiert und gelöst.

Es werden wie in Kapitel 6 beispielhaft Entscheidungsaufgaben der Felder 2 und 4 aus Abbildung 6.1 betrachtet und daraus anhand der Prozessstrukturierungshilfe Entscheidungsmodelle zur Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung abgeleitet und die darin abgebildeten Entscheidungsaufgaben gelöst. Unterstellt sei folgende, **grundlegende Entscheidungssituation**:

*Ein Entscheider möchte **mehrere psychographische** Werbezielarten für **ein** Werbeobjekt in **einer** Zielgruppe, in **einer** Entscheidungsperiode mittels **mindestens zweier** Werbeinstrumente, deren Aktivitätsniveaus x_i in Geldeinheiten operationalisiert werden, effizient **optimierend** erreichen unter **mindestens einer** Restriktion (für Werbebudget und/oder Werbeinstrumente), aber **ohne** konkurrenzbezogene und dynamische Effekte zu berücksichtigen.*

Die nachfolgenden Entscheidungsprobleme können für beliebige Größenordnungen, d.h. für p Werbeziele, n Werbeinstrumente und m Restriktionen formuliert werden. Die dementsprechend bei optimalem Handeln zu erfüllenden Gleichungssysteme lassen sich allerdings nur für *konkrete* Problemformulierungen lösen. Deshalb und zur Reduzierung der Komplexität sowie zur Wahrung der Übersichtlichkeit der Beispiele werden die Größenordnungen beschränkt: die Anzahl der betrachteten Werbeziele auf 3, die Anzahl der Werbeinstrumente auf 2 und die Anzahl der Restriktionen auf höchstens 4. Damit können ohne Einschränkung alle wesentlichen Aspekte der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung aufgezeigt werden¹ und alle Beispiele können gegebenenfalls auch ohne die Hilfe von Computer-Algebra-Systemen von Hand gelöst werden. Des Weiteren seien keine Ausstrahlungseffekte zwischen verschiedenen Werbeobjekten, wie Interaktionseffekte bei unterschiedlichem Objektbezug, betrachtet.

Während die Situationen aus Abbildung 6.1 durch die Anzahlen der Restriktionen und der Werbeziele charakterisiert waren, kann aus der Prozessstrukturierungshilfe aus Abbildung 5.1 auch eine **inhaltliche Systematisierung der Situationen der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** abgeleitet werden, indem diejenigen Teilentscheidungen und ihre Folgen auf den ersten beiden

¹ Lediglich so genannte Bicriterion-Lösungsmethoden, wie z.B. „Geoffrion’s Bicriterion Method“ aus Chankong/Haimes (1983), S. 294, die speziell für eine Zweifach-Zielsetzungsproblematik konzipiert sind, werden im Falle von drei oder mehr Werbezielen nicht erfasst.

Stufen der Prozessstrukturierungshilfe, die das Entscheidungsmodell und den Lösungsprozess charakterisieren – das sind die Optimierungsart, der Zeitpunkt der Präferenzäußerung sowie der Verlauf der Wirkungsfunktionen –, nach ihren möglichen Ausprägungen gegliedert werden. Die sich daraus ergebenden **Planungssituationen** fordern den Entscheider bzw. Analysten in der obigen grundlegenden Entscheidungssituation zu unterschiedlichen „Einstiegen“ in die Werbemixplanung und Lösung der Werbemixplanungsaufgabe als Allokationsproblem heraus und haben zudem unterschiedliche Darstellungen der Lösungen und damit unterschiedliche Möglichkeiten zur Erkenntnisgewinnung für den Entscheider zur Folge. Abbildung 7.1 zeigt die alternativen Pla-

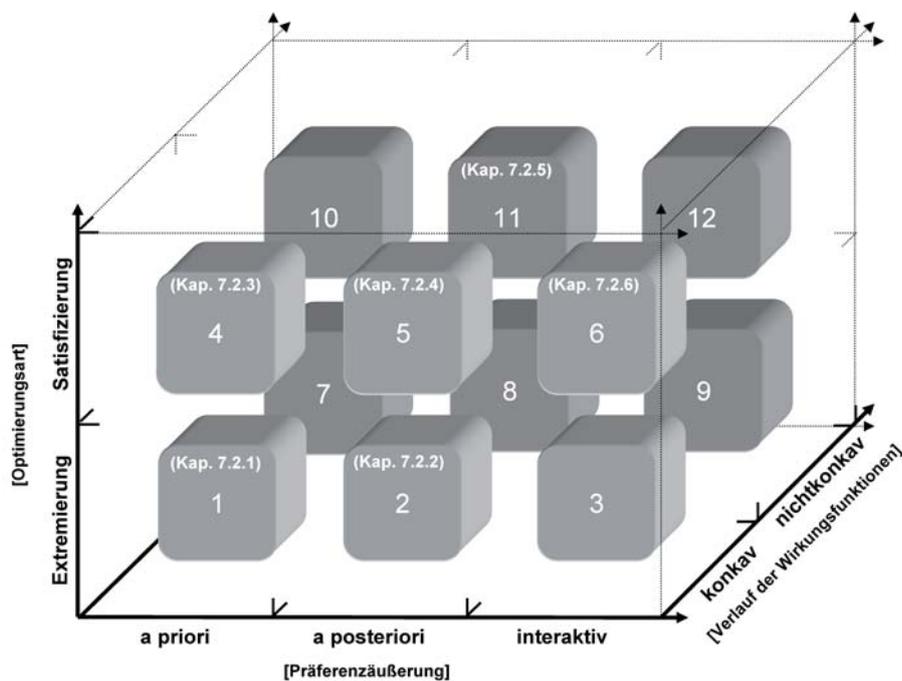


Abbildung 7.1: Planungssituationen für Werbemixentscheidungen bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung: Strukturierung der Entscheidungen auf Stufe 2 der Prozessstrukturierungshilfe

nungssituationen auf, die sich aufgrund der Teilentscheidungen und ihrer Folgen auf den ersten beiden Stufen der Prozessstrukturierungshilfe ergeben. Die Planungssituationen werden nach den folgenden drei Gesichtspunkten unterteilt, die die Dimensionen des in Abbildung 7.1 dargestellten Kubus aufspannen: Der Punkt *Optimierungsart* betrifft die Art der vom Entscheider ausgewählten, wertmäßigen Werbeziele, d.h. Extremierungs- oder Satisfizierungsziele. Der Punkt *Präferenzäußerung* betrifft den Zeitpunkt (a priori / a posteriori / interaktiv), zu dem der Entscheider seine Präferenzen, z.B. gewünschte Wertausprägungen der Werbeziele, äußern will oder kann. Der Gesichtspunkt des *Ver-*

laufs der Wirkungsfunktionen ist gegeben durch die Eigenschaften der zu verwendenden Werbewirkungs- bzw. Restriktionsfunktionen.²

Diese drei Gesichtspunkte bzw. deren Ausprägungen spiegeln die wesentlichen Aspekte wider die bestimmen, ob eine bestimmte Lösungsmethode zur Bewältigung einer Werbemixaufgabe bei mehrfacher Zielsetzung herangezogen werden kann, da eine universell anwendbare Lösungsmethode nicht existiert (vgl. Abschnitt 5.3).

Die vierte Art der möglichen Mitarbeit des Entscheiders, nämlich in Form keinerlei Präferenzäußerungen („No-Preference“), fehlt als Ausprägung des Punktes *Präferenzäußerung*. No-Preference-Methoden sind relativ einfach strukturiert und generieren gewöhnlich eine einzelne Lösung, die der Entscheider akzeptieren bzw. ablehnen kann oder muss.³ Die Verwendung von No-Preference-Methoden verletzt damit aber zwei wesentliche Anforderungen an den Analyse-Lern-Entscheidung-Prozess. Es wird weder nach der für den Entscheider besten Lösung gesucht, noch wird der Entscheider in den Lösungsprozess eingebunden, so dass lediglich eine geringe Benutzerorientierung vorliegt. Deshalb werden im Nachfolgenden die No-Preference-Methoden nicht berücksichtigt.

Die zu lösenden Entscheidungsprobleme der jeweils betrachteten Werbemixaufgaben werden abhängig von der ihnen zugrunde liegenden Planungssituation mit **unterschiedlichen Lösungsmethoden** bewältigt. Die eingesetzten Methoden wurden wegen ihrer **Flexibilität, Einfachheit** und **intuitiv verständlichen Lösungskonzepte** ausgewählt. Sie erfüllen die aus der Prozessstrukturierungshilfe abgeleiteten Anforderungen an Lösungsmethoden im Kontext der psychographischen Werbemixplanung: entsprechend der jeweiligen Planungssituation können die Methoden mit der Art der Mitarbeit des Entscheiders (a priori, a posteriori oder interaktiv), mit dem Verlauf der Wirkungsfunktionen (konkav oder nichtkonkav) sowie mit der zu verfolgende Optimierungsart (Satisfizierung oder Extremierung) „umgehen“.

Die „**Weighting Method**“ verknüpft mit jeder Zielfunktion f_k einen (Gewichtungs-) Koeffizienten w_k , und maximiert die gewichtete Summe der Zielfunktionen. Damit wird das Problem P_{MODM} in ein skalares Ersatzproblem $P(\vec{w})$ transformiert.

Die „ **ϵ -Constraint-Method**“ zerlegt das ursprüngliche Problem P_{MODM} in (sequenziell) zu lösende, skalare Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$. Die Ersatzprobleme maximieren dabei

² Zum Auffinden pareto-optimaler Werbemixe bei einem zu maximierenden Werbemixproblem gilt es, die mathematische Eigenschaft der Konkavität zu beachten. Im Nachfolgenden werden ausschließlich lineare Restriktionen betrachtet, so dass dieser Punkt sich vornehmlich auf die Werbewirkungsfunktionen bezieht.

³ Vgl. Miettinen (1999), S. 68.

jeweils eine einzelne Zielfunktion des Entscheidungsmodelles, so dass die anderen Zielfunktionen bestimmte Satisfizierungsziele \vec{c} (definiert in Form von Ungleichheitsrestriktionen) erfüllen müssen.

In der „**Reference-Direction-Method**“ wird der Zielvektor $\vec{f}^h = \vec{f}(\vec{x}^h)$ für eine Lösung \vec{x}^h berechnet und dem Entscheider präsentiert, der vorab mit den anzustrebenden Satisfizierungszielen einen Referenzpunkt \vec{z}^h der Zielfunktionen angeben muss. Dabei müssen einige Komponenten des Referenzpunktes niedriger bzw. höher sein als die aktuelle Lösung \vec{f}^h . In der Referenz-Richtung $\vec{z}^h - \vec{f}^h$ werden dann pareto-optimale Lösungen gesucht. Dazu werden die Zielfunktionen maximiert, deren Wert der aktuellen Lösung \vec{x}^h weiter verbessert werden soll. Die Zielfunktionen, deren Werte gleich bleiben sollen oder sich verschlechtern dürfen, werden zur Formulierung zusätzlicher Restriktionen herangezogen. Der Entscheider gibt dann eine bestimmte Anzahl von Schritten vor, für die entlang der Referenz-Richtung neue Lösungen berechnet werden und zwar nur so viele, wie der Entscheider sehen möchte. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis der Entscheider mit einer gefundenen Lösung zufrieden ist. Damit wird das Problem P_{MODM} in eine Folge von Ersatzproblemen $P(\psi, X_1)$ umgewandelt.

Eine weitergehende Beschreibung der obigen Lösungsmethoden mit ihren mathematischen Eigenschaften enthält Anhang A, Abschnitt A.1–Abschnitt A.3.

7.2 Exemplarische Werbemixaufgaben zu den Planungssituationen

In den folgenden Abschnitten werden Beispiele zu den Planungssituationen 1, 2, 4, 5, 6 und 11 betrachtet, für die Tabelle 7.1 zur Übersicht eine Kurzreferenz auflistet. Sie beinhalten und demonstrieren alle wesentlichen Aspekte und Ausprägungen der Teilentscheidungen aus Abbildung 7.1 und der Prozessstrukturierungshilfe. Beispiele für die restlichen Planungssituationen würden im Vergleich zu den obigen Beispielen keine neuen Erkenntnisse aufzeigen, da keine neuen Ausprägungen der Teilentscheidungen hinzukommen. Sie werden deshalb nicht weiter verfolgt.

| Textstelle | Planungssituation |
|--------------------|--|
| Kap. 7.2.1, S. 126 | 1 : Extremierung - a priori - konkav |
| Kap. 7.2.2, S. 130 | 2 : Extremierung - a posteriori - konkav |
| Kap. 7.2.3, S. 135 | 4 : Satisfizierung - a priori - konkav |
| Kap. 7.2.4, S. 137 | 5 : Satisfizierung - a posteriori - konkav |
| Kap. 7.2.5, S. 139 | 11 : Satisfizierung - a posteriori - nichtkonkav |
| Kap. 7.2.6, S. 144 | 6 : Extremierung - Interaktiv - konkav |

Tabelle 7.1: Kurzreferenz zu Beispielen der Planungssituationen

7.2.1 Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-priori-Mitarbeit

Für die Entscheidungen auf den drei Ebenen der prozessorientierten Strukturierungshilfe aus Abbildung 5.1 sei unterstellt:

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

Planungssituation 1 aus Abbildung 7.1 liegt vor, falls der Entscheider in der grundlegenden Entscheidungssituation aus Abschnitt 7.1 folgende **Präferenzen** äußert: Die *Markensympathie*, das *Interesse* an einem Produkt dieser Marke und die *Eigenschaftskennntnisse* über dieses Produkt werden vom Entscheider als die zu verfolgenden drei **Werbeziele** benannt. Er entscheidet sich für die **Optimierungsart** der *Extremierung* dieser drei Werbeziele. Da er z.B. aufgrund seiner Erfahrung *a priori* eine Gewichtung der Werbeziele angeben kann, ist damit der **Zeitpunkt seiner Mitarbeit** bzw. seiner die Werbeziele betreffenden Präferenzäußerungen gegeben. Die Wahl der einzusetzenden **Werbeinstrumente** fällt auf die zwei Instrumente *Fernseh-* und *Printwerbung*.⁴ Eine *Werbudgetrestriktion* beschränkt die Summe der Aktivitätsniveaus nach oben ($x_1 + x_2 \leq 15$ Mio. €), und für beide Werbeinstrumente sind gewisse *Mindestaktivitätsniveaus* angesetzt ($x_1 \geq 2$ Mio. € (für TV) und $x_2 \geq 1$ Mio. € (für Print)), so dass die Werbeziele unter drei **Restriktionen** optimiert werden müssen.

Für die **Rahmenbedingungen** der Ausgangssituation bzw. für die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen sei vereinfachend angenommen: Mittels einer Tracking-Studie wurde der **funktionale Wirkungszusammenhang** für die drei Wirkungsarten bestimmt. Die Werbewirkungsfunktionen für die *Markensympathie* $f_1(\vec{x})$ und das *Produktinteresse* $f_2(\vec{x})$ sind vom Funktionstyp 03 und 02 (Quadratisch), die Wirkungsfunktion für die

⁴ Köcher/Halleman (2004) betrachten diese beiden Werbeinstrumente und messen die psychographischen Werbewirkungen *Werbeerinnerung* und *Markensympathie* für den Mix dieser beiden Instrumente. Vgl. Köcher/Halleman (2004), S. 77ff.

Produkteigenschaftskennnisse $f_3(\vec{x})$ vom Funktionstyp 01 (linear) (vgl. dazu Tabelle 3.1). Folglich offenbart die betreffende Studie **Instrumentinteraktionen** wie *Elastizitätsinteraktion* aber *keine Reaktionsinteraktion* für die Werbeinstrumente. Unter der Annahme, dass das betrachtete Produkt und die Marke im Markt etablierte Güter sind, ist ein bei geringer oder verschwindender Höhe der Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente vorhandenes *Wirkungsniveau* in den Werbezielen plausibel (**Werbezielobjekt**). Da die Werbeziele *Markensympathie* und *Produktinteresse* zu den **Werbewirkungsklassen** Einstellungen und Interessen gehören, ist ein *Übersättigungsverlauf* der Werbewirkungsfunktionen ebenfalls plausibel. **Dynamik** und **Wettbewerbseffekte** wurden schon in der grundlegenden Entscheidungssituation in Abschnitt 7.1 ausgeschlossen. Das Entscheidungsmodell zur vorliegenden Werbemixaufgabe lautet somit:

Beispiel 7.1 (Planungssituation 1)

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \quad \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} && \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 && \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 5 + 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Abbildung B.1 (in Anhang B, S. 168) zeigt die Funktionsverläufe der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ im Intervall $x_i \in [0, 10]$. Die Menge der zulässigen Lösungen X ist in Abbildung B.2 (in Anhang B, S. 169) dargestellt. ■

Zusammenfassend ist dies eine Werbemixplanungsaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit *konkaven* und *linearen* Zielfunktionen sowie *linearen* Nebenbedingungen, die nach den Vorstellungen des Entscheiders in Form einer *Extremierungsaufgabe* zu lösen ist, in der die Entscheider-Präferenzen *a priori* eingehen. Damit sind alle notwendigen **Eigenschaften der Werbemixaufgabe** bestimmt und die Auswahl

einer Lösungsmethode sowie die Lösung dieser Aufgabe können angegangen werden.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Ein mögliche, anwendbare A-priori-Lösungsmethode ist die „Weighting Method“⁵, die zur vorliegenden Aufgabe pareto-optimale Lösungen bestimmen kann. Zudem ist die Methode auch als A-posteriori-Methode einsetzbar, weshalb sie sich auch dann anbietet, wenn der Entscheider während des iterativen Analyse-Lern-Entscheidung-Prozesses seine gewünschte Mitarbeit ändert. Sie passt auf die vom Entscheider verfolgte Extremierung der Werbeziele. Satisfizierungsziele werden vom Entscheider nicht abgefragt.

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Da der Entscheider in der Lage ist und den Wunsch hat, Präferenzen *vor* dem Lösungsprozess zu äußern und zwar in Form von Gewichtungen $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ der drei Werbeziele bzw. Werbewirkungsfunktionen $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{f}_2(\vec{x}), \vec{f}_3(\vec{x}))^T$, besteht die durch die „Weighting Method“ generierte Lösungsmenge aus einzelnen Lösungen, die von den gewählten Wertausprägungen der Gewichte abhängen. Wählt der Entscheider z.B. die Gewichte $\vec{w}^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, so ergibt sich durch Lösung der Kuhn-Tucker-Bedingungen des Ersatzproblem⁶ $P(\vec{w})$ die pareto-optimale Lösung $\vec{x}_1 = (5, 7)^T$ und die dazugehörigen Zielniveaus der Werbeziele $\vec{f}(\vec{x}_1) = (79, 93, 48)^T$. (*Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.2 bzw. Unterabschnitt B.2.2.*)

Die entscheidende Schwierigkeit bei der Verwendung der „Weighting Method“ als A-priori-Methode zeigt sich, wenn der Entscheider mit der gefundenen Lösung nicht zufrieden ist. Zwar können durch eine Änderung der Gewichtungen durch den Entscheider und ein damit verbundenes iteratives Durchlaufen des Entscheidungs- und Lösungsprozesses weitere Lösungen generiert werden (vgl. Tabelle 7.2), doch sind bei tendenzieller Wahl der Gewichtungen nicht entsprechend tendenzielle Lösungen zu erwarten.⁷ Tabelle 7.2 zeigt für ausgewählte Gewichtungen der Zielfunktionen (pareto-optimale) Lösungen von Beispiel 7.1.

Insbesondere können unterschiedliche Gewichtungen, wie z.B. \vec{w}^4 und \vec{w}^5 zu der gleichen Lösung $\vec{x}_4 = \vec{x}_5$ führen,⁸ so dass selbst bei Änderung der Gewichtungen nicht garantiert werden kann, dass eine andere Lösung gefunden wird. Dies ist unabhängig

⁵ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158.

⁶ Vgl. Definition B.10, S. 168.

⁷ Vgl. Miettinen (1999), S. 85.

⁸ Für eine gegebene pareto-optimale Lösung \vec{x}^* sind die Gewichte w_k , die diese Lösung generiert haben, nicht notwendigerweise eindeutig, vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 224. Dies gilt insbesondere für MOLP-Probleme.

| Lösungen L_{Ps1} | | | |
|--------------------|---|--------------------------------|------------------------------------|
| i | \vec{w}^i | $\vec{x}_i^* \approx$ [Mio. €] | $\vec{f}(\vec{x}_i^*) \approx$ [%] |
| 1 | $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ | $(5, 7)^T$ | $(79, 93, 48)^T$ |
| 2 | $(1/2, 1/4, 1/4)^T$ | $(4.67, 5.67)^T$ | $(83.72, 92.72, 41.67)^T$ |
| 3 | $(1/15, 2/5, 8/15)^T$ | $(5.29, 9.71)^T$ | $(64.12, 88.7, 59.7)^T$ |
| 4 | $(3/100, 7/100, 9/10)^T$ | $(2, 13)^T$ | $(35.5, 76.5, 63)^T$ |
| 5 | $(1/25, 1/100, 19/20)^T$ | $(2, 13)^T$ | $(35.5, 76.5, 63)^T$ |
| 6 | $(0, 1, 0)^T$ | $(3, 7)^T \notin L_{Ps1}$ | $(79, 95, 42)^T$ |

Tabelle 7.2: Iterativ generierte Lösungen für ausgewählte Gewichtungen der Werbeziele in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1)

davon, wie oft der Entscheider mit geänderten Gewichten den Lösungsprozess durchlaufen möchte.

Die Lösungen zu den im Beispiel gewählten Gewichtungen $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^5$ sind **pareto-optimal**, da die Lösung des Ersatzproblems $P(\vec{w})$ (für Beispiel 7.1) eindeutige Lösungen⁹ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_5$ generiert. Lediglich die Lösung für \vec{w}^6 ist nicht pareto-optimal, da für die Gewichte die Bedingung $w_k > 0$ nicht erfüllt ist. Dabei bedeutet eine Wahl von Gewichtungen wie \vec{w}^6 eine exklusive Maximierung des zweiten Werbeziels und eine Nichtbeachtung der beiden anderen Werbeziele.

Aufgrund der Extremierung angestrebter Werbewirkungen sind alle Lösungen **effektiv**. Die einzelnen, generierten Lösungen sind (für die jeweils gewählten Gewichtungen) für sich genommen **effizient**, da sie eindeutig sind. Was dem Entscheider in der vorliegenden Planungssituation nicht vermittelt wird, ist, ob eine generierte, pareto-optimale Lösung die effiziente Lösung des Werbemixproblems ist, d.h. die Lösung mit dem geringsten Mitteleinsatz. Lediglich im Vergleich der iterativ erzeugten Lösungen, kann der Entscheider den Mitteleinsatz einer Lösung bewerten. Angesichts der pareto-optimalen und damit gleichwertigen Lösungen, wie z.B. \vec{x}_2 und \vec{x}_3 , muss der Entscheider bestimmen, ob in diesem Fall eine Erhöhung des dritten Werbeziels um ca. +43,3% eine Budgeterhöhung von ca. +45,6% und eine Verschlechterung des ersten und zweiten Werbeziels um -23,4% und -4,3% rechtfertigt, vgl. dazu auch Tabelle 7.3. \square

⁹ Vgl. Abschnitt A.1, Punkt 1 der Zusammenfassung.

| Lösung | \vec{x}_2^* | → | \vec{x}_3^* | Änderung |
|------------|---------------|---|---------------|----------|
| Budget | 10,3 Mio. € | → | 15 Mio. € | + 45,6 % |
| Ziel f_1 | 83,72 | → | 64,13 | - 23,4 % |
| Ziel f_2 | 92,72 | → | 88,7 | - 4,3 % |
| Ziel f_3 | 41,67 | → | 59,71 | + 43,3 % |

Tabelle 7.3: Vergleich zweier Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1)

7.2.2 Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit

Ein gänzlich anderes Bild des Entscheidungsprozesses zeigt sich, falls der Entscheider keine Präferenzäußerungen bzgl. der Werbeziele vorab tätigen möchte oder kann, und lieber nachträglich eine Lösung aus einer Lösungsmenge auswählen will.

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

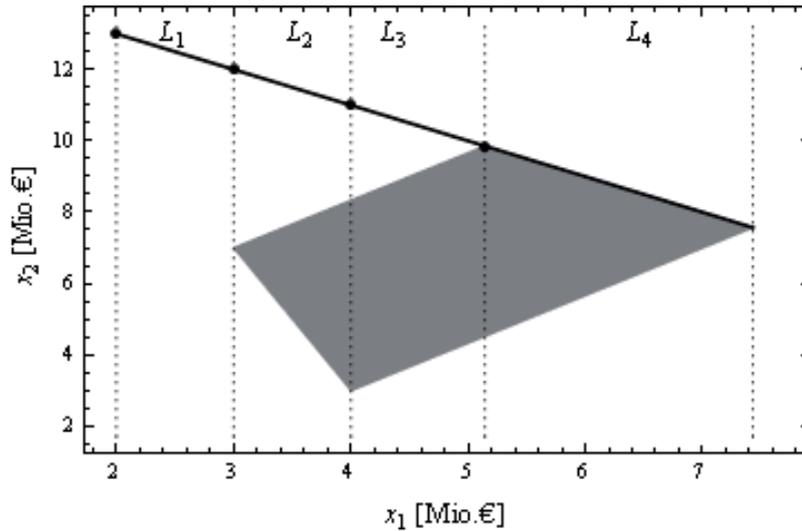
Aus Planungssituation 1 wird bei der A-posteriori-Mitarbeit Planungssituation 2. Falls alle weiteren Eigenschaften der Planungssituation gleich bleiben, gilt es nun, Beispiel 7.1 mit einer *A-posteriori*-Lösungsmethode zu bewältigen.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Die bereits verwendete Lösungsmethode „Weighting Method“ kann auch als A-posteriori-Methode eingesetzt werden. Als A-posteriori-Methode liefert sie, wenn es mehr als eine pareto-optimale Lösung gibt, eine Lösungsmenge, aus der der Entscheider diejenige Lösung auswählen kann, die ihm am meisten zusagt. Das Konzept der Gewichtung der Zielfunktionen wird beibehalten, allerdings bleiben die Gewichtungen diesmal unbestimmt.

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Selbst wenn die Zielgewichte w_k unspezifiziert bleiben, kann die Werbemixaufgabe gelöst werden. Allerdings wird dann eine „breit aufgespannte“ Lösungsmenge erzeugt. Für Planungssituation 2 zeigt Abbildung 7.2 die berechnete **Menge L_{Ps2} der pareto-optimalen Lösungen** im (x_2, x_1) -Raum. Die gezeigte Lösungsmenge ist die Menge all derjenigen Werbemixe \vec{x} , die zu Ausprägungen der Werbeziele führen, die nicht durch eine andere Lösung dominiert werden. In Abbildung B.3 (in Anhang B, S. 170) ist die pareto-optimale Lösungsmenge L_{Ps2} unterlegt mit der Menge der zulässigen Lösungen X in Beispiel 7.1. (*Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.2 bzw. Unterabschnitt B.2.1.*)

Abbildung 7.2: Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

Die Lösungsmenge L_{Ps2} setzt sich aus verschiedenen Teilmengen zusammen, dargestellt in Tabelle 7.4. Die verschiedenen **Teillösungsmengen L_i entstehen durch unterschiedliche Wertebereiche der Gewichte w_k für die Funktionen $f_k(\vec{x})$ in der Skalarisationsfunktion $F(\vec{x}) = \sum_k w_k \cdot f_k(\vec{x})$.**¹⁰

| Lösungsmenge | | $L_{Ps2} = \bigcup_{i=1}^4 L_i$ | |
|--------------|--|--|----------|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] | |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | $x_2 = 15 - x_1$ | \wedge |
| L_2 | $3 < x_1 \leq 4$ | $19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ | \vee |
| L_3 | $4 < x_1 < \frac{36}{7}$ | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ | \vee |
| L_4 | $\frac{36}{7} \leq x_1 < \frac{52}{7}$ | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 15 - x_1$ | |

Tabelle 7.4: Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

Die Abhängigkeit der Teillösungsmengen von den Gewichtungen zeigt die Darstellung der Lösungsmenge $L_{P(\vec{w})}$ in Tabelle B.1 (in Anhang B, S. 171), aus der L_{Ps2} durch Eliminierung der w_k hervorgeht.¹¹ Eine für den Entscheider übersichtliche und ver-

¹⁰ Zur besseren Übersicht sind die einzelnen Teillösungsmengen L_i in Abbildung 7.2 durch vertikale, gestrichelte Trennlinien voneinander abgegrenzt.

¹¹ Eine graphische Darstellung von $\vec{x}(\vec{w})$ ist wegen der drei betrachteten Werbeziele, d.h. den drei

ständige Darstellung der Lösungsmenge ist dies allerdings nicht. Aus Tabelle B.1 wird jedoch deutlich, warum Gewichtungen \vec{w}^4 und \vec{w}^5 aus Planungssituation 1 zur gleichen Lösung (2, 13) führen: sie gehören zu den Teillösungsmengen L_5 (2. Teil) und L_6 , die lediglich die Lösung (2, 13) besitzen.

Der Entscheider kann in dieser Planungssituation durch die Darstellung der vollständigen, pareto-optimalen Lösungsmenge in Abbildung 7.2 den **Werbemix mit dem geringsten Mitteleinsatz** identifizieren, nämlich $\vec{x} = (4, 3)^T$, der jedoch nicht zulässig ist, wie Tabelle 7.4 (L_2) zeigt. Aus monetärer Sicht günstige Werbemixe findet der Entscheider jedoch in einer Umgebung von \vec{x} (in $U_\delta(\vec{x}) \cap L_{Ps2}$). Ob die zu günstigen Werbemixen gehörigen wertmäßigen Ausprägungen seiner Werbeziele gefallen oder ob die Ausprägungen weniger günstigerer Werbemixe attraktiver sind, muss der Entscheider beurteilen.

Die **Bildmenge $\vec{f}(L_{Ps2})$ der pareto-optimalen Lösungsmenge L_{Ps2}** , also die **möglichen, mit pareto-optimalen Werbemixen zu erzielenden Wertausprägungen der Werbeziele**, zeigt Abbildung 7.3. Die Linien, die aus den Bildmengen der einzelnen Werbewirkungsfunktionen herausragen, stellen die Bildpunkte derjenigen pareto-optimalen Werbemixe dar, die die Werbebudgetrestriktion erfüllen. Für die folgenden, ausgewählten pareto-optimalen Werbemixe

$$\begin{array}{cccc} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} & \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} & \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} & \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 5.14 \\ 9.86 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 7 \end{pmatrix} & \vec{x}_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3.5 \end{pmatrix} & \vec{x}_7 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} & \vec{x}_8 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ist die Lage dieser Lösungen und ihrer zugehörigen Bildpunkte der Werbewirkungsfunktionen mittels gestrichelter, vertikaler Linien markiert.

Abbildung 7.4 zeigt die Funktionswerte der Werbewirkungsfunktionen $f_k(\vec{x})$ für obige pareto-optimale Lösungen. Die gewählte Darstellung in Abbildung 7.4 zeigt, dass mögliche Zielfunktionswerte $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$ der Werbeziele 1 und 2 durch Wahl eines entsprechenden Entscheidungsvektors **nicht erhöht werden können, ohne gleichzeitig** den Zielfunktionswert des Werbeziels $f_3(\vec{x})$ zu **verringern**, was dem Entscheider in dieser Planungssituation als Entscheidungshilfe dienen kann.

Gewichtungen, nicht möglich und eine Darstellung von $\vec{x}(w_1, w_2)$, $\vec{x}(w_2, w_3)$ und $\vec{x}(w_1, w_3)$ wenig aussagekräftig.

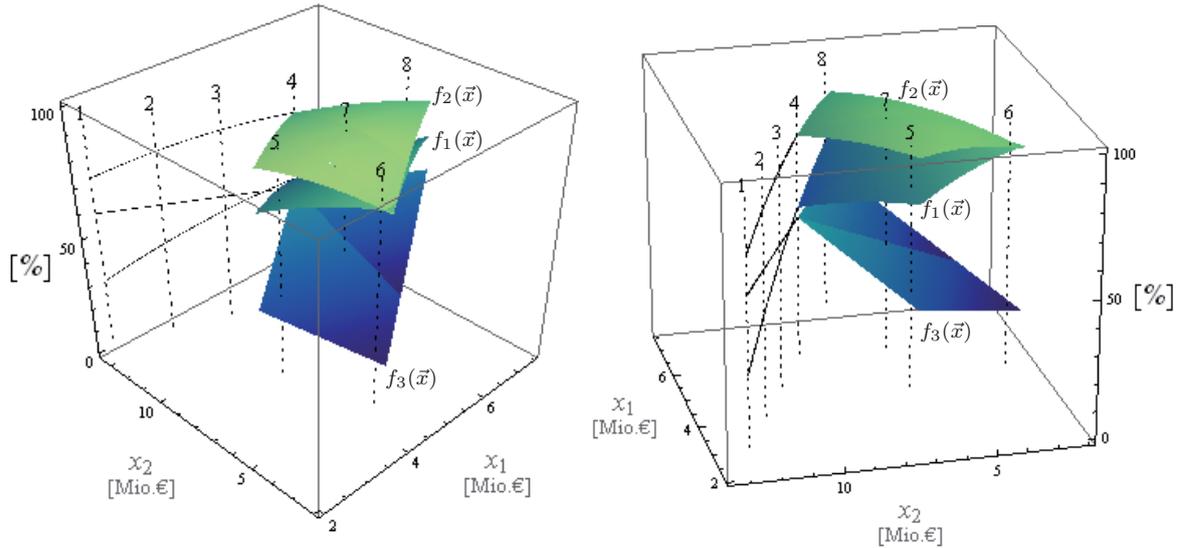


Abbildung 7.3: Bildmengen $\vec{f}(L_{Ps2})$ der pareto-optimalen Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

Ohne die Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x}) = 15 - x_1 - x_2 \geq 0$ wird Beispiel 7.1 in Planungssituation 2 zu einer Aufgabe der **simultanen Werbemix- und Werbebudgetplanung** (Beispiel B.2, S. 172). In den Teillösungsmengen L_i von L_{Ps2} aus Tabelle 7.4 wird der beschränkende Charakter der Werbebudgetrestriktion deutlich (vgl. z.B. L_2 oder L_4 aus Tabelle 7.4 und Tabelle 7.5). Wird Beispiel 7.1 in Planungssituation 2 ohne die Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x})$ gelöst, so ergibt sich die „nach oben offene“¹², pareto-optimale Lösungsmenge aus Tabelle 7.5. (Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.2 bzw. Unterunterabschnitt B.2.1.1.)

| Lösungsmenge | | $L_{Ps2} = \bigcup_{i=1}^2 L_i$ | |
|--------------|------------------|---------------------------------|--|
| L_i | x_1^* [Mio.€] | x_2^* | [Mio.€] |
| L_1 | $3 < x_1 \leq 4$ | \wedge | $19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ |
| L_2 | $4 < x_1$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ |

Tabelle 7.5: Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2 ohne Werbebudgetrestriktion)

Die optimale Werbebudgethöhe B^* berechnet sich in diesem Fall aus $B^* = \sum_{i=1}^2 x_i^* \forall \vec{x}^* \in L_{Ps2}$ (aus Tabelle 7.5). Dabei ist jedoch für jeden Werbemix aus L_2 zu beurteilen, ob das daraus folgende Werbebudget für den Werbetreibenden eine realistische

¹² „Nach oben offen“ bedeutet, dass x_1 und damit x_2 (aus mathematischer Sicht) nicht nach oben beschränkt sind.

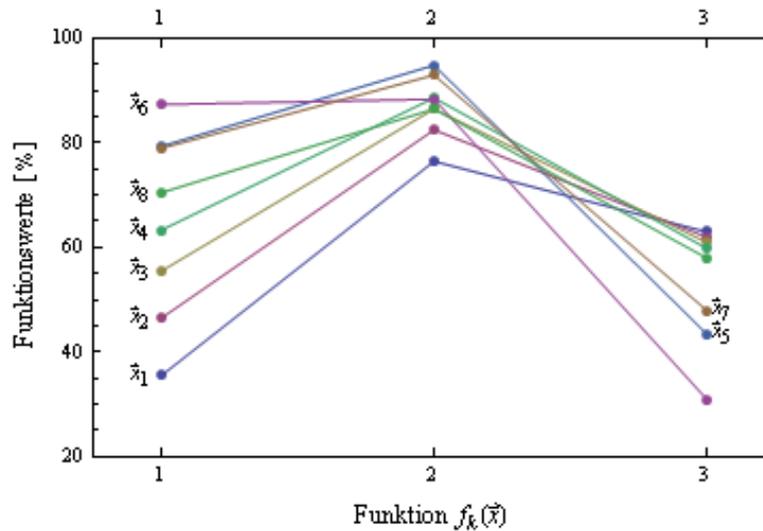


Abbildung 7.4: Vergleich von Funktionswerten der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ für ausgewählte pareto-optimale Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

Höhe annimmt, da x_1 bzw. x_2 nicht nach oben beschränkt ist.

Für den werbetreibenden Entscheider kann das Ergebnis aus Tabelle 7.5 für diese Entscheidungssituation der simultanen Werbemix- und Werbebudgetplanung in Planungssituation 2 wie folgt als **Optimalitätstheorem** interpretiert werden:

Für jede (beliebige) Werbebudgethöhe B^ und jeden darauf aufbauenden Werbemix \vec{x}^* (mit $B^* = \sum_{i=1}^2 x_i^*$), der die Bedingungen (insbesondere für L_2) aus Tabelle 7.5 erfüllt, ist der Werbemix pareto-optimal und effektiv.*

Alle Werbemixe, deren Aktivitätsniveau x_1 des ersten Werbeinstrumentes größer als 4 Mio. € ist und deren Werbebudget B^* zwischen $2,3334 \cdot (x_1 - 1)$ Mio. € und $3 + 2,3334 \cdot x_1$ Mio. € liegt, sind damit pareto-optimal und für den Entscheider hinsichtlich der zu erreichenden Zielausprägungen seiner verfolgten Werbeziele als gleich gut zu bewerten.

Eine wesentliche **Einschränkung der pareto-optimalen Werbemixe** erfolgt bei einer Erweiterung der Restriktionen. Entscheidet sich der Entscheider dafür, das mögliche, maximale Aktivitätsniveau eines Werbeinstrumentes z.B. in Form einer Werbeinstrumentrestriktion $x_2 \leq 8$ Mio. € zu beschränken, so wird für diese neue Werbemixplanungsaufgabe (Beispiel B.3, S. 174) die eingeschränkte Lösungsmenge L_{Ps2} generiert, die in Abbildung 7.5 dargestellt ist. (Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.2 bzw. Unterunterabschnitt B.2.1.2.)

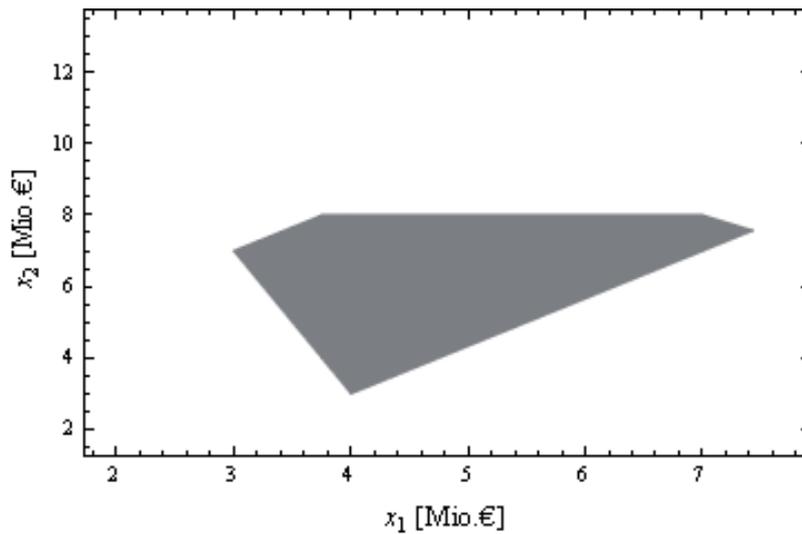


Abbildung 7.5: Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung))

Beim Vergleich der Lösungsmengen aus den Abbildungen 7.2 und 7.5 zeigt sich deutlich der erwartete, einschränkende Einfluss der 4. Werbeinstrumentrestriktion $x_2 \leq 8$.

Die Auswahl der für den Entscheider besten Lösung bleibt in den Situationen der Beispiele 7.1, B.2 und B.3 zu Planungssituation 2 dem Entscheider vorbehalten. Aus der detaillierten Darstellung der Lösungsmenge in Tabelle B.1 und Tabelle B.3 lässt sich jedoch erkennen, welche pareto-optimale Lösung zu welcher Gewichtung der Werbeziele gehört. Dies sollte dem Entscheider bei seiner Wahl helfen. \square

7.2.3 Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-priori-Mitarbeit

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

Planungssituation 4 aus Abbildung 7.1 stellt sich ein, falls der Entscheider in der Situation aus Abschnitt 7.1 folgende **Präferenzen** äußert: Die *Markensympathie*, das *Interesse* an einem Produkt dieser Marke und die *Eigenschaftskennntnisse* über dieses Produkt werden vom Entscheider als die zu verfolgenden drei **Werbeziele** benannt. Er entscheidet sich für die *Satisfizierung* (**Optimierungsart**) seiner drei zu optimierenden Werbeziele. Da er z.B. aufgrund seiner Erfahrung *a priori* wünschenswerte Werteausprägungen der Werbeziele angeben kann, ist damit der **Zeitpunkt seiner Mitarbeit** bzw. seiner die Werbeziele betreffenden Präferenzäußerungen gegeben. Die weiteren Eigenschaften seien wie in Planungssituation 1 gegeben.

Damit stellt sich wieder das Entscheidungsmodell aus Beispiel 7.1 ein, d.h. eine Werbemixplanungsaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit *konkaven* und *linearen* Zielfunktionen sowie *linearen* Nebenbedingungen, die nach den Vorstellungen des Entscheiders diesmal in Form einer *Satisfizierungsaufgabe* gelöst werden soll, in der die Entscheider-Präferenzen *a priori* eingehen. Damit sind alle notwendigen **Eigenschaften der Werbemixaufgabe** bestimmt und die Lösung dieser Aufgabe kann angegangen werden.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Eine mögliche, anwendbare A-priori-Lösungsmethode ist die „ ϵ -Constraint Method“¹³, die vom Entscheider zu erreichende Satisfizierungsziele abfragt¹⁴ und zur vorliegenden Aufgabe pareto-optimale Lösungen bestimmen kann. Ändert der Entscheider bei einer Iteration des Analyse-Lern-Entscheidung-Prozesses seine Präferenzen bzgl. seiner Mitarbeit, so kann die Methode ebenfalls als A-posteriori-Methode eingesetzt werden.

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Da der Entscheider in der Lage ist und den Wunsch hat, Präferenzen vor dem Lösungsprozess zu äußern und zwar in Form von Satisfizierungszielen $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^T$ der drei Werbewirkungsfunktionen $\vec{f}(\vec{x}) = (\vec{f}_1(\vec{x}), \vec{f}_2(\vec{x}), \vec{f}_3(\vec{x}))^T$, besteht die durch die „ ϵ -Constraint Method“ generierte Lösungsmenge L_{Ps4} aus einzelnen Lösungen. (*Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.3 bzw. Unterabschnitt B.3.2.*)

Wie in Planungssituation 1 stellen sich nach Lösung aller Ersatzprobleme $P_1(\vec{\epsilon})$, $P_2(\vec{\epsilon})$ und $P_3(\vec{\epsilon})$ die einzelnen Lösungen in Abhängigkeit der vom Entscheider in dieser Planungssituation benannten Satisfizierungsziele ein. Für pareto-optimale Lösungen \vec{x}^* von P_{MODM} ist $\vec{x}^* \in L_{Ps4} = \bigcap_{i=k}^3 L_{P_k(\vec{\epsilon})}$, wobei $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ die Lösungsmenge von $P_k(\vec{\epsilon})$ ist. Eine Übersicht von Lösungen für ausgewählte Satisfizierungsziele zeigt Tabelle 7.6.

¹³ Vgl. Abschnitt A.2, S. 160.

¹⁴ Bei der vorliegenden Satisfizierungsaufgabe sind zwei verschiedene Problemformulierungen zu unterscheiden: Zum einen besteht die Aufgabe, die Werbeziele zu maximieren unter der zusätzlichen Bedingung, dass die Werbeziele die angegebenen Satisfizierungsziele mindestens erreichen. Ein dabei einzuhaltendes Werbebudget wird bestmöglich ausgenutzt. Diese Zielsetzung verfolgt die „ ϵ -Constraint Method“.

Zum anderen kann die Aufgabe als Budgetminimierung unter Wahrung der Satisfizierungsziele als einzuhaltende Restriktionen formuliert werden. Es wird das minimale Werbebudget gesucht, für das gerade noch die Satisfizierungsziele für die Werbeziele eingehalten werden. Eine derartige Zielsetzung wird z.B. in Morey/McCann (1983) verfolgt. Zur Lösung derartiger Aufgaben können, je nach mathematischen Eigenschaften der eingehenden Funktionen, Methoden der LP und der NLP herangezogen werden und seien in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet, weil dann auch keine Mehrfach-Zielsetzungsproblematik (im eigentlichen Sinne) mehr vorliegt. Es ändern sich die zu optimierenden Größen und damit die Intention der Werbemixaufgabe von den Werbezielen hin zum Werbebudget. Mit den aus den verschiedenen Formulierungen resultierenden Konsequenzen für die Werbemixplanung beschäftigt sich z.B. Steffenhagen (2006b).

| Lösungen L_{Ps4} | | | |
|--------------------|----------------------|------------------------|-------------------------------|
| i | $\vec{\epsilon}^i$ | \vec{x}_i^* [Mio. €] | Bemerkung |
| 1 | $(81, 75, 12)^T$ | $(1, 1)^T$ | unzulässig |
| 2 | $(87, 90, 33)^T$ | $(4, 4)^T$ | pareto-optimal |
| 3 | $(63, 90, 57)^T$ | $(4, 10)^T$ | dominiert durch \vec{x}_4^* |
| 4 | $(69.4, 90, 57)^T$ | $(5.6, 8.8)^T$ | pareto-optimal |
| 5 | $(66.7, 90.5, 57)^T$ | $(4.8, 9.4)^T$ | $\vec{x}_5^* \notin L_{Ps4}$ |

Tabelle 7.6: Iterativ generierte Lösungen für ausgewählte Satisfizierungsziele der Werbeziele in Beispiel 7.1 (Planungssituation 4)

Die „ ϵ -Constraint Method“ besitzt gegenüber der zuvor betrachteten „Weighting Method“ den Vorteil, dass **eine Zielvorgabe des Entscheiders** – in Form der vorab zu spezifizierenden Satisfizierungsziele – bei der Anwendung der „ ϵ -Constraint Method“ **als „suboptimal“ identifiziert werden kann**. Die Satisfizierungsziele $\vec{\epsilon}^1 = (81, 75, 12)^T$ z.B. gehören zu der unzulässigen Lösung $\vec{x}_1 = (1, 1)^T$; sie wird durch die „ ϵ -Constraint Method“ nicht generiert, da $\vec{x}_1 \notin X$. \vec{x}_1 wird zudem dominiert durch die zulässige Lösung $\vec{x}_2^* = (4, 4)^T$, die durch die Satisfizierungsziele $\vec{\epsilon}^2 = (87, 90, 33)^T$ erzeugt wird. Wählt der Entscheider als Satisfizierungsziele $\vec{\epsilon}^3 = (63, 90, 57)^T$, so generiert die „ ϵ -Constraint Method“ nicht die zugehörige Lösung $\vec{x}_3^* = (4, 10)^T$, da diese durch die in diesem Falle generierte, pareto-optimale Lösung $\vec{x}_4^* = (5.6, 8.8)^T$ (mit den Zielen $\vec{\epsilon}^4 = (69.4, 90, 57)^T$) dominiert wird. \vec{x}_3^* wird durch den Werbemix $\vec{x}_5 = (4.8, 9.4)^T$ (mit den Zielen $\vec{\epsilon}^5 = (66.7, 90.5, 57)^T$) dominiert, der jedoch nicht zulässig ist, weil $\vec{x}_5 \notin L_{P_1(\vec{\epsilon})}$ und damit $\vec{x}_5 \notin L_{Ps4}$ ist, wie im nachfolgenden Beispiel zu Planungssituation 5 gezeigt wird.

Die Prozessstrukturierungshilfe ermöglicht es also in der vorliegenden A-priori-Planungssituation, dem Entscheider durch iteratives Durchlaufen der Entscheidungshilfe und ein damit verbundenes, iteratives Lösen der Entscheidungsaufgabe effektive und effiziente Werbemixe zu unterbreiten. \square

7.2.4 Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit

Ein gänzlich anderes Bild des Entscheidungsprozesses für Werbemixaufgaben zu Planungssituation 4 zeigt sich, falls der Entscheider keine Präferenzäußerungen bzgl. der Werbeziele vorab tätigen möchte oder kann, und lieber nachträglich eine Lösung aus einer Lösungsmenge auswählen will.

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

Falls der Entscheider keine Präferenzäußerungen bzgl. der Werbeziele in Form von Satisfizierungszielen vorab tätigt, wird aus Planungssituation 4 bei einer *a posteriori* **Mitarbeit** Planungssituation 5. Falls alle weiteren Eigenschaften der Planungssituation gleich bleiben, gilt es nun Beispiel 7.1 mit einer A-posteriori-Lösungsmethode für die *Satisfizierung* der Werbeziele (**Optimierungsart**) zu bewältigen.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Die Lösungsmethode „ ϵ -Constraint Method“ kann auch als A-posteriori-Methode eingesetzt werden. Als A-posteriori-Methode liefert sie, wenn mehr als eine pareto-optimale Lösung existiert, eine Lösungsmenge, aus der der Entscheider diejenige Lösung auswählen kann, die ihm am meisten zusagt. Sie bietet die Zielerreichungsart der Satisfizierung, da **die Menge der pareto-optimalen Werbemixe in Abhängigkeit möglicher Ausprägungen unbestimmter Satisfizierungsziele** generiert wird.

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Für Beispiel 7.1 in Planungssituation 5 stimmt die Menge L_{Ps5} der pareto-optimalen Lösungen mit der in Abbildung 7.2 und Tabelle 7.4 dargestellten Lösungsmenge überein. (*Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.3 bzw. Unterabschnitt B.3.1.*)

Die Lösungsmenge ergibt sich im Gegensatz zu Beispiel 7.1 in Planungssituation 2 aus der Schnittmenge¹⁵ der Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$, d.h. $L_{Ps5} = \bigcap_{k=1}^3 L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ (vgl. Tabelle B.5, S. 186), die durch verschiedene Wertebereiche der Satisfizierungsziele entstehen (vgl. Tabelle B.6-B.8, S. 187-189), und nicht durch Variation von Gewichtungen der Ziele. Zu beachten sind die ähnlichen, aber doch unterschiedlichen Lösungsmengen der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ (vgl. die schwarzen Ränder) in Abbildung B.5 (S. 185) und Tabelle B.5 (S. 186).

Mit der Anwendung der „ ϵ -Constraint Method“ als A-posteriori-Methode zeigt sich auch, warum Lösung¹⁶ $\vec{x} = (4.8, 9.4)^T$ aus Tabelle 7.6 keine pareto-optimale Lösung ist. Sie gehört zwar zur Lösungsmenge des zweiten und des dritten Ersatzproblems $P_2(\vec{\epsilon})$ und $P_3(\vec{\epsilon})$, d.h. $\vec{x} \in L_{P_2(\vec{\epsilon})}$ und $\vec{x} \in L_{P_3(\vec{\epsilon})}$,¹⁷ aber nicht zu der Lösungsmenge des ersten Ersatzproblems $P_1(\vec{\epsilon})$, d.h. $\vec{x} \notin L_{P_1(\vec{\epsilon})}$.¹⁸

¹⁵ Vgl. Abschnitt A.2, Punkt 5, Gleichung (A.6).

¹⁶ Für Lösung $\vec{x}_6 = (3, 7)^T$ aus Tabelle 7.2 ist dies leicht zu sehen: $\vec{x}_6 \in L_{P_2(\vec{\epsilon})}$ aber $\vec{x}_6 \notin L_{P_2(\vec{\epsilon})} \wedge \vec{x}_6 \notin L_{P_3(\vec{\epsilon})}$ (vgl. Tabelle B.5, S. 186).

¹⁷ Vgl. Tabelle B.7, S. 188 sowie Tabelle B.8, S. 189: Es ist $\vec{x} = (4.8, 9.4)^T \in L_4$ da mit $x_1 = 4.8$ gilt: $4 < x_1 < \frac{36}{7} \wedge x_2 = \frac{1}{3}(9 + x_1) = 9.4$.

¹⁸ Vgl. Tabelle B.6, S. 187: Es ist $\vec{x} \notin L_4$, da x_2 echt kleiner als $\frac{1}{3}(9 + 4x_1) = 9.4$ für $4 < x_1 < \frac{36}{7}$ ist.

Interessant für den Entscheider ist die Darstellung der Lösungen der Ersatzprobleme $P_k(\bar{\epsilon})$ in Tabelle B.6 - Tabelle B.8. Aus ihnen ist für den Entscheider ersichtlich, welche Werbezielausmaße (für die anderen Werbeziele) erreicht werden können, wenn ein Werbeziel – hier $f_k(\vec{x})$ – maximiert wird.

So folgt z.B. aus Teillösungsmenge L_3 in Tabelle B.6 des ersten Ersatzproblems $P_1(\bar{\epsilon})$, dass für Werbemixe mit Aktivitätsniveau x_1 für das erste Werbeinstrument in Höhe von 4 Mio. € und Niveaus x_2 für das zweite Werbeinstrument zwischen 3 Mio. € und 8,334 Mio. € die Wirkung für das erste Werbeziel maximal ist, aber für das zweite und dritte Werbeziel nur Ausmaße in (genau) der Höhe von $\epsilon_2 = \frac{1}{2}(140 + 14x_2 - x_2^2)$ und $\epsilon_3 = 17 + 4x_2$ erreicht werden können. Für den Werbemix von $x_1^*=4$ Mio. € und $x_2^*=4$ Mio. € werden damit folgende Ausprägungen der Werbeziele erreicht: $f_1(\vec{x}^*) = 87$, $\epsilon_2 = 90 = f_2(\vec{x}^*)$ und $\epsilon_3 = 33 = f_3(\vec{x}^*)$.

Im Gegensatz zu Planungssituation 4, in der der Entscheider lediglich Informationen über die Effektivität und Effizienz einiger einzelner Werbemixe erhält, die zu seinen vorab ausgewählten Satisfizierungszielen gehören, wird in Planungssituation 5 **die Lösungsmenge der pareto-optimalen Werbemixe vollständig dem Entscheider offenbart**. Während der Entscheider in Planungssituation 4 also durch die Bestimmung einzelner, pareto-optimaler Werbemixe zu seinen angegebenen Satisfizierungszielen bei der Entscheidungsfindung unterstützt wird, so kennt er in Planungssituation 5 die vollständige Menge der pareto-optimalen Werbemixe und muss entscheiden, welcher Mix besonders gefällt, in dem die zu erreichenden Wertausprägungen seiner Werbeziele für die Mixe jeweils entsprechend Tabelle B.6-B.8 berechnet werden.

Für den obigen Werbemix $\vec{x}^* = (4, 4)^T$ kann der Entscheider sicher sein, dass der Mix pareto-optimal ist – sofern $\vec{x}^* \in \bigcap_{k=1}^3 L_{P_k(\bar{\epsilon})}$ –, und dass die Wirkung des Mix $\vec{x}^* = (4, 4)^T$ in $f_1(\vec{x})$ maximal ist für alle Mixe, die für das zweite und dritte Werbeziel exakt die Werte $f_2(\vec{x}) = 90$ und $f_3(\vec{x}) = 33$ erzeugen (sonst wäre $\vec{x}^* = (4, 4)^T$ nicht pareto-optimal). \square

7.2.5 Satisfizierung nichtkonkaver Wirkungsfunktionen bei A-posteriori-Mitarbeit

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

Planungssituation 11 aus Abbildung 7.1 liegt vor, falls der Entscheider in der Situation aus Abschnitt 7.1 folgende **Präferenzen** äußert: Die *Werbeawareness*, die *Markensym-*

pathie und das *Produktinteresse* werden vom Entscheider als die zu verfolgenden drei **Werbeziele** benannt. Er entscheidet sich für die *Satisfizierung* (**Optimierungsart**) seiner drei Werbeziele. Da er vorab keine Präferenz bzgl. der Ziele äußern möchte, ist damit der **Zeitpunkt seiner Mitarbeit** bzw. seiner die Werbeziele betreffenden Präferenzäußerungen gegeben. Er muss *a posteriori* die für ihn befriedigendste Lösung aus der vollständigen Lösungsmenge auswählen. Die Wahl einzusetzender **Werbeinstrumente** fällt z.B. auf die *Print-* und *Fernsehwerbung*.¹⁹ Eine *Werbudgetrestriktion* beschränkt die Summe der Aktivitätsniveaus nach oben ($x_1 + x_2 \leq 15$ Mio. €), und für beide Werbeinstrumente sind gewisse *Mindestaktivitätsniveaus* anzusetzen ($x_1 \geq 2$ Mio. € (für TV) und $x_2 \geq 1$ Mio. € (für Print)), so dass die Werbeziele unter drei **Restriktionen** optimal erreicht werden müssen.

Für die **Rahmenbedingungen** der Ausgangssituation bzw. für die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen sei vereinfacht folgendes angenommen werden: Auf Grundlage von Tracking-Daten wurde der **funktionale Wirkungszusammenhang** der drei benannten Werbeziele empirisch bestimmt. Die Werbewirkungsfunktionen für die Werbeziele *Markensympathie* $f_2(\vec{x})$ und *Produktinteresse* $f_3(\vec{x})$ weisen die Funktionstypen 03 und 02 (Quadratisch), die für die *Werbeawareness* $f_1(\vec{x})$ den S-förmigen Funktionstyp 11 (Little) auf, vgl. dazu Tabelle 3.1. Folglich offenbarte die empirische Ermittlung als Instrumentinteraktionen eine Elastizitätsinteraktion aber keine Reaktionsinteraktion für die Werbeinstrumente. Unter der Annahme, dass das betrachtete Produkt und die Marke im Markt etabliert sind (**Werbezielobjekt**), ist ein bei geringer oder verschwindender Höhe der Aktivitätsniveaus der Werbeinstrumente verbleibendes Niveau in den zielbezogenen Werbewirkungen plausibel. Da die Werbeziele *Markensympathie* und *Produktinteresse* zu den **Werbewirkungsklassen** Einstellungen und Interessen gehören, ist ein *Übersättigungsverlauf* der Werbewirkungsfunktionen ebenfalls plausibel. **Dynamik** und **Wettbewerbseffekte** wurden schon in der grundlegenden Entscheidungssituation in Abschnitt 7.1 ausgeschlossen. Das Entscheidungsmodell lautet damit:

¹⁹ Hallemann (2001) findet für die in diesem Beispiel betrachtete Werbewirkung *Werbeawareness* abhängig von einem Werbemix der beiden betrachteten Instrumente *Print-* und *Fernsehwerbung* einen S-förmigen Verlauf, vgl. Hallemann (2001), S. 41f. Das in der Studie für die Aktivitätskomponenten verwendete Operationalisierungsmaß *Kontakte* kann nach Bruhn (2005), S. 54f, in das in der vorliegenden Arbeit verwendete monetäre Maß überführt werden.

Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \quad \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 1 + \frac{55 \cdot x_1^2}{7 + x_1^2} + \frac{40 \cdot x_2^2}{9 + x_2^2} && \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} && \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \end{aligned}$$

Abbildung B.6 (in Anhang B, S. 192) zeigt die Funktionsverläufe der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ im Intervall $x_i \in [0, 10]$. ■

Zusammenfassend ist dies eine Werbemixplanungsaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit zwei *konkaven* Zielfunktionen (f_2 und f_3) und einer *nichtkonkaven*, weil S-förmigen Zielfunktion (f_1) sowie *linearen* Nebenbedingungen, die nach den Vorstellungen des Entscheiders in Form einer *Satisfizierungsaufgabe* zu lösen ist, in der die Entscheider-Präferenzen *a posteriori* eingehen. Damit sind alle notwendigen **Eigenschaften der Werbemixaufgabe** bestimmt und die Lösung dieser Aufgabe kann angegangen werden.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Die Schwierigkeit bei dieser Werbemixplanungsaufgabe liegt in der nichtkonkaven Werbewirkungsfunktion $f_1(\vec{x})$. Während Rahders (1989), Freeland/Weinberg (1980) und Rao/Rao (1983) die Nichtkonkavitätsproblematik bei MODM-Problemen durch lineare Approximation des nichtkonkaven Teils der S-förmigen Funktion lösen und damit lediglich eine Näherungslösung bestimmen, sei für dieses Beispiel eine Lösungsmethode verwendet, die MODM-Probleme mit nichtkonkaven Werbewirkungsfunktionen auch ohne Näherungsansatz lösen kann, um die exakte Lösung zu bestimmen. Dieses Vorgehen ist unproblematisch, da aktuelle Computer-Algebra-Software und Personal Computer in der Lage sind, den dabei entstehenden Rechenaufwand in geringer Rechenzeit

zu bewältigen.

Die Lösungsmethode „ ϵ -Constraint Method“ kann auch MODM-Probleme mit nicht-konkaven bzw. nichtkonvexen Zielfunktionen lösen.²⁰ Als A-posteriori-Methode liefert sie, wenn mehr als eine pareto-optimale Lösung existiert, eine Lösungsmenge.

Die zur Lösung der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ eingesetzten Kuhn-Tucker-Bedingungen sind aufgrund der zu maximierenden, nichtkonkaven Wirkungsfunktion $f_1(\vec{x})$ lediglich notwendig, aber nicht hinreichend für lokale Optimallösungen. Das Lösen der mit den Kuhn-Tucker-Bedingungen verbundenen Gleichungssysteme der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ liefert daher Werbemixe, die lokal optimal sein können, aber es nicht sein müssen.²¹ Erst ein Test mit der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung²² zeigt, ob die berechneten Werbemixe lokale Optimallösungen der Kuhn-Tucker-Bedingungen der Ersatzprobleme und damit lokal pareto-optimale Lösungen von P_{MODM} aus Beispiel 7.2 sind.²³

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Abbildung 7.6 zeigt die Menge der möglichen lokal pareto-optimalen Werbemixe $L_{P_{s11}}$, die sich wie zuvor aus $L_{P_{s11}} = \bigcap_{k=1}^3 L_{P_k(\vec{\epsilon})}$, d.h. aus den möglichen lokalen Optimallösungen der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$, ergibt. In Abbildung B.7 (in Anhang B, S. 193) ist die mögliche (lokal) pareto-optimale Lösungsmenge $L_{P_{s11}}$ unterlegt mit der Menge der zulässigen Lösungen X in Beispiel 7.2. Aus Abbildung B.8 (in Anhang B, S. 199) gehen die Unterschiede (vgl. die Punkte und Ränder) der Lösungsmengen der drei Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ hervor.

Für die gesamte Lösungsmenge aus Abbildung 7.6 ist die Erfüllung der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung schwierig zu zeigen. Der Nachweis der lokalen Optimalität einzelner, ausgewählter Lösungen ist jedoch einfacher und soll anhand zweier Lösungen exemplarisch diskutiert werden.

Ist \vec{x}^* eine Lösung von $P_k(\vec{\epsilon}^*)$ (mit $\vec{\epsilon}^* = \vec{f}(\vec{x}^*)$) und \vec{x}^* erfüllt die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für ein k , so ist \vec{x}^* eine lokal pareto-optimale Lösung von P_{MODM} .²⁴ Die Lösungen $\vec{x}^* = (5, 5)^T \in L_{P_{s11}}$ und $\vec{x}^* = (6.471, 8.529)^T \in L_{P_{s11}}$ der Kuhn-Tucker-Bedingungen für $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ erfüllen die hinreichende Optimalitätsbedin-

²⁰ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 128f. und S. 274.

²¹ Vgl. Horst (1979), S. 190.

²² Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 58.

²³ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 152ff.

²⁴ Vgl. Chankong/Haimes (1978), S. 153.

gung zweiter Ordnung für $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ und sind somit lokal-optimale Lösungen von $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ und lokal pareto-optimale Lösungen von P_{MODM} in Beispiel 7.2.²⁵

Abbildung 7.7 zeigt die Bildmengen sowie die mögliche (lokal) pareto-optimale Lösungsmenge L_{Ps11} . (Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.4.) \square

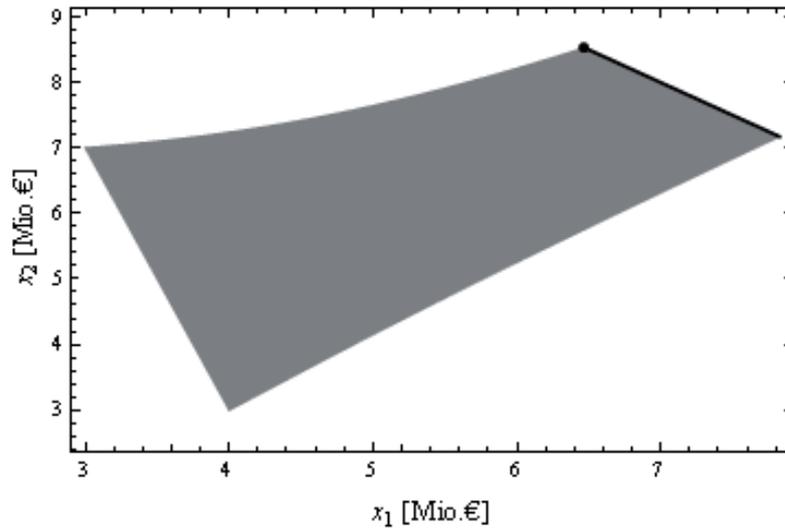


Abbildung 7.6: Mögliche Lösungsmenge L_{Ps11} in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

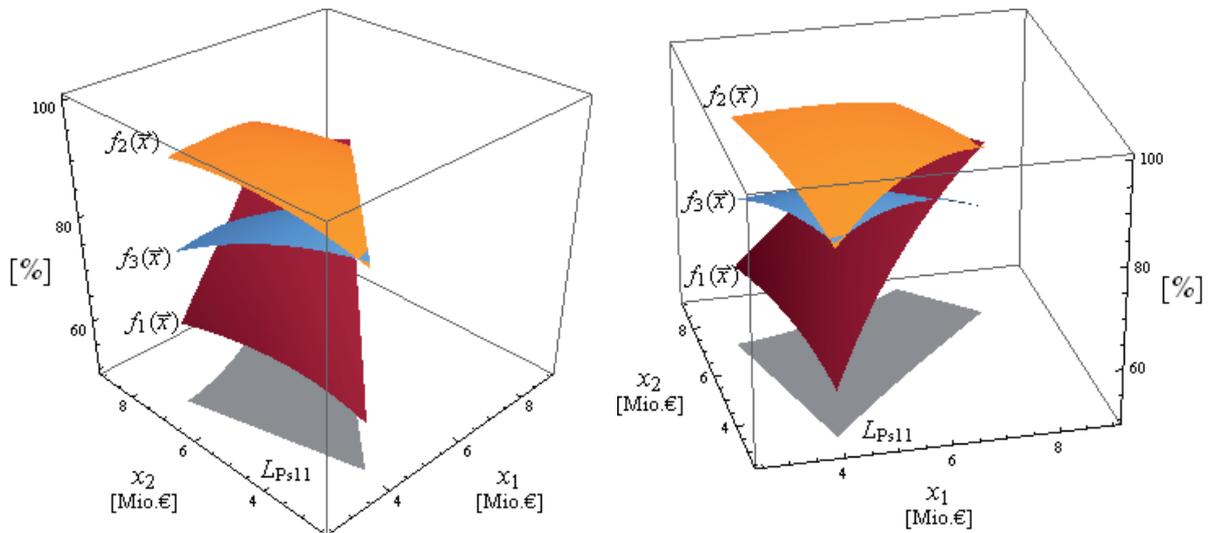


Abbildung 7.7: Bildmengen der möglichen (lokal) pareto-optimalen Lösungen in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

²⁵ Vgl. Abschnitt B.4, S. 192.

7.2.6 Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen bei interaktiver Mitarbeit

Ebene 1: Die Ausgangssituation - Präferenzen und Rahmenbedingungen

Planungssituation 6 aus Abbildung 7.1 stellt sich ein, falls der Entscheider in der grundlegenden Situation aus Abschnitt 7.1 folgende **Präferenzen** äußert: Die *Markensympathie*, das *Produktinteresse* an einem Produkt dieser Marke und die *Eigenschaftskennntnisse* über dieses Produkt werden vom Entscheider als die zu verfolgenden drei **Werbeziele** benannt. Er entscheidet sich für die *Satisfizierung* (**Optimierungsart**) seiner drei Werbeziele. Da er z.B. aufgrund seiner Erfahrung wünschenswerte Werteausprägungen der Werbeziele angeben kann und diesmal *interaktiv* am Lösungsprozess teilnehmen möchte, um die sich bietenden Möglichkeiten zu erkennen, ist damit der **Zeitpunkt seiner Mitarbeit** bzw. seiner die Werbeziele betreffenden Präferenzäußerungen festgelegt. Die weiteren Eigenschaften der Entscheidungssituation seien wie in Planungssituation 1 gegeben.

Damit stellt sich wieder das Entscheidungsmodell aus Beispiel 7.1 ein, d.h. eine Werbemixplanungsaufgabe bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit *konkaven* und *linearen* Zielfunktionen sowie *linearen* Nebenbedingungen, die nach den Vorstellungen des Entscheiders als *Satisfizierungsaufgabe* zu lösen ist, in die die Entscheider-Präferenzen *interaktiv* einfließen. Damit sind alle notwendigen **Eigenschaften der Werbemixaufgabe** bestimmt und die Lösung dieser Aufgabe kann angegangen werden.

Ebene 2: Relevante Lösungsmethoden

Eine „interaktive“ Lösungsmethode ist die „Reference Direction Method“²⁶, die es dem Entscheider erlaubt, durch **Angabe von Referenzpunkten**, d.h. von **zu erreichenden Wertausprägungen der Werbeziele**, und durch Festlegung der Anzahl an Lösungen die er präsentiert bekommen möchte, interaktiv am Lösungsprozess teilzunehmen.

Ebene 3: Das Lösen der Werbemixaufgabe

Vorab sei bemerkt, dass die nachfolgend verwendeten Referenzpunkte (\vec{z}^0 und \vec{z}^1) **nicht pareto-optimal** (aber zulässig) sind, so dass diese Punkte von der Methode nicht generiert werden, da eine bessere, pareto-optimale Lösung existiert und bestimmt werden

²⁶ Vgl. Abschnitt A.3, S. 162.

kann. Wählt der Entscheider dagegen Referenzpunkte, die zu **pareto-optimalen** Lösungen gehören (wie z.B. \vec{x}^3 oder \vec{x}^5), so würde die Methode diese Punkte als Lösungen des Algorithmus generieren und die Erwartungen des Entscheiders erfüllen. (*Eine detaillierte Darstellung der Lösung enthält Abschnitt B.5.*)

Mit dem Algorithmus A.3, S. 163, gilt dann:

Initialisierung: Eine zulässige **Initiallösung** ist z.B. $\vec{x}^0 = (3.4, 11.6)^T$ wie Tabelle 7.4 oder Abbildung 7.2 zeigt.

Es sei angenommen, der Entscheider ist mit der Lösung

$$\vec{f}^0 = \vec{f}(\vec{x}^0) = (50.34, 84.34, 61.6)^T \text{ mit } \vec{x}^0 = (3.4, 11.6)^T$$

nicht zufrieden.

Iteration 0: Der Entscheider möchte $q = 3$ weitere Lösungen sehen und wählt als **ersten Referenzpunkt** $\vec{z}^0 = (74.5, 94.5, 46)^T$ (dieser gehört zur Lösung $\vec{x} = (3, 8)^T$)²⁷, so dass sich die Zielfunktionswerte von $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$ verbessern sollen und sich der Zielfunktionswert $f_3(\vec{x})$ verschlechtern darf und zwar um maximal 15.6.

Iteration 0.1 Mit der 1. Lösung \vec{x}^1 des Ersatzproblems²⁸ $P(\psi, X_1)$

$$\vec{f}^1 = \vec{f}(\vec{x}^1) = (67.365, 90.853, 56.4)^T \text{ mit } \vec{x}^1 = (4.728, 9.304)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden!

Iteration 0.2 Mit der 2. Lösung \vec{x}^2 des Ersatzproblems $P(\psi, X_1)$

$$\vec{f}^2 = \vec{f}(\vec{x}^2) = (72.522, 93.306, 51.2)^T \text{ mit } \vec{x}^2 = (4.104, 8.472)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden!

Iteration 0.3 Mit der 3. Lösung \vec{x}^3 des Ersatzproblems $P(\psi, X_1)$

$$\vec{f}^3 = \vec{f}(\vec{x}^3) = (76.6, 94.68, 46)^T \text{ mit } \vec{x}^3 = (3.48, 7.64)^T$$

²⁷ I.d.R. ist dies dem Entscheider nicht bekannt, da er die Lösungsmenge nicht kennt. Für dieses Beispiel kennt der Leser jedoch die Lösungsmenge aus dem Beispiel zu Planungssituation 2.

²⁸ Vgl. in Abschnitt B.5 Definition B.5.1, S. 201.

ist der Entscheider ebenfalls *nicht* zufrieden, obwohl die gefundene Lösung den Referenzpunkt des Entscheiders übertrifft.²⁹ Dieses Übertreffen resultiert daraus, dass der erste Referenzpunkt \vec{z}^0 zu einer nicht pareto-optimalen Lösung gehört und somit durch eine pareto-optimale Lösung, hier $\vec{x}^3 = (3.48, 7.64)^T$, dominiert wird.

Da der Entscheider bereits drei Lösungen gesehen hat, muss er für eine neue Lösung einen neuen Referenzpunkt wählen. Dies folgt daraus, dass das Reduktionspotenzial der Initiallösung (das ist der Betrag, um den der Zielfunktionswert von $f_3(\vec{x})$ der Initiallösung \vec{f}^0 verringert werden darf; hier 15.6, da $f_3^0 = 61.4$ und $\vec{z}_3^0 = 46$), voll ausgeschöpft wurde.

Dieser Iterationsschritt endet hier, da dem Entscheider, wie von ihm gewünscht, $q = 3$ Lösungen in der Referenz-Richtung $\vec{z}^0 - \vec{f}^0$ präsentiert wurden. Für die nächsten Schritte muss der Entscheider einen neuen Referenzpunkt festlegen. Als neue **Initiallösung** fungiert nun die letzte gefundene Lösung \vec{x}^3 bzw. $\vec{f}^3 = \vec{f}(\vec{x}^3)$.

Iteration 1 Der Entscheider möchte $q = 2$ weitere Lösungen sehen und wählt als neuen und **zweiten Referenzpunkt** $\vec{z}^1 = (87, 85, 32)^T$ (dieser gehört zur Lösung $\vec{x} = (5, 3)^T$), so dass sich der Zielfunktionswert von $f_1(\vec{x})$ verbessern soll und sich die Zielfunktionswerte von $f_2(\vec{x})$ bzw. $f_3(\vec{x})$ verschlechtern dürfen, und zwar um maximal 9.68 bzw. 14.0.

Iteration 1.1 Mit der 4. Lösung \vec{x}^4 des Ersatzproblems $P(\psi, X_1)$

$$\vec{f}^4 = \vec{f}(\vec{x}^4) = (85.499, 89.84, 39)^T \text{ mit } \vec{x}^4 = (5.165, 4.626)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden!

Iteration 1.2 Mit der 5. Lösung \vec{x}^5 des Ersatzproblems $P(\psi, X_1)$

$$\vec{f}^5 = \vec{f}(\vec{x}^5) = (87.32, 87.88, 32)^T \text{ mit } \vec{x}^5 = (4.36, 3.48)^T$$

sei der Entscheider nun zufrieden und der Algorithmus endet hier.

Wäre der Entscheider nicht zufrieden, müsste er für eine neue Lösung einen neuen Referenzpunkt wählen. Dies folgt wieder daraus, dass das Reduktionspotenzial der dritten Zielfunktion f_3 (hier 14, da $f_3^3 = 46$ und $\vec{z}_3^1 = 32$)

²⁹ Dazu kann angenommen werden, dass der Entscheider im Laufe des Prozesses seine ursprünglichen Vorstellung über die wünschenswerten Ausprägungen seiner Werbeziele revidiert.

voll ausgeschöpft wurde. Die gefundene Lösung $\vec{f}(\vec{x}^5)$ übertrifft den Referenzpunkt des Entscheiders, da auch der zweite Referenzpunkt zu einer nicht pareto-optimalen Lösung gehört und somit von einer pareto-optimalen Lösung, hier $\vec{x}^5 = (4.36, 3.48)^T$, dominiert wird.

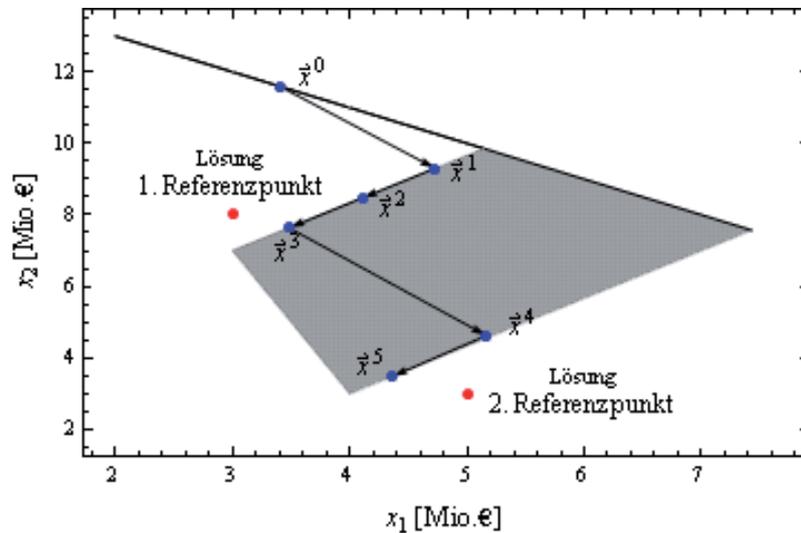


Abbildung 7.8: Interaktiv generierte Lösungen in Beispiel 7.1 (Planungssituation 6)

Die interaktiv berechneten und dem Entscheider präsentierten Werbemixe $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^5$ sowie deren Abfolge und Lage im Vergleich zu den erforderlichen Werbemixen der vom Entscheider geäußerten, wünschenswerten Ausprägungen der Werbeziele (Referenzpunkte) sind in Abbildung 7.8 dargestellt, unterlegt mit der bereits aus Planungssituation 2 (vgl. Abbildung 7.2) bekannten Lösungsmenge (grau), die dem Entscheider aber in Planungssituation 6 **nicht vermittelt wird**. Deutlich erkennbar ist, dass die **Lösungsmethode nur pareto-optimale Lösungen hervorbringt, die in Richtung der Referenzpunkte liegen** und sich ihnen sukzessiv annähern.

Alle dem Entscheider präsentierten **Lösungen sind effektiv**, weil sie pareto-optimal sind. Die **effiziente Lösung** ist \vec{x}^5 , da sie mit dem geringsten Mitteleinsatz ($B(\vec{x}^5) = 7,84$ Mio. €) der fünf generierten Lösungen verbunden ist. Die sukzessive Abnahme des Mitteleinsatzes der Lösungen $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^5$ resultiert daraus, dass aus Sicht der ersten Initiallösung ($\vec{f}(\vec{x}^0) = (50.34, 84.34, 61.6)^T$ mit $\vec{x}^0 = (3.4, 11.6)^T$), von der aus in Richtung der Referenzpunkte gesucht wird, die Referenzpunkte (und damit die zugehörigen Entscheidungsvektoren) – zunächst der erste (bei $\vec{x} = (3, 8)^T$), danach der zweite Referenzpunkt (bei $\vec{x} = (5, 3)^T$) – vom Entscheider (beabsichtigt oder nicht) näher am Nullpunkt des (x_2, x_1) -Raumes und damit näher im Bereich niedriger Budgets plat-

ziert werden. Die Auswahl der für den Entscheider besten Lösung (ob nun die effiziente Lösung mit dem geringsten Mitteleinsatz oder weil ein spezieller Zielfunktionsvektor besonders gefällt) bleibt wieder dem Entscheider überlassen.

Ein kostengünstigerer, pareto-optimaler Werbemix ist z.B. $\vec{x} = (4.1, 3.1)^T$. Er weist mit $B = 7,2$ Mio. € ein geringeres Budget auf, aber zugleich schlechtere Zielausprägungen in zwei der drei Ziele (da $\vec{f}(\vec{x}) = (87.49, 86.79, 29.7)^T$ ist). Erst nach einer Wiederaufnahme des Lösungsprozesses und entsprechender Wahl eines neuen Referenzpunktes durch den Entscheider kann dieser Werbemix gefunden werden.

Abbildung 7.9 zeigt die **Bildpunkte** der interaktiv generierten Lösungen $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^5$ der Werbemixaufgabe und die Bildmenge der gesamten pareto-optimalen Lösungen der drei Werbeziele. □

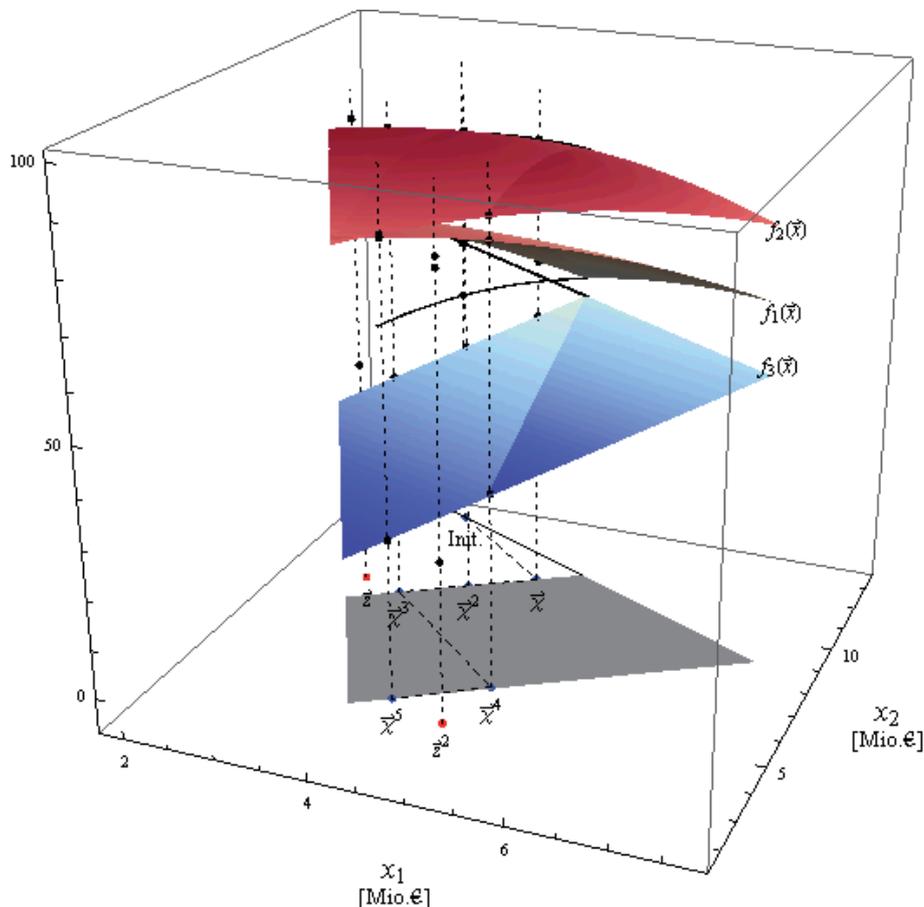


Abbildung 7.9: Bildpunkte interaktiv generierter Lösungen sowie Bildmenge der gesamten pareto-optimalen Lösungsmenge in Beispiel 7.1 (Planungssituation 6)

7.3 Kritische Würdigung der exemplarischen Werbemixaufgaben

Neben den Vorteilen analytischer sowie modellgestützter Verfahren als Auswahl- und Bewertungshilfen, die sie in der Praxis gegenüber betriebswirtschaftlichen Daumenregeln besitzen,³⁰ liegt ihr (wesentlicher) Vorteil in der **systematischen Herangehensweise** an die **Strukturierung** und **Lösung von Entscheidungsproblemen** und dem damit verbundenen Verständnis für deren Struktur, Möglichkeiten, Potenziale und die ablaufenden Wirkungsprozesse.³¹

Die vorgestellten **Beispiele zeigen diese Vorteile** bei dem dargestellten Einsatz derartiger Verfahren deutlich auf. Insbesondere der **Vergleich von Beispielen** zu unterschiedlichen Planungssituationen **offenbart dem Entscheider die Struktur, Möglichkeiten und Potenziale der zu lösenden Werbemixaufgabe** bzw. wie sich die **Alternativen der Entscheider-Präferenzen und Rahmenbedingungen**, die sich aus der vom Entscheider gewählten Werbezielformulierung ableiten, auf die Lösung der Werbemixaufgabe auswirken. Für den Entscheider ergeben sich (unterschiedlich) **aussagekräftige Ergebnisse** und für die jeweilige Situation gültige **Handlungsempfehlungen zur Entscheidungsunterstützung**, so dass die Verwendung betriebswirtschaftlicher Daumenregeln (auch) für Werbemixaufgaben mit mehrfacher, psychographischer Zielsetzung nicht notwendig erscheint. Insbesondere die in einer Planungssituation generierte Lösungsmenge, d.h. die vollständige Lösung oder einzelne Lösungen, die von der vorliegenden Art der Mitarbeit des Entscheiders abhängt, erlaubt es dem Entscheider unterschiedliche Schlussfolgerungen über die Effektivität und Effizienz der generierten Werbemixe zu ziehen.

Aus den Beispielen geht ebenfalls deutlich der **strukturierende Charakter** der in der vorliegenden Arbeit entwickelten **Prozessstrukturierungshilfe** hervor, indem die betrachteten Beispiele nach den einzelnen Elementen und Ebenen der Prozessstrukturierungshilfe (Abbildung 5.1) abgebildet wurden.

Die in Rahders (1989), Rao/Rao (1983) und Freeland/Weinberg (1980) zur Lösung von Mixaufgaben angewendeten **Näherungsverfahren sind bei den heutigen technischen und methodischen Möglichkeiten nicht mehr notwendig** und Entscheider können auch bei nichtkonkaven Maximierungsproblemen nach einer exakten Lösung

³⁰ Vgl. Steffenhagen (2008), S. 198ff.

³¹ Vgl. Homburg/Krohmer (2003), S. 132. Barzen/Richter (1989) stellen dies für Modelle zur ökonomischen Wirkungsmessung sogar als deren wesentlicher Vorteil heraus.

streben.

Die eingesetzten Methoden wurden wegen ihrer **Flexibilität**, ihrer **einfachen Anwendbarkeit** und ihrer **intuitiv verständlichen Lösungskonzepte** ausgewählt. Dies schließt nicht aus, dass auch andere Methoden aus Tabelle 5.1 die Anforderungen der Planungssituationen erfüllen und auf die betrachteten Beispiele angewendet werden könnten.

8 Schlussbetrachtungen

8.1 Zusammenfassung und Erkenntnisgewinn

Während in der Theorie zur Werbebudget- und Werbestreuplanung die Problematiken der **Budgetallokation** und des **Werbeinstrumente-Mix** einerseits für ein einzelnes, zu weit greifendes **ökonomisches Ziel der Werbung** und andererseits im Media-Mix für zu kurz greifende **Kontaktmengenziele** ausführlich diskutiert werden, bleibt – auch im Gegensatz zur der vielbetrachteten, auf eine ökonomische Zielsetzung fokussierte Marketing-Mix-Planung – die **Werbemixplanung auf Ebene der Werbeinstrumente und für psychographische Werbeziele** in der Literatur **weitestgehend unberücksichtigt**. Dies ist insofern überraschend, als die Ausgaben für Werbung von Unternehmen in Deutschland seit Jahren im zweistelligen Milliardenbereich liegen¹ und eine verbesserte **Budgetallokation** größere Wirkung zeigt als eine **Budgeterhöhung**.² Zudem weisen psychographische Werbewirkungen eine sehr viel größere Wirkungsnahe zu Werbeaktivitäten auf als die vielbetrachteten ökonomischen Ziele.³ Auch wenn in den letzten Jahren die empirische Forschung zur Werbung verstärkt Werbeinstrumente-Mixe und ihre Wirkung auf psychographische Werbeziele untersucht hat, so scheint die ökonomische Theorie die Werbemixplanung mit psychographischen Werbezielen **nicht umfassend zu behandeln**, obwohl eine derartige Werbemixplanung nicht auf eine ökonomische, d.h. auf Effektivität und Effizienz beruhende, Sichtweise verzichten muss.⁴

Die gleichzeitige **Verfolgung mehrerer Werbeziele in der Werbemixplanung** und der damit verbundenen **Verknüpfung der Theorie der Werbeplanung** und

¹ Vgl. ZAW (2007), ZAW (2008) und ZAW (2009).

² Vgl. Albers (1998).

³ Vgl. Berndt (1978), S. 10, Sander (2004), S. 526 oder Steffenhagen (1993), S. 287.

⁴ Vgl. Steffenhagen (2006b).

-wirkung mit den **Methoden des Operations Research** bleibt in der Marketing-Literatur ebenfalls **weitestgehend unbehandelt**.⁵

Daher ist es das **Ziel** der vorliegenden Arbeit, einen Beitrag zur Aufhebung dieser Betrachtungsdefizite für die **Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** zu leisten. Dazu erfolgte zunächst eine thematische Einordnung der Werbemixplanung in die Theorie der Werbeplanung und eine Präzisierung ihrer Entscheidungsfelder und Entscheidungselemente (Kapitel 2 und Kapitel 3). Als ein erstes **Zwischenergebnis** der vorliegenden Arbeit wurde in Abschnitt 3.4 eine umfassende Liste der in der Marketing-Literatur üblicherweise zur Modellierung von Wirkungsfunktionen verwendeten Funktionstypen aufgestellt und (mathematische) Eigenschaften wie erste und zweite Ableitung, Elastizitäts-, Reaktions- und Optimalitätsinteraktion für den Zwei-Instrumente-Fall berechnet (Anhang D). Aufbauend auf den vorangegangenen Kapiteln wurde die Problemstellung konkretisiert und die Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung aus Sicht des Multi-Objective-Decision-Making betrachtet (Kapitel 4).

Eine **normative Prozessstrukturierungshilfe** wurde dann in Kapitel 5 für den **Analyse-Lern-Entscheidungs-Prozess der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** entwickelt. Diese verfolgt gemäß ihrer Bezeichnung die Zielsetzung einer eindeutigen Strukturierung des Planungs- und Entscheidungsprozesses. Als **erste Leistung der Arbeit** stellt die entwickelte **Prozessstrukturierungshilfe** dem betriebswirtschaftlichen Entscheider ein Instrument zur Verfügung, das ihn bei der Identifizierung und Ordnung der relevanten zu treffenden (Teil-)Entscheidungen im Werbemixplanungsprozess unterstützt. So erzeugt sie für ihn Transparenz im Entscheidungsprozess, in den Konsequenzen seiner Entscheidungsalternativen, seinen Präferenzen und den zugrunde liegenden Rahmenbedingungen der zu lösenden Werbemixaufgaben. Aus der Systematisierung der zu strukturierenden Rahmenbedingungen folgen **zwei weitere Erkenntnisse**: Zum einem müssen die Rahmenbedingungen konsequenter zur Bewertung und Herleitung plausibler Werbewirkungsfunktionen herangezogen werden. Zum anderen gibt die vorgeschlagene Systematisierung der Rahmenbedingungen einen systematischen Ansatz zur Bestimmung plausibler Werbewirkungsfunktionen aus empirischen Forschungsergebnissen vor.

⁵ Vgl. z.B. Homburg/Krohmer (2003), S. 133 und Lilien/Rangaswamy (2003), S. 41, die im Marketing zu den wenigen Autoren gehören, die – wenn auch beiläufig – Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung ansprechen.

In Kapitel 6 wurden **Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung** hergeleitet. Derartige Theoreme stellen einen wesentlichen Bestandteil der wirtschaftswissenschaftlichen Theorie dar, da sich aus ihnen fallspezifische Entscheidungsregeln für unmittelbare Handlungsempfehlungen in Entscheidungssituationen zur Werbemixplanung entwickeln lassen. Optimalitätstheoreme zur Werbemixplanung mit mehrfacher, psychographischer Zielsetzung lassen sich aufgrund der verfolgten Mehrfach-Zielsetzung nicht direkt mit marginalanalytischen Methoden bestimmen. Das **zweite Ergebnis** der vorliegenden Arbeit ist: Aus dem verwendeten Ansatz, gängige Methoden des MODM zur Herleitung von Theoremen zu verwenden, folgt, dass die entwickelten Optimalitätstheoreme von schwer zu erfüllenden Voraussetzungen sowie aufgrund der von den MODM-Methoden verfolgten Lösungskonzepte von mathematischen Hilfsgrößen und damit von den Methoden selbst abhängen. Dies **erschwert eine sinnvolle, betriebswirtschaftliche Interpretation und Nutzung der abgeleiteten Theoreme** und damit die Verwendung der Theoreme als fallspezifische Entscheidungsregeln für unmittelbare Handlungsempfehlungen in Entscheidungssituationen zur Werbemixplanung.

Deshalb wurden in Kapitel 7 **numerische Beispiele für exemplarische Entscheidungssituationen der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** betrachtet, mittels der entwickelten Prozessstrukturierungshilfe analysiert, strukturiert und mit MODM-Methoden gelöst. Dabei wurden die Beispiele anhand einer **aus der Prozessstrukturierungshilfe abgeleiteten Systematisierung** für verschiedene Planungssituationen der Werbemixplanung kategorisiert. Die Lösung dieser exemplarischen Werbemixaufgaben zeigt den strukturierenden Charakter der Prozessstrukturierungshilfe und deckt für den Entscheider zu treffende Entscheidungen und ihre Konsequenzen für die betrachteten, exemplarischen Entscheidungssituationen der Werbemixplanung auf. Die Möglichkeiten zur Bewertung der Effektivität und Effizienz der Werbemixe hängt zudem von den geäußerten Präferenzen des Entscheiders ab. Neben diesen Ergebnissen der einzelnen Beispiele ist als **dritte Erkenntnis** die Tatsache zu benennen, dass eine **gleichzeitige Verfolgung mehrerer, psychographischer Werbeziele in der Werbemixplanung** (auch bei nichtlinearen bzw. nichtkonkaven Werbewirkungsfunktionen) **nicht zu scheuen ist** und dass mit neueren MODM-Methoden und modernen Computer-Algebra-Systemen **genaue Lösungen für derartige Probleme generiert werden können**. Eine selbst auferlegte Beschränkung durch Generierung von Näherungslösungen bei Problemen mit nichtlinearen Funktionen wie in Rahders (1989), Rao/Rao (1983) oder Freeland/Weinberg

(1980) ist damit hinfällig und eine Einschränkung möglicher Funktionstypen zur Modellierung von Werbewirkungsfunktionen auf (mathematisch einfache) lineare oder konkave Funktionen unnötig.

Bei dem Ansatz, gängige Wirkungsfunktionen aus der Marketing-Literatur in Werbemixplanungsaufgaben zu verwenden, zeigt sich bei der Bestimmung der Eigenschaften dieser Wirkungsfunktionen in Anhang C und D, dass mit diesen Funktionen als Werbewirkungsfunktionen **keine Optimalitätsinteraktion** modelliert werden kann. Dies resultiert aus einem Wechsel der Betrachtungsebene für die Wirkungsfunktionen. Bei einer in der Literatur üblicherweise verfolgten ökonomischen Zielsetzung fließen die Wirkungsfunktionen in eine übergeordnete Gewinn-Funktion ein. Bei der Betrachtung psychographischer Werbeziele werden die Funktionen direkt als Werbewirkungsfunktionen angesetzt. Lediglich die wenig bekannte „Zentler & Ryde“-Funktion weist eine nichtverschwindende Optimalitätsinteraktion auf. Dieses **vierte Ergebnis** der vorliegenden Arbeit muss, falls Interaktionseffekte von Werbeinstrumenten zur Beurteilung der Plausibilität von Werbewirkungsfunktionen angesetzt werden – wie von Hruschka (1991) gefordert –, bei der Auswahl von Werbewirkungsfunktionen berücksichtigt werden. Dies kann, da nur eine einzige Funktion eine nichtverschwindende Optimalitätsinteraktion aufweist, eine wesentliche Einschränkung bei der zur Modellierung von Werbewirkungszusammenhängen zur Verfügung stehenden Funktionen bedeuten und die Suche nach „neuen“ Wirkungsfunktionen erfordern.

8.2 Grenzen der vorliegenden Arbeit und Ausblick

Die **Grenzen** der vorliegenden Arbeit liegen vor allem in der **Ausklammerung konkurrenzbezogener und dynamischer Effekte der Werbung**. Zeitübergreifende Wirkungen des werblichen Instrumentariums wie Time-Lag-, Carry-Over- oder Wear-Out-Effekte können als empirisch fundiert angesehen werden und nehmen bei der Wirkungsmodellierung oft eine Schlüsselrolle ein.⁶ Die in der Praxis realistischere Verfolgung mehrerer Werbeziele hat auch bei der Berücksichtigung zeitübergreifender Wirkungen und einer Werbeplanung über mehrere Planungsperioden Bestand, so dass zur quantitativen Lösung dynamischer Werbemixaufgaben auch **dynamische Multi-Objective-Decision-Making-Ansätze** anzuwenden wären.

⁶ Vgl. ter Haseborg (1984).

Die Modellierung dieser dynamischen Effekte in Entscheidungsmodellen steht dabei nicht im Vordergrund der Betrachtung. Derartige dynamische Ansätze wie z.B. BRANDAID⁷ oder die wie die Modelle von Vidale/Wolfe⁸, Gould⁹ und Horsky¹⁰ sind in der Marketing-Literatur bereits vielfach diskutiert worden.¹¹ Dies gilt ebenso für die an dynamische Modelle anzulegenden und aus der empirischen Forschung abzuleitenden Anforderungen.¹² Jedoch wäre zu analysieren, **wie die dynamische Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung mit den Lösungskonzepten des dynamischen Multi-Objective-Decision-Making vereinbar ist.** Dies erscheint notwendig, da Optimierungsmodelle mit mehrfacher Zielsetzung und dynamischer Natur zu MODM-Problemen des Endzustandes, zu sequentiell zu lösenden und aufeinander aufbauenden MODM-Problemen oder zur Optimierung von Zustandskurven führen können.¹³ Die Modellierung dynamischer Aspekte kann zudem durch verschiedene mathematische Ansätze wie z.B. Differentialgleichungen, Differenzgleichungen, Gleichungen mit Differentialen oder Integralen führen. Deshalb ist zu klären, welcher Modellierungsansatz der dynamischen Werbemixplanung zu welchen dynamischen MODM-Lösungskonzepten passt. Eine analoge Betrachtung für die Berücksichtigung von Wettbewerbseffekten in der Werbemixplanung bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung wäre ebenfalls noch anzugehen.

Eine weitere, vielversprechende Forschungsfrage ist der in Abschnitt 5.3 vorgeschlagene Ansatz zur systematischen Deduktion plausibler Werbewirkungsfunktionen. Dazu sind **Ergebnisse der empirischen Forschung und Hypothesen zu psychographischen Werbewirkungszusammenhängen in der Marketing-Literatur aufzufinden und zu analysieren.** Ein daraus zu erstellender „Baukasten“ von Plausibilitätsüberlegungen und Ableitungsregeln wäre aufzustellen, um die Eigenschaften plausibler Werbewirkungsfunktionen abzuleiten sowie die Auswahl an Funktionstypen aus der Liste der in der Marketing-Literatur üblicherweise zur Modellierung von Wirkungszusammenhängen verwendeten Funktionen für psychographische Werbewirkungen weiter einzuschränken. Damit einher geht die Frage nach der Bewältigung bzw. dem **Umgang mit der den meisten Wirkungsfunktionen fehlenden Optimalitätsinteraktion auf Ebene der psychographischen Werbewirkungen.**

⁷ Vgl. Little (1975a) und Little (1975b).

⁸ Vgl. Vidale/Wolfe (1957).

⁹ Vgl. Gould (1970).

¹⁰ Vgl. Horsky (1977).

¹¹ Vgl. Depluet (1991) oder Rahders (1989).

¹² Vgl. ter Haseborg (1983), ter Haseborg (1984) oder ter Haseborg (1990).

¹³ Vgl. Wierzbicki (1988).

Eine weitere, interessante Erweiterung der vorliegenden Arbeit wäre zudem, die **Auswahl geeigneter Lösungsmethoden zur Bewältigung von Werbemixaufgaben bei mehrfacher, psychographischer Zielsetzung** als **MADM-Problem** zu formulieren und zwar unter Berücksichtigung der aus der Prozessstrukturierungshilfe abgeleiteten Anforderungen an MODM-Lösungsmethoden und weiterer, möglicher Auswahl- und Bewertungskriterien. Die Auswahl der hier angewendeten Lösungsmethoden war geprägt durch das Ziel, möglichst intuitive, schnell zu verstehende und flexible Lösungskonzepte einzusetzen. Der Ansatz, die Auswahlproblematik mit Multi-Attribute-Decision-Making-Methoden zu lösen, erlaubt es für verschiedene Werbemixplanungssituationen, die für die daraus entstehenden Werbemixaufgaben und den Entscheider „beste“ Lösungsmethode zu identifizieren. Dies und ein aus der Prozessstrukturierungshilfe abzuleitender Fragenkatalog kann dann zur Erweiterung des von Depluet (1991) entwickelten Decision Support Systems zur Berücksichtigung der Mehrfach-Zielsetzung und der Auswahl geeigneter Lösungsmethoden genutzt werden.

A Beschreibung von Lösungsmethoden

Im Folgenden wird eine **kurze Einführung** und **Beschreibung der wichtigsten Eigenschaften** derjenigen Lösungsmethoden gegeben, die zur Herleitung von Optimalitätstheoremen der Werbemixplanung in Kapitel 6 und zur Bewältigung der Beispiele zu den Planungssituationen aus Kapitel 7 verwendet werden, um dem Leser einen raschen Überblick über die verwendeten Methoden und einen komfortablen Einstieg in diese Themen zu ermöglichen. Es erfolgt der Kürze halber nur eine summarische Darstellung der Methoden. Für Details und Beweise wird an den entsprechenden Stellen auf ausführlichere Fachliteratur hingewiesen.

Die eingesetzten Methoden wurden wegen ihrer **Flexibilität, Einfachheit** und **intuitiv verständlichen Lösungskonzepte** ausgewählt. Sie erfüllen die aus der Prozessstrukturierungshilfe abgeleiteten Anforderungen an Lösungsmethoden im Kontext der psychographischen Werbemixplanung: sie berücksichtigen die Art der Mitarbeit des Entscheiders (a priori, a posteriori oder interaktiv), den Verlauf der Wirkungsfunktionen (konkav oder nichtkonkav) sowie die zu verfolgende Optimierungsart (Satisfizierung oder Extremierung). Dies schließt nicht aus, dass auch andere Methoden aus Tabelle 5.1 die Anforderungen der Planungssituationen erfüllen und auf die betrachteten Beispiele angewendet werden könnten.

Die Beschreibungen der Methoden bauen in der vorliegenden Arbeit auf eine **Formulierung als Maximierungsproblem** auf, da die Maximierung psychographischer Werbewirkungen im Rahmen der Werbemixplanung angestrebt wird. Die Maximierungsformulierung kann in die in der OR-Literatur übliche Minimierungsformulierung überführt werden, um ggfs. den Einstieg in die Methoden-Beschreibungen der weiterführenden Fachliteratur zu erleichtern.

A.1 „Weighting Method“

Die „Weighting Method“¹ verwendet einen Skalarisierungsansatz zur Bewältigung von VOP wie P_{MODM} . Dabei verfolgt diese Methode die Strategie, mit jeder Zielfunktion f_k einen (Gewichtungs-)Koeffizienten w_k zu verknüpfen und die gewichtete Summe der Zielfunktionen zu maximieren. Damit wird das Problem P_{MODM} in das folgende **Skalarisierungsproblem** $P(\vec{w})$ transformiert.

A.1 Definition (Ersatzproblem $P(\vec{w})$)

Es seien die Funktionen $f_k, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $k=1, \dots, p, r=1, \dots, m$ und $1 < p, n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m \in \mathbb{N}$ gegeben.

$$P(\vec{w}) : \quad \max_{\vec{x} \in X} \sum_{k=1}^p w_k \cdot f_k(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{O} \right\} \quad (\text{A.1})$$

wobei für die Gewichte gilt: $\vec{w} = (w_1, \dots, w_p)^T \in W$ mit $W := \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^p \mid \forall k = 1, \dots, p$ ist $w_k \geq 0 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^p w_k = 1 \}$. ■

Die grundlegenden Eigenschaften dieser Methode sind:²

- Ist \vec{x}^0 für einen Vektor \vec{w}^0 eine optimale Lösung des Problems $P(\vec{w}^0)$, dann ist \vec{x}^0 eine pareto-optimale Lösung von P_{MODM} , falls \vec{x}^0 eindeutig ist oder falls alle Gewichte w_k^0 echt positiv, d.h. $w_k^0 > 0$, sind.
- Sind die Zielfunktionen $f_k(\vec{x})$ konkav und die Menge X konvex, dann existiert für jede pareto-optimale Lösung \vec{x}^* von P_{MODM} ein Vektor \vec{w} , so dass \vec{x}^* Lösung von $P(\vec{w})$ ist. Unter der Voraussetzung der Konkavität bedeutet dies, dass **durch Lösen des Problems $P(\vec{w})$ alle pareto-optimalen Lösungen von P_{MODM} gefunden werden können.**
- Damit gilt für folgende (Lösungs-)Mengen:

$$X^* \subseteq X_w \quad \wedge \quad X'_w \subseteq X^* \quad \wedge \quad X''_w \subseteq X^* \quad (\text{A.2})$$

und unter der Voraussetzung, dass alle f_k streng konkav sind:

$$X^* = X'_w = X''_w \quad (\text{A.3})$$

¹ Vgl. Saaty/Gass (1954), Gass/Saaty (1955a), Gass/Saaty (1955b) und Zadeh (1963).

² Vgl. für Details und Beweise Chankong/Haimes (1983), Kap. 4 oder Miettnin (1999), Kap. 3.1.

$$\begin{aligned} \text{wobei } X_w &:= \{ \vec{x} \mid \vec{x} \text{ löst } P(\vec{w}) \text{ für ein } \vec{w} \in W \}, \\ X'_w &:= \{ \vec{x} \mid \vec{x} \text{ löst } P(\vec{w}) \text{ für ein } \vec{O} < \vec{w} \in W \}, \\ X''_w &:= \{ \vec{x} \mid \vec{x} \text{ ist eindeutige Lösung von } P(\vec{w}) \text{ für ein } \vec{w} \in W \} \text{ und} \\ X^* &:= \{ \vec{x} \mid \vec{x} \text{ ist pareto-optimale Lösung von } P_{MODM} \} \end{aligned}$$

- Ohne die Voraussetzung der Konkavität der zu maximierenden Zielfunktionen sind die Lösungen von $P(\vec{w})$ schwach pareto-optimal („weakly pareto optimal“).³

Die „Weighting Method“ erlaubt es also bei **konkaven** Zielfunktionen die Menge der (global) pareto-optimalen Lösungen zu bestimmen. Ohne Konkavität liefert sie (schwach) pareto-optimale Lösungen.

Anwendung findet sie sowohl als **A-posteriori-** als auch als **A-priori-Methode** und bietet in beiden Fällen die Optimierungsart der **Extremierung**. Erfolgt eine iterative Anwendung der Methode, indem der Entscheider sukzessiv die Koeffizienten nach Auffinden einer Lösung modifiziert und das Problem erneut löst, so kann die „Weighting Method“ auch als interaktive Methode interpretiert werden, was jedoch unüblich ist.

In der **A-priori-Variante** fließen die Präferenz-Informationen des Entscheiders als vorab festzulegende Koeffizienten w_k der Zielfunktionen in das Skalarisierungsproblem $P(\vec{w})$ ein. Eine mögliche **Interpretation der Koeffizienten** ist, dass sie die relative Wichtigkeit der Zielfunktionen für den Entscheider widerspiegeln⁴ oder aber auch als Rate angesehen werden können,⁵ unter der der Entscheider bereit ist, Wertausprägungen der Zielfunktionen gegeneinander abzuwägen. Die Interpretation der Koeffizienten variiert in der Literatur und ist für Entscheider oft nur schwer verständlich.⁶

In der **A-posteriori-Variante** bleiben die Gewichtungen w_k unbestimmt und der Entscheider muss aus der Menge der pareto-optimalen Lösungen X'_w , die von Wertebereichen der Gewichtungen abhängen, die für ihn beste Lösung auswählen.

Bei den Zielfunktionen f_k ist zu beachten, dass sie normalisiert sein sollten oder dass sie in etwa den gleichen Wertebereich abdecken, da andernfalls die Rolle der Koeffizienten missverständlich ist und zu unerwünschten Ergebnissen führen kann. I.d.R. lässt sich zudem **durch systematische Variation der Gewichtungen keine entsprechende systematische Generierung von Lösungen erzielen**.⁷

³ Eine schwach (eng.: „weakly“) pareto-optimale Lösung ist eine zulässige Lösung \vec{x}^* , falls es keine zulässige Lösung \vec{x} gibt, die in allen Zielfunktionswerten besser als \vec{x}^* ist, d.h. zu $\vec{x}^* \in X$ existiert kein $\vec{x} \in X$ mit $f_k(\vec{x}) < f_k(\vec{x}^*) \quad \forall k \in \{1, \dots, p\}$. Vgl. Mietinen (1999), S. 19.

⁴ Vgl. Roy/Mousseau (1995).

⁵ Vgl. Hobbs (1986).

⁶ Vgl. Wierzbicki (1986a).

⁷ Zur systematischen Generierung der Lösungen durch Variation der Koeffizienten und die dabei zu beachtenden Besonderheiten, vgl. z.B. Chankong/Haimes (1983), S. 234ff. oder Steuer (1986), S.

Probleme der Art $P(\vec{w})$ lassen sich bei **geringer Komplexität**, d.h. geringer Anzahl von (unkomplizierten) Zielfunktionen und Restriktionen durch Aufstellen der **Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Skalarisationsfunktion** $F(\vec{x}) := \sum_{k=1}^p w_k \cdot f_k(\vec{x})$ und dann nachfolgend durch analytische Überlegungen oder durch Verwendung von Computer-Algebra-Systemen wie z.B. Mathematica, Maple, Derive, MATLAB, etc. lösen.

Durch Kombination der „Weighting Method“ mit der nachfolgenden „ ϵ -constraint Method“ lassen sich die pareto-optimalen Lösungen auch **ohne** die Voraussetzung der Konvexität generieren.⁸

A.2 „ ϵ -constraint Method“

Die „ ϵ -constraint Method“⁹ verwendet einen Skalarisationsansatz zur Bewältigung von VOP wie P_{MODM} . Dabei verfolgt diese Methode die Strategie, das ursprüngliche Problem P_{MODM} in (sequentiell) zu lösende (skalare) Teilprobleme zu zerlegen. Die einzelnen Teilprobleme optimieren dabei jeweils eine einzelne, ursprüngliche Zielfunktion derart, dass die anderen Zielfunktionen bestimmte Satisfizierungsziele (definiert in Form von Ungleichheitsrestriktionen) einhalten. Damit wird das Problem P_{MODM} in eine Serie der nachfolgenden **Skalarisationsprobleme** $P_k(\vec{\epsilon})$ transformiert. Die ausgewählte einzelne, ursprüngliche Zielfunktion $f_k(\vec{x})$ fungiert in dem entsprechenden Teilproblem $P_k(\vec{\epsilon})$ als Skalarisationsfunktion ($F(\vec{x}) := f_k(\vec{x})$). Erst nach Lösung aller Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon}) \forall k = 1, \dots, p$ ist die Lösungsmenge von P_{MODM} bestimmt.

A.2 Definition (k^{th} -objective ϵ -constraint problem)

Es seien die Funktionen $f_k, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $k=1, \dots, p, r=1, \dots, m$ und $1 < p, n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m \in \mathbb{N}$ gegeben.

$$P_k(\vec{\epsilon}) : \begin{array}{l} \max_{\vec{x} \in X} f_k(\vec{x}) \\ \text{so dass} \quad f_l(\vec{x}) \geq \epsilon_l \quad \forall l = 1, \dots, p \quad \wedge \quad l \neq k \\ \text{mit} \quad X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{O} \right\} \end{array} \quad (\text{A.4})$$

wobei $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_p)^T \in \mathbb{R}^{p-1}$. ■

⁸ 198ff.

⁸ Vgl. Miettinen (1999), S. 96.

⁹ Vgl. Haimes et al. (1971). Zur Einordnung der „ ϵ -constraint Method“ als Skalarisationsmethode vgl. Ehrgott/Wiecek (2005), S. 678f.

Die grundlegenden Eigenschaften dieser Methode sind:¹⁰

- Ist \bar{x}^0 für einen Vektor $\bar{\epsilon}^0$ die optimale Lösung des Problems $P_k(\bar{\epsilon}^0)$ (und $P_k(\bar{\epsilon}^0)$ ist für $\bar{\epsilon}^0$ zulässig), dann ist \bar{x}^0 eine pareto-optimale Lösung von P_{MODM} falls \bar{x}^0 für ein k eindeutig ist oder falls \bar{x}^0 eine Lösung von $P_k(\bar{\epsilon}^0)$ für alle $k = 1, \dots, p$ ist.
- Solange $P_k(\bar{\epsilon})$ für ein gewähltes $\bar{\epsilon}$ zulässig ist, kann mit der „ ϵ -constraint Method“ zumindest ein Teil der pareto-optimalen Lösungen gefunden werden.
- Für jede gegebene pareto-optimale Lösung \bar{x}^* von P_{MODM} existiert ein $\bar{\epsilon}^* \in \mathbb{R}^{p-1}$, so dass \bar{x}^* für alle $k = 1, \dots, p$ die Probleme $P_k(\bar{\epsilon}^*)$ löst. Ein derartiges $\bar{\epsilon}^*$ ist z.B. $\epsilon_l^* = f_l(\bar{x}^*)$ für $l = 1, \dots, p$ und $l \neq k$.
- Da Konkavität für die Zielfunktionen nicht vorausgesetzt wird, bedeutet dies, dass alle pareto-optimalen Lösungen von P_{MODM} durch Lösen aller Ersatzprobleme $P_k(\bar{\epsilon})$ (für $k = 1, \dots, p$) bestimmt werden können.
- Damit gilt für folgende (Lösungs-)Mengen:

$$\hat{X}_{\bar{\epsilon}}^k \subseteq X^* \subseteq X_{\bar{\epsilon}}^k \quad (\text{A.5})$$

und

$$\bigcap_{k=1}^p X_{\bar{\epsilon}}^k \subseteq X^* \subseteq X_{\bar{\epsilon}}^k \quad (\text{A.6})$$

wobei $Y_k := \{\bar{\epsilon} \mid \text{für } \bar{\epsilon} \text{ ist } P_k(\bar{\epsilon}) \text{ zulässig}\}$,

$X_{\bar{\epsilon}}^k := \{\bar{x} \mid \bar{x} \text{ löst } P_k(\bar{\epsilon}) \text{ für ein } \bar{\epsilon} \in Y_k\}$,

$\hat{X}_{\bar{\epsilon}}^k := \{\bar{x} \mid \bar{x} \text{ ist eindeutige Lösung von } P_k(\bar{\epsilon}) \text{ für ein } \bar{\epsilon} \in Y_k\}$ und

$X^* := \{\bar{x} \mid \bar{x} \text{ ist eine pareto-optimale Lösung von } P_{MODM}\}$

- Die Lösungen von $P_k(\bar{\epsilon})$ sind schwach pareto-optimal („weakly pareto optimal“).
- Im Falle, dass die zu maximierende Zielfunktion f_k von $P_k(\bar{\epsilon})$ streng konkav ist, ist die Lösung von $P_k(\bar{\epsilon})$ eindeutig. Ist $f_k(\bar{x})$ nur konkav, so müssen zur Überprüfung der Eindeutigkeit einer pareto-optimalen Lösung die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung zu Rate gezogen werden.¹¹

¹⁰ Vgl. für Details und Beweise Chankong/Haimes (1983), Kap. 4 oder Miettinen (1999), Kap. 3.1.

¹¹ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 131.

Mit dieser Methode kann die Menge der pareto-optimalen Lösungen X^* sowohl für **konkave** als auch für **nichtkonkave** Zielfunktionen bestimmt werden.¹²

Sie findet Anwendung sowohl als **A-posteriori-** als auch als **A-priori-Methode** und bietet im ersten Falle die Optimierungsart der **Extremierung**, im zweiten Falle die der **Satisfizierung**, wie im Folgenden erläutert.

In der **A-priori-Variante** fließen die Präferenz-Informationen des Entscheiders als vorab festzulegende Satisfizierungsziele $\vec{\epsilon} \in \mathbb{R}^p$ (!) für die p Zielfunktionen $\vec{f} \in \mathbb{R}^p$ ein, die in Form der zusätzlichen Restriktionen $f_l(\vec{x}) \geq \epsilon_l$ in die Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ eingehen.

In der **A-posteriori-Variante** muss der Entscheider aus der Menge der pareto-optimalen Lösungen, d.h. $\bigcap_{k=1}^p X_{\vec{\epsilon}}^k$, die für ihn beste Lösung auswählen.

Probleme der Art $P_k(\vec{\epsilon})$ lassen sich bei **geringer Komplexität**, d.h. bei geringer Anzahl von (unkomplizierten) Zielfunktionen und Restriktionen durch Aufstellen der **Kuhn-Tucker-Bedingungen für die einzelne zu optimierende Zielfunktion** $f_k(\vec{x})$ und dann nachfolgend durch analytische Überlegungen oder durch Verwendung von Computer-Algebra-Systemen wie z.B. Mathematica, Maple, Derive, MATLAB, etc. lösen. Der Rechenaufwand in der „ ϵ -constraint Method“ ist wesentlich größer als in der „Weighting Method“, da $k = 1, \dots, p$ Ersatzprobleme zu lösen und deren Lösungsmengen zu vergleichen sind, jedoch wird das häufig missverständliche Konzept der Gewichtung nicht verfolgt und dem Entscheider die Möglichkeit zur Benennung von Satisfizierungszielen für seine Ziele gegeben.

A.3 „Reference-Direction Method“

Die „Reference Direction Method“¹³ verwendet einen interaktiven Skalarisationsansatz zur Lösung von VOP wie P_{MODM} . Es werden die Zielfunktionswerte $\vec{f}^h = \vec{f}(\vec{x}^h)$ für eine Lösung \vec{x}^h berechnet und dem **Entscheider** präsentiert, der einen **Referenzpunkt** \vec{z} mit den anzustrebenden Wertausprägungen der Zielfunktionen **angeben muss**. Dabei müssen einige Komponenten des Referenzpunktes niedriger bzw. höher sein als die aktuelle Lösung \vec{f}^h . In der **Referenz-Richtung** $\vec{z}^h - \vec{f}^h$ werden dann **pareto-optimale Lösungen gesucht**. Dazu werden die Zielfunktionen optimiert, deren Werte der aktuellen Lösung \vec{x}^h weiter verbessert werden sollen. Die Zielfunktionen, deren Werte

¹² Vgl. Miettinen (1999), S. 86.

¹³ Vgl. Narula et al. (1994a) und Narula et al. (1994b).

gleich bleiben sollen oder sich verschlechtern dürfen, werden zur Formulierung zusätzlicher Restriktionen herangezogen. Der Entscheider gibt eine bestimmte Anzahl von Schritten vor, für die entlang der Referenz-Richtung neue Lösungen berechnet werden, und zwar nur so viele, wie der Entscheider sehen möchte. Diese Prozedur wird solange wiederholt, bis der Entscheider mit einer gefundenen Lösung zufrieden ist.

Damit wird das Problem P_{MODM} in eine Serie der nachfolgenden **Skalarisierungsprobleme** $P(\psi, X_1)$ transformiert.

A.3 Definition (h^{th} -reference direction problem)

Es seien die Funktionen $f_k, g_r : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $k=1, \dots, p, r=1, \dots, m$ und $1 < p, n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq m \in \mathbb{N}$ gegeben und h sei der Iterationszähler.

$$P(\psi, X_1) : \quad \min_{\vec{x} \in X_1} \left\{ \psi(x) = \max_{k \in H} \left[\frac{f_k^h - f_k(\vec{x})}{\bar{z}_k - f_k^h} \right] \right\} \quad \text{mit} \quad (A.7)$$

$$X_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} f_k(\vec{x}) \geq \bar{z}_k + \alpha \cdot (f_k^h - \bar{z}_k) \quad \forall k \in L \quad \wedge \\ f_k(\vec{x}) \geq \bar{z}_k \quad \forall k \in E \quad \wedge \\ \vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \end{array} \right. \right\}$$

wobei

$$\begin{aligned} H &:= \{k \in K \mid \bar{z}_k > f_k^h\} && \text{(Indexmenge der Ziele, die sich verbessern sollen)} \\ L &:= \{k \in K \mid \bar{z}_k < f_k^h\} && \text{(Indexmenge der Ziele, die sich verschlechtern dürfen)} \\ E &:= \{k \in K \mid \bar{z}_k = f_k^h\} && \text{(Indexmenge der Ziele, die gleich bleiben sollen)} \\ K &:= H \cup L \cup E = \{1, \dots, p\} && \text{(Indexmenge der Zielfunktionen)} \end{aligned}$$

sind und $f_k^h := f_k(\vec{x}^h) \quad \forall k \in K$ die Zielfunktionswerte der Lösung \vec{x}^h der h -ten Iteration, α ein Parameter mit $0 \leq \alpha < 1$ und $\bar{z}_k \quad \forall k \in K$ die zu erzielenden Satisfizierungsziele des Entscheiders, d.h. die Komponenten des für die Iteration h vom Entscheider ausgewählten Referenzpunktes \vec{z} . ■

Die Schritte des **interaktiven Algorithmus** sind:

Schritt 1: Setze den Iterationszähler $h=0$ und finde eine initiale Lösung ($\vec{x}^h, \vec{f}^h = \vec{f}(\vec{x}^h)$). Ist der Entscheider mit der gefundenen Lösung \vec{x}^h zufrieden, dann stopp. Andernfalls gehe zu Schritt 2.

Schritt 2: Der Entscheider bestimmt die Anzahl $q > 0$ an zu berechnenden Lösungen und einen Referenzpunkt \vec{z} , so dass $\bar{z}_k < f_k^h$ für mindestens ein $k \in K$. Setze $t = 1$, gehe zu Schritt 3.

Schritt 3: Setze $\alpha = 1 - t/q$ und löse $P(\psi, X_1)$. Setze $t = t + 1$. Gehe zu Schritt 4.

Schritt 4: Ist der Entscheider mit der Lösung von $P(\psi, X_1)$ aus Schritt 3 zufrieden, dann stopp. Ist $t \leq q$ und der Entscheider möchte eine andere Lösung sehen, gehe zu Schritt 3; Ist $t > q$ oder der Entscheider möchte die Satisfizierungsziele ändern, setze $h = h + 1$ und $f_k^h, \forall k \in K$ gleich der der letzten Lösung und gehe zu Schritt 2.

Die grundlegenden Eigenschaften dieser Methode sind:¹⁴

- Die Lösung von $P(\psi, X_1)$ (A.7) ist schwach pareto-optimal für alle $0 \leq \alpha < 1$.
- Es sei $\vec{x}^* \in X$ pareto-optimal. Dann existiert ein Referenzpunkt und eine reelle Zahl $0 \leq \alpha < 1$, so dass \vec{x}^* eine Lösung von $P(\psi, X_1)$ ist.

Mit dieser Methode kann die pareto-optimale Lösungsmenge X^* von Problemen P_{MODM} mit **konkaven** oder **nichtkonkaven** Zielfunktionen bestimmt werden.¹⁵ Als Präferenz-Information muss der Entscheider interaktiv Referenzpunkte und die Anzahl an zu bestimmenden Lösungen benennen und diese bewerten. Der **Vorteil** der „Reference Direction Method“ ist die **geringe Anzahl an Lösungen** mit der der Entscheider konfrontiert wird und einer damit verbundenen **wesentlichen Reduktion des Rechenaufwands**.

¹⁴ Vgl. für Details und Beweise Narula et al. (1994a), Narula et al. (1994b) oder Miettinen (1999), S. 190ff.

¹⁵ Vgl. Miettinen (1999), S. 190.

B Detaillierte Lösung der exemplarischen Werbemixaufgaben

B.1 Bemerkungen zu den Lösungen

Zur Lösung der Beispiele zu den Planungssituationen aus Kapitel 7 wurden folgende **technische Hilfsmittel** eingesetzt:

Personal Computer:

Intel(R) Pentium(R) 4 CPU 3.20GHz, 1.5GB DDR-SDRAM, Microsoft Windows XP Professional (Service Pack 3)

Computer-Algebra-Programm:

Wolfram Mathematica 6.0.0 von <http://www.wolfram.com> (23.09.2008)

Die zur Lösung der Beispiele aufgestellten Kuhn-Tucker-Bedingungen sind hier dargestellt mit der Lagrange-Funktion¹ $L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := F(\vec{x}) + \sum_{r=1}^m \lambda_r \cdot g_r(\vec{x})$ für eine Funktion $F(\vec{x})$ und m Restriktionen $g_r(\vec{x})$:

$$\nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \vec{0} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \geq \vec{0} \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{\lambda} \cdot \nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{\lambda} \geq \vec{0} \quad (\text{B.4})$$

¹ Für eine Beschreibung der Kuhn-Tucker-Bedingungen vgl. Horst (1979), S. 191ff. und Elster et al. (1977), S. 149.

Ohne die Lagrange-Funktion lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$\nabla F(\vec{x}) + \sum_{r=1}^m \lambda_r \cdot \nabla g_r(\vec{x}) = \vec{0} \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{g}(\vec{x}) \geq \vec{0} \quad (\text{B.6})$$

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{\lambda} \geq \vec{0} \quad (\text{B.8})$$

Obige Darstellungen der Kuhn-Tucker-Bedingungen gelten für eine Problemformulierung als Maximierungsaufgabe einer konkaven Zielfunktion und Restriktion der Art $g_r(\vec{x}) \geq 0$. Für Minimierungsaufgaben konvexer Zielfunktionen ist $g_r(\vec{x}) \leq 0$ und damit $\nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \leq 0$ zu setzen.² Es gilt weiter: $\vec{\lambda} \cdot \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \sum_{r=1}^m \lambda_r \cdot g_r(\vec{x})$. Damit folgt aus $\vec{\lambda} \cdot \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 0$, dass wegen (B.2) und (B.4) $\lambda_r \cdot g_r(\vec{x}) = 0 \quad \forall r = 1, \dots, m$ ist. Vgl. Horst (1979), S. 174. $\vec{\lambda} \geq \vec{0}$ wird als verkürzte Schreibweise für $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ verwendet.

Die Beispiele zu den Planungssituationen 1, 2, 4, 5 und 6 weisen die zahlenmäßig gleichen Entscheidungsmodelle auf, um dem Leser an entsprechender Stelle einen Vergleich der einzelnen Beispiele zu erleichtern.

² Vgl. Wismer/Chattergy (1978), S. 83ff.

B.2 Extremierung konkaver Wirkungsfunktionen (Planungssituation 1 und 2)

Betrachtet wird das folgende

Beispiel B.1 (Planungssituationen 1, 2, 4, 5 und 6)

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \quad \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} && \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 && \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 5 + 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Abbildung B.1 zeigt die Funktionsverläufe der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ im Intervall $x_i \in [0, 10]$. Die Menge der zulässigen Lösungen X ist in Abbildung B.2 (in Anhang B, S. 169) dargestellt. ■

Dieses Entscheidungsmodell stimmt mit dem aus Beispiel 7.1 (S. 127) überein, wird aber hier der Vollständigkeit halber nochmals aufgeführt.

B.2.1 Beispiel zu Planungssituation 2

Zur Lösung des Beispiels 7.1 wird die „Weighting Method“³ als A-posteriori-Methode verwendet. Die Gewichtungen der Zielfunktionen bleiben unbestimmt. Die „Weighting Method“ transformiert das Werbemixproblem aus Beispiel 7.1 in das folgende

³ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158.

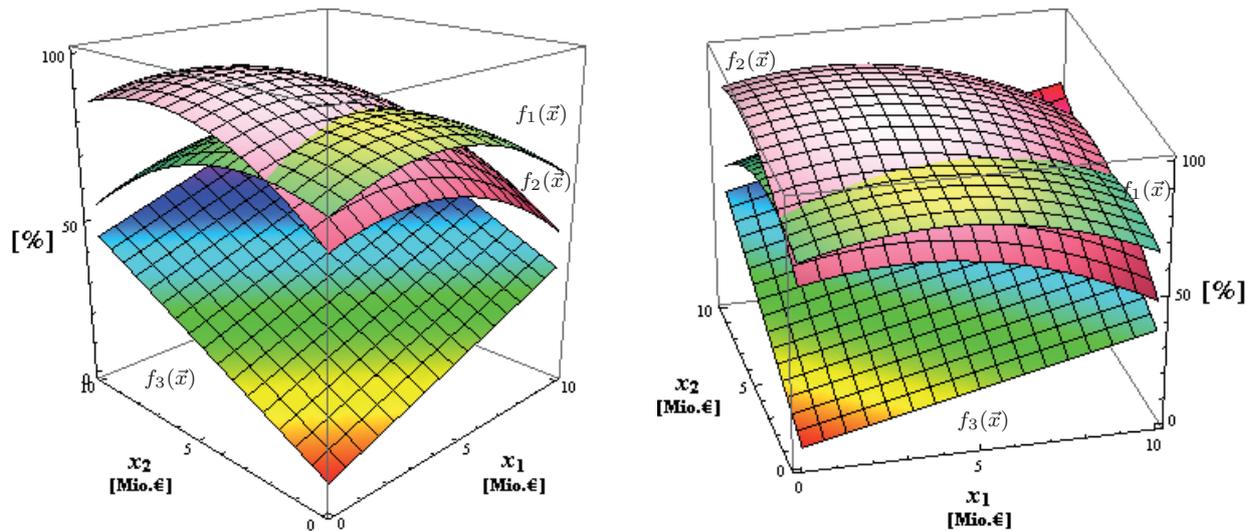


Abbildung B.1: Funktionsverläufe $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1, 2, 4, 5 u. 6)

B.2.1 Ersatzproblem ($P(\vec{w})$)

Das Ersatzproblem $P(\vec{w})$ wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 P(\vec{w}) : \quad & \max_{\vec{x} \in X} \sum_{k=1}^3 w_k \cdot f_k(\vec{x}) \\
 & \text{mit} \\
 X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \quad \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

wobei $f_1(\vec{x}) := 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2}$, $f_2(\vec{x}) := 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2$ und $f_3(\vec{x}) := 5 + 3x_1 + 4x_2$. Es gilt weiter $\sum_{k=1}^3 w_k = 1$ und $0 < w_k < 1 \quad \forall k = 1, \dots, 3$. ■

Lösung B.2.1

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für Ersatzproblem $P(\vec{w})$ (B.2.1) ergeben sich damit zu:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 3w_3 + w_2(3 - x_1) + w_1(4 - x_1) = 0 \tag{B.11}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3 + 4w_3 + w_1(3 - x_2) + w_2(7 - x_2) = 0 \tag{B.12}$$

$$\lambda_1(15 - x_1 - x_2) = 0 \tag{B.13}$$

$$\lambda_2(x_1 - 2) = 0 \tag{B.14}$$

$$\lambda_3(x_2 - 1) = 0 \tag{B.15}$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \tag{B.16}$$

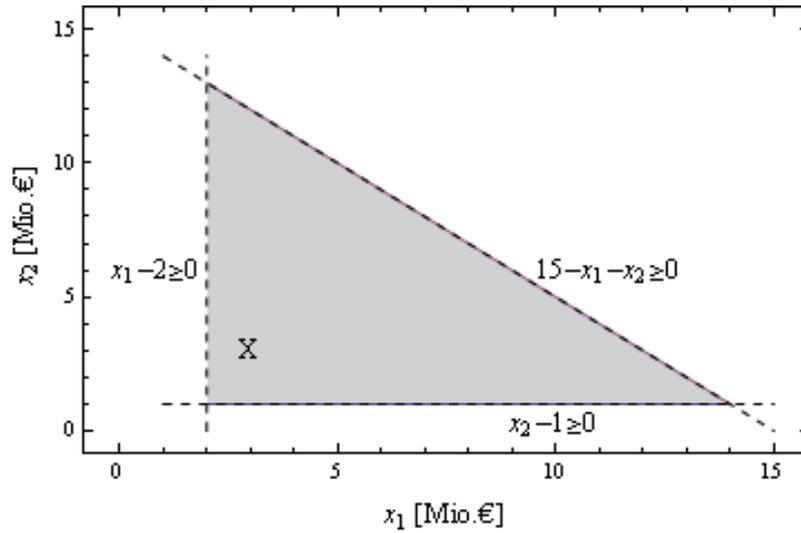


Abbildung B.2: Zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.1 (Planungssituation 1, 2, 4, 5 u. 6)

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.17})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\forall r = 1, \dots, 3 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.19})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$\sum_{k=1}^3 w_k = 1 \quad (\text{B.20})$$

$$\forall k = 1, \dots, 3 \quad 0 < w_k < 1 \quad (\text{B.21})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P(\vec{w})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle B.1. Eine vereinfachte, von den Gewichtungen w_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P(\vec{w})$ ist in Tabelle 7.4 dargestellt. Abbildung 7.2 zeigt $L_{P(\vec{w})}$ bzw. $L_{P_{S2}}$ im (x_2, x_1) -Raum. In Abbildung B.3 ist die pareto-optimale Lösungsmenge unterlegt mit der Menge der zulässigen Lösungen.

Die Bildmenge $\vec{f}(L_{P(\vec{w})})$ der pareto-optimalen Lösungsmenge $L_{P(\vec{w})}$ zeigt Abbildung 7.3. Die schwarzen Linien, die aus den Bildmengen der einzelnen Werbewirkungsfunktionen herausragen, stellen die Bildpunkte derjenigen pareto-optimalen Lösungen dar, die die Werbebudgetrestriktion erfüllen. Für einige ausgewählte pareto-optimale Lösungen ist die Lage der Lösungen und ihrer zugehörigen Bildpunkte der Werbewir-

kungsfunktionen mittels gestrichelter, vertikaler Linien markiert. □

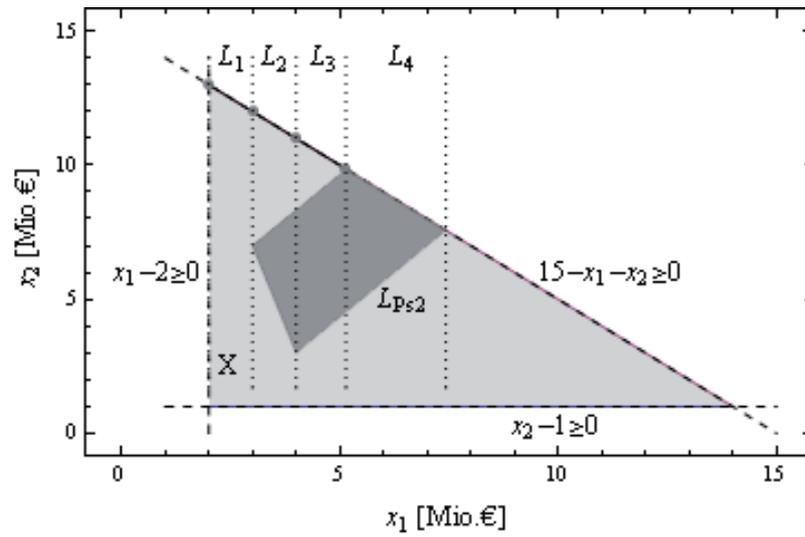


Abbildung B.3: Lösungsmenge $L_{P_{s2}}$ und zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

| Lösungsmenge $L_P(\vec{w}) = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ | | | | | |
|---|--|---|--|---|--|
| L_i | w_3 | w_2 | w_1 | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $0 < w_3 \leq \frac{5}{12}$ | $0 < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ |
| L_2 | $\frac{5}{12} < w_3 < \frac{3}{7}$ | $0 < w_2 \leq \frac{1}{3}(8 - 15w_3)$ $\frac{1}{3}(8 - 15w_3) < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ |
| L_3 | $\frac{3}{7} \leq w_3 < \frac{8}{15}$ | $0 < w_2 < \frac{1}{3}(8 - 15w_3)$ $\frac{1}{3}(8 - 15w_3) \leq w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ |
| L_4 | $\frac{8}{15} \leq w_3 \leq \frac{7}{8}$ | $0 < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ | $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ |
| L_5 | $\frac{7}{8} < w_3 \leq \frac{12}{13}$ | $0 < w_2 \leq \frac{1}{5}(12 - 13w_3)$ $\frac{1}{5}(12 - 13w_3) < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_1 = 2$ | $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_2 = 13$ |
| L_6 | $\frac{12}{13} < w_3 < 1$ | $0 < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = 2$ | $x_2 = 13$ |

Tabelle B.1: Lösungsmenge $L_P(\vec{w})$ des Ersatzproblems $P(\vec{w})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 2)

B.2.1.1 Simultane Werbemix- und Werbebudgetplanung

Ohne die Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x}) = 15 - x_1 - x_2 \geq 0$ wird Beispiel 7.1 in Planungssituation 2 zu einer Aufgabe der **simultanen Werbemix- und Werbebudgetplanung**.

Beispiel B.2 (simultane Werbemix- und Werbebudgetplanung)

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} && \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 && \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 5 + 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

■

Zur Lösung des Beispiels zur simultanen Werbemix- und Werbebudgetplanung wird die „Weighting Method“⁴ als A-posteriori-Methode verwendet. Die Gewichtungen der Zielfunktionen bleiben unbestimmt. Die „Weighting Method“ transformiert das Werbemixproblem aus Beispiel B.2 bzw. Beispiel 7.1 ohne die Werbebudgetrestriktion $g_1(\vec{x})$ in das folgende

B.2.2 Ersatzproblem ($P(\vec{w})$)

Das Ersatzproblem $P(\vec{w})$ wird ohne die Werbebudgetrestriktion wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P(\vec{w}) : \quad & \max_{\vec{x} \in X} \quad \sum_{k=1}^3 w_k \cdot f_k(\vec{x}) \\ & \text{mit} \\ X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

⁴ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158.

wobei $f_1(\vec{x}) := 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2}$, $f_2(\vec{x}) := 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2$ und $f_3(\vec{x}) := 5 + 3x_1 + 4x_2$. Es gilt weiter $\sum_{k=1}^3 w_k = 1$ und $0 < w_k < 1 \quad \forall k = 1, \dots, 3$. ■

Lösung B.2.2

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für Ersatzproblem $P(\vec{w})$ (B.2.2) ohne die Werbebudgetrestriktion ergeben sich damit zu:

$$\lambda_1 + 3w_3 + w_2(3 - x_1) + w_1(4 - x_1) = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\lambda_2 + 4w_3 + w_1(3 - x_2) + w_2(7 - x_2) = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\lambda_1(x_1 - 2) = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\lambda_2(-1 + x_1) = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.29})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\forall r = 1, 2 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.31})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$\sum_{k=1}^3 w_k = 1 \quad (\text{B.32})$$

$$\forall k = 1, \dots, 3 \quad 0 < w_k < 1 \quad (\text{B.33})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.34})$$

Die Lösungsmenge $L_{P(\vec{w})}$ dieses Gleichungssystems zeigt (B.35):

$$L_{P(\vec{w})} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} 0 < w_3 < 1 \wedge 0 < w_2 < 1 - w_3 \wedge w_1 = 1 - w_2 - w_3 \wedge \\ x_1 = \frac{-4 + w_2 + w_3}{-1 + w_3} \wedge x_2 = \frac{-3 - 4w_2 - w_3}{-1 + w_3} \end{array} \right. \right\} \quad (\text{B.35})$$

Eine vereinfachte, von den Gewichtungen w_k unabhängige Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P(\vec{w})} = \bigcup_{i=1}^2 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle 7.5. Mit den Bedingungen für L_2 aus Tabelle 7.5 und $B^* = \sum_{i=1}^2 x_i^*$ gilt für das optimale Werbebudget für pareto-optimale Werbemixe mit $x_1 > 4$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = B^* \quad \wedge \quad \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ \Leftrightarrow \quad x_1 + \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < B^* \quad \wedge \quad B^* < x_1 + \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{7}{3} \cdot (x_1 - 1) < B^* \quad \wedge \quad B^* < 3 + \frac{7}{3}x_1 \\ \Leftrightarrow 2,3334 \cdot (x_1 - 1) < B^* < 3 + 2,3334 \cdot x_1 \end{aligned}$$

□

B.2.1.2 Erweiterung des Beispiels

Betrachtet wird Beispiel 7.1, S. 127, mit der zusätzlichen Restriktion $x_2 \leq 8$:

Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung))

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad \vec{f}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X &:= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \\ g_4(\vec{x}) := 8 - x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \tag{B.36}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \quad \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \quad \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 5 + 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Abbildung B.1 (in Anhang B, S. 168) zeigt die Funktionsverläufe der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ im Intervall $x_i \in [0, 10]$. ■

Zur Lösung des Beispiels B.3 wird die „Weighting Method“⁵ als A-posteriori-Methode verwendet. Die Gewichtungen der Zielfunktionen bleiben unbestimmt. Die „Weighting Method“ transformiert das Werbemixproblem aus Beispiel B.3 in das folgende

⁵ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158.

B.2.3 Ersatzproblem ($P(\vec{w})$)

Das Ersatzproblem $P(\vec{w})$ wird wie folgt definiert:

$$P(\vec{w}) : \quad \max_{\vec{x} \in X} \sum_{k=1}^3 w_k \cdot f_k(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad (B.37)$$

$$X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \\ g_4(\vec{x}) := 8 - x_2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

wobei $f_1(\vec{x}) := 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2}$, $f_2(\vec{x}) := 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2$ und $f_3(\vec{x}) := 5 + 3x_1 + 4x_2$. Es gilt weiter $\sum_{k=1}^3 w_k = 1$ und $0 < w_k < 1 \quad \forall k = 1, \dots, 3$. ■

Lösung B.2.3

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Ersatzproblem $P(\vec{w})$ (B.2.3) ergeben sich damit zu:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + 3w_3 + w_2(3 - x_1) + w_1(4 - x_1) = 0 \quad (B.38)$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 + 4w_3 + w_1(3 - x_2) + w_2(7 - x_2) = 0 \quad (B.39)$$

$$\lambda_1(15 - x_1 - x_2) = 0 \quad (B.40)$$

$$\lambda_2(x_1 - 2) = 0 \quad (B.41)$$

$$\lambda_3(x_2 - 1) = 0 \quad (B.42)$$

$$\lambda_4(8 - x_2) = 0 \quad (B.43)$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (B.44)$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (B.45)$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (B.46)$$

$$8 - x_2 \geq 0 \quad (B.47)$$

$$\forall r = 1, \dots, 3 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (B.48)$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$\sum_{k=1}^3 w_k = 1 \quad (\text{B.49})$$

$$\forall k = 1, \dots, 3 \quad 0 < w_k < 1 \quad (\text{B.50})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.51})$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P(\vec{w})} = \bigcup_{i=1}^7 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle B.3. Eine vereinfachte, von den Gewichtungen w_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P(\vec{w})$ ist in Tabelle B.2 dargestellt. Abbildung 7.5 zeigt $L_{P(\vec{w})}$ bzw. L_{Ps2} für die erweiterten Restriktionen im (x_2, x_1) -Raum. \square

| Lösungsmenge $L_{Ps2} = \bigcup_{i=1}^4 L_i$ | |
|--|--|
| L_i | x_1^* [Mio. €] x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $3 < x_1 \leq \frac{15}{4} \quad \wedge \quad 19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ |
| L_2 | $\frac{15}{4} < x_1 \leq 4 \quad \wedge \quad 19 - 4x_1 < x_2 \leq 8$ |
| L_3 | $4 < x_1 \leq 7 \quad \wedge \quad \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 8$ |
| L_4 | $7 < x_1 < \frac{52}{7} \quad \wedge \quad \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 15 - x_1$ |

Tabelle B.2: Lösungsmenge L_{Ps2} in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung))

| Lösungsmenge $L_P(\vec{w}) = \bigcup_{i=1}^7 L_i$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|----------|
| L_i | w_3 | w_2 | w_1 | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] | |
| L_1 | $0 < w_3 \leq \frac{1}{5}$ | $0 < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ | \wedge |
| L_2 | $\frac{1}{5} < w_3 < \frac{1}{4}$ | $0 < w_2 \leq \frac{1}{4}(5 - 9w_3)$ $\frac{1}{4}(5 - 9w_3) < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ $x_2 = 8$ | \wedge |
| L_3 | $\frac{1}{4} \leq w_3 \leq \frac{17}{33}$ | $0 < w_2 < \frac{1}{4}(5 - 9w_3)$ $\frac{1}{4}(5 - 9w_3) \leq w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ $x_2 = 8$ | \wedge |
| L_4 | $\frac{17}{33} < w_3 < \frac{8}{15}$ | $0 < w_2 \leq \frac{1}{3}(8 - 15w_3)$ $\frac{1}{3}(8 - 15w_3) < w_2 < \frac{1}{5}(2 - 3w_3)$ $w_2 = \frac{1}{5}(2 - 3w_3)$ $\frac{1}{5}(2 - 3w_3) < w_2 \leq 3(-1 + 2w_3)$ $3(-1 + 2w_3) < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = \frac{1}{5}(3 - 2w_3)$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ $x_1 = \frac{-14+w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_1 = 7$ $x_1 = 7$ $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-3-4w_2-w_3}{-1+w_3}$ $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_2 = 8$ $x_2 = 8$ $x_2 = 8$ | \wedge |
| L_5 | $\frac{8}{15} \leq w_3 < \frac{4}{7}$ | $0 < w_2 < \frac{1}{5}(2 - 3w_3)$ $\frac{1}{5}(2 - 3w_3) \leq w_2 \leq 3(-1 + 2w_3)$ $3(-1 + 2w_3) < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_1 = 7$ $x_1 = \frac{-4+w_2+w_3}{-1+w_3}$ | $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_2 = 8$ $x_2 = 8$ | \wedge |
| L_6 | $\frac{4}{7} \leq w_3 < \frac{2}{3}$ | $0 < w_2 < \frac{1}{3}(2 - 3w_3)$ $\frac{1}{3}(2 - 3w_3) \leq w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = \frac{-16+5w_2+17w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_1 = 7$ | $x_2 = \frac{-14-5w_2+13w_3}{2(-1+w_3)}$ $x_2 = 8$ | \wedge |
| L_7 | $\frac{2}{3} \leq w_3 < 1$ | $0 < w_2 < 1 - w_3$ | $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ | $x_1 = 7$ | $x_2 = 8$ | \wedge |

Tabelle B.3: Lösungsmenge $L_P(\vec{w})$ des Ersatzproblems $P(\vec{w})$ in Beispiel B.3 (Planungssituation 2 (Erweiterung))

B.2.2 Beispiel zu Planungssituation 1

Zur Lösung des Beispiels 7.1 wird die „Weighting Method“⁶ als A-priori-Methode verwendet. Die Gewichtungen der Zielfunktionen werden vorab vom Entscheider festgelegt. Ergänzt man die Kuhn-Tucker-Bedingungen aus Planungssituation 2, d.h. Gleichungen (B.11) - (B.19), mit expliziten Werten für die Gewichtungen, d.h. z.B. $w_1 = 1/3$, $w_2 = 1/3$ und $w_3 = 1/3$ für \vec{w}^1 aus Tabelle 7.2, und löst das Gleichungssystem, so stellen sich die Lösungen $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_5$ aus Tabelle 7.2 ein.

Alternativ können die Lösungen für die ausgewählten Gewichtungen $\vec{w}^1, \dots, \vec{w}^5$ aus Tabelle 7.2 durch Berechnung nach Tabelle B.1 bestimmt werden! Dies gilt jedoch nicht für \vec{w}^6 , weil $\vec{x}_6 \notin L_P(\vec{w})$ wegen der Verletzung der Bedingung $w_k > 0$. \square

⁶ Vgl. Abschnitt A.1, S. 158.

B.3 Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen (Planungssituation 4 und 5)

Betrachtet wird Beispiel 7.1, S. 127.

B.3.1 Beispiel zu Planungssituation 5

Zur Lösung des Beispiels 7.1 wird die „ ϵ -constraint-Method“⁷ als A-posteriori-Methode verwendet. Die Satisfizierungziele der Zielfunktionen bleiben unbestimmt. Die „ ϵ -constraint-Method“ transformiert das Werbemixproblem aus Beispiel 7.1 in eine Folge von Ersatzproblemen $P_k(\vec{\epsilon})$ mit $k = 1, \dots, 3$.

Abbildung B.4 und Tabelle B.4 zeigen die Lösungsmenge $L_{P_{s5}}$ von 7.1 in Planungssituation 5. In Abbildung B.4 ist der Rand der dargestellten Menge schwarz markiert, der Teil der Lösungsmenge ist. $L_{P_{s5}}$ entspricht der Schnittmenge der Lösungsmengen der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$, d.h. $L_{P_{s5}} = \bigcap_{k=1}^3 L_{P_k(\vec{\epsilon})}$. Die Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ sind in Abbildung B.5 und Tabelle B.5 dargestellt.

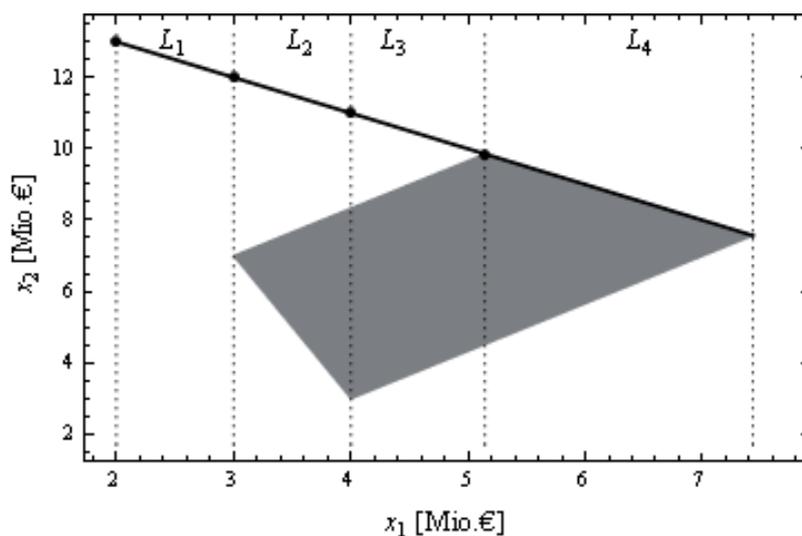


Abbildung B.4: Lösungsmenge $L_{P_{s5}}$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

⁷ Vgl. Abschnitt A.2, S. 160.

| Lösungsmenge $L_{Ps5} = \bigcup_{i=1}^4 L_i$ | | |
|--|--|--|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_2 | $3 < x_1 \leq 4$ | $19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_3 | $4 < x_1 < \frac{36}{7}$ | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_4 | $\frac{36}{7} \leq x_1 < \frac{52}{7}$ | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 15 - x_1$ |

Tabelle B.4: Lösungsmenge L_{Ps5} in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

B.3.1 Ersatzproblem ($P_1(\vec{\epsilon})$)

Das 1. Ersatzproblem $P_1(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 P_1(\vec{\epsilon}) : \quad & \max_{\vec{x} \in X} f_1(\vec{x}) \\
 & \text{mit} \\
 X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \mid \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (B.52)
 \end{aligned}$$

wobei $f_1(\vec{x}) := 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2}$. ■

Lösung B.3.1

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 1. Ersatzproblems $P_1(\vec{\epsilon})$ (B.3.1) ergeben sich damit zu:

$$4 - \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_5 + \lambda_4(3 - x_1) - x_1 = 0 \quad (B.53)$$

$$3 - \lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_5 + \lambda_4(7 - x_2) - x_2 = 0 \quad (B.54)$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \quad (B.55)$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \quad (B.56)$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \quad (B.57)$$

$$\lambda_4 \cdot \left(95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2 \right) = 0 \quad (\text{B.58})$$

$$\lambda_5 \cdot (5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2) = 0 \quad (\text{B.59})$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{B.60})$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.61})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.62})$$

$$95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2 \geq 0 \quad (\text{B.63})$$

$$5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2 \geq 0 \quad (\text{B.64})$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.65})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.66})$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P_1(\vec{\epsilon})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle B.6. Eine vereinfachte, von den Satisfizierungzielen ϵ_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P_1(\vec{\epsilon})$ ist in Tabelle B.5 (oben) dargestellt. Abbildung B.5 (oben) zeigt $L_{P_1(\vec{\epsilon})}$ im (x_2, x_1) -Raum. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme und die Unterschiede in den mathematischen Beschreibungen der Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ in Tabelle B.5. \square

B.3.2 Ersatzproblem ($P_2(\vec{\epsilon})$)

Das 2. Ersatzproblem $P_2(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$P_2(\vec{\epsilon}) : \begin{array}{l} \max_{\vec{x} \in X} f_2(\vec{x}) \\ \text{mit} \end{array} \quad (\text{B.67})$$

$$X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2 \geq 0 \end{array} \right. \wedge \right\}$$

wobei $f_2(\vec{x}) := 95 - \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2$. \blacksquare

Lösung B.3.2

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 2. Ersatzproblems $P_2(\bar{\epsilon})$ (B.3.2) ergeben sich damit zu:

$$3 - \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_5 + \lambda_4(4 - x_1) - x_1 = 0 \quad (\text{B.68})$$

$$7 - \lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_5 + \lambda_4(3 - x_2) - x_2 = 0 \quad (\text{B.69})$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{B.70})$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \quad (\text{B.71})$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \quad (\text{B.72})$$

$$\lambda_4 \cdot \left(75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{B.73})$$

$$\lambda_5 \cdot (5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2) = 0 \quad (\text{B.74})$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{B.75})$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.76})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.77})$$

$$75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \quad (\text{B.78})$$

$$5 - \epsilon_3 + 3x_1 + 4x_2 \geq 0 \quad (\text{B.79})$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.80})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.81})$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P_2(\bar{\epsilon})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle B.7. Eine vereinfachte, von den Satisfizierungszielen ϵ_k unabhängige, Darstellung der Lösungsmenge von $P_2(\bar{\epsilon})$ ist in Tabelle B.5 (Mitte) dargestellt. Abbildung B.5 (Mitte) zeigt $L_{P_2(\bar{\epsilon})}$ im (x_2, x_1) -Raum. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme und die Unterschiede in den mathematischen Beschreibungen der Lösungsmengen $L_{P_k(\bar{\epsilon})}$ in Tabelle B.5. \square

B.3.3 Ersatzproblem ($P_3(\vec{\epsilon})$)

Das 3. Ersatzproblem $P_3(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 P_3(\vec{\epsilon}) : \quad & \max_{\vec{x} \in X} f_3(\vec{x}) \\
 & \text{mit} \\
 X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.82}$$

wobei $f_3(\vec{x}) := 5 + 3x_1 + 4x_2$. ■

Lösung B.3.3

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 3. Ersatzproblems $P_3(\vec{\epsilon})$ (B.3.3) ergeben sich damit zu:

$$3 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5(3 - x_1) + \lambda_4(4 - x_1) = 0 \tag{B.83}$$

$$4 - \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4(3 - x_2) + \lambda_5(7 - x_2) = 0 \tag{B.84}$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \tag{B.85}$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \tag{B.86}$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \tag{B.87}$$

$$\lambda_4 \cdot \left(75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) = 0 \tag{B.88}$$

$$\lambda_5 \cdot \left(95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \right) = 0 \tag{B.89}$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \tag{B.90}$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \tag{B.91}$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \tag{B.92}$$

$$75 - \epsilon_1 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \tag{B.93}$$

$$95 - \epsilon_2 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \tag{B.94}$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \tag{B.95}$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.96})$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems $L_{P_3(\vec{\epsilon})} = \bigcup_{i=1}^7 L_i$ und ihre Teilmengen L_i zeigt Tabelle B.8. Eine vereinfachte, von den Satisfizierungszielen ϵ_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P_3(\vec{\epsilon})$ ist in Tabelle B.5 (unten) dargestellt. Abbildung B.5 (unten) zeigt $L_{P_3(\vec{\epsilon})}$ im (x_2, x_1) -Raum. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme und die Unterschiede in den mathematischen Beschreibungen der Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ in Tabelle B.5. \square

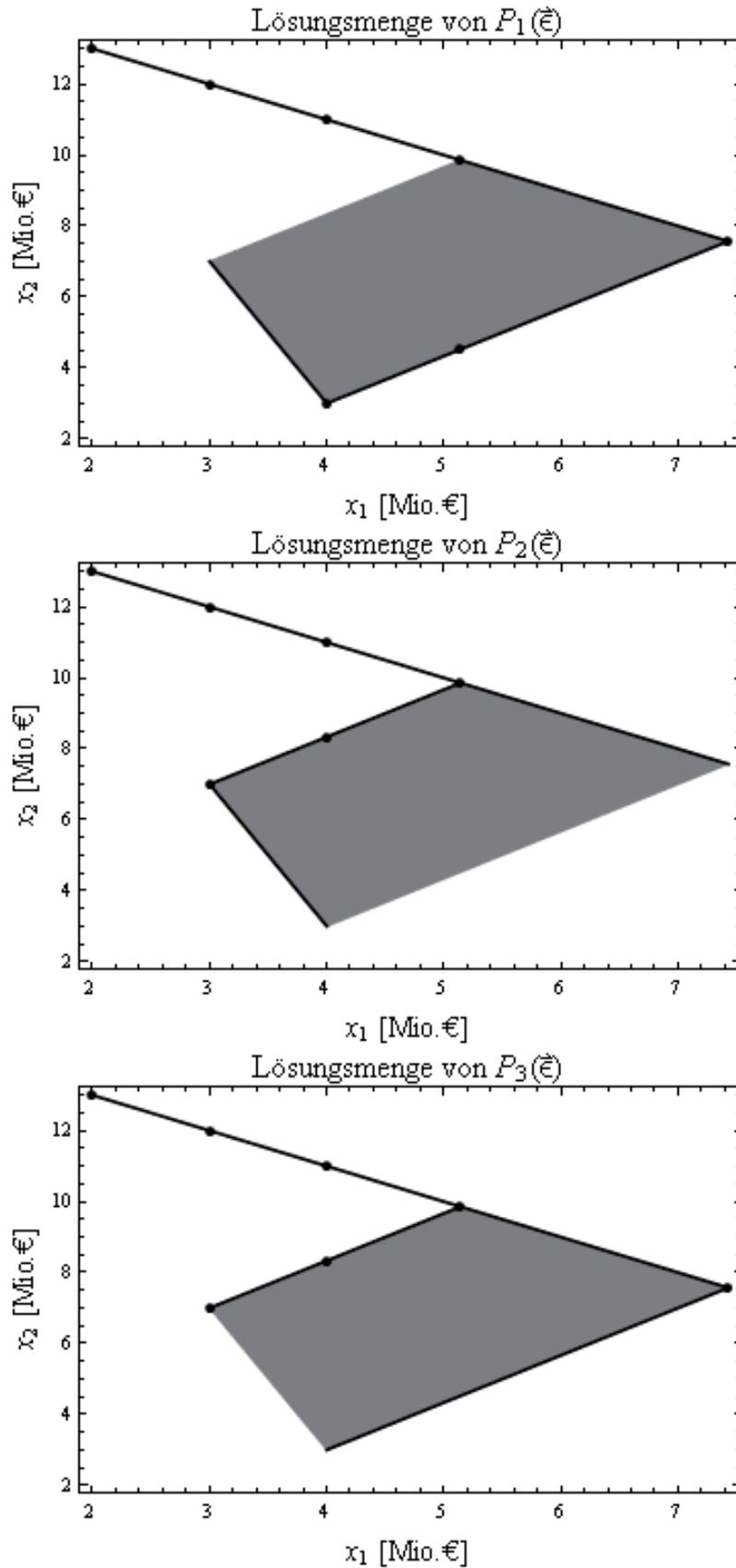


Abbildung B.5: Lösungsmengen $L_{P_k(\bar{\epsilon})}$ der Ersatzprobleme $P_k(\bar{\epsilon})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

| Lösungsmenge $L_{P_1(\vec{c})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ | | | |
|---|-------------------------------------|----------|---|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | | x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | \wedge | $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_2 | $3 < x_1 < 4$ | \wedge | $19 - 4x_1 \leq x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_3 | $x_1 = 4$ | \wedge | $x_2 = 11$ $x_2 = 3$ |
| L_4 | $4 < x_1 \leq \frac{36}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \leq x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_5 | $\frac{36}{7} < x_1 < \frac{52}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \leq x_2 \leq 15 - x_1$ |
| L_6 | $x_1 = \frac{52}{7}$ | \wedge | $x_2 = \frac{53}{7}$ |

| Lösungsmenge $L_{P_2(\vec{c})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ | | | |
|---|-------------------------------------|----------|---|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | | x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | \wedge | $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_2 | $x_1 = 3$ | \wedge | $x_2 = 7$ |
| L_3 | $3 < x_1 < 4$ | \wedge | $19 - 4x_1 \leq x_2 \leq \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_4 | $4 \leq x_1 < \frac{36}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_5 | $x_1 = \frac{36}{7}$ | \wedge | $x_2 = \frac{69}{7}$ |
| L_6 | $\frac{36}{7} < x_1 < \frac{52}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 15 - x_1$ |

| Lösungsmenge $L_{P_3(\vec{c})} = \bigcup_{i=1}^5 L_i$ | | | |
|---|--|----------|--|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | | x_2^* [Mio. €] |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | \wedge | $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_2 | $3 < x_1 \leq 4$ | \wedge | $19 - 4x_1 < x_2 \leq \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_3 | $4 < x_1 < \frac{36}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \leq x_2 \leq \frac{1}{3}(9 + 4x_1)$ $x_2 = 15 - x_1$ |
| L_4 | $\frac{36}{7} \leq x_1 < \frac{52}{7}$ | \wedge | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \leq x_2 \leq 15 - x_1$ |
| L_5 | $x_1 = \frac{52}{7}$ | \wedge | $x_2 = \frac{53}{7}$ |

Tabelle B.5: Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{c})}$ der Ersatzprobleme $P_k(\vec{c})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

| Lösungsmenge $L_{P_1(\epsilon)} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ | | | | | |
|--|-------------------------------------|---|--|--|----------------------------|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] | ϵ_2 | ϵ_3 | |
| L_1 | $2 \leq x_1 \leq 3$ | $x_2 = 15 - x_1$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee |
| L_2 | $3 < x_1 < 4$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 19 - 4x_1 \\ 19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 \leq 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee \vee \vee |
| L_3 | $x_1 = 4$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 11 \\ x_2 = 3 \\ 3 < x_2 < \frac{25}{3} \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{173}{2}$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{173}{2}$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (140 + 14x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 61$ $\wedge \quad \epsilon_3 \leq 29$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 17 + 4x_2$ | \vee \vee \vee |
| L_4 | $4 < x_1 \leq \frac{36}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \\ \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee \vee \vee |
| L_5 | $\frac{36}{7} < x_1 < \frac{52}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \\ \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee \vee \vee |
| L_6 | $x_1 = \frac{52}{7}$ | $x_2 = \frac{53}{7}$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{8333}{98}$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = \frac{403}{7}$ | \vee |

Tabelle B.6: Lösungsmenge $L_{P_1(\epsilon)}$ des Ersatzproblems $P_1(\epsilon)$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

| Lösungsmenge $L_{P_2(\bar{\epsilon})} = \bigcup_{i=1}^6 L_i$ | | | | | |
|--|-------------------------------------|--|---|--|--------|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] | ϵ_1 | ϵ_3 | |
| L_1 | $2 \leq x_1 < 3$ | $x_2 = 15 - x_1$ | $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | |
| L_2 | $x_1 = 3$ | $x_2 = 7$ $x_2 = 12$ | $\wedge \quad \epsilon_1 \leq 79$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{93}{2}$ | $\wedge \quad \epsilon_3 \leq 42$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 62$ | \vee |
| L_3 | $3 < x_1 < 4$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 19 - 4x_1 \\ 19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \vee x_2 = 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 \leq 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee |
| L_4 | $4 \leq x_1 < \frac{36}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | \vee |
| L_5 | $x_1 = \frac{36}{7}$ | $\frac{95}{21} < x_2 < \frac{69}{7}$ $x_2 = \frac{69}{7}$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8070}{49} + 6x_2 - x_2^2 \right)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{6207}{98}$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = \frac{143}{7} + 4x_2$ $\wedge \quad \epsilon_3 = \frac{419}{7}$ | \vee |
| L_6 | $\frac{36}{7} < x_1 < \frac{52}{7}$ | $\frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 \leq 15 - x_1$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_3 = 5 + 3x_1 + 4x_2$ | |

Tabelle B.7: Lösungsmenge $L_{P_2(\bar{\epsilon})}$ des Ersatzproblems $P_2(\bar{\epsilon})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

| Lösungsmenge $L_{P_3(\bar{\epsilon})} = \bigcup_{i=1}^7 L_i$ | | | | | |
|--|-------------------------------------|--|---|--|----------------------------|
| L_i | x_1^* [Mio. €] | x_2^* [Mio. €] | ϵ_1 | ϵ_2 | |
| L_1 | $x_1 = 2$ | $x_2 = 13$ | $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{71}{2}$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{153}{2}$ | |
| L_2 | $2 < x_1 \leq 3$ | $x_2 = 15 - x_1$ | $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | |
| L_3 | $3 < x_1 \leq 4$ | $\left\{ \begin{array}{l} 19 - 4x_1 < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | \vee \vee \vee |
| L_4 | $4 < x_1 < \frac{36}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \vee x_2 = \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < \frac{1}{3}(9 + 4x_1) \\ x_2 = 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{75375}{70061} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{70061}{882} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | \vee \vee \vee |
| L_5 | $x_1 = \frac{36}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{95}{21} \\ \frac{95}{21} < x_2 < \frac{69}{7} \\ x_2 = \frac{59}{7} \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{882}{95} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (\frac{8070}{49} + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 \leq \frac{6207}{98}$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{882}{98} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{2} (\frac{6684}{49} + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{8685}{98}$ | \vee \vee \vee |
| L_6 | $\frac{36}{7} < x_1 < \frac{52}{7}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) \\ \frac{1}{3}(-7 + 4x_1) < x_2 < 15 - x_1 \\ x_2 = 15 - x_1 \end{array} \right.$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{7} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2} (150 + 8x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2)$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 = \frac{1}{7} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{1}{2} (132 + 6x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2)$ | \vee \vee \vee |
| L_7 | $x_1 = \frac{52}{7}$ | $x_2 = \frac{53}{7}$ | $\wedge \quad \epsilon_1 = \frac{6075}{98}$ | $\wedge \quad \epsilon_2 \leq \frac{8333}{98}$ | |

Tabelle B.8: Lösungsmenge $L_{P_3(\bar{\epsilon})}$ des Ersatzproblems $P_3(\bar{\epsilon})$ in Beispiel 7.1 (Planungssituation 5)

B.3.2 Beispiel zu Planungssituation 4

Zur Lösung des Beispiels 7.1 wird die „ ϵ -constraint-Method“⁸ als A-priori-Methode verwendet. Die Satisfizierungsziele der Zielfunktionen werden vorab vom Entscheider festgelegt. Setzt man in den Kuhn-Tucker-Bedingungen der Ersatzprobleme $P_1(\vec{\epsilon})$ (B.3.1), $P_2(\vec{\epsilon})$ (B.3.2) und $P_3(\vec{\epsilon})$ (B.3.3) zu Beispiel 7.1 aus Planungssituation 5 explizite Werte für ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 ein, d.h. z.B. $\epsilon_1 = 87$, $\epsilon_2 = 90$ und $\epsilon_3 = 33$ aus Tabelle 7.6, und löst die Gleichungssysteme, so ergeben sich die Lösungen $\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_5$ aus Tabelle 7.6.

□

⁸ Vgl. Abschnitt A.2, S. 160.

B.4 Satisfizierung nichtkonkaver

Wirkungsfunktionen (Planungssituation 11)

Betrachtet wird das folgende

Beispiel B.4 (Planungssituation 11)

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x} \in X} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \end{pmatrix} \\ \text{mit} & \\ X & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \quad \quad \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &:= 1 + \frac{55 \cdot x_1^2}{7 + x_1^2} + \frac{40 \cdot x_2^2}{9 + x_2^2} && \wedge \\ f_2(\vec{x}) &:= 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} && \wedge \\ f_3(\vec{x}) &:= 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \end{aligned}$$

Abbildung B.6 zeigt die Funktionsverläufe der Werbewirkungsfunktionen $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ im Intervall $x_i \in [0, 10]$. ■

Dieses Entscheidungsmodell stimmt mit dem aus Beispiel 7.2 (S. 140) überein, wird aber hier der Vollständigkeit halber nochmals aufgeführt.

Zur Lösung des Beispiels 7.2 wird die „ ϵ -constraint-Method“⁹ als A-posteriori-Methode verwendet. Die Satisfizierungsziele der Zielfunktionen bleiben unbestimmt. Die „ ϵ -constraint-Method“ transformiert das Werbemixproblem aus Beispiel 7.2 in eine Folge von Ersatzproblemen $P_k(\vec{\epsilon})$ mit $k = 1, \dots, 3$.

Abbildung 7.6 zeigt die mögliche Lösungsmenge $L_{P_{s11}}$. Sie entspricht der Schnittmenge der Lösungsmengen der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$, d.h. $L_{P_{s11}} = \bigcap_{k=1}^3 L_{P_k(\vec{\epsilon})}$. Die Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ sind in Abbildung B.8 dargestellt. In Abbildung B.7 ist die (lokal) pareto-optimale Lösungsmenge $L_{P_{s11}}$ unterlegt mit der Menge der zulässigen Lösungen X in Beispiel 7.2.

⁹ Vgl. Abschnitt A.2, S. 160.

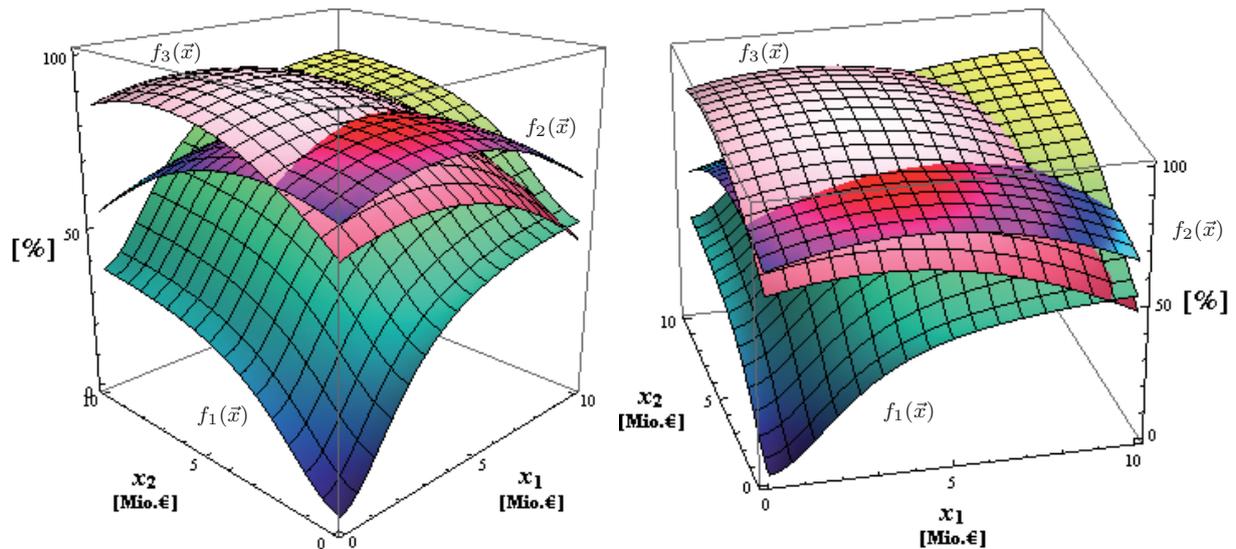


Abbildung B.6: Funktionsverläufe $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ und $f_3(\vec{x})$ in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ sind aufgrund der zu maximierenden nichtkonkaven Funktion $f_1(\vec{x})$ nur notwendig, aber nicht hinreichend für lokal-optimale Lösungen. Mit der Lösung der durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen gegebenen Gleichungssysteme wird somit lediglich eine Kandidaten-Menge von Lösungen bestimmt, die lokal-optimal sein können, aber es nicht sein müssen. Mit der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung¹⁰ lässt sich jedoch für einzelne Lösungen die lokale Optimalität überprüfen.

Mit den in $P_k(\vec{\epsilon})$ generierten lokal-optimalen Lösungen werden auch nur lokal pareto-optimale Lösungen des VOP von Beispiel 7.2 erzeugt.¹¹

Für eine zu maximierende Funktion $f(\vec{x})$ ist eine Lösung \vec{x}^* von $P_k(\vec{\epsilon})$ nach der hinreichenden Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung lokal-optimal, falls die Hesse-Matrix¹² $\nabla^2 L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ der Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ an der Stelle $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ negativ definit ist für alle $\vec{x} \in T = \{\vec{x} \mid \nabla g_r(\vec{x}^*) \cdot \vec{x} = 0 \quad \forall r = 1, \dots, m \text{ mit } \lambda_r^* > 0\}$.¹³

Betrachtet man exemplarisch die Lösung $\vec{x}^* = (5, 5)^T$ der Kuhn-Tucker-Bedingungen (B.99)-(B.111) von $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ mit $\vec{\epsilon}^* = \vec{f}(\vec{x}^*) = (73.3805, 85, 91)^T$, so gilt: $\vec{x}^* = (5, 5)^T$ gehört zu $\vec{\lambda}^* = (0, 0, 0, 2.29132, 0.734224)^T$.

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f_1(\vec{x}) + \sum_{r=1}^5 \lambda_r g_r(\vec{x})$ für $P_1(\vec{\epsilon}^*)$

¹⁰ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 58.

¹¹ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 152.

¹² Hesse-Matrix einer Funktion $f(\vec{x})$: $\nabla^2 f(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, vgl. Forster (1983b), S. 59.

¹³ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 58.

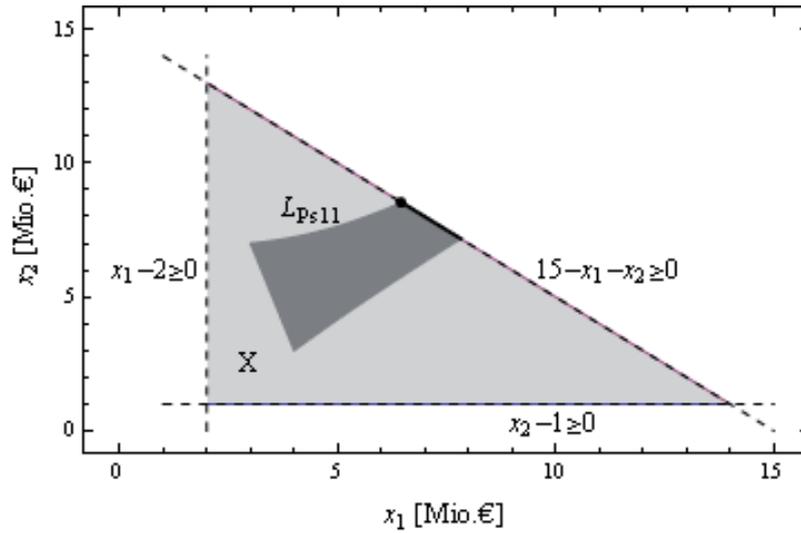


Abbildung B.7: Mögliche Lösungsmenge L_{Ps11} und zulässige Lösungsmenge X in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

ist an der Stelle $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \nabla^2 L(\vec{x}, \vec{\lambda}) &= \nabla^2 f_1(\vec{x}) + \sum_{r=1}^5 \lambda_r \nabla^2 g_r(\vec{x}) \\ \Leftrightarrow \nabla^2 L(\vec{x}, \vec{\lambda}) &= \begin{pmatrix} -\lambda_4 - \lambda_5 + \frac{440x_1^4}{(7+x_1^2)^3} - \frac{550x_1^2}{(7+x_1^2)^2} + \frac{110}{7+x_1^2} & 0 \\ 0 & -\lambda_4 - \lambda_5 + \frac{320x_2^4}{(9+x_2^2)^3} - \frac{400x_2^2}{(9+x_2^2)^2} + \frac{80}{9+x_2^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) &= \begin{pmatrix} -4.62344 & 0 \\ 0 & -4.23458 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_1(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{440x_1^4}{(7+x_1^2)^3} - \frac{550x_1^2}{(7+x_1^2)^2} + \frac{110}{7+x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{320x_2^4}{(9+x_2^2)^3} - \frac{400x_2^2}{(9+x_2^2)^2} + \frac{80}{9+x_2^2} \end{pmatrix} \\ \nabla^2 g_1(\vec{x}) &= \nabla^2 g_2(\vec{x}) = \nabla^2 g_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 g_4(\vec{x}) &= \nabla^2 g_5(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $\nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ nur negative Eigenwerte hat, ist $\nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ negativ definit¹⁴ und es gilt für die quadratische Form $\vec{x}^T \cdot \nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \cdot \vec{x} = -4.62344x_1^2 - 4.23458x_2^2 < 0$.

¹⁴ Vgl. Forster (1983b), S. 61.

Damit ist $\vec{x}^T \cdot \nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \cdot \vec{x}$ negativ definit für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2$. $\vec{x}^* = (5, 5)^T$ ist somit eine lokal-optimale Lösung von $P_1(\vec{\epsilon}^*)$.

Da $\vec{x}^* = (5, 5)^T$ eine Lösung von $P_k(\vec{\epsilon}^*)$ ist und die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung für *ein* k (hier $k = 1$) erfüllt, ist \vec{x}^* eine lokal pareto-optimale Lösung von P_{MODM} in Beispiel 7.2.¹⁵

Für die in Abbildung B.7 und Abbildung 7.6 schwarz markierte Lösung $\vec{x}^* = (6.471, 8.529)^T$ von $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ mit $\vec{\epsilon}^* = \vec{f}(\vec{x}^*) = (83.7185, 69.1619, 87.8073)^T$ gilt:

$\vec{x}^* = (6.471, 8.529)^T$ gehört zu $\vec{\lambda}^* = (0.0000282821, 0, 0, 0, 0.600993)^T$.

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion ist an der Stelle $(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ gegeben durch:

$$\nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) = \begin{pmatrix} -1.38341 & 0 \\ 0 & -0.876786 \end{pmatrix}$$

Da $\nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ nur negative Eigenwerte hat, ist $\nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ negativ definit und es gilt für die quadratische Form $\vec{x}^T \cdot \nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \cdot \vec{x} = -1.38341x_1^2 - 0.876786x_2^2 < 0$. Damit ist $\vec{x}^T \cdot \nabla^2 L(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*) \cdot \vec{x}$ negativ definit für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^2$. Somit ist $\vec{x}^* = (6.471, 8.529)^T$ eine lokal-optimale Lösung von $P_1(\vec{\epsilon}^*)$ und eine lokal pareto-optimale Lösung von P_{MODM} in Beispiel 7.2.

Eine tabellarische Darstellung der Lösungsmengen der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$, wie z.B. in Tabelle B.6 - B.8, soll hier nicht erfolgen, da Mathematica Nullstellen von Polynomen höheren Grades (>2) im Allgemeinen nicht mehr durch Radikale (Wurzelausdrücke) darstellen kann. Die einzelnen Teillösungsmengen von L_{Ps11} werden dadurch in Abhängigkeit von zu bestimmenden Nullstellen von Polynomen dargestellt (Root-Darstellung), die sich zwar für eine graphische Darstellung wie in Abbildung 7.6 auswerten lassen, aber in tabellarischer Form eher **unverständlich** und **wenig anschaulich** sind. So ist z.B. die erste Teillösungsmenge L_1 von $P_1(\vec{\epsilon})$ gegeben durch:

$$L_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} \text{für } 3 < x_1 < 4 \text{ ist} \\ x_2 = \text{Root} [-43659x_1 + (10584 + 2709x_1 + 3024x_1^2 - \dots \\ \dots 1008x_1^3 + 216x_1^4 - 72x_1^5) \#1 - 9702x_1 \#1^2 + \dots \\ \dots 1386x_1 \#1^3 - 539x_1 \#1^4 + 177x_1 \#1^5 \&, 1] \\ \epsilon_2 \leq 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \\ \epsilon_3 = 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \end{array} \right. \right\}$$

¹⁵ Vgl. Chankong/Haimes (1983), S. 153.

Dies bedeutet, dass x_2 für $3 < x_1 < 4$ gegeben ist durch die von x_1 abhängige erste Nullstelle des mit $\text{Root} [\dots - \#1 - \dots \#1^2 + \dots \#1^3 - \dots \#1^4 + \dots \#1^5 \&, 1]$ gegebenen Polynoms 5. Grades.

B.4.1 Ersatzproblem ($P_1(\vec{\epsilon})$)

Das 1. Ersatzproblem $P_1(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 P_1(\vec{\epsilon}) : \quad & \max_{\vec{x} \in X} f_1(\vec{x}) \\
 & \text{mit} \tag{B.98} \\
 X := & \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 75 - \epsilon_2 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned}$$

wobei $f_1(\vec{x}) := 1 + \frac{55 \cdot x_1^2}{7 + x_1^2} + \frac{40 \cdot x_2^2}{9 + x_2^2}$ ist. ■

Lösung B.4.1

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 1. Ersatzproblems $P_1(\vec{\epsilon})$ (B.4.1) ergeben sich damit zu:

$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5(3 - x_1) + \lambda_4(4 - x_1) - \frac{110x_1^3}{(7 + x_1^2)^2} + \frac{110x_1}{7 + x_1^2} = 0 \tag{B.99}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4(3 - x_2) + \lambda_5(7 - x_2) - \frac{80x_2^3}{(9 + x_2^2)^2} + \frac{80x_2}{9 + x_2^2} = 0 \tag{B.100}$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \tag{B.101}$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \tag{B.102}$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \tag{B.103}$$

$$\lambda_4 \cdot \left(75 - \epsilon_2 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) = 0 \tag{B.104}$$

$$\lambda_5 \cdot \left(95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \right) = 0 \tag{B.105}$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \tag{B.106}$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \tag{B.107}$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \tag{B.108}$$

$$75 - \epsilon_2 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \tag{B.109}$$

$$95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \tag{B.110}$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.111})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.112})$$

Eine vereinfachte, von den Satisfizierungszielen ϵ_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P_1(\vec{\epsilon})$ ist in Abbildung B.8 (oben) dargestellt. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme. \square

B.4.2 Ersatzproblem ($P_2(\vec{\epsilon})$)

Das 2. Ersatzproblem $P_2(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$P_2(\vec{\epsilon}) : \begin{array}{l} \max_{\vec{x} \in X} f_2(\vec{x}) \\ \text{mit} \end{array} \quad (\text{B.113})$$

$$X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7+x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9+x_2^2} \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \wedge \\ \wedge \\ \wedge \\ \wedge \\ \wedge \end{array} \right\}$$

wobei $f_2(\vec{x}) := 75 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2}$ ist. \blacksquare

Lösung B.4.2

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 2. Ersatzproblems $P_2(\vec{\epsilon})$ (B.4.2) ergeben sich damit zu:

$$4 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5(3 - x_1) - x_1 + \lambda_4 \left(-\frac{110x_1^3}{(7+x_1^2)^2} + \frac{110x_1}{7+x_1^2} \right) = 0 \quad (\text{B.114})$$

$$3 - \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5(7 - x_2) - x_2 + \lambda_4 \left(-\frac{80x_2^3}{(9+x_2^2)^2} + \frac{80x_2}{9+x_2^2} \right) = 0 \quad (\text{B.115})$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{B.116})$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \quad (\text{B.117})$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \quad (\text{B.118})$$

$$\lambda_4 \cdot \left(1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7+x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9+x_2^2} \right) = 0 \quad (\text{B.119})$$

$$\lambda_5 \cdot \left(95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \right) = 0 \quad (\text{B.120})$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{B.121})$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.122})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.123})$$

$$1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7+x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9+x_2^2} \geq 0 \quad (\text{B.124})$$

$$95 - \epsilon_3 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 0 \quad (\text{B.125})$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.126})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.127})$$

Eine vereinfachte, von den Satisfizierungszielen ϵ_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P_2(\vec{\epsilon})$ ist in Abbildung B.8 (Mitte) dargestellt. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme. \square

B.4.3 Ersatzproblem ($P_3(\vec{\epsilon})$)

Das 3. Ersatzproblem $P_3(\vec{\epsilon})$ wird wie folgt definiert:

$$P_3(\vec{\epsilon}) : \begin{array}{l} \max_{\vec{x} \in X} f_3(\vec{x}) \\ \text{mit} \end{array} \quad (\text{B.128})$$

$$X := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} g_1(\vec{x}) := 15 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ g_2(\vec{x}) := x_1 - 2 \geq 0 \\ g_3(\vec{x}) := x_2 - 1 \geq 0 \\ g_4(\vec{x}) := 1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7+x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9+x_2^2} \geq 0 \\ g_5(\vec{x}) := 95 - \epsilon_3 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

wobei $f_3(\vec{x}) := 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2$ ist. \blacksquare

Lösung B.4.3

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen des 3. Ersatzproblems $P_3(\vec{\epsilon})$ (B.4.3) ergeben sich damit zu:

$$3 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5(4 - x_1) - x_1 + \lambda_4 \left(-\frac{110x_1^3}{(7+x_1^2)^2} + \frac{110x_1}{7+x_1^2} \right) = 0 \quad (\text{B.129})$$

$$7 - \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5(3 - x_2) - x_2 + \lambda_4 \left(-\frac{80x_2^3}{(9+x_2^2)^2} + \frac{80x_2}{9+x_2^2} \right) = 0 \quad (\text{B.130})$$

$$\lambda_1 \cdot (15 - x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{B.131})$$

$$\lambda_2 \cdot (x_1 - 2) = 0 \quad (\text{B.132})$$

$$\lambda_3 \cdot (x_2 - 1) = 0 \quad (\text{B.133})$$

$$\lambda_4 \cdot \left(1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7 + x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9 + x_2^2} \right) = 0 \quad (\text{B.134})$$

$$\lambda_5 \cdot \left(75 - \epsilon_2 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{B.135})$$

$$15 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{B.136})$$

$$x_1 - 2 \geq 0 \quad (\text{B.137})$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (\text{B.138})$$

$$1 - \epsilon_1 + \frac{55x_1^2}{7 + x_1^2} + \frac{40x_2^2}{9 + x_2^2} \geq 0 \quad (\text{B.139})$$

$$75 - \epsilon_2 + 4x_1 - \frac{x_1^2}{2} + 3x_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq 0 \quad (\text{B.140})$$

$$\forall r = 1, \dots, 5 \quad \lambda_r \geq 0 \quad (\text{B.141})$$

mit den erweiterten Bedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{B.142})$$

Eine vereinfachte, von den Satisfizierungszielen ϵ_k unabhängige Darstellung der Lösungsmenge von $P_3(\vec{\epsilon})$ ist in Abbildung B.8 (unten) dargestellt. Schwarz markiert ist der Rand der dargestellten Menge, der Teil der Lösungsmenge ist. Vergleiche dazu auch die Ränder der Lösungsmengen der anderen Ersatzprobleme. \square

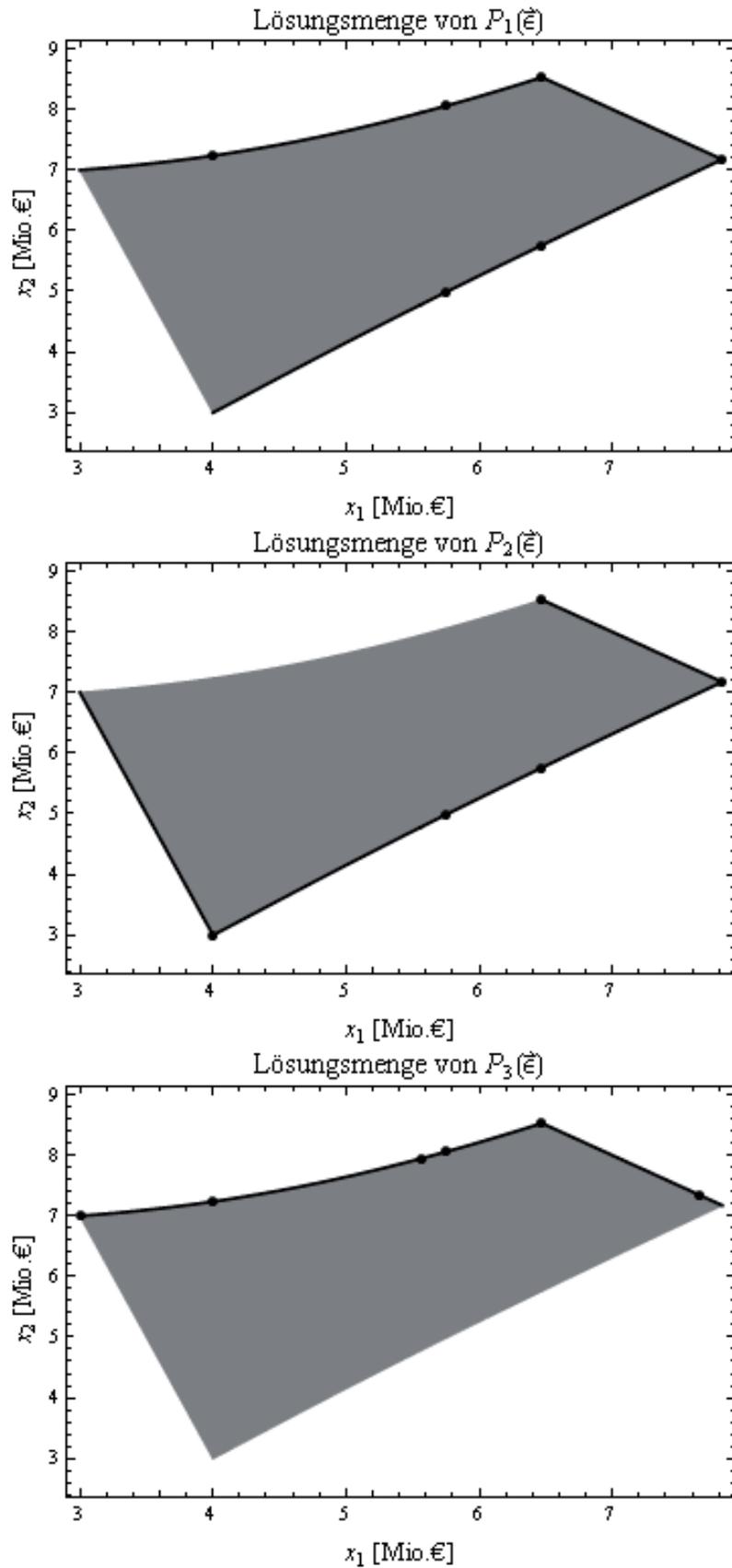


Abbildung B.8: Lösungsmengen $L_{P_k(\vec{\epsilon})}$ der Ersatzprobleme $P_k(\vec{\epsilon})$ in Beispiel 7.2 (Planungssituation 11)

B.5 Interaktive Satisfizierung konkaver Wirkungsfunktionen (Planungssituation 6)

Betrachtet wird Beispiel 7.1, S. 127.

Zur interaktiven Lösung des Beispiels wird die „Reference Direction Method“¹⁶ verwendet. Die nachfolgend verwendeten Referenzpunkte sind alle nicht pareto-optimal, so dass diese Punkte nicht von der Methode generiert werden, da stets eine pareto-optimale Lösung existiert und errechnet werden kann, welche die Referenzpunkte dominiert. Würde der Entscheider dagegen pareto-optimale Referenzpunkte (z.B. die Punkte, die zu \vec{x}^3 oder \vec{x}^5 gehören) wählen, so würde die Methode die Punkte als Lösungen des Algorithmus generieren und die Erwartungen des Entscheiders erfüllen.

Mit dem Algorithmus A.3, S. 163, gilt dann:

Initialisierung: Setze den Iterationszähler auf $h = 0$. Eine initiale Lösung kann durch Lösen des nachfolgenden Hilfsproblems 7.1 gefunden werden.¹⁷

B.1 Definition (Hilfsproblem Initiale Lösung)

$$\begin{array}{ll}
 \max & y \\
 P_{Init} : & \text{mit} \\
 & f_k(\vec{x}) \geq y \quad \forall k = 1, \dots, p \quad \wedge \\
 & \vec{x} \in X \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R}^1
 \end{array}$$

■

Eine zulässige Initiallösung ist z.B. $\vec{x}^0 = (3.4, 11.6)^T$ wie Tabelle 7.4 oder Abbildung 7.2 zeigen.

Es sei angenommen, dass der Entscheider mit der **Initiallösung**

$$\vec{f}^0 = \vec{f}(\vec{x}^0) = (50.34, 84.34, 61.6)^T \text{ mit } \vec{x}^0 = (3.4, 11.6)^T$$

nicht zufrieden ist.

¹⁶ Vgl. Abschnitt A.3, S. 162.

¹⁷ Vgl. Narula et al. (1994b), S. 805 oder Miettinen (1999), S. 97 und S. 191.

Iteration 0: Der Entscheider möchte $q = 3$ weitere Lösungen sehen und wählt als **Referenzpunkt** $\vec{z}^0 = (74.5, 94.5, 46)^T$ (dieser gehört zur Lösung $\vec{x} = (3, 8)^T$), so dass sich die Zielfunktionswerte von $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$ verbessern sollen und sich der Zielfunktionswert von $f_3(\vec{x})$ verschlechtern darf und zwar um maximal 15.6. Es ist $t := 1$ und $f_k^0 = f_k(\vec{x}^0) \quad \forall k = 1, 2, 3$.

Iteration 0.1 Es ist $h = 0$, $\alpha = 1 - t/q = \frac{2}{3}$, $K = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2\}$, $L = \{3\}$ und $E = \emptyset$. Das Ersatzproblem $P(\psi, X_1)$ für Beispiel 7.1 lautet damit:

B.5.1 Ersatzproblem ($P(\psi, X_1)$)

$$\begin{aligned}
 P(\psi, X_1) : \quad & \min_{\vec{x} \in X_1} \psi(\vec{x}) \\
 & \text{mit} \\
 \psi(\vec{x}) & := \max \left[\frac{f_1^0 - f_1(\vec{x})}{\vec{z}_1^0 - f_1^0}, \frac{f_2^0 - f_2(\vec{x})}{\vec{z}_2^0 - f_2^0} \right] \\
 & = \max \left[\begin{array}{l} 0.0984252 \left(-10.66 + \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 + \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2 \right), \\ 0.0413907 \left(-24.66 - 4x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \end{array} \right] \\
 X_1 & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{ll} f_3(\vec{x}) = 5 + 3x_1 + 4x_2 \geq 56.4 & \wedge \\ g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 15 \geq 0 & \wedge \\ g_2(\vec{x}) = x_1 - 2 \geq 0 & \wedge \\ g_3(\vec{x}) = x_2 - 1 \geq 0 & \wedge \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.143}$$

■

Mit der Lösung dieser Aufgabe

$$\vec{f}^1 = \vec{f}(\vec{x}^1) = (67.365, 90.853, 56.4)^T \text{ mit } \vec{x}^1 = (4.72805, 9.30396)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden! Setze $t = t + 1 = 2 \leq 3 = q$

Iteration 0.2 Es ist $h = 0$, $\alpha = 1 - t/q = \frac{1}{3}$, $K = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2\}$, $L = \{3\}$

und $E = \emptyset$. Das Ersatzproblem $P(\psi, X_1)$ lautet damit:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\vec{x} \in X_1} \psi(x) \\
 & \text{mit} \\
 \psi(x) & := \max \left[\frac{f_1^0 - f_1(\vec{x})}{\bar{z}_1^0 - f_1^0}, \frac{f_2^0 - f_2(\vec{x})}{\bar{z}_2^0 - f_2^0} \right] \\
 & = \max \left[\begin{array}{l} 0.0984252 \left(-10.66 + \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 + \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2 \right), \\ 0.0413907 \left(-24.66 - 4x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \end{array} \right] \\
 X_1 & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{ll} f_3(\vec{x}) = 5 + 3x_1 + 4x_2 \geq 51.2 & \wedge \\ g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 15 \geq 0 & \wedge \\ g_2(\vec{x}) = x_1 - 2 \geq 0 & \wedge \\ g_3(\vec{x}) = x_2 - 1 \geq 0 & \wedge \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.144}$$

Mit der Lösung dieser Aufgabe

$$\vec{f}^2 = \vec{f}(\vec{x}^2) = (72.522, 93.306, 51.2)^T \text{ mit } \vec{x}^2 = (4.10405, 8.47196)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden! Setze $t = t + 1 = 3 \leq 3 = q$

Iteration 0.3 Es ist $h = 0$, $\alpha = 1 - t/q = 0$, $K = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1, 2\}$, $L = \{3\}$ und $E = \emptyset$. Das Ersatzproblem $P(\psi, X_1)$ lautet damit:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\vec{x} \in X_1} \psi(x) \\
 & \text{mit} \\
 \psi(x) & := \max \left[\frac{f_1^0 - f_1(\vec{x})}{\bar{z}_1^0 - f_1^0}, \frac{f_2^0 - f_2(\vec{x})}{\bar{z}_2^0 - f_2^0} \right] \\
 & = \max \left[\begin{array}{l} 0.0984252 \left(-10.66 + \frac{1}{2} (x_1 - 3)^2 + \frac{1}{2} (x_2 - 7)^2 \right), \\ 0.0413907 \left(-24.66 - 4x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \end{array} \right] \\
 X_1 & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{ll} f_3(\vec{x}) = 5 + 3x_1 + 4x_2 \geq 46 & \wedge \\ g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 15 \geq 0 & \wedge \\ g_2(\vec{x}) = x_1 - 2 \geq 0 & \wedge \\ g_3(\vec{x}) = x_2 - 1 \geq 0 & \wedge \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.145}$$

Mit der Lösung dieser Aufgabe

$$\vec{f}^3 = \vec{f}(\vec{x}^3) = (76.6, 94.68, 46)^T \text{ mit } \vec{x}^3 = (3.48005, 7.63996)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden, obwohl die gefundene Lösung den Referenzpunkt des Entscheiders übertrifft. Dies resultiert daraus, dass der erste Referenzpunkt \vec{z}^0 zu einer nicht pareto-optimalen Lösung gehört und somit durch eine pareto-optimale Lösung, hier $\vec{x}^3 \approx (3.48, 7.64)^T$, dominiert wird. Da $t = t + 1 = 4 > 3 = q$ muss der Entscheider für eine neue Lösung einen neuen Referenzpunkt wählen. Dies ist eine Folge davon, dass mit $\alpha = 1 - t/q = 0$ das Reduktionspotenzial (das ist der Betrag, um den der Zielfunktionswert von $f_3(\vec{x})$ der Initiallösung \vec{f}^0 verringert werden darf; hier 15.6, da $f_3^0 = 61.6$ und $\vec{z}_3^0 = 46$), voll ausgeschöpft wurde. Als neue **Initiallösung** fungiert dabei die letzte gefundene Lösung \vec{x}^3 bzw. $\vec{f}^3 = \vec{f}(\vec{x}^3)$.

Iteration 1 Der Entscheider möchte $q = 2$ weitere Lösungen sehen und wählt als neuen **Referenzpunkt** $\vec{z}^1 = (87, 85, 32)^T$ (dieser gehört zur Lösung $\vec{x} = (5, 3)^T$), so dass sich der Zielfunktionswert von $f_1(\vec{x})$ verbessern soll und sich die Zielfunktionswerte von $f_2(\vec{x})$ bzw. $f_3(\vec{x})$ verschlechtern dürfen, und zwar um maximal 9.68 bzw. 14.0. Es ist $t := 1$ und $f_k^3 = f_k(\vec{x}^3) \quad \forall k = 1, 2, 3$.

Iteration 1.1 Es ist $h = 1$, $\alpha = 1 - t/q = \frac{1}{2}$, $K = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1\}$, $L = \{2, 3\}$ und $E = \{\emptyset\}$. Das Ersatzproblem $P(\psi, X_1)$ lautet damit:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\vec{x} \in X_1} \psi(x) \\
 & \text{mit} \\
 \psi(x) & := \max \left[\frac{f_1^3 - f_1(\vec{x})}{\vec{z}_1^1 - f_1^3} \right] \\
 & = 0.0961556 \left(1.60019 - 4x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \\
 X_1 & := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} f_2(\vec{x}) = 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 89.84 \quad \wedge \\ f_3(\vec{x}) = 5 + 3x_1 + 4x_2 \geq 39 \quad \wedge \\ g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 15 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) = x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) = x_2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.146}$$

Mit der Lösung dieser Aufgabe

$$\vec{f}^4 = \vec{f}(\vec{x}^4) = (85.499, 89.84, 39)^T \text{ mit } \vec{x}^4 = (5.16476, 4.62643)^T$$

ist der Entscheider *nicht* zufrieden! Setze $t = t + 1 = 2 \leq 2 = q$.

Iteration 1.2 Es ist $h = 1$, $\alpha = 1 - t/q = 0$, $K = \{1, 2, 3\}$, $H = \{1\}$, $L = \{2, 3\}$ und $E = \emptyset$. Das Ersatzproblem $P(\psi, X_1)$ lautet damit:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\vec{x} \in X_1} \psi(x) \\
 & \text{mit} \\
 \psi(x) & := \max \left[\frac{f_1^3 - f_1(\vec{x})}{\bar{z}_1^1 - f_1^3} \right] \\
 & = 0.0961556 \left(1.60019 - 4x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right) \\
 X_1 & = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}_+^2 \left| \begin{array}{l} f_2(\vec{x}) = 95 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 7)^2 \geq 85 \quad \wedge \\ f_3(\vec{x}) = 5 + 3x_1 + 4x_2 \geq 32 \quad \wedge \\ g_1(\vec{x}) = x_1 + x_2 - 15 \geq 0 \quad \wedge \\ g_2(\vec{x}) = x_1 - 2 \geq 0 \quad \wedge \\ g_3(\vec{x}) = x_2 - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{B.147}$$

Mit der Lösung dieser Aufgabe

$$\vec{f}^5 = \vec{f}(\vec{x}^5) = (87.32, 87.88, 32)^T \text{ mit } \vec{x}^5 = (4.36, 3.48)^T$$

ist der Entscheider zufrieden und der Algorithmus endet an dieser Stelle.

Wäre der Entscheider nicht zufrieden, müsste er für eine neue Lösung einen neuen Referenzpunkt wählen, da $t = t + 1 = 3 > 2 = q$. Dies ist eine Folge davon, dass mit $\alpha = 1 - t/q = 0$ das Reduktionspotenzial der dritten Zielfunktion f_3 (hier 14, da $f_3^3 = 46$ und $\bar{z}_3 = 32$), voll ausgeschöpft wurde. Die gefundene Lösung $\vec{f}(\vec{x}^5)$ übertrifft den Referenzpunkt des Entscheiders, da auch der zweite Referenzpunkt (wieder) zu einer nicht pareto-optimalen Lösung gehört und somit durch eine pareto-optimale Lösung, hier $\vec{x}^5 = (4.36, 3.48)^T$, dominiert wird. Als neue Initiallösung für den nächsten Iterationsschritt würde dabei die letzte gefundene Lösung \vec{x}^5 fungieren.

Die berechneten Lösungen sind in Abbildung 7.8 dargestellt, unterlegt mit der bereits bekannten Lösungsmenge (grau) aus Abbildung 7.2. Abbildung 7.9 zeigt die **Bildpunkte** der interaktiv generierten Lösungen $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^5$ der Werbemixaufgabe und die Bildmenge der gesamten pareto-optimalen Lösungen für die drei betrachteten Werbeziele. \square

C Optimalitätsinteraktion von Werbeinstrumenten in Werbewirkungsfunktionen

Für die Charakterisierung des optimalen Wertes x_i^* eines Instrumentes i einer polyinstrumentalen Funktion $f(\vec{x})$ ist es interessant, den Einfluss anderer Instrumente auf diesen optimalen Wert zu kennen. Die Bestimmung dieser Optimalitätsinteraktion kann aus der Betrachtung des vollständigen Differentials der Ableitung der Funktion $f(\vec{x})$ an der Stelle ihrer Optimallösung x_i^* erfolgen. Wenn die für eine Optimallösung notwendige Bedingung $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = 0$ erfüllt ist, so kann dann für alle Werte von $x_{k \neq i} \forall k = 1, \dots, n$ die Gleichung nach x_i aufgelöst werden, d.h. es kann die oben beschriebene Abhängigkeit $x_i^* = x_i^*(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ bestimmt werden. Mit $\left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \right|_{x_i^*} = 0$ gilt für das totale Differential der Funktion $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$ in x_i^* :

$$d\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\Leftrightarrow d\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_l = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\Leftrightarrow d\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\right) = \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i, j}}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_l + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i + \dots \\ \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_j = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_i = - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i, j}}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_l - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} dx_j \quad (\text{C.4})$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_i^*}{dx_j} = - \frac{\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i, j}}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \frac{dx_l}{dx_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}} \Bigg|_{x_i^*} \quad (\text{C.5})$$

Damit gilt im Zwei-Instrumente-Fall, also für $\vec{x} \in R^2$, oder für $x_i^* = x_i^*(x_j)$

$$\frac{dx_i^*}{dx_j} = - \frac{\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i}}{\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2}} \Bigg|_{x_i^*} \quad (\text{C.6})$$

Optimalitätsinteraktion zwischen zwei Werbeinstrumenten existiert damit unter den drei folgenden Bedingungen:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \Bigg|_{x_i^*} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i^2} \Bigg|_{x_i^*} \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} \Bigg|_{x_i^*} \neq 0 \quad (\text{C.7})$$

d.h. die **notwendige Bedingung 1. und 2. Ordnung** für eine Optimallösung der betrachteten Funktion muss erfüllt sein und die Funktion muss eine **nicht verschwindende Reaktionsinteraktion** zwischen den betrachteten Instrumenten aufweisen.

Die Ergebnisse aus Gleichung (C.6) und (C.7) gehen auf Dorfman/Steiner (1954) und Logman/Pauwels (1998) zurück, die jedoch im Gegensatz zu der obigen, allgemeinen Funktion den speziellen Fall der Maximierung der Gewinnfunktion eines Angebotsmonopolisten betrachten.¹

Eine alternative Bestimmung der Optimalitätsinteraktion kann durch Ableitung der Bestimmungsgleichung $x_i^* = x_i^*(x_j)$ bzw. $x_i^* = x_i^*(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ erfolgen, d.h. durch Berechnung von $\frac{dx_i^*(x_j)}{dx_j}$ nach herkömmlichen Ableitungsregeln. Dies erlaubt eine Kontrolle der Berechnung der Optimalitätsinteraktion nach (C.6).

Für die Funktionen aus Tabelle 3.1, die in der Literatur üblicherweise zur Modellierung von Wirkungsfunktionen herangezogen werden, zeigt Tabelle C.1 eine detaillierte Betrachtung der Bedingungen (C.7) für die Optimalitätsinteraktion in (Werbe-) Wirkungsfunktionen. Dazu wurde der Zwei-Instrumente-Fall betrachtet und angenommen,

¹ Logman/Pauwels (1998), S. 346.

dass alle in den Funktionen vorkommenden Parameter ungleich Null sind.

Lediglich für die selten verwendete „Zentler & Ryde“-Funktion (Nr. 26) **existiert Optimalitätsinteraktion. Alle anderen Funktionen weisen eine verschwindende Optimalitätsinteraktion im Zwei-Instrumente-Fall auf**, was den Betrachtungen der Optimalitätsinteraktion dieser Funktionen in anderen Publikationen wie z.B. in Hruschka (1991) oder Logman/Pauwels (1998) entgegensteht. Dies resultiert aus einem Wechsel der Betrachtungsebene² unter der die Optimalitätsinteraktion bestimmt wird. Ziel in der vorliegenden Arbeit ist die Betrachtung und Optimierung psychographischer Werbewirkungen und nicht die Gewinnmaximierung. Für das in den obigen Quellen betrachtete Modell eines gewinnmaximierenden Angebotsmonopolisten, dessen Absatz eine Funktion $f(p, W)$ der Instrumente *Preis* p und eines pauschalen *Absatzförderungsbudget* W ist, gilt nach dem Dorfman-Steiner-Theorem für den optimalen Preis p^* und die optimale Werbeintensität $Wi^* := \frac{W^*}{f(p^*, W^*) \cdot p^*}$ mit dem optimalen Budget W^* :

$$p^* = c \cdot \frac{\epsilon_p}{\epsilon_p + 1} \quad \wedge \quad Wi^* = -\frac{\epsilon_W}{\epsilon_p} \quad (\text{C.8})$$

wobei c die marginalen Grenzkosten darstellt.³ Damit gilt für die **Optimalitätsinteraktion der Instrumente auf Ebene der Gewinnfunktion**:

$$\frac{dp^*}{dW} = c \cdot \frac{\frac{d\epsilon_p}{dW}}{(\epsilon_p + 1)^2} \quad \wedge \quad \frac{dWi^*}{dp} = \frac{\left(\epsilon_W \cdot \frac{d\epsilon_p}{dp} - \epsilon_p \cdot \frac{d\epsilon_W}{dp} \right)}{\epsilon_p^2} \quad (\text{C.11})$$

wobei sich die zur Modellierung des Absatzes heranzuziehenden Wirkungsfunktionen $f(p, W)$ in den Elastizitäten $\epsilon_p = \frac{\partial f(p, W)}{\partial p} \cdot \frac{p}{f(p, W)}$ und $\epsilon_W = \frac{\partial f(p, W)}{\partial W} \cdot \frac{W}{f(p, W)}$ verbergen. Die Optimalitätsinteraktion hängt von den Elastizitätsinteraktionen ab, wie (C.11) entnommen werden kann.⁴ Setzt man nun für den Absatz eine Wirkungsfunktion $f(p, W)$ aus Tabelle 3.1 an, die eine nicht verschwindende Elastizitätsinteraktion aufweist, z.B. Funktionen 1-20, so stellt sich eine **nicht verschwindende Optimalitätsinteraktion auf der Betrachtungsebene des Gewinnes** ein, wie Hruschka (1991) oder

² Vgl. dazu Bemerkung 3.4, S. 47.

³ Dies folgt aus der Betrachtung der Gewinnfunktion

$$G(p, W) := f(p, W) \cdot p - K(f(p, W)) - W \quad (\text{C.9})$$

und den Optimalitätsbedingungen

$$\frac{\partial G(p, W)}{\partial p} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial G(p, W)}{\partial W} = 0 \quad (\text{C.10})$$

⁴ Vgl. Hruschka (1991), S. 352.

Logman/Pauwels (1998) zeigen.

Für die **Optimalitätsinteraktion auf der Betrachtungsebene der Wirkungsfunktion selbst** – wie im Falle psychographischer Werbewirkungszusammenhänge –, stellt sich dagegen, wie oben gezeigt, **keine Optimalitätsinteraktion** ein (mit Ausnahme der „Zentler & Ryde“-Funktion).

Dies bedeutet, dass insbesondere für **psychographische Werbeziele**, für die üblicherweise die Funktionen aus Tabelle 3.1 zur Modellierung der Werbewirkungsfunktionen herangezogen werden, **keine Optimalitätsinteraktion existiert**. Dies muss bei der **Bewertung der Plausibilität** von Werbewirkungsfunktionen für psychographische Werbewirkungen und ihrer **Verwendung** in der Werbemixplanung berücksichtigt werden. Die gilt insbesondere, wenn – wie von Hruschka (1991) gefordert – Instrumentinteraktionen zur Bewertung von Wirkungsfunktionen herangezogen werden.

Tabelle C.1 ist wie folgt zu lesen:

Sie zeigt die Fälle, d.h. die Ausprägungen der drei Bedingungen aus (C.7), für die es im Zwei-Instrumente-Fall keine Optimalitätsinteraktion gibt (Fall A-H) und den Fall, für den die Optimalitätsinteraktion bestimmt werden kann (Fall I). Die Funktionen aus Tabelle 3.1 sind dann durch Angabe ihrer Nummern den Fällen zugeordnet. Funktionen, deren Nummern in Klammer stehen, weisen verschiedene Optimalwerte x_i^* und damit unterschiedliche Einordnungen auf.

Spalte „OIA aus (C.6)“ zeigt die Bestimmung der OIA nach Gleichung (C.6), Spalte „OIA aus $x_i^*(x_j)$ “ zeigt zur Kontrolle die alternative Bestimmung mittels Berechnung von $\frac{dx_i^*(x_j)}{dx_j}$. Dabei bedeutet $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = c \neq 0$, dass die Ableitung konstant ist, so dass kein x_i^* existiert. $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$, $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \psi(x_i)$, $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \varphi(\vec{x})$ bedeuten, dass die Ableitungen Funktionen darstellen, die von x_i bzw. \vec{x} abhängen, so dass ggfs. x_i^* bzw. die OIA nach (C.6) bestimmt werden kann (falls für das daraus zu bestimmende x_i^* gilt: $x_i^* \neq 0$ oder $x_i^* \neq c$).

| # | Optimalitätsinteraktion für den Fall: | | | | OIA aus (C.6) | OIA aus $x_i^*(x_j)$ | Funktion | |
|-----------|--|----------|--|----------|--|----------------------|----------------------|---|
| A) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = c$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = 0$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $\nexists x_i^*$ | 1 |
| B) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = c$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $x_i^* = 0$ | 2 |
| C) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = c$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $x_i^* = c$ | 3 |
| D) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $\nexists x_i^*$ | 4, 5, (6) 8, 9, 10, (11) |
| E) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $x_i^* = 0$ | (6), (11), (12), 30 |
| F) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ | \wedge | $x_i^* = c$ | 7, (12) |
| G) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \varphi(\vec{x})$ | \wedge | $\nexists x_i^*$ | 13-16, (17) 18, 19, (20), 21-25, (27), (28), (29) |
| H) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \varphi(\vec{x})$ | \wedge | $x_i^* = 0$ | (17), (20), (26), (27), (28), (29) |
| \exists | Optimalitätsinteraktion für den Fall: | | | | | | | |
| I) | $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \phi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_i} = \psi(x_i)$ | \wedge | $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \varphi(\vec{x})$ | \wedge | $x_i^* = x_i^*(x_j)$ | (26) |

Tabelle C.1: Bedingungen zur Optimalitätsinteraktion bei Werbewirkungsfunktionen

D Wirkungsfunktionen

Auf den nachfolgenden Seiten 212–231 wird eine detaillierte Beschreibung der Funktionen aus Tabelle 3.1 und ihrer Eigenschaften wie 1. und 2. Ableitung, Elastizität, Elastizitätsinteraktion und Reaktionsinteraktion für den statischen, Zwei-Instrumente-Fall angegeben. Bei den Berechnungen wurde angenommen, dass alle auftretenden Parameter ungleich Null sind, da sich sonst der Charakter der betrachteten Funktionen grundlegend ändert. Teilweise wurden die Formeln der Elastizität und Elastizitätsinteraktion zur besseren Übersicht in Abhängigkeit von $f(\vec{x})$ dargestellt. Die abhängige Variable f stellt das Niveau der Wirkungskomponente dar, die unabhängigen Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ repräsentieren die Aktivitätsniveaus der Instrumente. f_0 ist ein Offset der Ordinate für $x_i = 0$; f_{min} und f_{max} sind die minimale und maximale Wirkung und $a, a_i, b, b_i, c, c_i, \dots \in \mathbb{R}_+$ Parameter. Die in Tabelle 3.1 (rechte Spalte) mit „+“ bzw. „*“ gekennzeichneten Funktionen (1-7) bzw. (13-19 sowie 21-24), können durch verallgemeinerte Funktionstypen „+“ bzw. „*“ dargestellt werden (Funktion 29 bzw. 30). Die Details zu den einzelnen Funktionen sind auf den nachfolgenden Seiten zu finden:

| | | | | | |
|------------------|--------|----------------------|--------|---------------------|--------|
| 01 Linear | S. 212 | 11 Little | S. 218 | 21 Exponential 2 | S. 225 |
| 02 Quadratisch | S. 213 | 12 Gamma | S. 219 | 22 Exponential 5 | S. 225 |
| 03 Quadratisch | S. 213 | 13 Logistisch | S. 219 | 23 Log-Reziproke | S. 226 |
| 04 Wurzel | S. 214 | 14 Logistisch | S. 220 | 24 Log-Reziproke | S. 226 |
| 05 Reziprok | S. 214 | 15 Logistisch | S. 221 | 25 Gompertz | S. 227 |
| 06 Saturation | S. 215 | 16 Exponential 1 | S. 221 | 26 Zentler & Ryde | S. 229 |
| 07 Polynomial | S. 215 | 17 Expo. modifiziert | S. 222 | 27 Log-Log | S. 227 |
| 08 Semi-Log | S. 216 | 18 Expo. mod. 1 | S. 223 | 28 Multiplikativ | S. 228 |
| 09 Exponential 3 | S. 217 | 19 Expo. mod. 2 | S. 223 | 29 Allg. Funktion * | S. 230 |
| 10 Exponential 4 | S. 217 | 20 Johansson | S. 224 | 30 Allg. Funktion + | S. 231 |

Die Funktionen aus Tabelle 3.1 wurden den folgenden Quellen entnommen bzw. gehen auf die nachfolgenden Beiträge zurück:

| Quelle | # Funktion |
|-------------------------|--|
| Saunders (1987) | : 1, 2, 4, 5, 8, 9, 13, 17, 21, 24, 27 |
| Hanssens/Parsons (1993) | : 3, 6, 10, 16, 22, 23, 28 |
| Depluet (1991) | : 12, 15, 18, 19 |
| Hruschka (1991) | : 14 |
| Little (1970) | : 11 |
| Johansson (1979) | : 20 |
| Leeflang et al. (2000) | : 25 |
| Zentler/Ryde (1956) | : 26 |

Der interessierte Leser findet in den zitierten Quellen zudem Anwendungen dieser Funktionen bzw. Verweise auf entsprechende Anwendungen.

01 Lineare Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := f_0 + a_1x_1 + a_2x_2$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = a_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = a_2 \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.2})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = 0 \quad (\text{D.3})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 x_1}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 x_2}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.5})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{a_1 a_2 x_1}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{a_1 a_2 x_2}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.6})$$

02 Quadratische Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := f_0 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 2a_1x_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2a_2x_2 \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2^* = 0 \quad (\text{D.8})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = 2a_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = 2a_2 \quad (\text{D.9})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.10})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{2a_1x_1^2}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{2a_2x_2^2}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.11})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{4a_1a_2x_1^2x_2}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{4a_1a_2x_1x_2^2}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.12})$$

03 Quadratische Funktion

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)): $f(\vec{x}) := f_0 + a_1x_1 - b_1x_1^2 + a_2x_2 - b_2x_2^2$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = a_1 - 2b_1x_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = a_2 - 2b_2x_2 \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{a_1}{2b_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{a_2}{2b_2} \quad (\text{D.14})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -2b_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -2b_2 \quad (\text{D.15})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.16})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{x_1(a_1 - 2b_1x_1)}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{x_2(a_2 - 2b_2x_2)}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.17})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{x_1(-a_1 + 2b_1x_1)(a_2 - 2b_2x_2)}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{(a_1 - 2b_1x_1)x_2(-a_2 + 2b_2x_2)}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.18})$$

04 Wurzel-Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)):

$$f(\vec{x}) := f_0 + a_1 x_1^{0.5} + a_2 x_2^{0.5}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{0.5a_1}{x_1^{0.5}} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{0.5a_2}{x_2^{0.5}} \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.20})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{0.25a_1}{x_1^{1.5}} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -\frac{0.25a_2}{x_2^{1.5}} \quad (\text{D.21})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.22})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{0.5a_1 x_1^{0.5}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{0.5a_2 x_2^{0.5}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.23})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{0.25a_1 a_2 x_1^{0.5} x_2^{-0.5}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{0.25a_1 a_2 x_2^{0.5} x_1^{-0.5}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.24})$$

05 Reziproke Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)):

$$f(\vec{x}) := f_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -\frac{a_1}{x_1^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -\frac{a_2}{x_2^2} \quad (\text{D.25})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.26})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = \frac{2a_1}{x_1^3} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = \frac{2a_2}{x_2^3} \quad (\text{D.27})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.28})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -\frac{a_1 x_1^{-1}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -\frac{a_2 x_2^{-1}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.29})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{a_1 a_2 x_1^{-1} x_2^{-2}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{a_1 a_2 x_1^{-2} x_2^{-1}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.30})$$

06 Saturation-Funktion

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)): $f(\vec{x}) := f_0 - a_1 x_1^{-b_1} - a_2 x_2^{-b_2}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = a_1 b_1 x_1^{-1-b_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = a_2 b_2 x_2^{-1-b_2} \quad (\text{D.31})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } b_1 < -1 \\ \neq x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } b_2 < -1 \\ \neq x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = a_1 (-1 - b_1) b_1 x_1^{-2-b_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = a_2 (-1 - b_2) b_2 x_2^{-2-b_2} \quad (\text{D.33})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.34})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 b_1 x_1^{-b_1}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 b_2 x_2^{-b_2}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.35})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{a_1 a_2 b_1 b_2 x_1^{-b_1} x_2^{-1-b_2}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{a_1 a_2 b_1 b_2 x_2^{-b_2} x_1^{-1-b_1}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.36})$$

07 Polynomiale Funktion

Funktionsdefinition: $f(\vec{x}) := f_0 + a_1 x_1 + b_1 x_1^2 + c_1 x_1^3 + a_2 x_2 + b_2 x_2^2 + c_2 x_2^3$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = a_1 + 2b_1 x_1 + 3c_1 x_1^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = a_2 + 2b_2 x_2 + 3c_2 x_2^2 \quad (\text{D.37})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1^* = -\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 3a_1 c_1}}{3c_1} \quad \vee \quad x_1^* = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 3a_1 c_1}}{3c_1} \quad (\text{D.38})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2^* = -\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 3a_2 c_2}}{3c_2} \quad \vee \quad x_2^* = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 3a_2 c_2}}{3c_2} \quad (\text{D.39})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = 2b_1 + 6c_1 x_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = 2b_2 + 6c_2 x_2 \quad (\text{D.40})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.41})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{x_1 (a_1 + x_1 (2b_1 + 3c_1 x_1))}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{x_2 (a_2 + x_2 (2b_2 + 3c_2 x_2))}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.42})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = - \frac{x_1 (a_1 + x_1 (2b_1 + 3c_1 x_1)) (a_2 + x_2 (2b_2 + 3c_2 x_2))}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.43})$$

$$\frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = - \frac{(a_1 + x_1 (2b_1 + 3c_1 x_1)) x_2 (a_2 + x_2 (2b_2 + 3c_2 x_2))}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.44})$$

08 Semi-Log-Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := \text{Log}[x_1] a_1 + \text{Log}[x_2] a_2 + f_0$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{a_1}{x_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{a_2}{x_2} \quad (\text{D.45})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.46})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{a_1}{x_1^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -\frac{a_2}{x_2^2} \quad (\text{D.47})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.48})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.49})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{a_1 a_2 x_2^{-1}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{a_1 a_2 x_1^{-1}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.50})$$

09 Exponential-Funktion (3)

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := (e^{a_1x_1} + e^{a_2x_2}) f_0$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = e^{a_1x_1} a_1 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = e^{a_2x_2} a_2 f_0 \quad (\text{D.51})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.52})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = e^{a_1x_1} a_1^2 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = e^{a_2x_2} a_2^2 f_0 \quad (\text{D.53})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.54})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{f_0 e^{a_1x_1} a_1 x_1}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{f_0 e^{a_2x_2} a_2 x_2}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.55})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{f_0^2 e^{a_1x_1 + a_2x_2} a_1 a_2 x_1}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{f_0^2 e^{a_1x_1 + a_2x_2} a_1 a_2 x_2}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.56})$$

10 Exponential-Funktion (4)

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)): $f(\vec{x}) := (e^{-a_1x_1} + e^{-a_2x_2}) f_0$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -e^{-a_1x_1} a_1 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -e^{-a_2x_2} a_2 f_0 \quad (\text{D.57})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.58})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = e^{-a_1x_1} a_1^2 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = e^{-a_2x_2} a_2^2 f_0 \quad (\text{D.59})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.60})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -\frac{f_0 e^{-a_1x_1} a_1 x_1}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -\frac{f_0 e^{-a_2x_2} a_2 x_2}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.61})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{f_0^2 e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_1}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{f_0^2 e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_2}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.62})$$

11 Little-Funktion

Funktionsdefinition (Little (1970)): $f(\vec{x}) := f_{\min} + (f_{\max} - f_{\min}) \left(\frac{x_1^{c_1}}{b_1 + x_1^{c_1}} + \frac{x_2^{c_2}}{b_2 + x_2^{c_2}} \right)$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{b_1 c_1 (f_{\max} - f_{\min}) x_1^{-1+c_1}}{(b_1 + x_1^{c_1})^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{b_2 c_2 (f_{\max} - f_{\min}) x_2^{-1+c_2}}{(b_2 + x_2^{c_2})^2} \quad (\text{D.63})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } c_1 > 1 \\ \nexists x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } c_2 > 1 \\ \nexists x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.64})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{b_1 c_1 (f_{\max} - f_{\min}) x_1^{-2+c_1} (-b_1 (-1 + c_1) + (1 + c_1) x_1^{c_1})}{(b_1 + x_1^{c_1})^3} \quad (\text{D.65})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -\frac{b_2 c_2 (f_{\max} - f_{\min}) x_2^{-2+c_2} (-b_2 (-1 + c_2) + (1 + c_2) x_2^{c_2})}{(b_2 + x_2^{c_2})^3} \quad (\text{D.66})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.67})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{b_1 c_1 (f_{\max} - f_{\min}) x_1^{c_1} (b_2 + x_2^{c_2})}{(b_1 + x_1^{c_1}) (b_1 (b_2 f_{\min} + f_{\max} x_2^{c_2}) + x_1^{c_1} (b_2 f_{\max} + (2f_{\max} - f_{\min}) x_2^{c_2}))} \quad (\text{D.68})$$

$$\epsilon_{x_2} = \frac{b_2 c_2 (f_{\max} - f_{\min}) (b_1 + x_1^{c_1}) x_2^{c_2}}{(b_2 + x_2^{c_2}) (b_1 (b_2 f_{\min} + f_{\max} x_2^{c_2}) + x_1^{c_1} (b_2 f_{\max} + (2f_{\max} - f_{\min}) x_2^{c_2}))} \quad (\text{D.69})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 (f_{\max} - f_{\min})^2 x_1^{c_1} x_2^{-1+c_2}}{(b_1 (b_2 f_{\min} + f_{\max} x_2^{c_2}) + x_1^{c_1} (b_2 f_{\max} + (2f_{\max} - f_{\min}) x_2^{c_2}))^2} \quad (\text{D.70})$$

$$\frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{b_1 b_2 c_1 c_2 (f_{\max} - f_{\min})^2 x_1^{-1+c_1} x_2^{c_2}}{(b_1 (b_2 f_{\min} + f_{\max} x_2^{c_2}) + x_1^{c_1} (b_2 f_{\max} + (2f_{\max} - f_{\min}) x_2^{c_2}))^2} \quad (\text{D.71})$$

12 Gamma-Funktion

Funktionsdefinition (Depluet (1991)): $f(\vec{x}) := a(e^{-c_1x_1}x_1^{a_1} + e^{-c_2x_2}x_2^{a_2})$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = ae^{-c_1x_1}x_1^{-1+a_1}(a_1 - c_1x_1) \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = ae^{-c_2x_2}x_2^{-1+a_2}(a_2 - c_2x_2) \quad (\text{D.72})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } a_1 > 1 \\ x_1^* = \frac{a_1}{c_1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } a_2 > 1 \\ x_2^* = \frac{a_2}{c_2} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.73})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = ae^{-c_1x_1}x_1^{-2+a_1}(a_1^2 + c_1^2x_1^2 - a_1(1 + 2c_1x_1)) \quad (\text{D.74})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = ae^{-c_2x_2}x_2^{-2+a_2}(a_2^2 + c_2^2x_2^2 - a_2(1 + 2c_2x_2)) \quad (\text{D.75})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.76})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{ae^{-c_1x_1}x_1^{a_1}(a_1 - c_1x_1)}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{ae^{-c_2x_2}x_2^{a_2}(a_2 - c_2x_2)}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.77})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{a^2x_1^{a_1}(a_1 - c_1x_1)x_2^{-1+a_2}(-a_2 + c_2x_2)}{e^{c_1x_1+c_2x_2} \cdot f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.78})$$

$$\frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{a^2x_1^{-1+a_1}(-a_1 + c_1x_1)x_2^{a_2}(a_2 - c_2x_2)}{e^{c_1x_1+c_2x_2} \cdot f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.79})$$

13 Logistische Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := \frac{f_{\max}}{1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2}a_1f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2}a_2f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^2} \quad (\text{D.80})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \nexists x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \nexists x_2^* \quad (\text{D.81})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = \frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2}(-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})a_1^2f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.82})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = \frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} (-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}) a_2^2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.83})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} (-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}) a_1 a_2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.84})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_1 x_1}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_2 x_2}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad (\text{D.85})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_1 a_2 x_1}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_1 a_2 x_2}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad (\text{D.86})$$

14 Logistische Funktion

Funktionsdefinition (Hruschka (1991)):

$$f(\vec{x}) := \frac{f_{\max}}{1 + e^{-b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_1 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} a_2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^2} \quad (\text{D.87})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.88})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} (-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}) a_1^2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.89})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} (-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}) a_2^2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.90})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{e^{b+a_1x_1+a_2x_2} (-1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2}) a_1 a_2 f_{\max}}{(1 + e^{b+a_1x_1+a_2x_2})^3} \quad (\text{D.91})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 x_1 e^{-b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 x_2 e^{-b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad (\text{D.92})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{e^{-b - a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_1}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{e^{-b - a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_2}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad (\text{D.93})$$

15 Logistische Funktion

Funktionsdefinition (Depluet (1991)):

$$f(\vec{x}) := \frac{f_{\max}}{1 + e^{b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{e^{b + a_1 x_1 + a_2 x_2} a_1 f_{\max}}{(e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2})^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{e^{b + a_1 x_1 + a_2 x_2} a_2 f_{\max}}{(e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2})^2} \quad (\text{D.94})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.95})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{e^{b + a_1 x_1 + a_2 x_2} (-e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2}) a_1^2 f_{\max}}{(e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2})^3} \quad (\text{D.96})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -\frac{e^{b + a_1 x_1 + a_2 x_2} (-e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2}) a_2^2 f_{\max}}{(e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2})^3} \quad (\text{D.97})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = -\frac{e^{b + a_1 x_1 + a_2 x_2} (-e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2}) a_1 a_2 f_{\max}}{(e^b + e^{a_1 x_1 + a_2 x_2})^3} \quad (\text{D.98})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 x_1 e^{b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 x_2 e^{b - a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f_{\max}} \cdot f(\vec{x}) \quad (\text{D.99})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{e^{b - a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_1}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{e^{b - a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 x_2}{f_{\max}^2} \cdot f^2(\vec{x}) \quad (\text{D.100})$$

16 Exponential-Funktion (1)

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)):

$$f(\vec{x}) := a + b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_2 \quad (\text{D.101})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.102})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_2^2 \quad (\text{D.103})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} a_1 a_2 \quad (\text{D.104})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -\frac{ba_1x_1e^{-a_1x_1-a_2x_2}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -\frac{ba_2x_2e^{-a_1x_1-a_2x_2}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.105})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{aba_1a_2x_1e^{-a_1x_1-a_2x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{aba_1a_2x_2e^{-a_1x_1-a_2x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.106})$$

17 modifizierte Exponential-Funktion (Weibull-Funktion)

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := \left(1 - e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}}\right) f_{\max}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_1c_1 f_{\max} x_1^{-1+c_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_2c_2 f_{\max} x_2^{-1+c_2} \quad (\text{D.107})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } c_1 > 1 \\ \#x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } c_2 > 1 \\ \#x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.108})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_1c_1 f_{\max} x_1^{-2+c_1} (1 + c_1(-1 + a_1x_1^{c_1})) \quad (\text{D.109})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_2c_2 f_{\max} x_2^{-2+c_2} (1 + c_2(-1 + a_2x_2^{c_2})) \quad (\text{D.110})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = -e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_1a_2c_1c_2 f_{\max} x_1^{-1+c_1} x_2^{-1+c_2} \quad (\text{D.111})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_1c_1 f_{\max} x_1^{c_1}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{e^{-a_1x_1^{c_1} - a_2x_2^{c_2}} a_2c_2 f_{\max} x_2^{c_2}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.112})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 c_1 c_2 x_1^{c_1} x_2^{c_2-1}}{f^2(\vec{x}) \cdot e^{a_1x_1^{c_1} + a_2x_2^{c_2}}} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 c_1 c_2 x_1^{c_1-1} x_2^{c_2}}{f^2(\vec{x}) \cdot e^{a_1x_1^{c_1} + a_2x_2^{c_2}}} \quad (\text{D.113})$$

18 modifizierte Exponential-Funktion (1)

Funktionsdefinition (Depluet (1991)): $f(\vec{x}) := (1 - e^{b-a_1x_1-a_2x_2}) f_{\max}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = e^{b-a_1x_1-a_2x_2} a_1 f_{\max} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = e^{b-a_1x_1-a_2x_2} a_2 f_{\max} \quad (\text{D.114})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2^* \quad (\text{D.115})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -e^{b-a_1x_1-a_2x_2} a_1^2 f_{\max} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -e^{b-a_1x_1-a_2x_2} a_2^2 f_{\max} \quad (\text{D.116})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = -e^{b-a_1x_1-a_2x_2} a_1 a_2 f_{\max} \quad (\text{D.117})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 x_1 f_{\max} e^{b-a_1x_1-a_2x_2}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 x_2 f_{\max} e^{b-a_1x_1-a_2x_2}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.118})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 x_1 e^{b-a_1x_1-a_2x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 x_2 e^{b-a_1x_1-a_2x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.119})$$

19 modifizierte Exponential-Funktion (2)

Funktionsdefinition (Depluet (1991)): $f(\vec{x}) := (1 - be^{-a_1x_1-a_2x_2}) f_{\max}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = be^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1 f_{\max} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = be^{-a_1x_1-a_2x_2} a_2 f_{\max} \quad (\text{D.120})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2^* \quad (\text{D.121})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -be^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1^2 f_{\max} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = -be^{-a_1x_1-a_2x_2} a_2^2 f_{\max} \quad (\text{D.122})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = -be^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1 a_2 f_{\max} \quad (\text{D.123})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 x_1 f_{\max} b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 x_2 f_{\max} b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f(\vec{x})} \quad (\text{D.124})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 x_1 b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{f_{\max}^2 a_1 a_2 x_2 b e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2}}{f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.125})$$

20 Johansson-Funktion

Funktionsdefinition (Johansson (1979)):
$$f(\vec{x}) := \frac{f_{\min} + b c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2})}{1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2})}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{c a_1 (b - f_{\min}) x_1^{-1+a_1}}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{c a_2 (b - f_{\min}) x_2^{-1+a_2}}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^2} \quad (\text{D.126})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } a_1 > 1 \\ \neq x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } a_2 > 1 \\ \neq x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.127})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = -\frac{c a_1 (b - f_{\min}) x_1^{-2+a_1} (1 + c x_1^{a_1} + a_1 (-1 + c x_1^{a_1}) - c (-1 + a_1) x_2^{a_2})}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^3} \quad (\text{D.128})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = \frac{c a_2 (b - f_{\min}) x_2^{-2+a_2} ((-1 + a_2) (1 + c x_1^{a_1}) - c (1 + a_2) x_2^{a_2})}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^3} \quad (\text{D.129})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{2c^2 a_1 a_2 (-b + f_{\min}) x_1^{-1+a_1} x_2^{-1+a_2}}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^3} \quad (\text{D.130})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{c a_1 (b - f_{\min}) x_1^{a_1}}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^2 \cdot f(\vec{x})} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{c a_2 (b - f_{\min}) x_2^{a_2}}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^2 \cdot f(\vec{x})} \quad (\text{D.131})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = -\frac{c^2 a_1 a_2 (b - f_{\min}) x_1^{a_1} x_2^{-1+a_2} (f_{\min} + b (1 + 2c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2})))}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^4 \cdot f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.132})$$

$$\frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = -\frac{c^2 a_1 a_2 (b - f_{\min}) x_1^{-1+a_1} x_2^{a_2} (f_{\min} + b (1 + 2c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2})))}{(1 + c (x_1^{a_1} + x_2^{a_2}))^4 \cdot f^2(\vec{x})} \quad (\text{D.133})$$

21 Exponential-Funktion (2)

Funktionsdefinition (Saunders (1987)):

$$f(\vec{x}) := e^{a_1x_1+a_2x_2} f_0$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = e^{a_1x_1+a_2x_2} a_1 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = e^{a_1x_1+a_2x_2} a_2 f_0 \quad (\text{D.134})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.135})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = e^{a_1x_1+a_2x_2} a_1^2 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = e^{a_1x_1+a_2x_2} a_2^2 f_0 \quad (\text{D.136})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{a_1x_1+a_2x_2} a_1 a_2 f_0 \quad (\text{D.137})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = a_1 x_1 \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = a_2 x_2 \quad (\text{D.138})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.139})$$

22 Exponential-Funktion (5)

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)):

$$f(\vec{x}) := e^{-a_1x_1-a_2x_2} f_0$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -e^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -e^{-a_1x_1-a_2x_2} a_2 f_0 \quad (\text{D.140})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \#x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \#x_2^* \quad (\text{D.141})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = e^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1^2 f_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = e^{-a_1x_1-a_2x_2} a_2^2 f_0 \quad (\text{D.142})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{-a_1x_1-a_2x_2} a_1 a_2 f_0 \quad (\text{D.143})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -a_1 x_1 \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -a_2 x_2 \quad (\text{D.144})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.145})$$

23 Log-reziproke Funktion

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)): $f(\vec{x}) := e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}} a_1}{x_1^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = \frac{e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}} a_2}{x_2^2} \quad (\text{D.146})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \nexists x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \nexists x_2^* \quad (\text{D.147})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = \frac{e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}} a_1 (a_1 - 2x_1)}{x_1^4} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = \frac{e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}} a_2 (a_2 - 2x_2)}{x_2^4} \quad (\text{D.148})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{e^{a - \frac{a_1}{x_1} - \frac{a_2}{x_2}} a_1 a_2}{x_1^2 x_2^2} \quad (\text{D.149})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1}{x_1} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2}{x_2} \quad (\text{D.150})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.151})$$

24 Log-reziproke Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = -\frac{e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}} a_1}{x_1^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = -\frac{e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}} a_2}{x_2^2} \quad (\text{D.152})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \nexists x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \nexists x_2^* \quad (\text{D.153})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = \frac{e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}} a_1 (a_1 + 2x_1)}{x_1^4} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = \frac{e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}} a_2 (a_2 + 2x_2)}{x_2^4} \quad (\text{D.154})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{e^{a + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2}} a_1 a_2}{x_1^2 x_2^2} \quad (\text{D.155})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = -\frac{a_1}{x_1} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = -\frac{a_2}{x_2} \quad (\text{D.156})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.157})$$

25 Gompertz-Funktion

Funktionsdefinition (Leefflang et al. (2000)): $f(\vec{x}) := b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} f_{\max}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} \text{Log}[b] \text{Log}[a_1] a_1^{x_1} f_{\max} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} \text{Log}[b] \text{Log}[a_2] a_2^{x_2} f_{\max} \quad (\text{D.158})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \nexists x_1^* \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \nexists x_2^* \quad (\text{D.159})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} \text{Log}[b] \text{Log}[a_1]^2 a_1^{x_1} (1 + \text{Log}[b] a_1^{x_1}) f_{\max} \quad (\text{D.160})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} \text{Log}[b] \text{Log}[a_2]^2 a_2^{x_2} (1 + \text{Log}[b] a_2^{x_2}) f_{\max} \quad (\text{D.161})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = b^{a_1^{x_1} + a_2^{x_2}} \text{Log}[b]^2 \text{Log}[a_1] \text{Log}[a_2] a_1^{x_1} a_2^{x_2} f_{\max} \quad (\text{D.162})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \text{Log}[b] \text{Log}[a_1] a_1^{x_1} x_1 \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \text{Log}[b] \text{Log}[a_2] a_2^{x_2} x_2 \quad (\text{D.163})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.164})$$

27 Log-Log-Funktion

Funktionsdefinition (Saunders (1987)): $f(\vec{x}) := e^{a + \text{Log}[x_1] a_1 + \text{Log}[x_2] a_2}$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = e^a a_1 x_1^{-1+a_1} x_2^{a_2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = e^a a_2 x_1^{a_1} x_2^{-1+a_2} \quad (\text{D.165})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } a_1 > 1 \\ \nexists x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } a_2 > 1 \\ \nexists x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.166})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = e^a (-1 + a_1) a_1 x_1^{-2+a_1} x_2^{a_2} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = e^a (-1 + a_2) a_2 x_1^{a_1} x_2^{-2+a_2} \quad (\text{D.167})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = e^a a_1 a_2 x_1^{-1+a_1} x_2^{-1+a_2} \quad (\text{D.168})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = a_1 \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = a_2 \quad (\text{D.169})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.170})$$

28 Multiplikative Funktion

Funktionsdefinition (Hanssens/Parsons (1993)):

$$f(\vec{x}) := a x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = a a_1 x_1^{-1+a_1} x_2^{a_2} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = a a_2 x_1^{a_1} x_2^{-1+a_2} \quad (\text{D.171})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } a_1 > 1 \\ \neq x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } a_2 > 1 \\ \neq x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.172})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = a(-1+a_1) a_1 x_1^{-2+a_1} x_2^{a_2} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = a(-1+a_2) a_2 x_1^{a_1} x_2^{-2+a_2} \quad (\text{D.173})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = a a_1 a_2 x_1^{-1+a_1} x_2^{-1+a_2} \quad (\text{D.174})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = a_1 \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = a_2 \quad (\text{D.175})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.176})$$

26 Zentler & Ryde-Funktion

Funktionsdefinition (Zentler/Ryde (1956)):

$$f(\vec{x}) := \frac{a \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2}{1 + \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}} \quad (\text{D.177})$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = \frac{2aa_1^2 a_2^2 x_1 x_2^2 + aa_1 a_2^2 x_1^2 x_2^2 + 2aa_1^2 a_2 x_1 x_2^3 + 2aa_1^2 x_1^3 x_2^2 + 2aa_1^2 x_1^4 x_2}{(a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))} \wedge \quad (\text{D.178})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \quad \vee \quad x_1^* = -\frac{2(a_1 a_2^2 + a_1 a_2 x_2 + a_1 x_2^2)}{a_2^2} \quad \wedge \quad x_2^* = 0 \Rightarrow x_2^* = 0 \quad \vee \quad x_2^* = -\frac{2(a_1^2 a_2 + a_1 a_2 x_1 + a_2 x_1^2)}{a_1^2} \quad (\text{D.179})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = \frac{2aa_1 x_2^2 (-a_2^4 x_1^3 - 3a_1 a_2^2 x_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2) + a_1^3 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2)^2)}{(a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))^3} \wedge \quad (\text{D.180})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{(2aa_1 a_2 x_1 x_2 (a_2^3 x_1^3 + 3a_1^2 a_2 x_1 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2) + a_1^3 (2a_2 + x_2) (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2) + a_1 a_2 x_1^2 (3a_2^2 + 3a_2 x_2 + 4x_2^2)))}{(a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))^3} \quad (\text{D.181})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{a_1 (a_2^2 x_1 + 2a_1 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))}{a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2)} \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{a_2 (2a_2 (a_1^2 + a_1 x_1 + x_1^2) + a_1^2 x_2)}{a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2)} \quad (\text{D.182})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{a_1^2 a_2^2 x_1 (a_1 + 2x_1) (a_2 + 2x_2)}{(a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))^2} \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{a_1^2 a_2^2 (a_1 + 2x_1) x_2 (a_2 + 2x_2)}{(a_1 a_2^2 x_1 + a_2^2 x_1^2 + a_1^2 (a_2^2 + a_2 x_2 + x_2^2))^2} \quad (\text{D.183})$$

Optimalitätsinteraktion:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial x_2} = -\frac{2a_1 (a_2 + 2x_2)}{a_2^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} = -\frac{2a_2 (a_1 + 2x_1)}{a_1^2}$$

29 Allgemeine Funktion *

Funktionsdefinition:

$$f(\vec{x}) := r \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) d$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = bdr e^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^{-1+d} a_1 c_1 x_1^{-1+c_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = bdr e^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^{-1+d} a_2 c_2 x_2^{-1+c_2} \quad (\text{D.184})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } c_1 > 1 \\ \neq x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } c_2 > 1 \\ \neq x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.185})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = bdr e^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^{-2+d} a_1 c_1 x_1^{-2+c_1} \left(\left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) (-1+c_1) + \left(a + bde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) a_1 c_1 x_1^{c_1} \right) \quad (\text{D.186})$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = bdr e^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^{-2+d} a_2 c_2 x_2^{-2+c_2} \left(\left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) (-1+c_2) + \left(a + bde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) a_2 c_2 x_2^{c_2} \right) \quad (\text{D.187})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = bdr e^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^{-2+d} \left(a + bde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right) a_1 a_2 c_1 c_2 x_1^{-1+c_1} x_2^{-1+c_2} \quad (\text{D.188})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{bde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} a_1 c_1 x_1^{c_1}}{a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}}} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{bde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} a_2 c_2 x_2^{c_2}}{a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}}} \quad (\text{D.189})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = \frac{abde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} a_1 a_2 c_1 c_2 x_1^{c_1} x_2^{-1+c_2}}{\left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = \frac{abde^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} a_1 a_2 c_1 c_2 x_1^{-1+c_1} x_2^{c_2}}{\left(a + be^{c+a_1x_1^{c_1}+a_2x_2^{c_2}} \right)^2} \quad (\text{D.190})$$

30 Allgemeine Funktion +

Funktionsdefinition:

$$f(\vec{x}) := f_0 + b_1 x_1^2 + c_1 x_1^3 + a_1 x_1^{d_1} + b_2 x_2^2 + c_2 x_2^3 + a_2 x_2^{d_2}$$

1. Ableitung:

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 2b_1 x_1 + 3c_1 x_1^2 + a_1 d_1 x_1^{-1+d_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2b_2 x_2 + 3c_2 x_2^2 + a_2 d_2 x_2^{-1+d_2} \quad (\text{D.191})$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 & \text{für } d_1 > 1 \\ \neq x_1^* & \text{sonst} \end{cases} \quad \wedge \quad \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = 0 & \text{für } d_2 > 1 \\ \neq x_2^* & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{D.192})$$

2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_1} = 2b_1 + 6c_1 x_1 + a_1(-1+d_1)d_1 x_1^{-2+d_1} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial^2 x_2} = 2b_2 + 6c_2 x_2 + a_2(-1+d_2)d_2 x_2^{-2+d_2} \quad (\text{D.193})$$

Reaktionsinteraktion:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad (\text{D.194})$$

Partielle Elastizitäten:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{2b_1 x_1^2 + 3c_1 x_1^3 + a_1 d_1 x_1^{d_1}}{f_0 + a_1 x_1^{d_1} + x_1^2(b_1 + c_1 x_1) + a_2 x_2^{d_2} + x_2^2(b_2 + c_2 x_2)} \quad \wedge \quad \epsilon_{x_2} = \frac{2b_2 x_2^2 + 3c_2 x_2^3 + a_2 d_2 x_2^{d_2}}{f_0 + a_1 x_1^{d_1} + x_1^2(b_1 + c_1 x_1) + a_2 x_2^{d_2} + x_2^2(b_2 + c_2 x_2)} \quad (\text{D.195})$$

Elastizitätsinteraktion:

$$\frac{\partial \epsilon_{x_1}}{\partial x_2} = - \frac{\left(2b_1 x_1^2 + 3c_1 x_1^3 + a_1 d_1 x_1^{d_1}\right) \left(2b_2 x_2 + 3c_2 x_2^2 + a_2 d_2 x_2^{-1+d_2}\right)}{\left(f_0 + a_1 x_1^{d_1} + x_1^2(b_1 + c_1 x_1) + a_2 x_2^{d_2} + x_2^2(b_2 + c_2 x_2)\right)^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial \epsilon_{x_2}}{\partial x_1} = - \frac{\left(2b_1 x_1 + 3c_1 x_1^2 + a_1 d_1 x_1^{-1+d_1}\right) \left(2b_2 x_2^2 + 3c_2 x_2^3 + a_2 d_2 x_2^{d_2}\right)}{\left(f_0 + a_1 x_1^{d_1} + x_1^2(b_1 + c_1 x_1) + a_2 x_2^{d_2} + x_2^2(b_2 + c_2 x_2)\right)^2} \quad (\text{D.196})$$

Literaturverzeichnis

- Abernethy, A.M./Laband, D.N. (2004):** The Impact of Trademarks and Advertisement Size on Yellow Page Call Rates, in: Journal of Advertising Research, Vol. 44, Nr. 1, S. 119–125.
- Ahn, H. (2003):** Effektivitäts- und Effizienz-sicherung, Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main.
- Albers, S. (1998):** Regeln für die Allokation eines Marketing-Budgets auf Produkte oder Marktsegmente, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Vol. 50, Nr. 3, S. 211–235.
- Albers, S./Skiera, B. (2002):** Einsatzplanung eines Verkaufsaußendienstes auf Basis einer Umsatzreaktionsfunktion, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 72, Nr. 11, S. 1105–1131.
- Andriole, St.J. (1989):** Handbook of Decision Support Systems, TAB Professional and Reference Books, Blue Ridge Summit.
- Axelrod, J.N. (1980):** Advertising Wearout, in: Journal of Advertising Research, Vol. 20, Nr. 5, S. 13–18.
- Barzen, D./Richter, M. (1989):** Ökonometrische Werbewirkungsmessung für das Kommunikations-Mix – dargestellt am Beispiel des Computermarktes, in: Marketing ZFP, Vol. 11, Nr. 2, S. 103–109.
- Bazaraa, M.S./Shetty, C.M. (1979):** Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, New York.

- Böcker, F. (1978):** Modellbezogene Akzeptanzprobleme formaler Entscheidungsmodelle im Marketing, in: Müller-Merbach, H. (Hrsg.): Quantitative Ansätze in der Betriebswirtschaftslehre, Vahlen, München, S. 227–241.
- Bell, D.E./Keeney, R.L./Little, J.D.C. (1975):** A Market Share Theorem, in: Journal of Marketing Research, Vol. 12, Nr. 2, S. 136–141.
- Benayoun, R./Montgolfier, J. de/Tergny, J./Larichev, O.I. (1971):** Linear programming with multiple objective functions: STEP method (STEM), in: Mathematical Programming 1, Vol. 3, S. 366–375.
- Benjamin, B./Maitland, J. (1958):** Operational Research and Advertising: Some Experiments in the Use of Analogies, in: Operational Research Quarterly, Vol. 9, Nr. 3, S. 207–217.
- Benz, J. (1981):** Optimale Werbebudget- und Werbeprogrammplanung, Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main.
- Berlyne, D.E. (1970):** Novelty, complexity, and hedonic value, in: Perception & Psychophysics, Vol. 8, Nr. 5a, S. 279–286.
- Berndt, R. (1978):** Optimale Werbeträger- und Werbemittelselektion, Gabler, Wiesbaden.
- Berndt, R. (1993):** Kommunikationspolitik im Rahmen des Marketing, in: Berndt, R./Hermanns, A. (Hrsg.): Handbuch Marketing-Kommunikation, Gabler, Wiesbaden, S. 4–18.
- Berndt, R./Cansier, A. (2009):** Verfahren der Kommunikationsbudgetierung, in: Bruhn, M./Esch, F.-R./Langner, T. (Hrsg.): Handbuch Kommunikation, Gabler, Wiesbaden, S. 821–835.
- Bischoff, E. (1986):** Multi-Objective Decision Analysis – The Right Objectives?, in: Fandel, G./Grauer, M./Kurzahnski, A./Wierzbicki, A.P. (Hrsg.): Large-Scale Modelling and Interactive Decision Analysis, Bd. 273 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 155–160.

- Bitz, M. (1981):** Entscheidungstheorie, Vahlen, München.
- Bliemel, F. (1986):** Werbewirkungsschwellen: ihre Bedeutung aus Sicht der Werbeliteratur und der Praxis, in: Werbeforschung & Praxis, Vol. 4, S. 122–126.
- Bronstein, I.N./Semendjajew, K.A./Musiol, G./Mühlig, H. (2005):** Taschenbuch der Mathematik, 6. Auflage, Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main.
- Bruhn, M. (1993):** Integrierte Kommunikation als Unternehmensaufgabe und Gestaltungsprozeß, in: Bruhn, M./Dahlhoff, H.D. (Hrsg.): Effizientes Kommunikationsmanagement, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, S. 1–33.
- Bruhn, M. (2002):** Marketing. Grundlagen für Studium und Praxis, 6. Auflage, Wiesbaden.
- Bruhn, M. (2005):** Kommunikationspolitik, 3. Auflage, Vahlen, München.
- Buchanan, J.T. (1997):** A naïve approach for solving MCDM problems: the GUESS method, in: Journal of the Operational Research Society, Vol. 48, Nr. 2, S. 202–206.
- Bush, A.J./Martin, C.A./Bush, V.D. (2004):** Sports Celebrity Influence on the Behavioral Intentions of Generation Y, in: Journal of Advertising Research, Vol. 44, Nr. 1, S. 108–118.
- Cacioppo, J.T./Petty, R.E. (1985):** Central and Peripheral Routes to Persuasion: The Role of Message Repetition, in: Alwitt, L.F./Mitchell, A. (Hrsg.): Psychological Processes and Advertising Effects, S. 91–111.
- Chankong, V./Haimes, Y.Y. (1978):** The Interactive Surrogate Worth Trade-Off (ISWT) Method for Multiobjective Decision-Making, in: Zionts, S. (Hrsg.): Multiple Criteria Problem Solving, Bd. 155 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 42–67.
- Chankong, V./Haimes, Y.Y. (1983):** Multiobjective Decision Making, North Holland, New York.

- Charnes, A./Cooper, W. (1961):** Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley & Sons, New York.
- Chintagunta, P. (1993):** Investigating the Sensitivity of Equilibrium Profits to Advertising Dynamics and Competitive Effects, in: Management Science, Vol. 39, Nr. 9, S. 1146–1162.
- Cooper, L.G. (1993):** Market-Share Models, in: Eliashberg, J./Lilien, G.L. (Hrsg.): Handbooks in Operations Research and Management Science, Bd. 5, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, S. 259–314.
- Cooper, L.G./Nakanishi, M. (1990):** Market-Share Analysis, 2. Auflage, Kluwer, Boston.
- Corell, A./Stoffers, B. (2007):** Erlebnisswelt Kreativkampagnen – neue Wege der Außenwerbung, in: Marketing Journal, Vol. 5, S. 13–15.
- Corley, H.W. (1980):** A new scalar equivalence for Pareto optimization, in: IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 25, Nr. 4, S. 829–830.
- Czap, H. (1980):** Analyse und Planung von Werbeausgaben und Preispolitik bei konkurrierenden Produkten, Physica-Verlag, Würzburg.
- Dahl, D.W./Frankenberger, K.D./Manchanda, R.V. (2003):** Does It Pay to Shock? Reactions to Shocking and Nonshocking Advertising Content among University Students, in: Journal of Advertising Research, Vol. 43, Nr. 3, S. 268–280.
- Dahlen, M./Rasch, A./Rosengren, S. (2003):** Love at First Site? A Study of Website Advertising Effectiveness, in: Journal of Advertising Research, Vol. 43, Nr. 1, S. 25–33.
- Danaher, P.J./Mullarkey, G.W. (2003):** Factors Affecting Online Advertising Recall: A Study of Students, in: Journal of Advertising Research, Vol. 43, Nr. 3, S. 252–267.
- Depluet, E. (1991):** Subjektive Schätzung der Marketing-Mix-Wirkung – Theoretische Basis und Implementierung einer anwenderorientierten Software zur modell-

gestützten Marketing-Planung, Diss., Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.

Derbaix, Chr./Pecheux, Cl. (2003): A New Scale to Assess Children's Attitude toward TV Advertising, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 43, Nr. 4, S. 390–399.

Disch, W.K.A. (2000): Von wem stammt das Bonmot?, in: *Marketing Journal*, Vol. 6, S. 330–335.

Dorfman, R./Steiner, P.O. (1954): Optimal Advertising and Optimal Quality, in: *American Economic Review*, Vol. 44, Nr. 5, S. 826–836.

D'Souza, G./Rao, R.C. (1995): Can Repeating an Advertisement More Frequently Than the Competition Affect Brand Preference in a Mature Market?, in: *Journal of Marketing*, Vol. 59, S. 32–42.

Dyckhoff, H./Ahn, H. (2001): Sicherstellung der Effektivität und Effizienz der Führung als Kernfunktion des Controlling, in: *Kostenrechnungspraxis*, Vol. 45, Nr. 2, S. 111–121.

Ehrgott, M./Wiecek, M.M. (2005): Multiobjective Programming, in: Figueira, J./Greco, S./Ehrgott, M. (Hrsg.): *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, Berlin, S. 667–722.

Elster, K.-H./Reinhardt, R./Schäuble, M. (1977): Einführung in die nichtlineare Optimierung, Bd. 63 von: *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek*, Teubner, Leipzig.

Esser, J. (2001): Entscheidungsorientierte Erweiterung der Produktionstheorie, Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main.

Farris, P.W./Albion, M.S. (1980): The Impact of Advertising on the Price of Consumer Products, in: *Journal of Marketing*, Vol. 44, Nr. 3, S. 17–35.

Feinberg, F.M. (1992): Pulsing Policies for Aggregate Advertising Models, in: *Marketing Science*, Vol. 11, Nr. 3, S. 221–234.

- Fishburn, P.C. (1974):** Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules: A Survey, in: Management Science, Vol. 20, Nr. 11, S. 1442–1471.
- Forster, O. (1983a):** Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, 4. Auflage, Vieweg, Braunschweig.
- Forster, O. (1983b):** Analysis 2: Differentialrechnung im R^n , 4. Auflage, Vieweg, Braunschweig.
- Frank, M./Wolfe, P. (1956):** An algorithm for quadratic programming, in: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, S. 95–110.
- Freeland, J. R./Weinberg, Ch. B. (1980):** S-Shaped Response Functions: Implications for Decision Models, in: Journal of the Operation Research Society, Vol. 31, S. 1001–1007.
- Gass, S.I./Saaty, Th.L. (1955a):** The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, in: Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2, S. 39–45.
- Gass, S.I./Saaty, Th.L. (1955b):** Parametric Objective Function (Part 2) – Generalization, in: Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 3, Nr. 4, S. 395–401.
- Gembicki, F./Haimes, Y.Y. (1975):** Approach to performance and sensitivity multiobjective optimization: The goal attainment method, in: IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 20, Nr. 6, S. 769–771.
- Geoffrion, A.M. (1966):** Strictly Concave Parametric Programming, Part I: Basic Theory, in: Management Science, Vol. 13, Nr. 3, S. 244–253.
- Geoffrion, A.M. (1967):** Strictly Concave Parametric Programming, Part II: Additional Theory and Computational Considerations, in: Management Science, Vol. 13, Nr. 5, S. 359–370.
- Geoffrion, A.M./Dyer, J.S./Feinberg, A. (1972):** An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department, in: Management Science, Vol. 19, Nr. 4, S. 357–368.

- Gogarten, H. (1993):** Werbewirkungsforschung: Wie wirkt Werbung?, in: Planung und Analyse, Vol. 20, Nr. 5, S. 64–69.
- Goicoechea, A.M./Duckstein, L./Fagel, M.M. (1979):** Multiple Objectives Under Uncertainty: An Illustrative Application of Protrade, in: Water Resources Research, Vol. 15, S. 203–210.
- Gould, J.P. (1970):** Diffusion processes and optimal advertising policy, in: Phelps, E.S. (Hrsg.): Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory, Norton, New York, S. 338–368.
- Guadagni, P.M./Little, J.D.C. (1983):** A Logit Model of Brand Choice Calibrated on Scanner Data, in: Management Science, Vol. 2, Nr. 3, S. 203–238.
- Hackley, Ch. (2005):** Advertising and Promotion, SAGE Publications, London.
- Haimes, Y.Y./Lasdon, L.S./Wismer, D.A. (1971):** On a Bicriterion Formulation of the Problems of Integrated System Identification and System Optimization, in: IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 1, Nr. 8, S. 296–297.
- Halleman, M. (2001):** Das PKW Werbewirkungspanel – Informationsverhalten und Entscheidungsprozess vor PKW-Käufen; Werbewirkung und PKW-Kauf, Gruner + Jahr, Hamburg.
- Halleman, M. (2006):** Das G+J Werbewirkungspanel – Neuland in der Werbewirkungsforschung, Gruner + Jahr, Hamburg.
- Hanssens, D.M./Parsons, J. (1993):** Econometric and Time-Series Market Response Models, in: Eliashberg, J./Lilien, G.L. (Hrsg.): Handbooks in Operations Research and Management Science, Bd. 5, Elsevier Science Publishers B.V., Kapitel 9, S. 409–455.
- Hanssens, D.M./Parsons, L.J./Schultz, R.L. (2001):** Market Response Models: Econometric and Time Series Analysis, 2. Auflage, Kluwer.
- Henderson-Blair, M. (1987):** An Empirical Investigation of Advertising Wearin And Wearout, in: Journal of Advertising Research, Vol. 27, S. 45–50.

- Hildebrandt, L./Wagner, U. (2000):** Marketing and Operations Research – a literature survey, in: OR Spektrum, Vol. 22, S. 5–18.
- Hobbs, B.F. (1986):** What Can We Learn from Experiments in Multiobjective Decision Analysis?, in: IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 16, Nr. 3, S. 384–394.
- Homburg, Chr./Krohmer, H. (2003):** Marketingmanagement, Gabler, Wiesbaden.
- Horsky, D. (1977):** An Empirical Analysis of the Optimal Advertising Policy, in: Management Science, Vol. 23, Nr. 10, S. 1037–1049.
- Horst, R. (1979):** Nichtlineare Optimierung, Carl Hanser, München.
- Horst, R./Hoang, T. (1990):** Global Optimization, Springer, Berlin.
- Hruschka, H. (1991):** Marktreaktionsfunktionen mit Interaktionen zwischen Marketing-Instrumenten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 3, Nr. 61, S. 339–355.
- Hruschka, H. (1996):** Marketing-Entscheidungen, Vahlen, München.
- Hruschka, H./Baumgartner, B./Semmler, M. (2003):** Wirkungsmessung und Allokation von Katalogen im Versandhandel und Direktmarketing: Katalogversand an Sammelbesteller, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 73, Nr. 1, S. 7–23.
- HÖRZU FUNK UHR, (Hrsg.) (1989):** Mediamix und Werbewirkung, Springer, Hamburg.
- HÖRZU FUNK UHR, (Hrsg.) (1991):** Multiplying Mediamix, Springer, Hamburg.
- Hubel, W./Marganus, M. (1986):** Modellgestützte Werbewirkungsanalyse, in: GfK Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung, S. 344–354.
- Huber, W. (1989):** Erkenntnisse aus der praktischen Werbeforschung, in: Werbeforschung & Praxis, Vol. 1, S. 17–20.

- Jaensch, G./Korndörfer, W. (1967):** Ansätze zur Theorie des optimalen Werbebudgets, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 37, S. 437–458.
- Jagpal, H.S./Sudit, E.F./Vinod, H.D. (1979):** A Model of Sales Response to Advertising Interactions, in: Journal of Advertising Research, Vol. 19, Nr. 3, S. 41–47.
- Jaszkiewicz, A./Slowinski, R. (1994):** The Light Beam Search over a Non-Dominated Surface of a Multiple-Objective Programming Problem, in: Tzeng, G.H./Wang, H.F./Wen, U.P./Yu, P.L. (Hrsg.): Multiple Criteria Decision Making, Proceedings of the Tenth International Conference: Expand and Enrich the Domains of Thinking and Application, Springer, Berlin, S. 87–99.
- Jaszkiewicz, A./Slowinski, R. (1995):** The Light Beam Search – Outranking Based Interactive Procedure for Multiple-Objective Programming, in: Pardalos, P.M./Siskos, Y. (Hrsg.): Advances in Multicriteria Analysis, Kluwer, Dordrecht, S. 129–146.
- Johansson, J. K. (1979):** Advertising and the S-Curve: A New Approach, in: Journal of Marketing Research, Vol. 16, S. 346–354.
- Johnston, J./DiNardo, J. (1997):** Econometric Methods, 4. Auflage, McGraw-Hill, New York.
- Kall, Dirk (1996):** Werbeetat- und Werbemix-Planung im Handel, Gabler, Wiesbaden.
- Köcher, R./Hallemann, M. (2004):** Das PKW Werbewirkungspanel – Informationsverhalten und Entscheidungsprozess vor PKW-Käufen; Werbewirkung und PKW-Kauf, Gruner + Jahr, Hamburg.
- Kühn, R. (1983):** Heuristische Methoden zur Bestimmung des Marketing-Mix, in: Mazanec, J./Scheuch, F. (Hrsg.): Marktorientierte Unternehmensführung, Fachverlag an der Wirtschaftsuniversität Wien, Wien, S. 183–204.
- Korhonen, P./Laakso, J. (1984):** A Visual Interactive Method for Solving the Multiple-Criteria Problem, in: Grauer, M./Wierzbicki, A.P. (Hrsg.): Interactive Deci-

- sion Analysis, Bd. 229 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 146–153.
- Korhonen, P./Laakso, J. (1985):** On Developing a Visual Interactive Multiple Criteria Method – An Outline, in: Haimes, Y.Y./Chankong, V. (Hrsg.): Decision Making with Multiple Objectives, Bd. 242 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 272–281.
- Korhonen, P./Laakso, J. (1986):** A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem, in: European Journal of Operational Research, Vol. 24, Nr. 2, S. 277–287.
- Kotler, Ph. (1971):** Marketing Decision Making: A Model Building Approach, Holt, Rinehart And Winston, New York.
- Kotler, Ph. (1997):** Marketing Management: Analysis, Planning, Implementation, and Control, 9. Auflage, Prentice Hall, New Jersey.
- Kuhn, H.W./Tucker, A.W. (1951):** Nonlinear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, S. 481–492.
- Lambin, J.J. (1969):** Measuring the Profitability of Advertising: An Empirical Study, in: Journal of Industrial Economics, Vol. 17, Nr. 2, S. 86–103.
- Lambin, J.J. (1976):** Advertising, Competition and Market Conduct in Oligopoly over Time – an econometric investigation in Western European countries, North Holland, Amsterdam.
- Lasslop, I. (2003):** Effektivität und Effizienz von Marketing-Events, Gabler, Wiesbaden.
- Leeflang, P.S.H./Wittink, D.R./Wedel, M./Naert, Ph.A. (2000):** Building Models for Marketing Decisions, Kluwer, Dordrecht.
- Lilien, G.L./Kotler, Ph./Moorthy, K.S. (1992):** Marketing Models, 10. Auflage, Prentice Hall, London.

- Lilien, G.L./Rangaswamy, A. (2003):** Marketing Engineering – Computer-assisted Marketing Analysis and Planning, 2. Auflage, Prentice Hall, New Jersey.
- Little, J.D.C. (1970):** Models and Managers: The Concept of a Decision Calculus, in: Management Science, Vol. 18, Nr. 8, S. 466–485.
- Little, J.D.C. (1975a):** BRANDAID: A Marketing-Mix Model, Part 1: Structure, in: Operations Research, Vol. 23, Nr. 4, S. 628–655.
- Little, J.D.C. (1975b):** BRANDAID: A Marketing-Mix Model, Part 2: Implementation, Calibration and Case Study, in: Operations Research, Vol. 23, Nr. 4, S. 656–673.
- Little, J.D.C. (1979):** Aggregate Advertising Models: The State of the Art, in: Operations Research, Vol. 27, Nr. 4, S. 629–667.
- Little, J.D.C. (2004):** Comments on “Models and Managers: The Concept of a Decision Calculus”, in: Management Science, Vol. 50, Nr. 12, S. 1854–1860.
- Loda, M.D./Coleman, B.C. (2005):** Sequence Matters: A More Effective Way to Use Advertising and Publicity, in: Journal of Advertising Research, Vol. 45, Nr. 4, S. 362–372.
- Logman, M./Pauwels, W. (1998):** Analysis of Marketing Mix Interaction Effects and Interdependencies: A Normative Approach, in: Managerial and Decision Economics, Vol. 19, Nr. 6, S. 343–353.
- Mahajan, V./Muller, E. (1986):** Advertising Pulsing Policies for Generating Awareness for New Products, in: Marketing Science, Vol. 5, Nr. 2, S. 89–106.
- Mahajan, V./Muller, E./Sharma, S. (1984):** An Empirical Comparison of Awareness Forecasting Models of New Product Introduction, in: Marketing Science, Vol. 3, Nr. 3, S. 179–197.
- Mantrala, M.K./Sinha, P./Zoltners, A.A. (1992):** Impact of Resource Allocation Rules on Marketing Investment-Level Decisions and Profitability, in: Journal of Marketing Research, Vol. 29, S. 162–175.

- Martin, B.A.S./Van Durme, J./Raulas, M./Merisavo, M. (2003):** Email Advertising: Exploratory Insights from Finland, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 43, Nr. 3, S. 293–300.
- Mayer, H. (1993):** Wirkungen der Kommunikationspolitik, in: Berndt, R./Hermanns, A. (Hrsg.): *Handbuch Marketing-Kommunikation*, Gabler, Wiesbaden, S. 209–224.
- Meffert, H. (2002):** *Marketing*, 9. Auflage, Gabler, Wiesbaden.
- Mesak, H.I. (1992):** An Aggregate Advertising Pulsing Model with Wearout Effects, in: *Marketing Science*, Vol. 11, Nr. 3, S. 310–326.
- Meyberg, K./Vachenaer, P. (1999):** *Höhere Mathematik 1*, 5. Auflage, Springer, Berlin.
- Miettinen, K. (1999):** *Nonlinear multiobjective optimization*, Kluwer, Boston.
- Miettinen, K./Mäkelä, M.M. (1996):** NIMBUS – Interactive Method for Non-differentiable Multiobjective Optimization Problems, in: Tamiz, M. (Hrsg.): *Multiobjective Programming and Goal programming: Theories and Applications*, Bd. 432 von: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer, U Jyvaskyla, S. 50–57.
- Mäkelä, M.M./Neittaanmäki, P. (1992):** *Nonsmooth Optimization: Analysis and Algorithms with Applications to Optimal Control*, World Scientific Publishing Co., Singapore.
- Monarchi, D.E./Kisiel, Ch.C./Duckstein, L. (1973):** Interactive Multiobjective Programming in Water Resources: A Case Study, in: *Water Resources Research*, Vol. 9, Nr. 4, S. 837–850.
- Morey, R.C./McCann, J.M. (1983):** Estimating the Confidence Interval for the Optimal Marketing Mix: An Application to Lead Generation, in: *Marketing Science*, Vol. 2, Nr. 2, S. 193–202.
- Moriarty, S.E. (1996):** Effectiveness, Objectives, and the EFFIE Awards, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 36, Nr. 4, S. 54–63.

- Moser, K. (2002):** Markt- und Werbepsychologie, Hogrefe-Verlag, Göttingen.
- Naik, P.A./Mantrala, M.K./Sawyer, A.G. (1998):** Planning Media Schedules in Presence of Dynamic Advertising Quality, in: *Marketing Science*, Vol. 17, Nr. 3, S. 214–235.
- Naik, P.A./Prasad, A./Sethi, S. (2008):** Building Brand Awareness in Dynamic Oligopoly Markets, in: *Management Science*, Vol. 54, Nr. 1, S. 129–138.
- Naik, P.A./Raman, K. (2003):** Understanding the Impact of Synergy in Multimedia Communications, in: *Journal of Marketing Research*, Vol. 40, S. 375–388.
- Naik, P.A./Raman, K./Winer, R.S. (2005):** Planning Marketing-Mix Strategies in the Presence of Interaction Effects, in: *Marketing Science*, Vol. 24, Nr. 1, S. 25–34.
- Nakayama, H. (1989):** Sensitivity and Trade-Off Analysis in Multiobjective Programming, in: Lewandowski, A./Stanchev, I. (Hrsg.): *Methodology and Software for Interactive Decision Support*, Bd. 337 von: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer, Berlin, S. 86–93.
- Nakayama, H. (1995):** Aspiration Level Approach to Interactive Multi-Objective Programming and its Application, in: Pardalos, P.M./Siskos, Y. (Hrsg.): *Advances in Multicriteria Analysis*, Kluwer, Dordrecht, S. 147–174.
- Narula, S.C./Kirilov, L./Vassilev, V. (1994a):** An Interactive Algorithm for Solving Multiple Objective Nonlinear Programming Problems, in: Tzeng, G.H./Wang, H.F./Wen, U.P./Yu, P.L. (Hrsg.): *Multiple Criteria Decision Making, Proceedings of the Tenth International Conference: Expand and Enrich the Domains of Thinking and Application*, Springer, Berlin, S. 119–128.
- Narula, S.C./Kirilov, L./Vassilev, V. (1994b):** Reference Direction Approach for Solving Multiple Objective Nonlinear Programming Problems, in: *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 24, Nr. 5, S. 804–806.
- Neslin, Scott A. (2003):** Sales Promotion, in: Weitz, B./Wensley, R. (Hrsg.): *Handbook of Marketing*, SAGE Publications, Kapitel 13, S. 310–338.

- Neumann, K./Morlock, M. (2002):** Operations Research, 2. Auflage, Carl Hanser, München.
- Nieschlag, R./Dichtl, E./Hörschgen, H. (1997):** Marketing, 18. Auflage, Duncker & Humblot, Berlin.
- Pekelman, D./Sethi, S. (1978):** Advertising Budgeting, Wearout and Copy Replacement, in: Journal of the Operations Research Society, Vol. 29, Nr. 7, S. 651–659.
- Pepels, W. (1994):** Werbung und Absatzförderung, Gabler, Wiesbaden.
- Petty, R.E./Cacioppo, J.T. (1986):** The Elaboration Likelihood Model of Persuasion, Bd. 19 von: Advances in Experimental Social Psychology, Academic Press, S. 123–205.
- Prochazka, W. (1998):** Die Formulierung von Werbezielen – Theoretischer Anspruch und praktische Realität, in: Werbeforschung & Praxis, Vol. 2, S. 23–25.
- Rahders, R. (1989):** Verfahren und Probleme der Bestimmung des optimalen Werbebudgets: eine modellorientierte Analyse unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Aspekte und Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung, Schulz-Kirchner, Idstein.
- Rao, A.G./Miller, P.B. (1975):** Advertising / Sales Response Functions, in: Journal of Advertising Research, Vol. 15, Nr. 2, S. 7–15.
- Rao, A.G./Rao, M.R. (1983):** Optimal Budget Allocation When Response is S-shaped, in: Operations Research Letters, Vol. 2, Nr. 5, S. 225–230.
- Ringbeck, J. (1998):** Werbebudgetierungsmodelle, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Vol. 16, S. 23–28.
- Rosen, J.B. (1960):** The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints, in: Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 8, Nr. 1, S. 181–217.

- Roth, M.S. (2003):** Media and Message Effects on DTC Prescription Drug Print Advertising Awareness, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 43, Nr. 2, S. 180–193.
- Roy, B./Mousseau, V. (1995):** A Theoretical Framework for Analysing the Notion of Relative Importance of Criteria, in: *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 5, Nr. 2, S. 145–159.
- Saaty, Th.L./Gass, S.I. (1954):** Parametric Objective Function (Part 1), in: *Journal of the Operations Research Society of America*, Vol. 2, Nr. 3, S. 316–319.
- Sakawa, M. (1982):** Interactive multiobjective decision making by the sequential proxy optimization technique: SPOT, in: *European Journal of Operational Research*, Vol. 9, Nr. 4, S. 386–396.
- Sander, M. (1993):** Der Planungsprozeß der Werbung, in: Berndt, R./Hermanns, A. (Hrsg.): *Handbuch Marketing-Kommunikation*, Gabler, Wiesbaden, S. 261–284.
- Sander, M. (2004):** *Marketing-Management*, Lucius & Lucius, Stuttgart.
- Saunders, J. (1987):** The Specification of Aggregate Market Models, in: *European Journal of Marketing*, Vol. 21, Nr. 2, S. 1–47.
- Schmalen, H. (1992):** *Kommunikationspolitik*, 2. Auflage, Kohlhammer, Stuttgart.
- Schubert, K.F. (1979):** *Praxis der optimalen Werbebudgetierung*, I.H. Sauer-Verlag, Heidelberg.
- Schuwirth, S./Packenius, D. (2004):** Audis neues Planungs-Tool. Antworten auf die Gretchen-Fragen des Marketing, in: *Absatzwirtschaft*, Vol. 11, S. 128–130.
- Schweiger, G./Dabic, M. (2009):** Grundlagen und Methoden der Intermediaselektion, in: Bruhn, M./Esch, F.-R./Langner, T. (Hrsg.): *Handbuch Kommunikation*, Gabler, Wiesbaden, S. 839–857.
- Simon, H. (1982):** ADPLUS: An Advertising Model with Wearout and Pulsation, in: *Journal of Marketing Research*, Vol. 19, S. 352–363.

- Simon, H. (1983):** Aggregate Advertising Models: The State of the Art, in: Absatzwirtschaft, Vol. 2, S. 60–63.
- Simon, H./Möhrle, M. (1993):** Werbebudgetierung, in: Berndt, R./Hermanns, A. (Hrsg.): Handbuch Marketing-Kommunikation, Gabler, Wiesbaden, S. 301–316.
- Simon, J.L./Arndt, J. (1980):** The Shape of the Advertising Response Function, in: Journal of Advertising Research, Vol. 20, Nr. 4, S. 11–28.
- Sneath, J.Z./Finney, R.Z./Close, A.G. (2005):** An IMC Approach to Event Marketing: The Effects of Sponsorship and Experience on Customer Attitudes, in: Journal of Advertising Research, Vol. 45, Nr. 4, S. 373–381.
- Steffenhagen, H. (1979):** Theorien des Käuferverhaltens und Absatztheorie, in: Meffert, H./Steffenhagen, H./Freter, H. (Hrsg.): Konsumverhalten und Information, Gabler, Wiesbaden, S. 475–492.
- Steffenhagen, H. (1993):** Werbeziele, in: Berndt, R./Hermanns, A. (Hrsg.): Handbuch Marketing-Kommunikation, Gabler, Wiesbaden, S. 286–300.
- Steffenhagen, H. (2000):** Wirkungen der Werbung, 2. Auflage, Mainz GmbH, Aachen.
- Steffenhagen, H. (2006a):** Analytische Planung effektiver und effizienter Werbemixes, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 76, Nr. 4, S. 499–524.
- Steffenhagen, H. (2006b):** Ökonomische Werbemixplanung mit „außerökonomischen“ Werbezielen, in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, Vol. 58, Nr. 2, S. 199–222.
- Steffenhagen, H. (2008):** Marketing: Eine Einführung, 6. Auflage, Kohlhammer, Berlin.
- Steffenhagen, H. (2009):** Ableitung von Kommunikationszielen, in: Bruhn, M./Esch, F.-R./Langner, T. (Hrsg.): Handbuch Kommunikation, Gabler, Wiesbaden, S. 359–378.

- Steffenhagen, H./Siemer, S. (1996):** Untaugliche Werbezielformulierungen der Praxis, in: Marketing Zeitschrift für Forschung und Praxis, Vol. 18, Nr. 1, S. 45–54.
- Steuer, R.E. (1986):** Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application, John Wiley & Sons, New York.
- Stewart, D.W./Kamins, M.A. (2003):** Marketing Communication, in: Weitz, B./Wensley, R. (Hrsg.): Handbook of Marketing, SAGE Publications, Kapitel 12, S. 282–309.
- Stewart, T.J. (1992):** A Critical Survey on the Status of Multiple Criteria Decision Making Theory and Practice, in: OMEGA, Vol. 20, Nr. 5-6, S. 569–586.
- Stockmann, Ph. (2007):** Planung und Implementierung integrierter Marketingkommunikation mit den Leitinstrumenten Werbung und Sportsponsoring, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.
- Takayama, A. (1985):** Mathematical Economics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Tellis, G.J. (2004):** Effective Advertising - Understanding When, How, and Why Advertising Works, SAGE Publications, London.
- ter Haseborg, F. (1983):** Dynamische Marktreaktions- und Entscheidungsmodelle zur Zeitplanung des Werbemittel- und Mediabudgeteinsatzes, Habil., Universität Hamburg, Hamburg.
- ter Haseborg, F. (1984):** Statische und dynamische Absatzreaktionsanalyse beim Werbemittel- und Mediabudgeteinsatz – Eine kritische Bestandsaufnahme der empirischen Befunde, in: Der Markt, Vol. 23, Nr. 92, S. 104–117.
- ter Haseborg, F. (1988):** Dynamische Werbebudget-Absatzreaktionsmodelle, in: Schellhaas, H./van Beck, P./Iserman, H./Schmidt, R./Zijlstra, M. (Hrsg.): Operations Research Proceedings 1987 DGOR, Bd. 16, Springer, Berlin, S. 339–346.

- ter Haseborg, F. (1990):** Zur Konzeption einer integrierten dynamischen Werbemittelprogramm- und Mediabudgetplanung, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 60, S. 963–986.
- Trappey, R.J. III./Woodside, A.G. (2005):** Consumer Responses to Interactive Advertising Campaigns Coupling Short-Message-Service Direct Marketing and TV Commercials, in: Journal of Advertising Research, Vol. 45, Nr. 4, S. 382–401.
- Tsao, J.C./Sibley, St.D. (2004):** Displacement and Reinforcement Effects of the Internet and Other Media as Sources of Advertising Information, in: Journal of Advertising Research, Vol. 44, Nr. 1, S. 126–142.
- Vakratsas, D./Feinberg, F.M./Bass, F.M./Kalyanaram, G. (2004):** The Shape of Advertising Response Functions Revisited: A Model of Dynamic Probabilistic Thresholds, in: Marketing Science, Vol. 23, Nr. 1, S. 109–119.
- Vakratsas, D./Ma, Z. (2005):** A Look at the Long-Run Effectiveness of Multimedia Advertising and Its Implications for Budget Allocation Decisions, in: Journal of Advertising Research, Vol. 45, Nr. 2, S. 241–254.
- Vaughn, R. (1980):** How Advertising Works: A Planning Model, in: Journal of Advertising Research, Vol. 20, Nr. 5, S. 27–33.
- Vernette, É. (2004):** Targeting Women’s Clothing Fashion Opinion Leaders in Media Planning: An Application for Magazines, in: Journal of Advertising Research, Vol. 44, Nr. 1, S. 90–107.
- Vidale, M.L./Wolfe, H.B. (1957):** An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising, in: Operations Research, Vol. 5, Nr. 3, S. 370–381.
- Vogel, F./Hallemann, M. (2008):** G+J Werbewirkungspanel 2008 – Auf den Spuren erfolgreicher Kampagnen, Gruner + Jahr, Hamburg.
- Wang, A. (2006):** Advertising Engagement: A Driver of Message Involvement on Message Effects, in: Journal of Advertising Research, Vol. 46, Nr. 4, S. 355–368.

- Weidner, P. (1988):** Characterization of Efficient Decisions, in: Lewandoski, A./Volkovich, V. (Hrsg.): Multiobjective Problems of Mathematical Programming, Bd. 351 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 148–153.
- Weilbacher, W.M. (2003):** How Advertising Affects Consumers, in: Journal of Advertising Research, Vol. 43, Nr. 2, S. 230–234.
- Wierzbicki, A.P. (1980a):** A Methodological Guide to Multiobjective Optimization, in: Iracki, K./Malanowski, K./Walukiewicz, S. (Hrsg.): Optimization Techniques, Part 1, Bd. 123 von: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, S. 99–123.
- Wierzbicki, A.P. (1980b):** The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization, in: Fandel, G./Gal, T. (Hrsg.): Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, Bd. 177 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 468–486.
- Wierzbicki, A.P. (1981):** A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making, in: Morse, J.N. (Hrsg.): Organisations: Multiple Agents with Multiple Criteria, Bd. 190 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 465–485.
- Wierzbicki, A.P. (1986a):** A Methodological Approach to Comparing Parametric Characterization of Efficient Solutions, in: Fandel, G./Grauer, M./Kurzanski, A./Wierzbicki, A.P. (Hrsg.): Large-Scale Modelling and Interactive Decision Analysis, Bd. 273 von: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, S. 27–45.
- Wierzbicki, A.P. (1986b):** On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems, in: OR Spectrum, Vol. 8, Nr. 2, S. 73–87.
- Wierzbicki, A.P. (1988):** Dynamic Aspects of Multi-Objective Optimization, in: Lewandoski, A./Volkovich, V. (Hrsg.): Multiobjective Problems of Mathematical Pro-

- gramming, Bd. 351 von: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer, Berlin, S. 154–174.
- Wierzbicki, A.P./Makowski, M./Wessels, J. (2000):** *Model-based decision support methodology with environmental applications*, Kluwer, Dordrecht.
- Wismer, D.A./Chattergy, R. (1978):** *Introduction to Nonlinear Optimization: A Problem Solving Approach*, North Holland, New York.
- Wittink, D.R. (1977):** Exploring Territorial Differences in the Relationship between Marketing Variables, in: *Journal of Marketing Research*, Vol. 14, Nr. 2, S. 145–155.
- Wouters, J./Wetzels, M. (2006):** Recall Effect of Short Message Service as a Complementary Marketing Communications Instrument, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 46, Nr. 2, S. 209–216.
- Yoo, B./Mandhachitara, R. (2003):** Estimating Advertising Effects on Sales in a Competitive Setting, in: *Journal of Advertising Research*, Vol. 43, Nr. 3, S. 310–321.
- Yu, P.L. (1973):** A Class of Solutions for Group Decision Problems, in: *Management Science*, Vol. 19, Nr. 8, S. 936–946.
- Zadeh, L. (1963):** Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria, in: *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, Nr. 8, S. 59–60.
- ZAW, (2007):** *Werbung in Deutschland 2007*, Verlag edition ZAW, Berlin.
- ZAW, (2008):** *Werbung in Deutschland 2008*, Verlag edition ZAW, Berlin.
- ZAW, (2009):** *Werbung in Deutschland 2009*, Verlag edition ZAW, Berlin.
- Zeleny, M. (1973):** Compromise Programming, in: Cochrane, J.L./Zeleny, M. (Hrsg.): *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, S. 262–301.
- Zeleny, M. (1975):** The Theory of Displaced Ideal, in: Zeleny, M. (Hrsg.): *Multiple Criteria Decision Making*, Bd. 123 von: *Lecture Notes in Economics and Mathema-*

tical Systems, Springer, Berlin, S. 153–206.

Zentler, A.P./Ryde, D. (1956): An Optimum Geographical Distribution of Publicity Expenditure in a Private Organisation, in: Management Science, Vol. 2, Nr. 4, S. 337–352.

Zimmermann, H.-J./Gutsche, L. (1991): Multi-Criteria-Analyse, Springer, Berlin.

Zionts, St./Wallenius, J. (1976): An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem, in: Management Science, Vol. 22, Nr. 6, S. 652–663.

