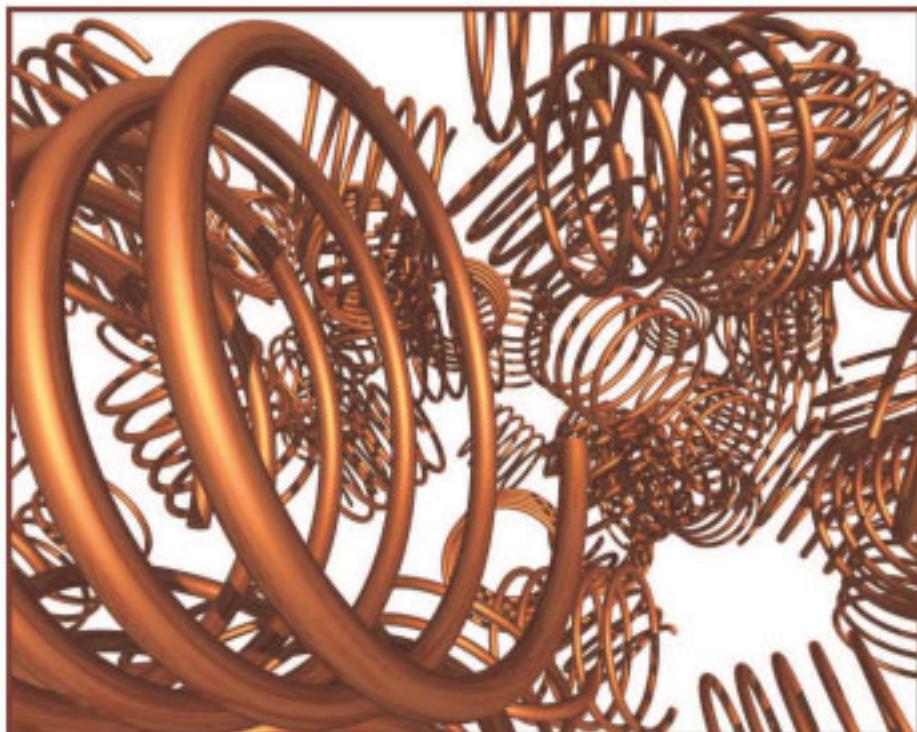


Christian Meiners

Multipolinteraktionen in geordneten
und ungeordneten Schichten kleiner
metallischer Helices



Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

**Multipolinteraktionen
in geordneten und ungeordneten
Schichten kleiner metallischer Helices**

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor Ingenieur
genehmigte Dissertation

von
Christian Meiners

aus Lohne (Oldenburg)

2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Aufl. - Göttingen : Cuvillier, 2009
Zugl.: (TU) Hamburg-Harburg, Univ., Diss., 2009
978-3-86727-912-3

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Arne F. Jacob
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Ludger Klinkenbusch

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 2009

© CUVILLIER VERLAG, Göttingen 2009
Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen
Telefon: 0551-54724-0
Telefax: 0551-54724-21
www.cuvillier.de

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Weg (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2009
Gedruckt auf säurefreiem Papier

978-3-86727-912-3

Danksagung

Nach Abschluss meines Studiums der Elektrotechnik eröffnete mir mein Doktorvater Herr Prof. Dr.-Ing. Arne F. Jacob die Möglichkeit, als wissenschaftlicher Mitarbeiter auf dem Gebiet der kompositen Materialien zu forschen. Grundzüge der vorliegenden Arbeit entstanden bereits am Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität Braunschweig. Nach dem Wechsel der Arbeitsgruppe an die Technische Universität Hamburg-Harburg konnte ich die Arbeit am dortigen Institut für Hochfrequenztechnik fortsetzen. Während der gesamten Zeit habe ich die stete Diskussionsbereitschaft, den Enthusiasmus zur Lösung elektromagnetischer Problemstellungen und schließlich die mir gewährten Freiheiten sehr geschätzt. Dafür möchte ich meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Arne F. Jacob herzlich danken.

Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Ludger Klinkenbusch für die Übernahme des Koreferates und Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Jan Luiken ter Haseborg für die Ausübung des Prüfungsvorsitzes. Die Stimmung während der Prüfung empfand ich als sehr angenehm.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.-Ing. Karsten Kuhlmann und meinem Vorgänger am Institut Herrn Dr.-Ing. Jannis Psilopoulos für die sorgfältige fachliche Durchsicht des Manuskriptes. Für die sprachlichen Anregungen einer Germanistin danke ich meiner Freundin Frau Silke Brandt.

An die Zeit am Institut erinnere ich mich immer sehr gern zurück. Einen hohen Anteil daran haben meine ehemaligen Kollegen. Das offene Miteinander und die vielen gemeinsamen privaten Unternehmungen haben mir sehr viel Spaß bereitet. Vielen Dank für die schöne Zeit! Besonders möchte ich hier Frau Carmen Hajunga danken, die, genau wie meine Freundin, tatkräftig ihr Augenlicht bei der Anfertigung der zu untersuchenden Proben riskiert hat.

Ich danke allen meinen Freunden, die mir hoffentlich nachsehen, dass sie in den letzten Jahren oft auf mich verzichten mussten – wenn auch nicht immer auf meine körperliche, so doch auf meine geistige Anwesenheit.

Zuletzt und doch zuerst möchte ich meiner Familie danken, die mich stets in meinen Entscheidungen bestärkt hat. Ohne die Unterstützung meiner Eltern Frau Maria-Anna Meiners und Herrn Werner Meiners hätte ich nicht sorgenfrei studieren und schließlich den zurückliegenden Weg einschlagen können. Meiner Freundin danke ich dafür, dass sie mich immer wieder auf den Boden der Tatsachen zurückgeholt hat.

Hamburg, im März 2009

Christian Meiners

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Kugelwellenentwicklungen	8
2.1 Allgemeine Lösung	8
2.2 Quellen von Kugelwellen	11
2.3 Partikelinteraktion	16
3 Modell der helixförmigen Einschlüsse	19
3.1 T-Matrix einer Helix	19
3.2 Numerische Lösung für den Strom	23
3.3 Helix im Kugelvolumen	25
3.4 Beispiele	28
3.4.1 Streuverhalten einer einzelnen Helix	28
3.4.2 Interaktion zweier Helices	33
4 Modell einer periodischen Schicht	39
4.1 Randbedingungen im Streuansatz	39
4.2 Metallischer Schirm	43
4.3 Auswertung von Reflektion und Transmission	46
4.4 Beispiel einer periodischen Schicht und Analyse der Genauigkeit	49
5 Übergang von einer regelmäßigen zu einer zufälligen Schicht	57
5.1 Mittelungsstrategie	58
5.2 Ein einfacher Testfall - Numerische Aspekte	59
5.2.1 Anzahl der Konfigurationen	60
5.2.2 Größe der Einheitszelle	62
5.2.3 Eigenschaften der Schicht bei zunehmender Unordnung	65
5.3 Studie weiterer Variationsmöglichkeiten	69
5.3.1 Rotationen	70
5.3.2 Positionen	73

6 Mehrlagige Schichten	76
6.1 Ein Beispiel	76
6.2 Vergleich mit dem Clausius-Mossotti-Materialmodell	78
7 Experimente	86
7.1 Messplatz	86
7.2 Einlagige Schichten	88
7.2.1 Vorbetrachtungen	88
7.2.2 Aufbau und Vermessung der hergestellten Schichten	91
7.3 Bi-isotropes Material	95
7.3.1 Vorbetrachtung	96
7.3.2 Messungen	99
8 Zusammenfassung	104
A Koordinatentransformation nach Euler	108
B Anregende Welle	110
C Translatorisches Additionstheorem	111
D Clausius-Mossotti-Mischformel	113
E Ergänzende Daten	114
Literaturverzeichnis	120

1 Einleitung

Der atomare oder molekulare Aufbau eines Stoffes bestimmt seine Eigenschaften. Dies gilt jedoch nicht nur auf solch elementarer Ebene. In der Natur finden sich eine Vielzahl sogenannter *kompositer Materialien*, deren Merkmale sich aus dem Aufbau sowie aus der Art der Grundbausteine ergeben, wie z.B. Holz, Knochen, Schnee und Sand. In vielen ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen werden diese Konzepte aus der Natur zur Herstellung künstlicher Werkstoffe aufgegriffen. Ein populäres Beispiel aus dem Maschinenbauwesen sind Verbundwerkstoffe aus Glasfaser und Kunststoff. Auf allen Gebieten erfordert der systematische Entwurf kompositer Materialien das Verständnis der Abhängigkeit des makroskopischen Verhaltens von der Mikrostruktur.

In der Hochfrequenztechnik sind vor allem die elektromagnetischen Eigenschaften von Interesse. Insbesondere periodisch aufgebaute Materialien und Strukturen geraten in jüngster Zeit immer mehr in den Blickpunkt des wissenschaftlichen Interesses. Beispiele hierfür sind photonische Kristalle [1] und frequenzselektive Oberflächen [2]. Nicht zuletzt bestimmten Ansätze zur Synthese von Medien, deren Eigenschaften nicht aus der Natur bekannt sind [3], und deren denkbare Applikationen die gegenwärtige Literatur und Forschung auf dem Gebiet der kompositen Materialien maßgeblich. Eine umfassende Übersicht findet sich z.B. in [4]. Je nach Geometrie und Anordnung lassen sich sehr verschiedene makroskopische Eigenschaften einstellen. Die in dieser Arbeit verwendeten Grundbausteine sind kleine metallische Helices, die vor allem auf dem Gebiet der chiralen Materialien Verwendung finden (z.B. [5–7]).

Chirale Materialien

Die hervorstechende Eigenschaft chiraler (händischer) Materialien ist eine Unsymmetrie. Die Grundbausteine (von nun an auch Einschlüsse, Partikel oder Streukörper genannt) lassen sich, wie bei der menschlichen Hand, nicht mit ihrem Spiegelbild in Deckung bringen. Innerhalb des Materials bewirkt dieser Umstand unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten und Dämpfungen von links- und rechtszirkular polarisierten elektromagnetischen Wellen. Eine anfangs linear polarisierte Welle weist damit nach Transmission durch eine chirale Scheibe im Allgemeinen eine elliptische Polarisation auf. Auf makroskopischer

Ebene ist zur Beschreibung chiraler Medien ein zusätzlicher Materialparameter, der Chiralitätsparameter, erforderlich [8]. Er verkoppelt sowohl den elektrischen Fluss mit dem magnetischen Feld als auch den magnetischen Fluss mit dem elektrischen Feld.

Im optischen Bereich schon im frühen 19. Jahrhundert von Arago und Biot experimentell untersucht [9, 10], stehen chirale Materialien für Mikrowellen erst seit Anfang der 1990er Jahre vermehrt im Blickpunkt des wissenschaftlichen Interesses. Einige Pionierarbeiten auf diesem Gebiet reichen aber bis in die Anfänge des 20. Jahrhundert zurück [11]. Ein historischer Abriss findet sich in [8, Kap. 1]. Mit dem Chiralitätsparameter glaubte man zunächst, einen neuen unabhängigen Parameter zur Realisierung funktioneller Schichten im Mikrowellenbereich gefunden zu haben. Theoretische Studien zeigten aber bald, dass der Chiralitätsparameter nicht vollständig unabhängig gewählt werden kann, sondern über Nebenbedingungen (Passivität, Reziprozität etc.) mit der Permeabilität und Permittivität eines Materials verknüpft ist [12]. Gleichzeitig ist Chiralität ein schmalbandiges Phänomen [13]. Die Ausnutzung der chiralen Eigenschaft für Anwendungen ist folglich durch diese Nebenbedingungen eingeschränkt.

Im Mikrowellenbereich sind keine natürlichen chiralen Materialien bekannt. Sie müssen daher künstlich hergestellt werden. Kleine metallische Helices (oder ähnliche Strukturen mit Symmetriebruch) können dafür regellos positioniert und orientiert in ein Wirtsmaterial eingebracht werden [14, 15]. Die Bedingungen, die an ein Komposit gestellt werden, um zumindest in einiger Entfernung von einer Materialprobe als homogenes Medium zu gelten, sind damit im Allgemeinen erfüllt:

- Jeder Einschluss selbst und auch der mittlere Abstand zwischen den Partikeln ist klein gegenüber der betrachteten Wellenlänge.
- Die Probe hat eine gewisse Mindestgröße, so dass genügend Partikel mit dem anregenden Feld interagieren und die exakten Positionen und Orientierungen keine übergeordnete Rolle spielen.

Aus der angesprochenen Realisierung ergibt sich eine zusätzlich nutzbare Eigenschaft, die aus den Materialgleichungen nicht direkt ersichtlich ist und nachfolgend erläutert wird. Interessant ist vor allem der Bereich der ersten Resonanz, da die Gesamtabmessungen der Grundbausteine in der Regel klein sind gegenüber der Wellenlänge. Der auf der Oberfläche der Helix hervorgerufene Strom ist dennoch für ein starkes Streufeld verantwortlich. Längs zur Ausbreitungsrichtung auftretende Stromkomponenten sorgen für Streuung elektromagnetischer Energie quer zur anregenden elektromagnetischen Welle. Dieses Verhalten prädestiniert chirale Einschlüsse z.B. für den Einsatz in Mikrowellenabsorbern, vorwiegend

im unteren Frequenzbereich, in dem die meisten Absorber konzeptbedingt schlechte Dämpfungseigenschaften aufweisen¹ [16–18]. Abhängig von der Anordnung der Helices sind aber auch andere Applikationen denkbar. Hierauf wird im späteren Verlauf der Arbeit noch näher eingegangen. Im Folgenden werden zunächst einige Punkte angesprochen, die es bei der Modellierung zu beachten gilt.

Modellierung

Grundsätzlich gibt es für die elektromagnetische Analyse eines kompositen Materials kein Patentrezept. Die Herangehensweise ist immer von der Art der Einschlüsse, dem Frequenzbereich, der Anordnung und nicht zuletzt auch von den erwünschten Informationen abhängig. Der Entwurf periodisch aufgebauter Strukturen gestaltet sich z.B. durch die Tatsache, dass nur noch die Lösung für eine Einheitszelle gefunden werden muss, als relativ einfach. In diesem Fall können Standardmethoden für die Lösung des komplexen dreidimensionalen Feldproblems herangezogen werden (siehe z.B. [19, 20]). Die Analyse zufällig aufgebauter Strukturen wie beim chiralen Medium stellt höhere Anforderungen. Um die statistische Verteilung korrekt zu erfassen, müssen prinzipiell alle Grundbausteine, oder zumindest eine genügend große Anzahl davon, bei der Berechnung berücksichtigt werden. Abgesehen davon, dass Speicherbedarf und Rechenzeit schnell mit der Zahl der berücksichtigten Grundbausteine ansteigen, sind bei hochresonanten Einschlüssen auch Probleme der numerischen Stabilität zu erwarten. Eine Möglichkeit, solche Berechnungen zu umgehen, besteht in der Homogenisierung, also der Betrachtung eines kompositen Materials als homogenes Medium mit ortsunabhängigen Materialeigenschaften. Sind letztere bekannt, können Reflexions- und Transmissionsparameter einer Schicht analytisch berechnet werden [21, 22]. Folgende Vorgehensweisen haben sich etabliert:

Mischformeln

Klassische Methoden für die Extraktion effektiver Eigenschaften sind aus der Theorie der effektiven Medien (engl.: *Effective Medium Theory (EMT)*) bekannt [23, 24]. Konkret handelt es sich um Mischformeln, die die Eigenschaften der Grundbausteine und des Hintergrundmaterials gewichten. Die zugrundeliegende Idee bei einem verbreiteten Vertreter, dem Clausius-Mossotti-Ansatz, zeigt Bild 1.1. Die elektromagnetischen Verhältnisse innerhalb des Materials werden hierbei durch eine homogene Polarisation um jeden Einschluss wiedergegeben. Das dadurch erzeugte lokale Feld am Ort des Einschlusses ruft ein Dipolmoment \mathbf{p} hervor, welches wiederum selbst zur Polarisation beiträgt. Die Kopplung der Partikel untereinander ist damit auf Basis von Dipol-Interaktionen beschrieben. Zur Simulation

¹Im Frequenzbereich von etwa 10 bis 1000 MHz sind beispielsweise auch Ferritabsorber-Kacheln nutzbar.

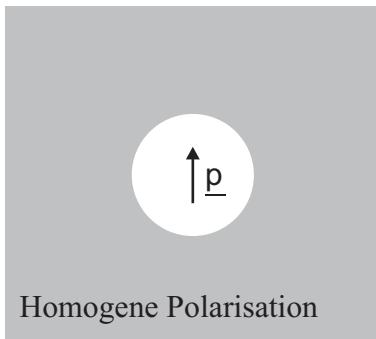


Bild 1.1: Das Clausius-Mossotti Model.

des Materials genügt in diesem Modell folglich die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen anregendem Feld und hervorgerufenem Dipolmoment: die Dipol-Polarisierbarkeiten. Sofern letztere bezüglich des Hintergrundmediums bekannt sind, lässt sich die Mischformel analytisch unter Berücksichtigung der Dichte der Einschlüsse formulieren.

Die Herleitung der Clausius-Mossotti Beziehung beruht auf verschiedenen Näherungen, die die Gültigkeit einschränken. So wird bei der Betrachtung immer ein in drei Dimensionen unendlich ausgedehntes Medium vorausgesetzt. Tatsächlich interessieren bei der technischen Realisierung häufig dünne Schichten. Bei experimentellen Arbeiten werden z.B. Randeffekte durch entsprechend große Proben und eine lokal begrenzte anregende Welle vermieden [14, 15, 25], so dass in guter Näherung zumindest die transversale Ausdehnung der Probe - bezogen auf die Ausbreitungsrichtung der Welle - als genügend groß angesehen werden kann. Im strengen Sinne führt die Beschränkung der longitudinalen Dimension dazu, dass die Mischformeln ungültig werden. Eine umfangreiche Diskussion findet sich z.B. in [26]. Aufgrund des Potentials für technische Anwendungen rückt das Problem der Homogenisierung und Modellierung dünner Schichten in jüngster Zeit vermehrt in den Vordergrund (siehe [27–30]).

Eine zweite Einschränkung betrifft die verwendeten Grundbausteine. Für einen ausgeprägten Effekt muss eine einfallende elektromagnetische Welle möglichst gut mit der Schicht wechselwirken. Typischerweise bedient man sich zu diesem Zweck, wie im Fall der chiralen Medien, resonanter Strukturen. Durch die starke Streuung kann die umgebende Polarisation in der Nähe der Resonanz nur noch in grober Näherung als homogen angenommen werden. Die Frage, ob bzw. unter welchen Einbußen an Genauigkeit ein Material mit Mischformeln homogenisiert werden kann, wird in der Literatur meist nicht oder nur sehr vage beantwortet, was nicht zuletzt auch daran liegt, dass solch eine Aussage nur sehr fallspezifisch getroffen werden kann. In [31] wird z.B. die Möglichkeit der Homogenisierung periodisch platziert resonanter Objekte (sog. *Split-Ring*-Resonatoren und induktiv belastete kurze Drähte) im dreidimensionalen Raum für gewisse Einfallsrichtungen der anregenden Welle in Frage gestellt. Andererseits haben sich Mischformeln zur Vorhersage der

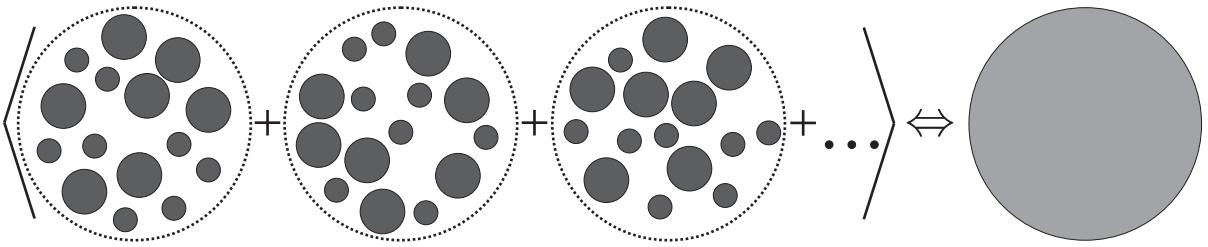


Bild 1.2: Modell zur numerischen Bestimmung effektiver Materialparameter. Hier beispielhaft im zweidimensionalen Raum mit homogenen Kreisscheiben als Einschlüssen.

Eigenschaften chiraler Medien in experimentellen Studien [6, 14, 32] und zum Entwurf eines mehrschichtigen Mikrowellenabsorbers bewährt [17]. Gleichsam werden Mischformeln häufig, wie z.B. in [33], genutzt, um das prinzipielle Verhalten eines kompositen Materials zu illustrieren.

Mittelungsansatz

Eine Klassifizierung der Anwendbarkeit der Mischformeln ist durch die komplexen Verhältnisse innerhalb des Materials nicht *a priori* möglich. Eine alternative Methode zur Bestimmung effektiver Eigenschaften ist der in Bild 1.2 illustrierte Mittelungsansatz [34, 35]. Die gestreuten Felder mehrerer zufällig gewählter kleiner Proben eines Materials werden hierbei mit Hilfe eines numerischen Verfahrens, also unter Einbeziehung der gegenseitigen Kopplungen, berechnet. Für eine genügend große Anzahl gewählter Proben führt die Mittelung der so erhaltenen Streufelder zum kohärenten Feld, welches eine homogene Referenzprobe gleicher Probengeometrie streuen würde. Ein Vergleich und die Anpassung der homogenen Referenzprobe liefert schließlich die gewünschten effektiven Materialparameter des kompositen Materials. Für ein chirales Material wird dieser Ansatz in [36] genutzt. Zur effektiven Berechnung der gestreuten Felder wird dabei eine Randelementmethode herangezogen, die lediglich die Diskretisierung der Metalloberflächen erfordert. Das gleiche Material wird in [37] untersucht, jedoch auf Basis der Dipolpolarisierbarkeiten der chiralen Einschlüsse. In beiden Fällen ist das entsprechende Referenzvolumen eine Kugel, da sich deren gestreute Felder für den abschließenden Vergleich schnell berechnen lassen. Die aufgeführten Literaturbeispiele berücksichtigen nicht den interessanten Fall der Resonanz der Einschlüsse. Zudem lassen sich durch das kugelförmige Referenzvolumen die Eigenschaften einer Schicht, ähnlich wie im Fall der Mischformeln, nur bedingt ableiten.

Ziel und Gliederung dieser Arbeit

Die gegenseitige Kopplung in Strukturen, gebildet aus kleinen metallischen Helices, ist noch nicht vollends verstanden. Zudem ist die schichtförmige Anordnung bisher nur indirekt über die Mischformeln berücksichtigt worden.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Streuverhalten der Helices in Schichten mit einer vorgegebenen Ordnung zu untersuchen. Der Übergang von einer in zwei Dimensionen rein periodisch aufgebauten Schicht zum Fall der Regellosigkeit (chirales Material) soll fließend erfolgen, um den Raum möglicher Konstellationen systematisch abzudecken. Für ein physikalisches Verständnis der gegenseitigen Kopplungen der Grundbausteine bietet sich die Formulierung der Interaktion auf Basis von Multipolfeldern an. Hierfür muss eine geeignete Streutheorie aufgestellt werden. Der Einfluss der entsprechenden Multipolmomente soll frequenzabhängig, den Resonanzfall inbegriffen, quantifiziert werden.

Im folgenden Kapitel werden zunächst einige theoretische Grundlagen dargestellt. Diese umfassen vor allem die Darstellung einer Stromverteilung durch Multipolmomente, die Eigenschaften der entsprechenden Streufelder und die Repräsentation gegenseitiger Kopplungen mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. Eine Voraussetzung zur Beschreibung der Interaktion ist die Kenntnis der für jeden Streukörper charakteristischen Transfer-Matrix, die, wie erarbeitet wird, die Multipolpolarisierbarkeiten bzw. den Zusammenhang zwischen anregendem Feld und gestreuten Multipolfeldern darstellt.

Die Einbeziehung von Multipolmomenten beliebig hoher Ordnung in die Transfer-Matrix einer Helix wird in Kapitel drei diskutiert. Die Herleitung basiert auf der Lösung für den Strom auf der Oberfläche einer einzelnen Helix im freien Raum. Das Modell wird durch einen Vergleich mit einem frei erhältlichen Computerprogramm verifiziert. Es wird ebenfalls beleuchtet, wie gut das Streufeld einer einzelnen Helix in Abhängigkeit von der Entfernung durch Multipole einer bestimmten Ordnung approximiert wird. Untersuchungen zur Interaktion zweier Helices geben weitere Aufschlüsse zu Art und Ordnung der zu berücksichtigenden Multipole.

Das vierte Kapitel hat die Implementierung periodischer Randbedingungen zum Thema. Hier wird die Formulierung der Wechselwirkungen aus Kapitel eins angepasst. Es wird zudem gezeigt, wie ein elektrisch leitender metallischer Schirm, wie er z.B. bei Absorbern Anwendung findet, implementiert werden kann. Vergleiche mit Simulationsergebnissen aus einem kommerziell erhältlichen Programmpaket und eine erste Studie zum Streuverhalten streng periodischer Schichten runden das Kapitel ab.

Für Schichten, die nicht streng periodisch aufgebaut sind, wird ein Mittelungsansatz ähnlich dem unter „Modellierung“ angeführten Ansatz gewählt. So werden die Ergebnisse

mehrerer periodischer Schichten mit zufällig gewählten Einheitszellen gemittelt. Kapitel fünf gibt schließlich Aufschluss darüber, wie groß die Einheitszelle sein muss bzw. wie viele Helices in einer Einheitszelle platziert sein müssen, um konsistente Ergebnisse zu erhalten. Die Untersuchungen in Kapitel fünf sind zugleich Ausgangspunkt der im anschließenden Kapitel untersuchten mehrlagigen Schichten und Materialien. Hier werden Variationen der Positionen und der Orientierung der Einschlüsse untersucht. Für den Fall, dass die Anwendung effektiver Materialparameter durch eine gewisse Mindestdicke der Schicht denkbar erscheint, wird stichprobenhaft geprüft, unter welchen Umständen und mit welchen Restfehlern Mischformeln zur Charakterisierung herangezogen werden können.

Bevor die Arbeit mit einer Zusammenfassung schließt, werden in Kapitel sieben einige Messungen an ausgewählten Schichten vorgestellt, die das Modell und die enthaltene Mittelungstheorie erhärten sollen. Die Einbeziehung von Herstellungstoleranzen der Helices nimmt dabei einen wichtigen Platz ein.

2 Kugelwellenentwicklungen

Dieses Kapitel erläutert einige theoretische Grundlagen zum Verständnis der im folgenden Kapitel vorgestellten Methodik. Ein Grundbaustein der Theorie ist die Lösung der quellenfreien Feldgleichungen in Kugelkoordinaten. Darauf aufbauend wird die Verknüpfung der anregenden Quellen mit den zugehörigen Streufeldern auf Basis der Multipolmomente besprochen. Die Eigenschaften und Vorteile einer solchen Zerlegung werden illustriert. Dabei helfen mathematische Theoreme, die an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber nur prinzipiell und ohne genaue mathematische Herleitung aufgeführt werden. Sie werden jedoch im Anhang ausführlich diskutiert. Die Darstellung der Interaktion mehrerer Streukörper führt am Ende des Kapitels zum Begriff der Transfer-Matrix.

2.1 Allgemeine Lösung

Bei allen Betrachtungen dieser Arbeit wird der eingeschwungene Zustand harmonischer Zeitabhängigkeit der Art $\text{Re}\{e^{j\omega t}\}$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Zeit t zugrunde gelegt. Zeitabhängige Größen werden folglich durch komplexe Phasoren beschrieben. Die Maxwellschen Gleichungen lauten für diesen Fall

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{J}}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = q, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.4)$$

In obigen Gleichungen treten die elektrische Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ und die mit ihr über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -j\omega q \quad (2.5)$$

verknüpfte elektrische Ladungsdichte q als Quelle für die elektrische und magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ auf. Vektorielle Größen werden hierbei durch einen Unterstrich hervorgehoben. Analog bezeichnen im Verlauf der Arbeit auftretende Mehrfachunterstreichungen Tensoren entsprechender Ordnung. Die zu den elektrischen Quellen dualen magnetischen

Größen sind in den Gleichungen (2.1)-(2.4) nicht aufgeführt. Sie stellen im Prinzip Ersatzgrößen dar, auf die im Rahmen dieser Arbeit verzichtet werden kann. Ferner wird vorausgesetzt, dass keine freien Ladungen vorhanden sind, d.h. es gilt $q = 0$.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, dass in dieser Arbeit ausschließlich Streukörper betrachtet werden, die von einem isotropen, linearen und homogenen Medium wie z.B. Luft umgeben sind. Die elektromagnetischen Eigenschaften eines solchen Mediums werden durch die skalare Permittivität ε und Permeabilität μ in den Materialgleichungen

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{D}} &= \varepsilon \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{B}} &= \mu \underline{\mathbf{H}} = \mu_0 \mu_r \underline{\mathbf{H}},\end{aligned}\quad (2.6)$$

also in der Verknüpfung der Feldstärken mit den entsprechenden Flussdichten $\underline{\mathbf{D}}$ und $\underline{\mathbf{B}}$, berücksichtigt. Es gilt $\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$. Anzumerken ist, dass die relative Permittivität $\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$ und die relative Permeabilität $\mu_r = \mu'_r - j\mu''_r$ im Allgemeinen frequenzabhängig sind. Dielektrische und magnetische Verluste werden durch einen negativen Imaginärteil der Materialparameter ε und μ modelliert. Ein passives Medium wird folglich durch $\varepsilon''_r \geq 0$ und $\mu''_r \geq 0$ beschrieben.

Für Punkte im Raum, die quellenfrei sind (d.h. $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{0}}$), erhält man aus den Gleichungen (2.1)-(2.6) die Wellengleichung für das elektrische und magnetische Feld [38]:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} &= 0, \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} &= 0.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Die Wellenzahl k ist gegeben durch $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$. Wie später noch erläutert wird, erweist sich für die in dieser Arbeit angestrebten Untersuchungen die Wahl von Kugelkoordinaten (Bild 2.1) als vorteilhaft. Mögliche Lösungen homogener Differentialgleichungen der Form aus Gleichung (2.7) in Kugelkoordinaten sind Vektorwellenfunktionen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$, für die gilt [39]:

$$\underline{\mathbf{N}}_{n,m} = \frac{1}{k} \nabla \times \underline{\mathbf{M}}_{n,m}, \quad (2.8)$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{n,m} = \frac{1}{k} \nabla \times \underline{\mathbf{N}}_{n,m} \quad (2.9)$$

und

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{N}}_{n,m} &= \frac{z_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \theta) e^{-jm\phi} \underline{\mathbf{e}}_r \\ &+ \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [r z_n(kr)] \left[e^{-jm\phi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \underline{\mathbf{e}}_\theta - e^{-jm\phi} \frac{jm P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \underline{\mathbf{e}}_\phi \right],\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{n,m} = z_n(kr) e^{-jm\phi} \left[-\frac{jm}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \underline{\mathbf{e}}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \underline{\mathbf{e}}_\phi \right]. \quad (2.11)$$

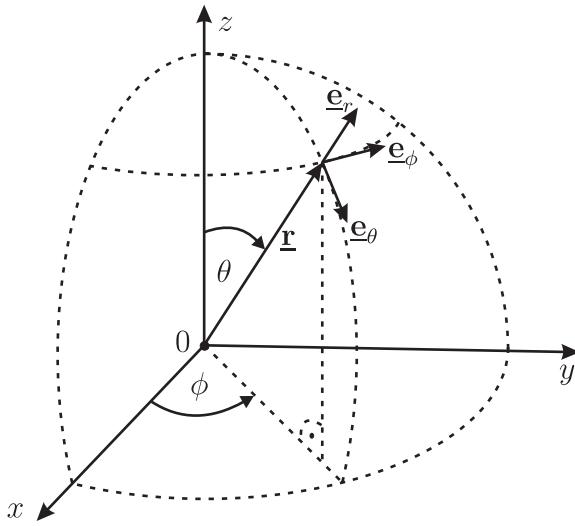


Bild 2.1: Die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) und die zugehörigen Einheitsvektoren $(\underline{\mathbf{e}}_r, \underline{\mathbf{e}}_\theta, \underline{\mathbf{e}}_\phi)$.

Die Abhängigkeit der im Folgenden auch vereinfachend „Kugelwellen“ genannten Felder $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ von der θ -Koordinate wird durch die sogenannten zugeordneten Legendre-Polynome P_n^m (Definition wie in [39]) beschrieben. Für $|m| > n$ ist $P_n^m = 0$, unabhängig vom Argument. In der obigen analytischen Lösung stehen die $z_n(kr)$ stellvertretend für die Art der verwendeten sphärischen Funktion [40]. Im mathematischen Sinn erfüllen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ die Gleichung (2.7) für jede sphärische Funktion. Soll das betrachtete Gebiet jedoch den Ursprung enthalten, so können nur mit sphärischen Besselfunktionen $j_n(kr)$ gebildete Wellenfunktionen zur Beschreibung herangezogen werden. Sie führen auf gegenläufige, gedämpfte (für k komplex) Wellen und sind im Gegensatz zu sphärischen Hankelfunktionen nicht singulär im Ursprung. Für den Fall, dass Strahlungsphänomene untersucht werden, eignen sich nur sphärische Hankelfunktionen zweiter Art $h_n^{(2)}(kr)$. Die damit modellierten Wanderwellen in positiver r -Richtung verschwinden für $r \rightarrow \infty$. Zur Unterscheidung erhalten die Kugelwellen von nun an die Bezeichnung $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ für $z_n(kr) = j_n(kr)$ bzw. $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ für $z_n(kr) = h_n^{(2)}(kr)$.

Es lässt sich zeigen, dass die Kugelwellen eine vollständige Basis des divergenzfreien Lösungsraumes der Wellengleichung (2.7) bilden. Zudem gilt: $\underline{\mathbf{M}}_{0,0} = \underline{\mathbf{N}}_{0,0} = \underline{\mathbf{0}}$. Das abgestrahlte elektrische Feld außerhalb eines Gebietes, welches alle Quellen einschließt, kann folglich immer durch die Linearkombination

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}) + b_{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}})) \quad (2.12)$$

mit den skalaren Entwicklungskoeffizienten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ dargestellt werden. Aus den

Gleichungen (2.3) und (2.9) folgt mit den gleichen Koeffizienten für das magnetische Feld:

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{jk}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}) + b_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}})) . \quad (2.13)$$

Die sphärische Vektorwellenfunktion $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ besitzt keine radiale Komponente. Zur Ausbreitungsrichtung transversal-elektrische (TE) Feldverteilungen werden folglich durch $b_{n,m} \neq 0$ und $a_{n,m} = 0$ repräsentiert. Für transversal-magnetische (TM) Felder gilt $a_{n,m} \neq 0$ und $b_{n,m} = 0$.

2.2 Quellen von Kugelwellen

In dieser Arbeit werden ausschließlich passive Strukturen betrachtet. Bei Anregung durch eine einfallende Feldverteilung fließen – zur Erfüllung der Randbedingungen – Ausgleichsströme. Das Gesamtfeld ergibt sich aus der Überlagerung des einfallenden und des abgestrahlten Feldes. Letzteres wird fortan als Streufeld bezeichnet.

Ein Weg zur Bestimmung des Streufeldes führt über das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$. Am Ort $\underline{\mathbf{r}}$ errechnet es sich aus der gewichteten Integration der elektrischen Stromdichte über alle Quell-Koordinaten $\underline{\mathbf{r}'}$ im Volumen V' [41]:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{e^{-jk|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}'}|}}{|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}'}|} \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'}) dV' . \quad (2.14)$$

Für das Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ lässt sich ebenfalls eine Wellengleichung der Form aus Gleichung (2.7) herleiten, so dass es, laut den Überlegungen des vorherigen Abschnitts, ebenfalls als Kombination von Kugelwellen darstellbar ist. Angenommen das Vektorpotential liegt entwickelt nach Kugelwellen vor, lässt sich das gestreute magnetische Feld leicht aus dem Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad (2.15)$$

und Gleichung (2.9) herleiten. Das entsprechende elektrische Feld folgt durch Koeffizientenvergleich der Gleichungen (2.12) und (2.13).

Die angesprochene Entwicklung des magnetischen Vektorpotentials nach Kugelwellen ist aus Gleichung (2.14) nicht direkt ersichtlich, zumal das Integral für jeden Beobachtungspunkt $\underline{\mathbf{r}}$ neu ausgewertet werden muss. Ferner ist zu beachten, dass die Vektorwellenfunktionen $\underline{\mathbf{M}}$ und $\underline{\mathbf{N}}$ zwar eine vollständige, aber nicht die einzige mögliche Basis der Lösungen bilden. Die Auswertung des Integrals führt also nicht zwangsläufig zu einem Ausdruck

des magnetischen Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}}$ in Kugelwellen. Die Tatsache, dass die Abbildung $\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$ nicht eindeutig ist, zeigt jedoch, dass eine Kugelwellenentwicklung von $\underline{\mathbf{A}}$ für eine Darstellung der Felder gemäß Gleichungen (2.12) und (2.13) gar nicht zwingend erforderlich ist. In jedem Fall stellt sich das Problem, wie man das berechnete Vektorpotential auftrennt, um die Koeffizienten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ zu erhalten. Abhilfe schafft eine Taylor-Reihenentwicklung der skalaren Funktion

$$g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'}) = \frac{e^{-jk|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}'}|}}{4\pi|\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}'}|} = g(\underline{\mathbf{r}}, 0) + \nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'})|_{\underline{\mathbf{r}'}=0} \cdot \underline{\mathbf{r}'} + \dots, \quad (2.16)$$

die hier nur bis zum zweiten Glied dargestellt ist. Als Entwicklungspunkt wurde hier der globale Ursprung gewählt. Prinzipiell ist er beliebig wählbar, für die folgende Betrachtung erweist sich diese Wahl jedoch als sehr nützlich. Setzt man den Ausdruck aus Gleichung (2.16) in (2.14) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen [42, Kap. 2]:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{0}) j\omega \underline{\mathbf{p}}^e - \frac{1}{\mu} \nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'})|_{\underline{\mathbf{r}'}=0} \times \underline{\mathbf{p}}^m + \frac{1}{2} j\omega \nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}'})|_{\underline{\mathbf{r}'}=0} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^e + \dots, \quad (2.17)$$

wobei in obiger Gleichung das elektrische und magnetische Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}}^e$ bzw. $\underline{\mathbf{p}}^m$ und das elektrische Quadrupolmoment $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e$ gemäß

$$\underline{\mathbf{p}}^e = \frac{1}{j\omega} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'}) dV', \quad (2.18)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^m = \frac{\mu}{2} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{r}'} \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'}) dV', \quad (2.19)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e = \frac{1}{j\omega} \iiint_{V'} (\underline{\mathbf{r}'} \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'}) + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'}) \underline{\mathbf{r}'}) dV', \quad (2.20)$$

aufreten. Höhere Momente ergeben sich, wenn weitere Terme der Entwicklung in Gleichung (2.16) berücksichtigt werden.

Die Multipolmomente sind einzig von der Quellenverteilung abhängig. Die obige Analyse gestattet zudem die Interpretation der Multipolmomente als infinitesimal kleine und am Ursprung positionierte Punktquellen. Eine Separation des Ausdrucks für das Vektorpotential nach Ursache (Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}'})$) und Wirkung am Beobachtungspunkt $\underline{\mathbf{r}}$ ist somit geglückt. Die aus dem Vektorpotential folgenden, gestreuten elektromagnetischen Felder können mit Hilfe von Gleichung (2.15) und getrennt nach den einzelnen Termen der Entwicklung (2.17) berechnet werden. Aus dem ersten Term folgt durch einen einfachen Vergleich, dass lediglich ein Entwicklungskoeffizient

$$a_{1,0} = \frac{k^3 p_z^e}{j4\pi\varepsilon} \quad (2.21)$$

in Gleichung (2.12) und (2.13) für die Streufelddarstellung eines Dipolmoments $\underline{\mathbf{p}}^e = p_z^e \underline{\mathbf{e}}_z$ ausreichend ist [37]. Um, ausgehend von dieser Lösung, eine systematische Beschreibung der verbleibenden Komponenten zu erhalten, kann man sich des Rotationstheorems für Kugelwellen [43, 44]

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_{n,m1}^{J,H}(r_1, \theta_1, \phi_1) &= \sum_{m=-n}^n D_{m,m1}^n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^{J,H}(r, \theta, \phi), \\ \underline{\mathbf{N}}_{n,m1}^{J,H}(r_1, \theta_1, \phi_1) &= \sum_{m=-n}^n D_{m,m1}^n(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^{J,H}(r, \theta, \phi),\end{aligned}\quad (2.22)$$

bedienen, welches gestattet, Kugelwellen bezüglich zueinander gedrehter Koordinatensysteme $\underline{\mathbf{r}}$ und $\underline{\mathbf{r}}_1$ in das jeweils andere System umzurechnen. Die Lage der beiden Koordinatensysteme ist über die Euler-Winkel α, β und γ definiert - eine Hintereinanderausführung von Rotationen um die z -, die neu erhaltene y - und die wiederum aktualisierte z -Achse (siehe dazu Anhang A). Jede Komponente des Dipolmoments $\underline{\mathbf{p}}^e$ kann in einem gedrehten Koordinatensystem mit dem Koeffizienten $a_{1,0}$ aus Gleichung (2.21) dargestellt werden. Im globalen Koordinatensystem ergibt sich nach Auswertung der Rotationskoeffizienten $D_{m,m1}^n$ für das gestreute elektrische Feld [45]:

$$\underline{\mathbf{E}}_{streu, \underline{\mathbf{p}}^e} = \sum_{m=-1}^1 a_{1,m} \underline{\mathbf{N}}_{1,m}^H \quad (2.23)$$

mit

$$\begin{pmatrix} a_{1,-1} \\ a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{k^3}{j4\pi\epsilon} \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\mathbf{p}}^e = \frac{k^3}{j4\pi\epsilon} \cdot \begin{pmatrix} -1 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & j/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x^e \\ p_y^e \\ p_z^e \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Die Felder der Dipolkomponenten p_x^e und p_y^e setzen sich demzufolge aus zwei Kugelwellen verschiedener Amplituden und Umfangsordnungen m zusammen. Das Rotationstheorem erleichtert an dieser Stelle die Identifikation der beteiligten Wellen.

Aus der Analyse des zweiten Terms in Gleichung (2.17) folgt, dass auch hier ein Entwicklungskoeffizient

$$b_{1,0} = \frac{\omega\mu}{jk} \cdot \frac{k^3 p_z^m}{j4\pi\mu} = -\frac{\omega k^2 p_z^m}{4\pi} \quad (2.25)$$

zur Darstellung der gestreuten Felder eines magnetischen Dipolmomentes nötig ist, für das $\underline{\mathbf{p}}^m = p_z^m \underline{\mathbf{e}}_z$ gilt. Berücksichtigt man Gleichung (2.13), wird ersichtlich, dass dieser Entwicklungskoeffizient dual zu (2.21) ist. Die anschließende Anwendung des Rotationstheorems für Kugelwellen führt auf identische Koeffizienten $D_{m,m1}^n$ wie zuvor, da diese unabhängig von der verwendeten Vektor-Wellenfunktion sind.

Das Vorgehen im Fall der Dipolmomente ist mit Einschränkungen auch für das elektrische Quadrupolmoment, folglich den dritten Term des Vektorpotentials in Gleichung (2.17), anwendbar. Für die einzelne Komponente q_{zz}^e des Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e$ folgt [46]:

$$a_{2,0} = \frac{k^4}{j24\pi\varepsilon} q_{zz}^e. \quad (2.26)$$

Die Ableitung für andere Komponenten kann wiederum auf Basis des Rotationstheorems erfolgen [45]. Der Übersichtlichkeit halber wird an dieser Stelle auf die Darstellung der erforderlichen Schritte verzichtet. Es bleibt zu erwähnen, dass $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e$ symmetrisch ist, d.h.

$$\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e = \begin{pmatrix} q_{xx}^e & q_{xy}^e & q_{xz}^e \\ q_{xy}^e & q_{yy}^e & q_{yz}^e \\ q_{xz}^e & q_{yz}^e & q_{zz}^e \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ist durch die Kenntnis von sechs Einträgen vollständig erfasst. Die Amplituden der gestreuten Felder ergeben sich damit aus dem Zusammenhang:

$$\begin{pmatrix} a_{2,-2} \\ a_{2,-1} \\ a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{k^4}{j24\pi\varepsilon} \begin{pmatrix} 3 & -j6 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & j3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & j/2 & 0 \\ 1/8 & j/4 & 0 & -1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{xx}^e \\ q_{xy}^e \\ q_{xz}^e \\ q_{yy}^e \\ q_{yz}^e \\ q_{zz}^e \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Eine Erweiterung der analytischen Zerlegung auf höhere Multipole ist schwierig. Die Gründe sind zum einen in der Multipolentwicklung des Vektorpotentials zu suchen. Der algebraische Aufwand steigt sehr schnell, sobald höhere Terme der Taylorentwicklung (2.16) berücksichtigt werden. Zum anderen folgt die Verknüpfung der einzelnen Komponenten der Momente mit den entsprechenden Kugelwellen keiner erkennbaren Systematik, die eine automatisierte Entwicklung bzw. einen umfassenden Ausdruck zuließe. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass ein elektrisches Moment n -ter Ordnung durch Felder mit $a_{n,m} \neq 0$ charakterisiert wird und ein magnetisches Moment n -ter Ordnung durch Felder mit $b_{n,m} \neq 0$ [47]. Diese Verknüpfung ist jedoch nur richtig, wenn der Stützpunkt der Taylorentwicklung mit dem Koordinatensystem der Quellverteilung, und damit laut Gleichung (2.14) auch mit dem Koordinatensystem der Beobachtungspunkte, übereinstimmt.

Einige Eigenschaften der beschriebenen Entwicklung des Streufeldes in Multipolfelder lassen sich anhand der radialen Abhängigkeit der Vektor-Wellenfunktionen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$

ableiten. Abgesehen von einem Exponentialterm sind die hierfür zu untersuchenden sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art durch Potenzen von $1/(kr)$ gegeben [40]:

$$h_n^{(2)}(kr) = j^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{v=0}^n \frac{(-j)^v}{v!(2kr)^v} \frac{(n+v)!}{(n-v)!}. \quad (2.29)$$

Aus dem Grenzübergang $kr \rightarrow \infty$ folgt

$$h_n^{(2)}(kr) \rightarrow j^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{kr}, \quad (2.30)$$

was dazu führt, dass sowohl die $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$ als auch die $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ für jede Ordnung n mit $1/(kr)$ abklingen (vergleiche dazu (2.10) und (2.11)). Dieses Ergebnis ist gegensätzlich zu den aus der Elektrostatik bekannten Multipolen, die aus Ladungsverteilungen gebildet werden und deren Potential desto schneller abklingt, je höher die Ordnung ist. Letzteres folgt jedoch zwingend aus der Tatsache, dass die abgestrahlte Leistung jedes Multipols im verlustfreien Raum nicht verschwindet.

Die höchste auftretende Potenz von $1/(kr)$ in Gleichung (2.29) ist $1/(kr)^{n+1}$. Für kleine Argumente $kr \ll 1$ stellt die Kugelwellenentwicklung folglich eine schnell konvergierende Reihe zur Beschreibung singulärer Felder in der Nähe von Quellverteilungen dar. Die Gültigkeit der Felder $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ ist jedoch, gemäß der Annahme zur Herleitung der Wellengleichung (2.7), auf quellenfreie Gebiete beschränkt. Für einen festen Abstand r und beliebige Winkel θ und ϕ folgt schließlich ein kugelförmiges Gebiet, das alle Quellen einschließt. Für eine schnell konvergierende Reihe muss daher analog zu obiger Aussage für die Quellverteilung $kr' \ll 1$ gelten. Auf diese Forderung wird im Verlauf der Arbeit noch häufiger eingegangen. Sie ist zwar nicht für die Gesamtheit der Streukörper in den in dieser Arbeit untersuchten Schichten erfüllt, wohl aber für jeden einzelnen Streukörper selbst. Eine geeigneter Darstellung des gestreuten Feldes einer Anordnung mit insgesamt N beliebig verteilten Streukörpern ist deswegen durch den Ausdruck

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{Streu}}(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{n_{\text{Streu},i}} \sum_{m=-n}^n (a_{i,n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) + b_{i,n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})) \quad (2.31)$$

gegeben, wobei die Ursprünge $\underline{\mathbf{r}}_i$ der lokalen Koordinatensysteme $\underline{\mathbf{r}}_{(i)}$ zweckmäßigerweise im Mittelpunkt des jeweiligen Streukörpers liegen. Aus praktischen Gründen wird die zweite Summation nur bis zur Ordnung $n_{\text{Streu},i}$, welche für die gewünschte Genauigkeit nötig ist, durchgeführt. Da sich der Zusammenhang für das magnetische Feld ähnlich wie in Gleichung (2.13) direkt aus den Entwicklungskoeffizienten $a_{i,n,m}$ und $b_{i,n,m}$ ergibt, ist er hier und im Folgenden nicht explizit erwähnt.

2.3 Partikelinteraktion

Bislang ist lediglich die Verknüpfung der in den Streukörpern hervorgerufenen Stromverteilungen mit den zugehörigen Streufeldern besprochen worden. Die Ursache dieser Stromverteilung ist die Überlagerung des von extern eingeprägten anregenden Feldes und der Streufelder aller anderen Partikel. An dieser Stelle ist es zunächst angebracht, die Basis der Anregung zu definieren – sinnvollerweise ebenfalls in Kugelkoordinaten. Wie in Abschnitt 2.1 schon angedeutet, eignen sich Vektor-Wellenfunktionen gebildet mit sphärischen Besselfunktionen j_n , also $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$. In der Literatur ist auch eine alternative Möglichkeit mit sphärischen Hankelfunktionen erster Art $h_n^{(1)}$ erwähnt (z.B. [48]). Obwohl beide Methoden ineinander umrechenbar sind, wird auf die erste Methode mit $z_n = j_n$ zurückgegriffen, da für $z_n = h_n^{(1)}$ ein Korrekturterm in den gestreuten Feldern erforderlich ist.

Es ist zweckmäßig, die Anregung bezüglich des gleichen Koordinatensystems zu definieren wie die gestreuten Felder. Es ergibt sich analog zu Gleichung (2.31):

$$\underline{\mathbf{E}}_{Anr}(\underline{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{n_{Anr,i}} \sum_{m=-n}^n (c_{i,n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) + d_{i,n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})) \quad (2.32)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten $c_{i,n,m}$ und $d_{i,n,m}$, sowie den zur Konvergenz des anregenden Feldes nötigen Parametern $n_{Anr,i}$. Die in dieser Arbeit vorwiegend genutzte Art der Anregung ist eine homogene ebene Welle. Die dafür benötigten Entwicklungskoeffizienten folgen aus [49] und sind im Anhang B näher erläutert.

Um die gegenseitigen Wechselwirkungen der Partikel beschreiben zu können, wird in einem ersten Schritt ein einzelner Streukörper betrachtet. Fasst man alle zur Beschreibung notwendigen Kugelwellen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$, $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ und $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$, $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ in den Vektoren $\underline{\psi}^H$ und $\underline{\psi}^J$ zusammen, lassen sich das externe und gestreute Feld durch die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{Streu}(\underline{\mathbf{r}}) &= \underline{\psi}^H(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \underline{\mathbf{b}}, \\ \underline{\mathbf{E}}_{Anr}(\underline{\mathbf{r}}) &= \underline{\psi}^J(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \underline{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

in kompakter Weise ausdrücken. Alle unbekannten Koeffizienten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ bilden den Vektor $\underline{\mathbf{b}}$, während $\underline{\mathbf{d}}$ die bekannten Anregungskoeffizienten $c_{n,m}$ und $d_{n,m}$ enthält. Einen allgemeinen linearen Zusammenhang zwischen einfallendem und gestreutem Feld gibt folglich die Abbildung

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{d}} \quad (2.34)$$

wieder. Dabei bezeichnet $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ die für den betrachteten Partikel charakteristische *Transfer-Matrix* oder auch kurz *T-Matrix*. Mit ihr ergibt sich das gestreute Feld zu

$$\underline{\mathbf{E}}_{Streu}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\psi}^H(\underline{\mathbf{r}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{d}}. \quad (2.35)$$

Berücksichtigt man für die gestreuten Felder Kugelwellen bis n_{Streu} -ter Ordnung und anregende Wellen bis zur Ordnung n_{Anr} enthält $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ insgesamt $2n_{Streu}(n_{Streu} + 2)$ Reihen und $2n_{Anr}(n_{Anr} + 2)$ Spalten.

Die T-Matrix übernimmt die Rolle einer inversen Systemmatrix des einzelnen Streukörpers: Ist sie bekannt, lassen sich die Streukoeffizienten für beliebige Anregungen durch Matrix-Vektor-Multiplikationen berechnen. Vorausgesetzt ist allerdings, dass die anregenden Wellen auf den gleichen Ursprung wie die gestreuten Wellen bezogen werden. Die Herleitung der T-Matrix für Helices wird im nächsten Kapitel besprochen. Als einfaches und bekanntes Beispiel lassen sich jedoch homogene isotrope Kugeln anführen. Deren T-Matrix lässt sich analytisch durch Anpassung der Randbedingungen auf der Kugeloberfläche formulieren [50]. Es tritt keine Verkopplung von TE- und TM-Moden auf. Da alle TE- und TM-Moden auch untereinander entkoppelt sind, ist die T-Matrix eine quadratische Diagonalmatrix. Die Koeffizienten dieser Matrix sind auch als Mie-Koeffizienten [51] bekannt. Eine tiefergehende Schilderung dieser Koeffizienten erfolgt in Abschnitt 3.3.

Bei der Anwesenheit mehrerer Partikel addieren sich zum externen Feld die Beiträge aller anderen Streukörper. Die Streufelder anderer Partikel sind hingegen bezüglich eines anderen Koordinatensystems definiert, so dass die T-Matrix nicht unmittelbar Verwendung finden kann. An dieser Stelle hilft das translatorische Additionstheorem für Vektor-Wellenfunktionen [52], welches gestattet, den Bezugspunkt der Wellen vom Ort j auf den Ort i zu verschieben. Je nach Art der Wellen ergibt sich:

$$\begin{aligned} a) \quad \underline{\psi}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(j)}) &= \underline{\psi}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) \cdot \underline{\underline{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j) \quad \text{für } |\underline{\mathbf{r}}_{(i)}| > r_t, \\ b) \quad \underline{\psi}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(j)}) &= \underline{\psi}^J(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) \cdot \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j) \quad \text{für } |\underline{\mathbf{r}}_{(i)}| < r_t, \\ c) \quad \underline{\psi}^J(\underline{\mathbf{r}}_{(j)}) &= \underline{\psi}^J(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) \cdot \underline{\underline{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j) \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{r}}_{(i)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei r_t der Abstand der beiden Koordinatensysteme ist. Die Anzahl der zur Entwicklung benötigten Wellen, also die Größe des Vektors $\underline{\psi}^{H,J}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})$, hängt im Wesentlichen von r_t in Relation zum betrachteten Aufpunkt $\underline{\mathbf{r}}_{(i)}$ ab (siehe auch [53]). Zur Veranschauung sind die drei Fälle in Bild 2.2 skizziert. Für Fall a ist unmittelbar kenntlich, dass sich die Anzahl der Moden zur Beschreibung der Felder bezüglich des Ursprungs i im Allgemeinen erhöht: Am Ort j liegen die Felder der Multipole entwickelt nach Kugelwellen vor. Wechselt man nun das Bezugssystem, erhöht sich der Abstand der Quellen vom Ursprung und die Quellverteilung erscheint bezüglich Koordinatensystem i räumlich ausgedehnter. Die Multipoldarstellung des Feldes konvergiert daher gemäß der im vorigen Abschnitt getroffenen Aussagen langsamer. Dieser Sachverhalt wird auch bei der Gültigkeit der T-Matrix für Helices eine Rolle spielen. In Fall b ist die Umrechnung von Wanderwellen in stehende Wellen in Bezug auf den Ursprung i formuliert. Letztere Entwicklung interessiert bei der

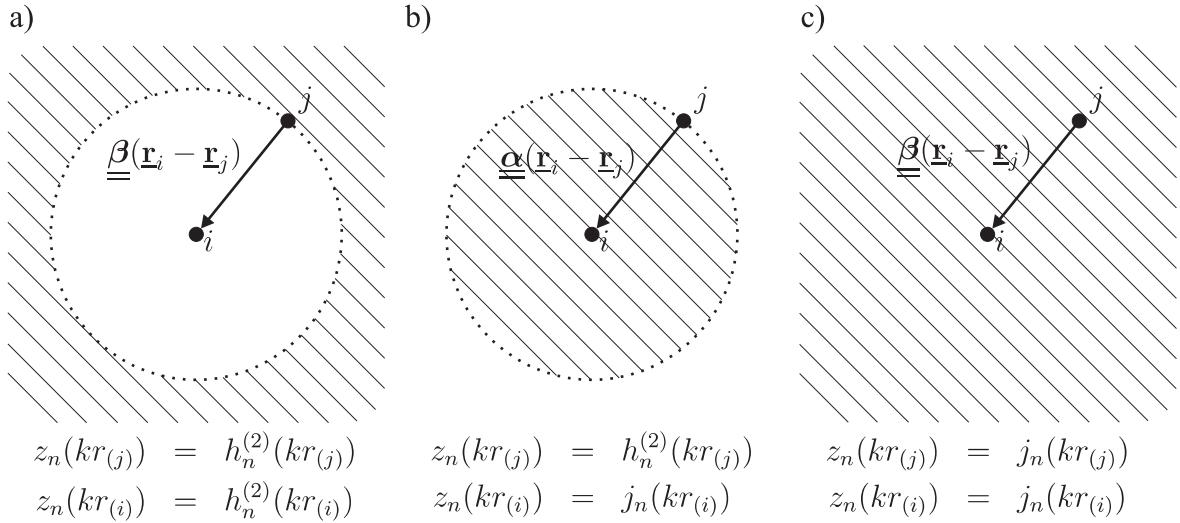


Bild 2.2: Die Möglichkeiten zur Ursprungstransformation sphärischer Wellen. Die maximalen Gültigkeitsbereiche sind schraffiert dargestellt.

Interaktion der Partikel, so dass für den Vektor \underline{b}_i jedes Streukörpers geschrieben werden kann:

$$\underline{b}_i = \underline{\underline{T}}_i \cdot \left(\underline{d}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \underline{\underline{\alpha}}(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \underline{b}_j \right). \quad (2.37)$$

In der Nähe des Ursprungs j kann die Singularität nur mit sehr vielen Kugelwellen mit sphärischen Besselfunktionen als radiale Abhängigkeit nachgebildet werden. Da die betrachteten Partikel endliche Ausdehnungen haben und sich nicht überlappen, ist ein beschränkteres Gültigkeitsgebiet nötig und damit einige wenige Moden ausreichend.

Die dritte Art der Ursprungstransformation (Fall c) ist beispielsweise bei der Entwicklung der externen Anregung für die verschiedenen Streukörper relevant (siehe Anhang B). Auch hier gilt, dass der Gültigkeitsbereich monoton steigt, wenn eine steigende Anzahl von Kugelwellen bezüglich des Ursprungs i berücksichtigt wird. Da stehende Wellen keine Singularitäten aufweisen, ist die entsprechende Entwicklung im Gegensatz zu den vorigen für alle Raumgebiete gültig.

3 Modell der helixförmigen Einschlüsse

Dieses Kapitel stellt das für diese Arbeit benötigte Modell der Helix dar. Dazu wird zunächst die allgemeine Beschreibung des Streufeldes einer Helix auf Basis eines vollständigen Multipolansatzes entwickelt. Im Prinzip ist damit die Berechnung einer beliebig großen T-Matrix möglich. Voraussetzung ist die Kenntnis der Stromverteilung auf der Helix für verschiedene Anregungen. Für die numerische Lösung können grundsätzlich mehrere Verfahren genutzt werden; hier wird auf eine Randelementmethode zurückgegriffen. Es wird zudem besprochen, wie eine Helix modelliert werden kann, die in ein kugelförmiges, homogenes und isotropes Material eingebettet ist. Dieser Fall ist z.B. für die physikalische Realisierung zufällig orientierter Helices interessant. Einige erste Untersuchungen schließen das Kapitel. So wird die Konvergenz der Multipollösung für einzelne Helices und bei der Interaktion zweier Helices betrachtet. Die Verifikation der Implementierung erfolgt zunächst durch einen Vergleich mit einem verbreiteten und frei erhältlichen Computerprogramm.

3.1 T-Matrix einer Helix

Zunächst soll eine Lösung vorgestellt werden, welche die aus der Elektrodynamik bekannten Polarisierbarkeiten [54] nutzt. Diese sind für jeden Streukörper charakteristisch und verknüpfen das anregende Feld am Ursprung mit den hervorgerufenen Multipolmomenten. Berücksichtigt man nur die elektrischen und magnetischen Dipolpolarisierbarkeiten $\underline{\underline{\alpha}}$, kann die T-Matrix mit Hilfe von Gleichung (2.24) und (2.25) analytisch formuliert werden [37, 55]:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{pmatrix} \frac{k^3}{j4\pi\epsilon} \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\underline{\alpha}}_{ee} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_0^{xyz} & \frac{\omega k^2}{4\pi} \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\underline{\alpha}}_{em} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_0^{xyz} \\ \frac{-\omega k^2}{4\pi} \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\underline{\alpha}}_{me} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_0^{xyz} & \frac{k^3}{j4\pi\mu} \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\underline{\alpha}}_{mm} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}_0^{xyz} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Das elektrische wie auch das magnetische Feld haben ein elektrisches und magnetisches Dipolmoment zur Folge. Die zur Beschreibung nötigen Polarisierbarkeiten sind in Gleichung (3.1) durch die Indices „e“ und „m“ kenntlich gemacht. Für die anregenden Felder folgt, dass einzig die Kugelwellen $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1,m}^J$ am Ursprung Beiträge liefern. Sie stehen, ausgedrückt in

kartesischen Koordinaten, in der Matrix

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}^{xyz}_0 = \left(\underline{\mathbf{N}}^{J,xyz}_{1,-1}(0) \ \underline{\mathbf{N}}^{J,xyz}_{1,0}(0) \ \underline{\mathbf{N}}^{J,xyz}_{1,1}(0) \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{j}{3} & 0 & \frac{-2j}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Da in diesem Fall sowohl das Streufeld als auch das anregende Feld nur bis zur Ordnung $n = 1$ entwickelt ist, besitzt die T-Matrix insgesamt 6×6 Einträge.

Der Vorteil einer solchen, zunächst allgemeinen Beschreibung ist, dass Ausdrücke für die Polarisierbarkeiten, z.B. aus Antennenmodellen [56] oder numerischen Simulationen [57], direkt übernommen werden können. Umgekehrt können die Dipolpolarisierbarkeiten aus dem entsprechenden Teil einer bekannten T-Matrix berechnet werden. Dieser Umstand wird noch in Kapitel 6 bei Vergleichen mit dem Clausius-Mossotti Materialmodell genutzt.

Andererseits lässt eine Entwicklung auf Basis der Polarisierbarkeiten, wie schon im vorigen Kapitel dargelegt, für höhere Ordnungen n keinen bzw. nur einen analytisch aufwändigen Ausdruck für die T-Matrix zu. Ziel muss folglich sein, für größere Ordnungen der hervorgerufenen Multipole automatisiert auf die T-Matrix zu schließen. In der Literatur wird dieses Problem häufig mit Hilfe der *Extended Boundary Condition Method (EBCM)* [58,59] gelöst. Die dafür angesetzten Wellenentwicklungen sind jedoch nur für homogene und isotrope Partikel gültig. Zudem ergeben sich numerische Probleme für Partikel, deren Form sehr stark von einer Sphäre abweicht. Ein weiterer Ansatz, der ebenfalls in dieser Arbeit verfolgt wird, ist die spaltenweise Berechnung der T-Matrix. Als Anregung dient hierbei eine einzige Kugelwelle $\underline{\mathbf{N}}^J_{n,m}$ oder $\underline{\mathbf{M}}^J_{n,m}$. Das gestreute Feld wird mit Hilfe einer geeigneten numerischen Methode berechnet und anschließend in Kugelwellen entwickelt. Die so erhaltenen Koeffizienten bilden direkt die entsprechende Spalte der T-Matrix. Der Schritt der Identifikation der gestreuten Kugelwellen kann z.B. durch Ausnutzung von Orthogonalitätsrelationen [48] oder punktweises Testen [60] erfolgen. Ein für diese Arbeit interessanter Aspekt ist in [61] zu finden: Berechnet man das gestreute Feld mit der Methode der diskreten Dipole (engl.: *Discrete Dipole Approximation (DDA)*), liegt die sich ergebende Polarisation im Material in der Form elementarer Dipole vor. Auf deren Streufelder können die im ersten Kapitel erarbeiteten Formalismen angewendet werden. Die DDA ist auf Materialien mit niedriger relativer Permittivität ϵ_r und relativer Permeabilität μ_r beschränkt und nicht nur aus diesen Gründen für metallische Helices nicht anwendbar. Setzt man den auf der Oberfläche des Drahtes hervorgerufenen Strom jedoch als gegeben an, ist die Identifikation aller gestreuten Kugelwellen ebenso möglich [62]. Dieser Weg wird nun skizziert.

Die Geometrie der Helix ist in Bild 3.1 illustriert. Die Länge des abgewickelten Drahtes

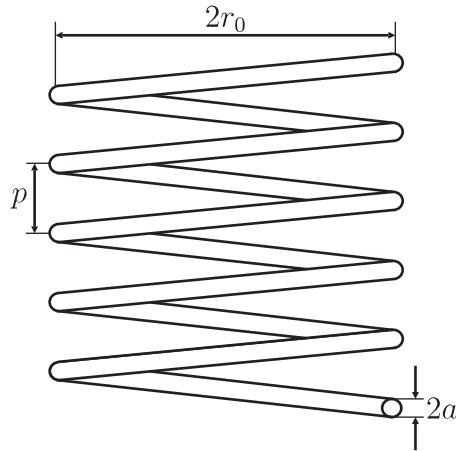


Bild 3.1: Geometrie der Helix (Radius r_0 , Drahtradius a und Steigung p).

entspricht in etwa der Hälfte der Wellenlänge der ersten Resonanz. Damit ist sowohl die Drahtlänge als auch die betrachtete Wellenlänge wesentlich größer als der Drahtradius a . Unter diesen Bedingungen sind Stromkomponenten quer zur Drahtachse vernachlässigbar. Ebenso ist die Stromverteilung über den Umfang nahezu konstant. Der Strom auf der Oberfläche des Drahtes kann dann durch einen Linienstrom I im Zentrum des Drahtquerschnitts repräsentiert werden. Diese Annahme ist gemeinhin als *Näherung für dünne Drähte* (engl.: *Thin-Wire Approximation*) bekannt und wird am Ende des Kapitels noch numerisch verifiziert.

Ist die Helix am Ursprung zentriert positioniert und die Achse in z-Richtung orientiert, beschreibt der Stromfaden einer Helix mit insgesamt w Windungen die durch s' parametrisierte Kurve

$$\underline{\mathbf{r}}'(s') = \begin{pmatrix} r_0 \cos(\pi w s') \\ \delta r_0 \sin(\pi w s') \\ \frac{1}{2} w p s' \end{pmatrix} \text{ mit } -1 \leq s' \leq 1. \quad (3.3)$$

Der Drehsinn der Helix ergibt sich aus dem Parameter δ :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{für rechtsgedrehte Helices,} \\ -1 & \text{für linksgedrehte Helices.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Damit folgt für das Dipolmoment der Stromverteilung auf der Helix nach Gleichung (2.18):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{p}}^e &= \frac{1}{j\omega} \int_{\underline{\mathbf{r}}'} \underline{\mathbf{I}}(\underline{\mathbf{r}}') dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{j\omega} \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{I}}(\underline{\mathbf{r}}'(s')) \cdot \left| \frac{d}{ds'}(\underline{\mathbf{r}}'(s')) \right| ds' = \frac{1}{j\omega} \int_{-1}^1 I(\underline{\mathbf{r}}'(s')) \cdot \underline{\mathbf{t}}'(s') ds' \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit dem aus der Parametrisierung $\underline{\mathbf{r}}'(s')$ erhaltenen Tangentialvektor $\underline{\mathbf{t}}'(s')$:

$$\underline{\mathbf{t}}'(s') = \begin{pmatrix} -r_0\pi w \sin(\pi ws') \\ \delta r_0\pi w \cos(\pi ws') \\ \frac{1}{2}wp \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Eine Auftrennung des Integrals aus Gleichung (3.5) in Teilintegrale bedeutet eine Aufteilung des Gesamtdipolmomentes in einzelne, diskrete, elektrische Dipole. Deren Streufelder können gemäß Gleichung (2.24) effizient und vollständig in Kugelwellen $\underline{\mathbf{N}}_{1,m}^H$ bezogen auf die lokale Position der Stromelemente entwickelt werden. Unter Ausnutzung des Translationstheorems (2.36) zur Entwicklung aller Dipolfelder in Kugelwellen bezüglich des Ursprungs und Betrachtung von infinitesimalen Teilstücken ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{b}} = \frac{-k^3}{4\pi\omega\varepsilon} \int_{-1}^1 \underline{\underline{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}'(s')) \cdot \underline{\underline{\gamma}}_d \cdot \underline{\mathbf{t}}(s') I(\underline{\mathbf{r}}(s')) ds'. \quad (3.7)$$

In obiger Gleichung enthält der Vektor $\underline{\mathbf{b}}$ die Koeffizienten aller berücksichtigten Kugelwellen – somit auch jene, die die Streufelder höherer Momente beschreiben. Unter der Bedingung, dass der Strom $I(\underline{\mathbf{r}}(s'))$ Wirkung der Anregung mit einer Kugelwelle $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ oder $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ ist, entspricht $\underline{\mathbf{b}}$ der entsprechenden Spalte der T-Matrix. Insgesamt muss der Strom folglich $2n_{Anr}(n_{Anr} + 2)$ mal berechnet werden. Das dafür genutzte Verfahren wird im nächsten Abschnitt kurz vorgestellt.

Die höchste Ordnung der berücksichtigten gestreuten Wellen (n_{Streu}) ist nur von den Dimensionen der Matrix $\underline{\underline{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}'(s'))$ abhängig. Deren Einträge können mit Hilfe endlicher Summen berechnet werden. Somit ist eine automatisierte Bestimmung der T-Matrix für beliebig hohe Multipol-Ordnungen möglich. Wie man anhand von Gleichung (2.36) bzw. Bild 2.2a sehen kann, ist die T-Matrix nur für Raumgebiete gültig, die alle Quellen umfassen. Im Fall der Kugelwellen bezogen auf den Mittelpunkt der Helix ergibt sich eine umhüllende Kugel mit minimalem Radius $r_{min} = |\underline{\mathbf{r}}'(1)| = |\underline{\mathbf{r}}'(-1)| = \sqrt{r_0^2 + (wp/2)^2}$. Für Gebiete innerhalb dieser Kugel existiert kein Modell der Helix durch am Ursprung konzentrierte Multipole. Dieser Umstand stellt jedoch nur eine geringe Einschränkung für die in dieser Arbeit untersuchten Strukturen dar.

Nach Gleichung (3.3) ist die Helixachse festgelegt. Prinzipiell kann die Parametrisierung für andere Orientierungen angepasst werden. Ein effektiver Weg im Hinblick auf die nötige Rechenzeit ist hingegen die zweimalige Anwendung des Rotationstheorems aus Gleichung (2.22). Diese besteht zunächst in der Umentwicklung der anregenden stehenden Wellen in solche bezüglich der gedrehten lokalen Koordinaten der Helix. Bezuglich dieses Koordinatensystems kann die aus der Parametrisierung (3.3) erhaltene T-Matrix angewendet

werden. Anschließend werden die gestreuten Kugelwellen in das globale Koordinatensystem rücküberführt. Beide Abbildungen können durch Matrizenmultiplikationen realisiert werden. Das Vorgehen ist im Kontext der dargestellten Theorie selbsterklärend, so dass auf eine mathematische Darstellung verzichtet wird.

3.2 Numerische Lösung für den Strom

Im Folgenden wird ein Draht endlicher Leitfähigkeit σ betrachtet. Bei Einfall einer anregenden elektromagnetischen Welle muss auf der Oberfläche des Drahtes die Stetigkeit des tangentialen elektrischen Feldes gewährleistet sein. Mit Hilfe des Einheitsvektors \underline{n} senkrecht zur Stromdichte \underline{J}_A lässt sich diese Bedingung wie folgt schreiben:

$$\underline{n} \times (\underline{E}_{Streu} + \underline{E}_{Anr}) = \frac{1}{\sigma} \underline{J}_A . \quad (3.8)$$

Im Kontext der in dieser Arbeit genutzten Näherung für dünne Drähte, also der Repräsentation der Stromdichte \underline{J}_A durch einen Linienstrom I , ergibt sich

$$\underline{n} \times \underline{E}_{Anr} = -\underline{n} \times \underline{E}_{Streu} + I \frac{d}{dl} Z . \quad (3.9)$$

Die Geometrie und die endliche Leitfähigkeit des Drahtes spiegeln sich in der inneren Impedanz pro Längeneinheit

$$\frac{d}{dl} Z = \frac{j}{a} \cdot \sqrt{\frac{f\mu}{2\pi\sigma}} \left(\frac{\text{Ber}(q) + j\text{Bei}(q)}{\frac{d}{dq}\text{Ber}(q) + j\frac{d}{dq}\text{Bei}(q)} \right) \text{ mit } q = a\sqrt{2\pi f\mu\sigma} \quad (3.10)$$

wider [63, Kap. 5.18]. Die Definitionen der beiden Kelvin-Funktionen $\text{Ber}(q)$ und $\text{Bei}(q)$ finden sich in [40]. Der Ausdruck für den Impedanzbelag berücksichtigt den Skin-Effekt, d.h. die Stromverdrängung im Inneren des runden Leiters. In Analogie zur Näherung für dünne Drähte wird auch hier bei der Herleitung eine achssymmetrische Stromverteilung angenommen, die keine Querkomponente aufweist.

Zur Lösung von Gleichung (3.9) muss das gestreute elektrische Feld als Funktion des Stromes I ausgedrückt werden. Aus Gleichung (2.14) und den Maxwellschen Gleichungen folgt mit einigen Umrechnungen:

$$\underline{E}_{Streu} = -j\omega\mu \iiint_{V'} \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') dV' \quad (3.11)$$

$$= -j\omega\mu \int_{-1}^1 \left(\underline{\underline{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) g(\underline{r}, \underline{r}'(s')) \underline{t}(s') I(\underline{r}'(s')) ds' . \quad (3.12)$$

Der unbekannte Strom steht im Integranden der letzten Gleichung. Eine analytische Extraktion des Stromes aus der Integralgleichung ist folglich nicht möglich. Für den Fall einer verlustfreien Helix ($\sigma \rightarrow \infty$) ist in [64] eine numerische Implementierung der Lösung von

$$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}_{Anr} = -\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}_{Streu} \quad (3.13)$$

mit $\underline{\mathbf{E}}_{Streu}$ aus Gleichung (3.12) zu finden. Sie basiert auf der Methode der gewichteten Residuen¹ [65]. Die Darstellung aller Details ist an dieser Stelle nicht ergiebig, so dass lediglich Grundzüge vorgestellt werden. Ausgangspunkt ist die Darstellung des Stromes als Summe von Basisfunktionen

$$I(\underline{\mathbf{r}}'(s')) = \sum_{\nu=1}^{\nu_{max}} \sum_{l=1}^2 i_{\nu,l} B_{\nu,l}(s') \quad (3.14)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} B_{\nu,1}(s') &= \cos((\nu - 1/2)\pi s') \\ B_{\nu,2}(s') &= \sin(\nu\pi s') \end{aligned} \right\} \text{ für } -1 \leq s' \leq 1. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe von sogenannten Testfunktionen, die hier als Spezialfall wie die Basisfunktionen gewählt sind (Galerkin-Methode [66]) und der Definition und Anwendung von linearen inneren Produkten erhält man ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $i_{\nu,l}$. Dieses wird wie alle linearen Gleichungssysteme der vorliegenden Arbeit mit Hilfe einer LU-Zerlegung [67, 68] gelöst.

Die Linearität der inneren Produkte erlaubt die getrennte Auswertung der rechten Seite von Gleichung (3.9), so dass der Fall mit Leitungsverlusten auf der Lösung für die verlustlose Helix aufbaut. Es ergibt sich, dass aufgrund der Orthogonalität der Test- und Basisfunktionen lediglich die Diagonalelemente der Systemmatrix für den verlustlosen Fall ($\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_0$) korrigiert werden müssen. Für den verlustbehafteten Fall lautet sie:

$$\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_v = \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_0 + \left(\frac{d}{dl} Z \right) |\underline{\mathbf{t}}'(s')| \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{Z}}}_0 + \left(\frac{d}{dl} Z \right) \sqrt{(r_0\pi w)^2 + (wp/2)^2} \underline{\underline{\mathbf{I}}}. \quad (3.16)$$

In [64] wird das Konvergenzverhalten der Lösung in Abhängigkeit von der Anzahl der Basisfunktionen ν_{max} ausführlich behandelt. Für den folgenden Teil der Arbeit wird angenommen, dass das prinzipielle Verhalten der Konvergenz unter Einbeziehung von Drahtverlusten nicht deutlich abweicht und der Parameter ν_{max} immer geeignet gewählt ist, falls er nicht explizit erwähnt wird.

¹Weitaus häufiger wird der Ausdruck „Momentenmethode“ als Synonym gebraucht. Dies wird in dieser Arbeit unterlassen, um Verwechslungen mit den untersuchten Multipolmomenten zu vermeiden.

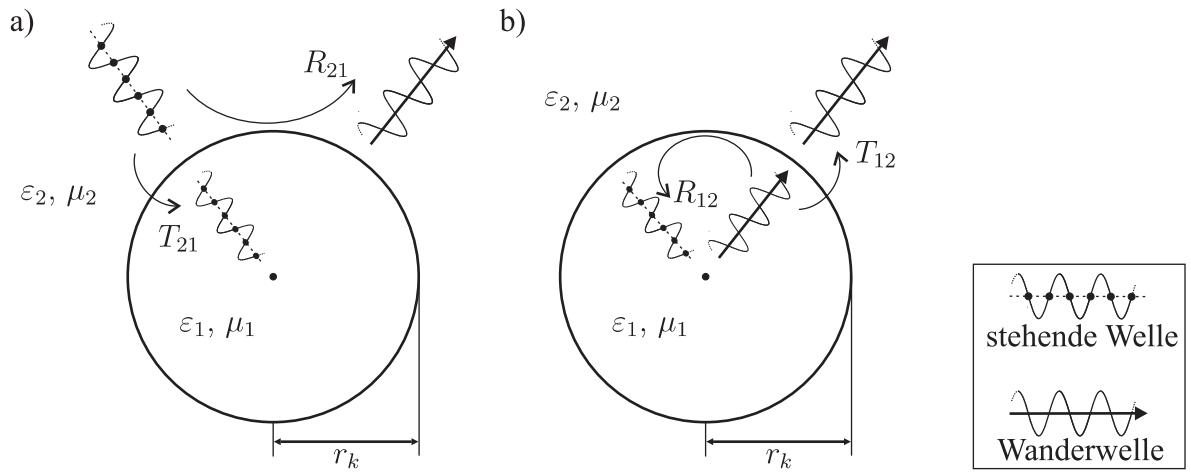


Bild 3.2: Darstellung von Transmission und Reflektion an einer Kugel. a) Stehende Welle als Anregung, b) Fall einer in der Kugel nach außen laufenden Wanderwelle.

3.3 Helix im Kugelvolumen

Um ein Material mit regellos verteilten, d.h. rein zufällig orientierten und positionierten, Helices technisch realisieren zu können, bietet sich das Einbringen jeder einzelnen Helix in ein kugelförmiges Wirtsmaterial an [69]. Diese Vorgehensweise wird auch bei der experimentellen Validierung in Kapitel 7.3 angewendet. Für einen Vergleich mit der Simulation muss allerdings das Helixmodell angepasst werden, da die Bestimmung der T-Matrix gemäß den vorigen Abschnitten zunächst auf unendlich ausgedehntem Raum konstanter Materialeigenschaften beschränkt ist. Zu diesem Zweck werden vorab die Eigenschaften einer Kugel im freien Raum behandelt.

Eine isotrope Kugel der Materialparameter ϵ_1 und μ_1 ist umgeben vom Hintergrundmaterial ϵ_2 und μ_2 (siehe Bild 3.2). Auch hier ist die Entwicklung der Felder in Kugelwellen vorteilhaft. Die Eigenschaften des Materials spiegeln sich lediglich in den sphärischen Funktionen, also in der radialen Abhängigkeit, wider. Bei der Betrachtung von Randbedingungen auf der Kugeloberfläche entspricht diese Tatsache einer vollständigen Entkopplung aller Moden, so dass eine getrennte Betrachtung der Moden zulässig ist. Der Fall der Anregung mit einer Kugelwelle ist in Bild 3.2a illustriert. Im Allgemeinen kommt es an der Kugeloberfläche ($r = r_k$) sowohl zu einer Reflektion der „einfallenden“ stehenden Wellen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ als auch zur Transmission. Es ergeben sich Wanderwellen im äußeren Gebiet und stehende Wellen innerhalb der Kugel. Gemäß den vorher definierten Darstellungen für anregendes und gestreutes Feld ergeben sich auf der Kugeloberfläche für alle

Winkel θ und ϕ die Beziehungen

$$\begin{aligned} c_{n,m} (\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J(k_2, r_k) + R_{21,n}^{TM} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(k_2, r_k)) &= T_{21,n}^{TM} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J(k_1, r_k) , \\ d_{n,m} (\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J(k_2, r_k) + R_{21,n}^{TE} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(k_2, r_k)) &= T_{21,n}^{TE} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J(k_1, r_k) , \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei zur Kennzeichnung des betrachteten Gebietes die Abhängigkeit der Kugelwellen von der Wellenzahl k_1 und k_2 explizit angegeben ist. Die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten $R_{21,n}$ und $T_{21,n}$ lassen sich getrennt für TM- und TE-Moden aus der Stetigkeit für tangentiales elektrisches und magnetisches Feld berechnen [50, Kap. 3.5]. Sie sind, abgesehen von den Materialparametern und dem Kugelradius r_k , nur von der Ordnung n , nicht aber von m abhängig. Aus (3.17) lässt sich das Verhältnis der komplexen Amplituden der gestreuten Wellen zu denen der anregenden Welle ($c_{n,m}$ und $d_{n,m}$) direkt ablesen. Die T-Matrix einer isotropen Kugel bestimmt sich daher aus den Reflektionskoeffizienten $R_{21,n}^{TM}$ und $R_{21,n}^{TE}$, die auf der Hauptdiagonalen platziert sind.

Bild 3.2b verdeutlicht den Fall einer nach außen laufenden Wanderwelle (z.B. aufgrund einer Quelle) in Medium 1. An der Grenzschicht kommt es zur Reflektion und es bildet sich eine stehende Welle in Medium 1 aus. Gleichzeitig entsteht eine Wanderwelle in Medium 2. Wie zuvor lässt sich analog für die Feldkomponenten auf der Kugeloberfläche schreiben:

$$\begin{aligned} T_{12,n}^{TM} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(k_2, r_k) &= a_{n,m} (\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(k_1, r_k) + R_{12,n}^{TM} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J(k_1, r_k)) , \\ T_{12,n}^{TE} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(k_2, r_k) &= b_{n,m} (\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(k_1, r_k) + R_{12,n}^{TE} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J(k_1, r_k)) . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten $R_{12,n}$ und $T_{12,n}$ gilt ähnliches wie zuvor: Sie lassen sich aus den Randbedingungen der tangentialen elektrischen und magnetischen Felder berechnen. Der Übersichtlichkeit halber wird hier wie im Fall a) auf eine Darstellung der Herleitung verzichtet. Analytische Ausdrücke für sämtliche hier aufgeführten Reflektions- und Transmissionskoeffizienten finden sich in [50]. Die in der Literaturstelle dargelegten Zusammenhänge beziehen sich im TM-Fall allerdings auf die Komponenten des magnetischen Feldes. Gemäß Gleichung (2.12) und (2.13) leitet sich das magnetische Feld in dieser Arbeit aus dem elektrischen Feld ab. Bei der hier verwendeten Konvention für die Entwicklungskoeffizienten $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$ und $d_{n,m}$ ergibt sich, dass die Transmissionskoeffizienten $T_{21,n}^{TM}$ bzw. $T_{12,n}^{TM}$ aus [50] angepasst werden müssen.

Mit den Reflektions- und Transmissionskoeffizienten aus den Gleichungen (3.17) und (3.18) stehen nun analytische Mittel zur Beschreibung von Randbedingungen an der Kugeloberfläche zur Verfügung. Ist eine Helix, wie in Bild 3.3, in einen kugelförmigen Einschluss eingebettet, sind die Randbedingungen auf einer imaginären Kugeloberfläche um die Helix unter der Voraussetzung formulierbar, dass die T-Matrix aus der Berechnung für ein Hintergrundmaterial ε_1 , μ_1 vorliegt. Prinzipiell lässt sich daraus, wie in [50, Kap 3.6] für

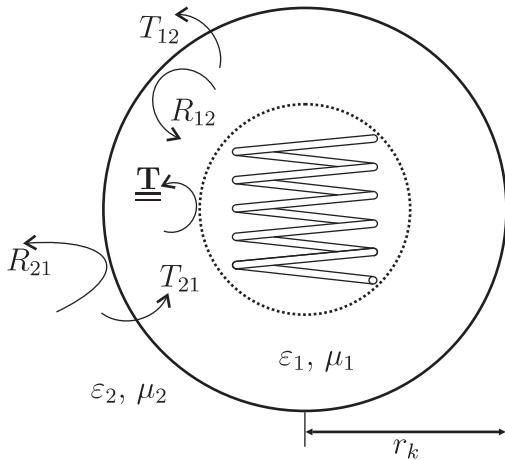


Bild 3.3: In Medium 1 eingebettete Helix. Darstellung aller benötigten Reflektions- und Transmissionsparameter.

sphärisch geschichtete isotrope Einschlüsse durchgeführt, die T-Matrix des gesamten Einschlusses ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ges}$) bezüglich Medium 2 berechnen. Im Gegensatz zu einer isotropen Kugel ist die T-Matrix einer Helix ($\underline{\underline{\mathbf{T}}}$) keine Diagonalmatrix. Daher können die Moden nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden. Das leicht angepasste Vorgehen wird nachfolgend beschrieben.

Entsprechend Abschnitt 3.1 wird $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ges}$ spaltenweise berechnet, d.h. die Anordnung wird jeweils mit nur einer Kugelwelle $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ oder $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ angeregt. Eine stehende Welle in Medium 1 ergibt sich zugleich aus der Transmission der Anregung mit T_{21}^{TM} bzw. T_{21}^{TE} und der Reflektion der von der Helix erzeugten Wanderwellen an der Grenzschicht. Fasst man die Koeffizienten aller angeregten stehenden Wellen in Medium 1 im Vektor $\underline{\mathbf{d}}_1$ und die benötigten Reflektionsparameter R_{12}^{TM} und R_{12}^{TE} als Diagonalelemente der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{12}$ zusammen, ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{t}}_{21} + \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{12} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{d}}_1. \quad (3.19)$$

Auf gleiche Weise lassen sich alle Transmissionsparameter T_{12}^{TM} und T_{12}^{TE} durch die Diagonalmatrix $\underline{\mathbf{t}}_{12}$ repräsentieren. Für die Koeffizienten der gestreuten Wellen in Medium 2 folgt:

$$\underline{\mathbf{b}}_{ges} = \underline{\mathbf{r}}_{21} + \underline{\mathbf{t}}_{12} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{d}}_1. \quad (3.20)$$

Die Vektoren $\underline{\mathbf{t}}_{21}$ und $\underline{\mathbf{r}}_{21}$ enthalten jeweils nur einen von Null abweichenden Eintrag: Den zur anregenden Mode entsprechenden Transmissionsparameter T_{21}^{TM} oder T_{21}^{TE} bzw. Reflektionsparameter R_{21}^{TM} oder R_{21}^{TE} . Lösen der Gleichung (3.19) nach $\underline{\mathbf{d}}_1$ und Einsetzen in (3.20) führt schließlich zu

$$\underline{\mathbf{b}}_{ges} = \underline{\mathbf{r}}_{21} + \underline{\mathbf{t}}_{12} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot (\underline{\mathbf{I}} - \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{12} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{t}}_{21} \quad (3.21)$$

als entsprechende Spalte der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{ges}$.

3.4 Beispiele

Die im Folgenden gegebenen Beispiele dienen zum einen der Verifikation und Plausibilitätsprüfung der numerischen Implementierung und zum anderen der ersten Einschätzung der Stärke bzw. Relevanz der verschiedenen Multipolfelder. Dabei werden zuerst eine einzelne Helix und später die Interaktion zweier Helices betrachtet. Diese grundsätzlichen Betrachtungen werden ohne eine umhüllende homogene Kugel gemäß vorigem Abschnitt durchgeführt. Die korrekte programmtechnische Umsetzung letzterer wird in Kapitel 4 untersucht.

3.4.1 Streuverhalten einer einzelnen Helix

Zunächst soll die numerische Implementierung für den Strom getestet werden. Zum Vergleich wird ein für den Entwurf von Antennen verbreitetes und lizenzenfreies Programm (*Numerical Electromagnetics Code 2 (NEC-2)*) [70] herangezogen, das ebenfalls auf der Methode der gewichteten Residuen beruht. Während im Rahmen der Näherung für dünne Drähte Verluste ebenso gemäß Gleichung (3.10) behandelt werden, besteht der wesentliche Unterschied der Implementierung in der Art der verwendeten Basisfunktionen. Sie sind jeweils bezüglich eines linearen Teilsegmentes der Struktur definiert. Auf die genaue mathematische Formulierung wird an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen (siehe dazu [70]).

Gegenstand der Untersuchung ist eine rechtsgedrehte Helix mit insgesamt 5 Windungen und parametrisiert durch Gleichung (3.3). Für die Helix gilt ferner: $r_0 = 0,8525$ mm, $a = 0,05$ mm und $p = 0,35$ mm. Als Anregung wird eine in Richtung der Helixachse polarisierte und in negative y -Richtung fortschreitende, homogene, ebene Welle gewählt. Ausgewertet wird der Rückstreuquerschnitt (engl.: *Radar Cross Section (RCS)*) - eine Fernfeldgröße, die anregende und gestreute Leistung in Beziehung setzt [71]:

$$RCS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E_{Streu}|^2}{|E_{Anr}|^2} \quad (3.22)$$

Dafür muss das Streufeld auf der positiven y -Achse berechnet werden, und zwar in solch einer Entfernung r von der Helix, dass nur noch die $\sim 1/r$ -Abhängigkeit der Feldstärke relevant ist. Bild 3.4 vergleicht die Ergebnisse, erhalten durch Anwendung von Gleichung (3.12) und aus NEC-2 für verschiedene elektrische Leitfähigkeiten des Drahtes. Dargestellt ist lediglich ein sehr kleiner Frequenzbereich um die Resonanz. Man sieht insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung. Die größten Abweichungen lassen sich für den Fall einer ideal

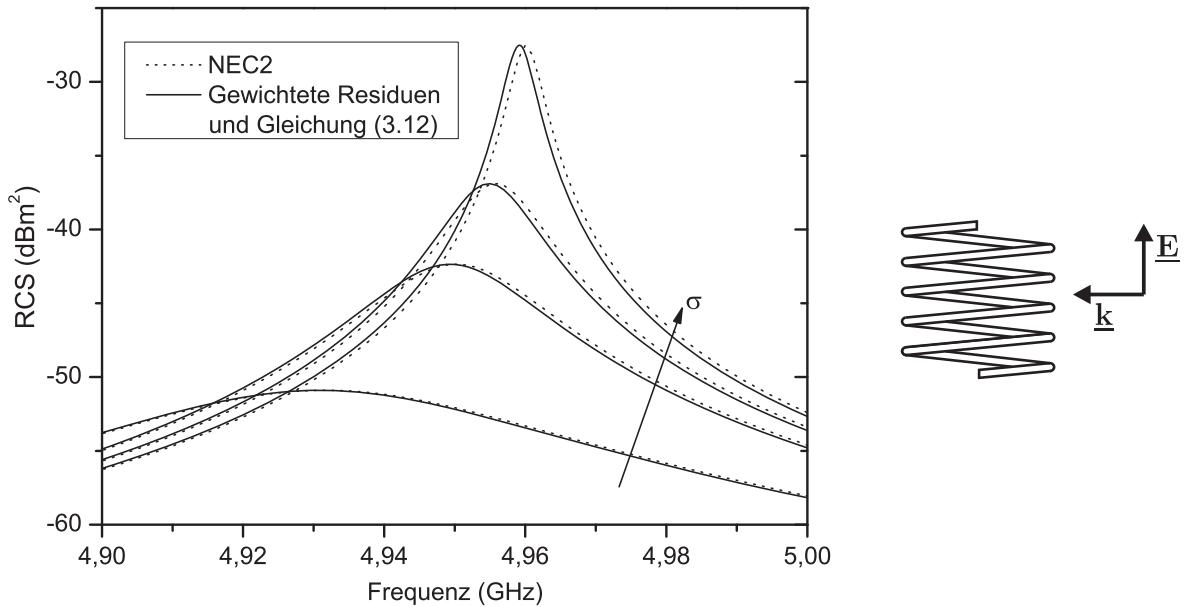


Bild 3.4: Vergleich der Rückstreuquerschnitte einer Helix ($r_0 = 0,8525$ mm, $a = 0,05$ mm und $p = 0,35$ mm) für verschiedene Leitfähigkeiten ($\sigma = 1,1$ MS/m, $\sigma = 11$ MS/m, $\sigma = 58$ MS/m und $\sigma \rightarrow \infty$).

leitenden Helix erkennen. In dem Fall beträgt der Frequenzversatz der Maxima ca. 0,8 MHz, was einem relativen Fehler von weit unter 1 % entspricht.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass sowohl die Implementierung mit harmonischen Ganzbereichsfunktionen als auch die Umsetzung in NEC-2 mit stückweise definierten Funktionen nicht absolut konvergiert, d.h. eine Erhöhung der Anzahl an Basisfunktionen bzw. Segmenten über eine gewisse Zahl hinaus kann zur Divergenz der Lösung führen. Es muss also jeweils sichergestellt werden, dass die erhaltene Lösung stabil ist. In obigem Beispiel wurden insgesamt 10 Ganzbereichsfunktionen ($\nu_{max} = 5$) genutzt, wohingegen die Ergebnisse aus NEC-2 durch Darstellung der Helix mit 134 Segmenten erzielt wurden.

Dass die Wahl harmonischer Basisfunktionen geeignet ist, verdeutlicht Bild 3.5, welches die Stromverteilung entlang des Drahtes einer ideal leitenden Helix in Abhängigkeit von dem Parameter s' zeigt. Ausrichtung und Anregung der Helix sind wie zuvor gewählt. Für einen übersichtlichen Vergleich sind die Verläufe für verschiedene Frequenzen auf den jeweiligen Maximalwert normiert. In einem weiten Bereich um die technisch häufig genutzte erste Resonanz ($f \sim 4,96$ GHz) ändert sich die Stromverteilung nur wenig und ist weitgehend kosinusförmig. Somit bilden schon Basisfunktionen mit kleinem Parameter ν den tatsächlichen Strom gut ab.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchung ist eine Antwort auf die Frage, wie hoch die

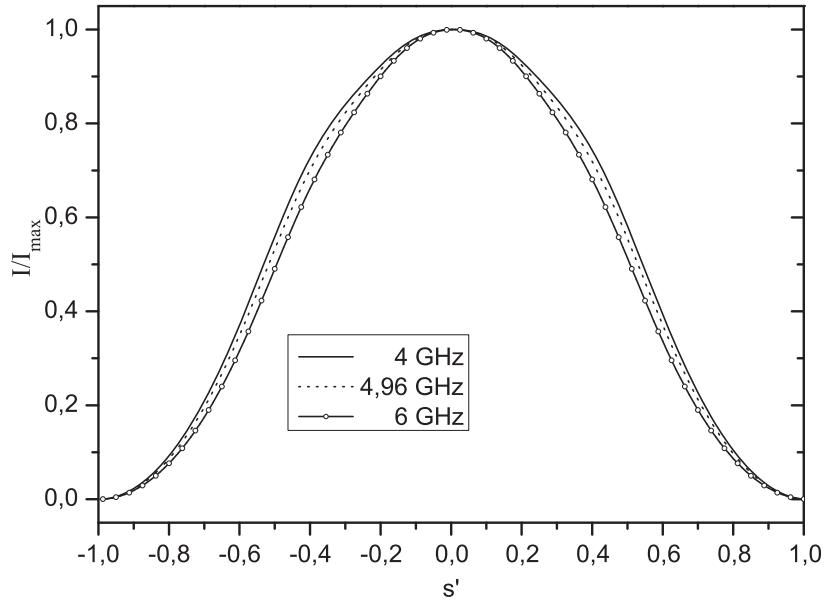


Bild 3.5: Auf den jeweiligen Maximalwert normierte Stromverteilung auf der Helix. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen, wobei die Anregung und die Geometrie gemäß Bild 3.4 gewählt wurden.

Ordnung n_{Streu} der Multipolfelder sein muss, um das gestreute Feld einer Helix mit einer definierten Genauigkeit wiederzugeben. Die Helix wird erneut wie in Bild 3.4 angeregt. Für konsistente Ergebnisse ist es vorteilhaft, das gestreute Feld nach Gleichung (3.12), fortan als Referenzfeld $\underline{\mathbf{E}}_{Ref}$ bezeichnet, mit dem Feld berechnet über die T-Matrix und Gleichung (2.35) zu vergleichen. Die Größe der T-Matrix wird dabei variiert. Um eine möglichst allgemeine Aussage zu erhalten, findet eine Abtastung des Streufeldes an mehreren Punkten statt, die exemplarisch auf einer imaginären Kugel um die Helix positioniert sind. Die Streufelder variieren umso mehr in θ - und ϕ -Richtung, je höher die Ordnung n ist. Daher ist eine von n abhängige Verteilung der Punkte sinnvoll. Diese Verteilung erfolgt analog zum Vorgehen bei der Vermessung von Antennen im Nahfeld [48], bei dem zur zweifelsfreien Identifikation von Kugelwellen das Abtasttheorem zu erfüllen ist. Demnach ist das maximal erlaubte Winkelinkrement für Abtastung des Feldes in θ - und ϕ -Richtung:

$$\Delta\theta = \Delta\phi = \frac{2\pi}{2N + 1}, \quad (3.23)$$

wobei N die höchste Ordnung der tatsächlich abgestrahlten Kugelwellen ist. Im Folgenden wird diese Forderung durch die Wahl von $N = n_{Streu} + 3$ sogar übertroffen. Bild 3.6 zeigt die Abtastpunkte auf der Kugeloberfläche für den Fall, dass Kugelwellen bis zur Ordnung $n_{Streu} = 3$ Berücksichtigung finden. Als Maß für die Übereinstimmung der beiden

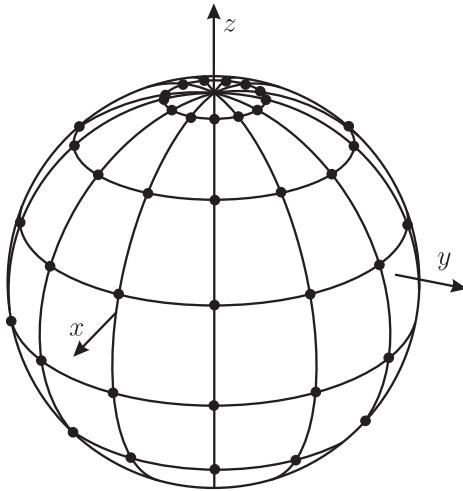


Bild 3.6: Abtastpunkte zur Bestimmung der Güte der Multipol-Approximation für den Fall $N = 6 = n_{Streu} + 3$.

Feldverteilungen an jedem Punkt i wird mit

$$\delta_i = \left| \frac{\mathbf{E}_{Streu,i} - \mathbf{E}_{Ref,i}}{\mathbf{E}_{Ref,i}} \right| \cdot \left| \frac{\mathbf{E}_{Ref,i}}{\mathbf{E}_{Ref,max}} \right| \quad (3.24)$$

ein relativer Fehler definiert, der Betrags- als auch Phaseninformationen vergleicht. Die abschließende Skalierung auf den größten Wert aller Punkte ($|\mathbf{E}_{Ref,max}|$) berücksichtigt eine unterschiedlich große Relevanz. Auf diese Weise fallen Fehler bei hohen Feldstärken stärker ins Gewicht als solche bei niedrigen. Bild 3.7 zeigt die benötigte Ordnung n_{Streu} , die für 99% aller Punkte einen relativen Fehler δ sicherstellt, der unter einer definierten Obergrenze liegt. Der Abstand r der Punkte vom Helixmittelpunkt ist hierbei normiert auf den minimalen Abstand r_{min} , für den das Multipol-Helixmodell noch Gültigkeit besitzt. Allen Kurven gemein ist das starke Ansteigen der Ordnung bei kleiner werdenden Abständen – ein Umstand, der der Singularität des Feldes jedes Elementardipols geschuldet ist. Weit ab von der Helix reduziert sich das Streuverhalten auf das eines Dipols. Die Daten aus Bild 3.7 beziehen sich auf eine Frequenz von $f = 4,96$ GHz - der Resonanzfrequenz der ideal leitenden Helix. Das Verhalten ändert sich aber kaum in einem weiten Bereich um die erste Resonanz, was letztlich an der sich nicht ändernden Verteilung des Stromes längs des Drahtes liegt. Obige Untersuchung wurde zunächst mit einer quadratischen T-Matrix durchgeführt, d.h. es fanden jeweils gleich viele anregende wie gestreute Kugelwellen Berücksichtigung. Eine Erhöhung der anregenden Moden unter Beibehaltung des Parameters n_{Streu} verändert die Streufelder nicht oder nur sehr geringfügig. Der Einfachheit halber wird daher für den Rest der Arbeit immer eine quadratische T-Matrix angesetzt.

Die gleiche Untersuchung wie in vorherigem Abschnitt wird nun für Helices unterschiedlicher Windungszahlen unternommen. Die genauen Geometriedaten sind in Tabelle 3.1

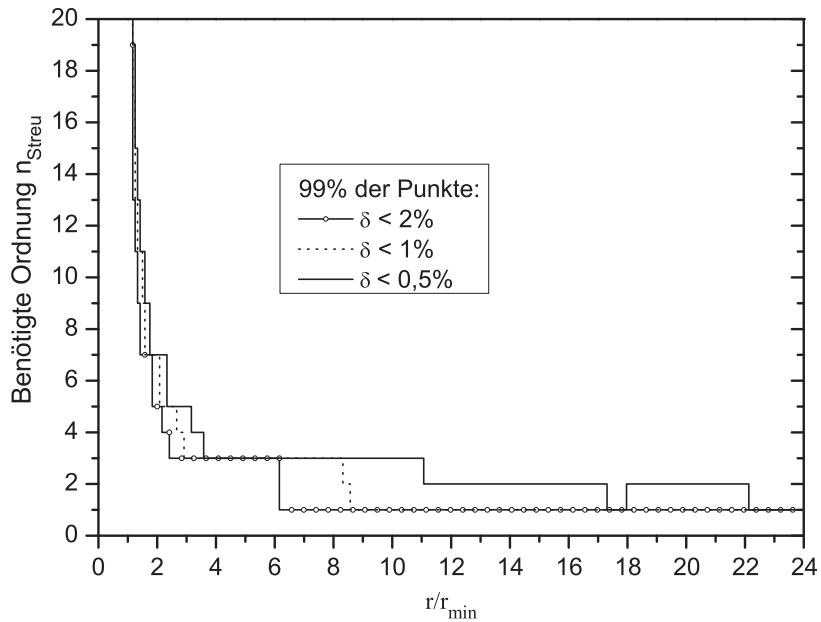


Bild 3.7: Benötigte Ordnung der Multipole zur Erfüllung der verschiedenen Fehlerklassen.

Typ	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii
Windungen w	5	4	3	2	5	3	5	3
Radius r_0 in mm	0,8525	1,06	1,41	2,10	0,85	1,41	0,85	1,41
Steigung p in mm	0,35	0,53	0,94	2,10	0,23	0,63	0,49	1,34
r_{min} in mm	1,22	1,50	1,99	2,97	1,03	1,70	1,49	2,46
Drahtlänge in mm	26,84	26,72	26,73	26,72	26,73	26,64	26,82	26,88
$2r_0/(wp)$	0,97	1,00	1,00	1,00	1,48	1,49	0,69	0,70

Tabelle 3.1: Parameter der untersuchten Helices (Drahtradius $a = 0,05$ mm).

gegeben. Alle Helices sind so dimensioniert, dass sie in etwa die gleiche Drahtlänge, folglich auch vergleichbare Resonanzfrequenzen besitzen. Bild 3.8 zeigt die Ergebnisse für die Helixtypen i-iv. Zur besseren Übersicht wurde dabei eine leicht andere Klassifizierung der Fehler gewählt. Zudem repräsentieren nicht ganzzahlige Ordnungen $n_{Streu} + 1/2$ die Berücksichtigung aller Multipolmomente mit $n = n_{Streu}$ und der elektrischen Multipolmomente $(n_{Streu} + 1)$ -ter Ordnung. Auffallend ist, dass für Bereiche nah an der Helix ($r < 4r_{min}$) meist das elektrische Dipolmoment zur Verbesserung der Multipol-Approximation beiträgt; nur vereinzelt wird sie durch magnetische Momente verbessert. Bei größeren Entfernung sind elektrisches und magnetisches Dipolmoment gemeinsam verantwortlich für das Streufeld. Dies ist einsichtig, da die hervorgerufenen Dipolmomente eines chiralen Streu-

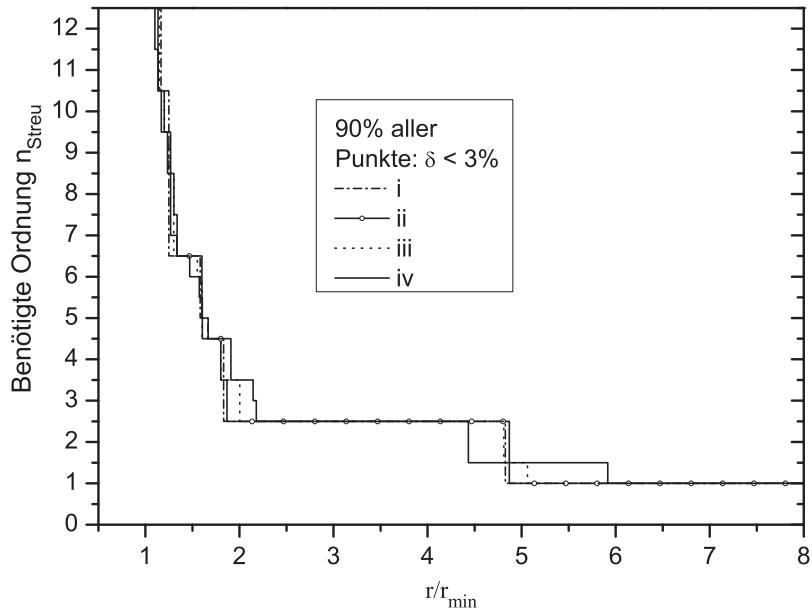


Bild 3.8: Benötigte Ordnung der Multipole für verschiedene Helixtypen aus Tabelle 3.1.

körpers über die Dipolpolarisierbarkeiten $\underline{\alpha}_{me}$ und $\underline{\alpha}_{em}$, für die spezielle Zusammenhänge gelten [72], miteinander verknüpft sind. An dieser Stelle erweist sich die Skalierung auf den minimalen Radius r_{min} als vorteilhaft, da das Streuverhalten der Helices vom Typ i bis iv große Ähnlichkeit besitzt. Obwohl diese Helices unterschiedliche Geometrien besitzen, gibt es einen Parameter, den alle Helices teilen: Den Quotienten aus Durchmesser und Höhe ($2r_0/(wp)$). Bild 3.9 zeigt die Ergebnisse für die Helices vom Typ v bis viii, die zwar andere, aber jeweils paarweise vergleichbare Verhältnisse von Durchmesser zur Höhe aufweisen. Die erhaltenen Kurven untermauern, dass das Multipol-Streuverhalten einer einzelnen Helix wesentlich von dem Parameter r_{min} und dem Quotienten aus Durchmesser und Höhe bestimmt wird. Die Frequenz hat in einem weitem Bereich um die erste Resonanz nur sehr wenig Einfluss. Zudem lässt sich sagen, dass die durch die Abbildungen 3.7-3.9 vorgestellten Untersuchungen unabhängig von den Drahtverlusten sind. Diese Tatsache lässt sich damit erklären, dass der Strom sich entlang des Drahtes, wie in Bild 3.5 für eine ideal leitende Helix illustriert, bei Einbeziehung endlicher Leitfähigkeit nur in der maximalen Amplitude verändert, nicht aber in der Form.

3.4.2 Interaktion zweier Helices

Bei der Modellierung der gegenseitigen Kopplungen zweier Helices interessiert vor allem, dass das Streufeld einer Helix auf der Oberfläche der jeweils anderen korrekt vorliegt.

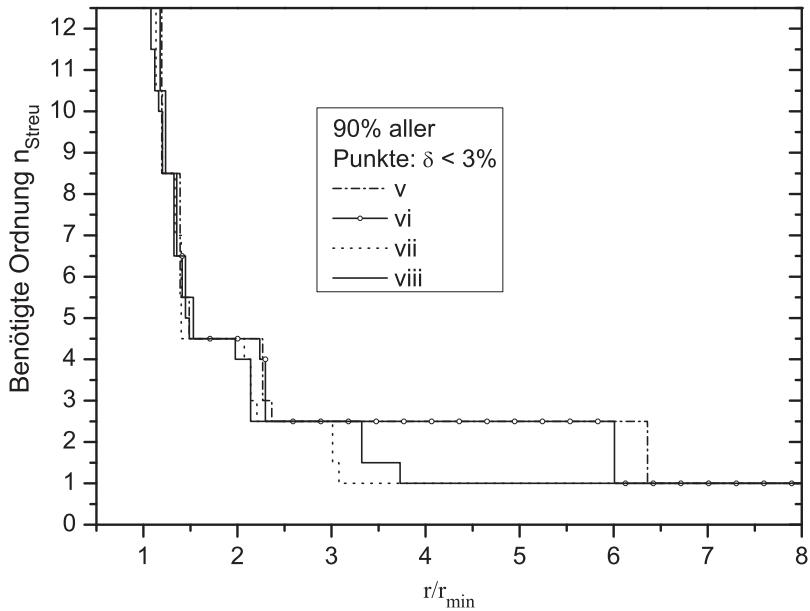


Bild 3.9: Benötigte Ordnung der Multipole für Helices unterschiedlicher Verhältnisse von Durchmesser zur Höhe (siehe Tabelle 3.1).

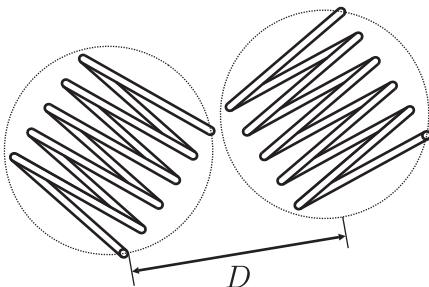


Bild 3.10: Zufällige Position der Helices.

Gemäß den Ausführungen des vorigen Abschnitts ist im Rahmen eines gewissen Fehlers prinzipiell festgelegt, bis zu welcher Ordnung Multipole zur Beschreibung herangezogen werden müssen. Die Form des aufgewickelten Drahtes bedingt, dass mit verschiedenen Abständen zum Zentrum einer Helix abgetastet wird. Daher sind die Verhältnisse bei der Interaktion zweier Helices etwas komplexer, zumal sich eventuelle Fehler abhängig vom betrachteten Drahtabschnitt unterschiedlich stark bemerkbar machen können. Im Folgenden sollen einige wichtige Aspekte daher ausschließlich an einer einzigen Helixsorte aufgezeigt werden.

Zwei Helices vom Typ i aus Tabelle 3.1 sind wie in Bild 3.10 angeordnet. Die Position und die Orientierung der beiden Helices sind beliebig gewählt. Hierbei wird die Distanz zwischen den Helixmittelpunkten zunächst fest auf den Wert $D = 2r_{\min} + 3a$ eingestellt, so dass zwischen den Drähten in jedem Fall ein Mindestabstand von einem Drahtradius

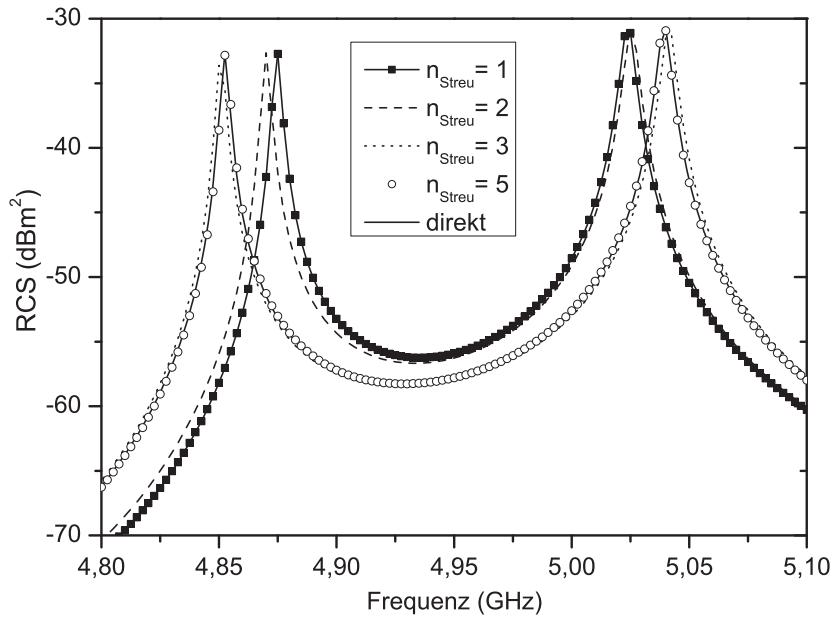


Bild 3.11: Berechneter Rückstreuquerschnitt einer zufälligen Anordnung gemäß Bild 3.10.

a sichergestellt ist. Ein elektrischer Kontakt ist somit nicht möglich. Die Anordnung ist zudem am globalen Ursprung zentriert, der hier nicht explizit eingezeichnet ist. Bild 3.11 zeigt den aus der Lösung des Gleichungssystems (2.37) erhaltenen Rückstreuquerschnitt einer typischen Anordnung. Zum Vergleich wird zusätzlich das Resultat aus einer konsistenten Erweiterung des in Kapitel 3.2 bzw. in [57] aufgezeigten Verfahrens für zwei Helices aufgeführt. In Bild 3.11 ist letzterer Ansatz durch den Ausdruck „direkt“ gekennzeichnet. Die Helices sind wieder ideal leitend gewählt. Auffallend ist, dass die Helices so stark miteinander verkoppelt sind, dass sich die Resonanz aufspaltet. Wie erwartet verbessert sich die Übereinstimmung, wenn die Ordnung der beteiligten Multipole erhöht wird. Hier ist sogar schon eine gute Approximation für $n_{Streu} = 3$ und eine sehr gute für $n_{Streu} = 5$ zu erkennen. Der Fall $n_{Streu} = 1$ zeigt deutlich, dass die Fehler frequenzabhängig sind, was das Treffen einer allgemeinen Aussage wie im vorigen Abschnitt erschwert. Eine Möglichkeit, die benötigte Multipolordnung trotzdem zu klassifizieren, wird nachfolgend vorgestellt. Insgesamt werden 500 verschiedene und zufällig gewählte Anordnungen wie in Bild 3.10 berechnet. Die Lage der unteren und oberen Resonanzen wird abhängig von n_{Streu} statistisch ausgewertet, indem die Methode der gewichteten Residuen erneut als Referenz gewählt wird. Die Genauigkeit der Bestimmung der Resonanzfrequenz ist auf den kleinsten Frequenzschritt beschränkt. Hier ist er zu $\Delta f = 2,5 \text{ MHz}$ gewählt. Die Häufigkeiten der berechneten Resonanzdifferenzen von oberer und unterer Resonanzfrequenz, ausgedrückt als Vielfaches des Inkrement Δf , sind in Bild 3.12 illustriert. Das Einbeziehen der Qua-

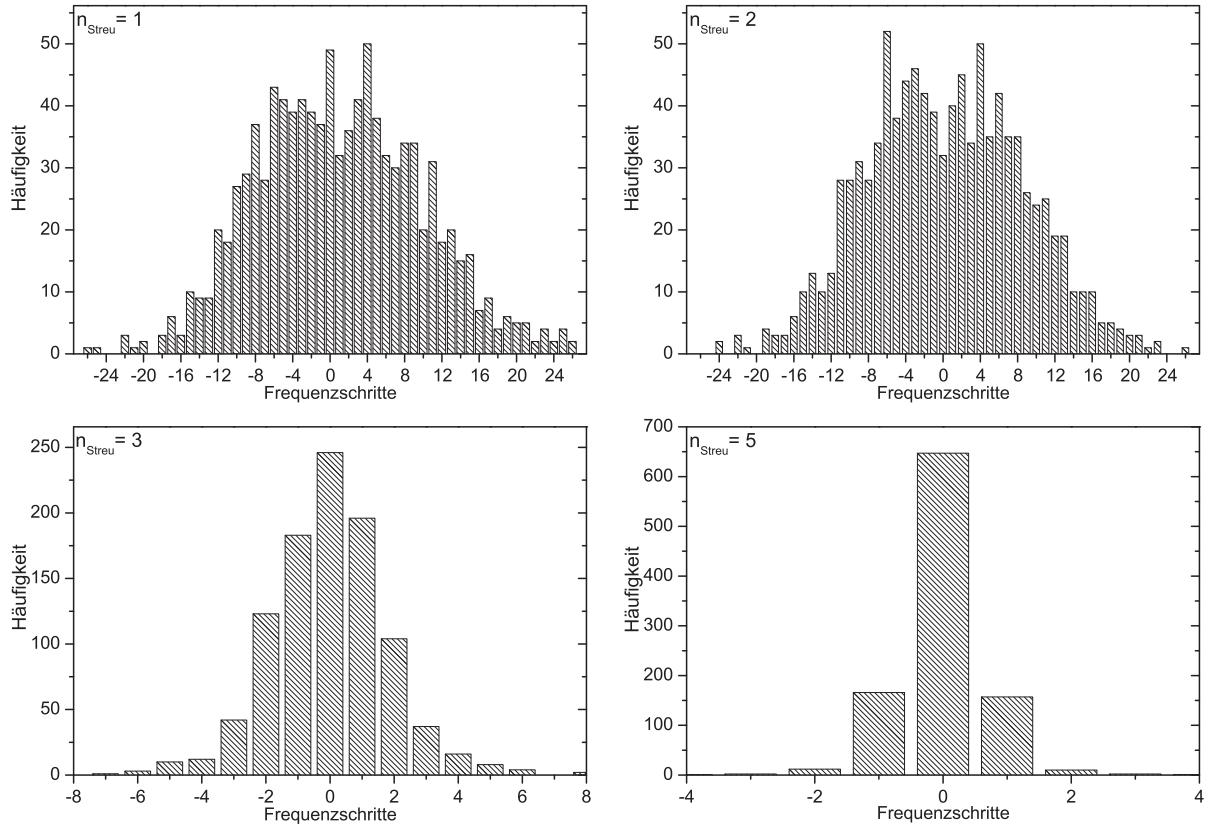


Bild 3.12: Abweichungen der Resonanzfrequenzen von der Referenz in Abhängigkeit von der Ordnung der höchsten Multipole.

drupolmomente ($n = 2$) bewirkt wie zuvor bei den Untersuchungen zu einzelnen Helices und in Bild 3.11 keine nennenswerte Verbesserung der Multipoldarstellung. Gleiches gilt für Multipolmomente vierter Ordnung ($n = 4$), weshalb sie hier nicht aufgeführt sind. Wichtiger erweisen sich die ungeraden Ordnungen. Für $n_{Streu} = 5$ sind nur noch kleine Abweichungen in der Größe von einem bis drei Frequenzschritten vorhanden. Bezogen auf $f = 4,96$ GHz, der Resonanzfrequenz einer isolierten Helix, würde eine Abweichung von einem Frequenzinkrement einen relativen Fehler von ca. 0,05 % bedeuten.

Obige Untersuchung wird nun getrennt nach elektrischen und magnetischen Multipolen durchgeführt. Zur besseren Übersicht und Vergleichbarkeit ist in Bild 3.13 jedoch lediglich die absolute Häufigkeit von Abweichungen bis zu maximal einem Frequenzschritt dargestellt. Wie im vorigen Abschnitt ist auch hier eine Auftragung nicht ganzzahliger Ordnungen gewählt. Damit ist z.B. $n_{Streu} = 1,5$ gleichbedeutend mit der Berücksichtigung von elektrischen und magnetischen Dipol- und den elektrischen Quadrupolmomenten. Zudem sind neben dem Verlauf für $D = 2r_{min} + 3$ auch die Ergebnisse für weiter entfernt vonein-

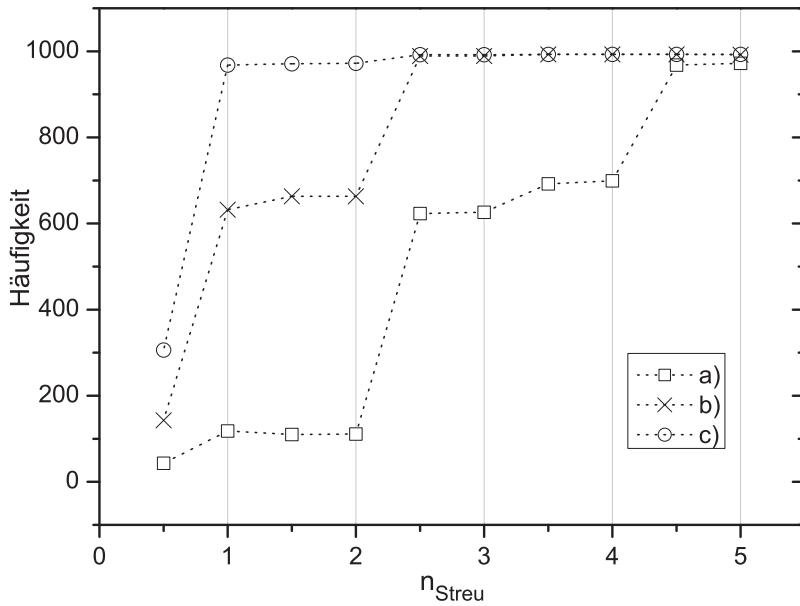


Bild 3.13: Helixtyp i: Häufigkeit der Abweichungen von maximal einem Frequenzschritt für a) $D = 2r_{min} + 3a$, b) $D = 3r_{min}$ und c) $D = 4r_{min}$.

ander platzierte Helices ($D = 3r_{min}$ und $D = 4r_{min}$) dargestellt. Aus Bild 3.13 lassen sich im Wesentlichen drei Punkte ablesen:

- Vergrößert man den Abstand der Helices zueinander, sinkt die Ordnung der erforderlichen Multipolmomente sehr schnell, wie aus den vorigen Ergebnissen erwartet werden kann.
- Die Bedeutung des magnetischen Dipolmomentes wurde schon bei den Untersuchungen einer einzelnen Helix aus dem vorigen Abschnitt erwähnt. Dass der kreisförmige Strom auf der Helix inhärent zu einem starken Dipolmoment führt, ist besonders im Fall c) unverkennbar. Davon abgesehen haben höhere magnetische Momente wie im Fall einer einzelnen Helix nur sehr wenig Einfluss auf die Lösung.
- Insbesondere in den Fällen a) und b) wird deutlich, dass hier ungerade Ordnungen elektrischer und magnetischer Momente eine stärkere Rolle bei der Verbesserung der Approximation besitzen als gerade Ordnungen. Um auszuschließen, dass sich in diesem Verhalten die ungerade Windungszahl der Helix widerspiegelt, wurde obige Untersuchung auch für eine Helix vom Typ ii aus Tabelle 3.1, folglich eine Helix mit vier Windungen, durchgeführt. Die entsprechenden Ergebnisse finden sich im Anhang E. Prinzipiell sind die erhaltenen Kurven ähnlich, allerdings ist die in Bild 3.13 im Fall a) erkennbare leichte Verbesserung der Approximation für das elek-

trische Multipolmoment vierter Ordnung bei Typ ii stärker ausgeprägt. Gemein ist beiden Untersuchungen jedoch die geringe Signifikanz der Momente zweiter Ordnung – ein Umstand, der für eine Helix stark abweichender Abmessungen ebenso in [46] festgestellt wurde.

Zieht man in Betracht, dass im Fall a), einem Fall sehr dicht benachbarter Helices, eine gute Übereinstimmung schon für $n_{Streu} = 5$ zu beobachten ist, wird deutlich, dass die Interaktion im Prinzip eine Art Mittelungsprozess ist: Die Fehler des gestreuten Feldes einer Helix auf der Oberfläche der anderen machen sich wegen der Überlagerung mit möglicherweise andersphasigen Fehlern an anderen Stellen der Oberfläche nicht stark bemerkbar. Das Verhalten einer Einzelhelix für $r \rightarrow r_{min}$ aus den Bildern 3.7 bis 3.9 ist demnach nur bedingt geeignet zur Bewertung der für die zur Beschreibung der Interaktion nötigen Ordnung n_{Streu} . Eine tiefer gehende Quantifizierung des erwähnten Mittelungsprozesses ist an dieser Stelle nur wenig erkenntnisfördernd. Da zudem die folgenden Kapitel weiteren Einblick bieten, wird dieser Aspekt hier nicht näher beleuchtet.

4 Modell einer periodischen Schicht

Ein wesentlicher Eckpfeiler für die angestrebten Untersuchungen, d.h. für die Berechnung unendlich ausgedehnter Schichten, ist die Implementierung periodischer Randbedingungen. Zunächst wird daher vorgestellt, wie Periodizität im Streuansatz Berücksichtigung finden kann. Die Extraktion von Reflektions- und Transmissionsparametern sowie die Be- trachtung eines metallischen Schirms hinter einer Schichtanordnung bilden weitere Schwer- punkte dieses Kapitels. Ein Vergleich mit Ergebnissen, die mit Hilfe eines kommerziellen Programmpaketes erzielt werden, gibt schließlich Aufschluss über Genauigkeit und Kon- sistenz der Lösung, nicht nur was die numerische Implementierung betrifft, sondern auch in Hinblick auf die verwendete Näherung für dünne Drähte aus dem vorigen Kapitel.

4.1 Randbedingungen im Streuansatz

Bild 4.1 veranschaulicht den in dieser Arbeit betrachteten Fall. Für die untersuchten Schichten werden die Streukörper zunächst innerhalb einer am Ursprung zentrierten quaderförmigen Einheitszelle (grau dargestellt) angeordnet. Die Schicht ergibt sich anschlie- ßend durch periodisches Platzieren dieser Einheitszelle in x - und y - Richtung. Die Mittel- punkte aller Zellen lassen sich demnach durch

$$\{\underline{\mathbf{r}}_{p,q} = b(p\underline{\mathbf{e}}_x + q\underline{\mathbf{e}}_y) | p, q \in \mathbb{Z}\} \quad (4.1)$$

beschreiben. Bei Einfall einer homogenen ebenen Welle mit Wellenvektor

$$\underline{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ergibt sich nach dem Theorem von Floquet [73] für die hervorgerufenen Stromverteilungen jeder Einheitszelle $\underline{\mathbf{J}}_{p,q}$:

$$\underline{\mathbf{J}}_{p,q} = \underline{\mathbf{J}}_{0,0} \cdot e^{-jk_x pb} e^{-jk_y qb} = \underline{\mathbf{J}}_{0,0} \cdot e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}}. \quad (4.3)$$

Die Streukoeffizienten der Einschlüsse aus Zelle (p,q) sind damit aus denen der Einheits- zelle am globalen Ursprung, versehen mit dem Phasenfaktor $e^{-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}}$, berechenbar. Für

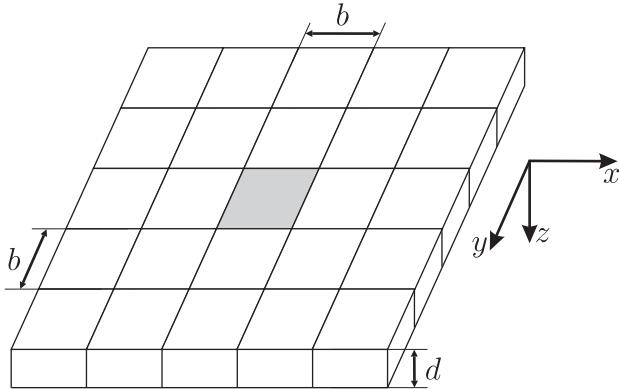


Bild 4.1: Zweidimensionale periodische Wiederholung der quaderförmigen Einheitszelle der Grundfläche b^2 und Höhe d .

den Fall, dass jeder Zelle insgesamt N_c Partikel zugeordnet sind, bestimmt sich der Vektor $\underline{\mathbf{b}}_i$ jedes Partikels i in Analogie zu Gleichung (2.37) aus dem linearen Gleichungssystem

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{T}}_i \cdot \left(\underline{\mathbf{d}}_i + \underline{\mathbf{X}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_c} \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j \right). \quad (4.4)$$

Mit dem Vektor $\underline{\mathbf{X}}_i$ werden die Felder aller Partikel, die außerhalb der ursprünglichen Zelle platziert sind, erfasst. Er berechnet sich zu:

$$\underline{\mathbf{X}}_i = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{p,q} \left(e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{p,q} - \underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j \right) \quad (4.5)$$

mit

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{für } p = q = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.6)$$

Nachteilig ist, dass der umklammerte Ausdruck in Gleichung (4.5) für jede Kombination der Variablen p und q ausgewertet werden muss. Zudem erfordert eine Änderung der Zellgeometrie, der Einfallsrichtung oder der Positionen der Partikel eine Neuberechnung der Mehrfachsumme. Mit Hilfe der Additionstheoreme aus der Gleichung (2.36) gelingt eine Vereinfachung bzw. Auftrennung von (4.5). Es ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{X}}_i = \underline{\boldsymbol{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{p,q} e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\boldsymbol{\alpha}}(-\underline{\mathbf{r}}_{p,q}) \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\boldsymbol{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j. \quad (4.7)$$

Die Interaktionen werden also nicht direkt über alle $\underline{\boldsymbol{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{p,q} - \underline{\mathbf{r}}_j)$ berechnet, sondern als Hintereinanderausführung von Kugelwellenentwicklungen. Für die Partikel einer Zelle bedeutet dies zunächst die Entwicklung der gestreuten Felder in Wanderwellen bezüglich des Ursprungs $\underline{\mathbf{r}}_{p,q}$ über die Matrix $\underline{\boldsymbol{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}_j)$. Anschließend erfolgt die Interpretation der Wanderwellen in einfallende Wellen bezüglich des globalen Ursprungs $(\underline{\boldsymbol{\alpha}}(-\underline{\mathbf{r}}_{p,q}))$, gefolgt

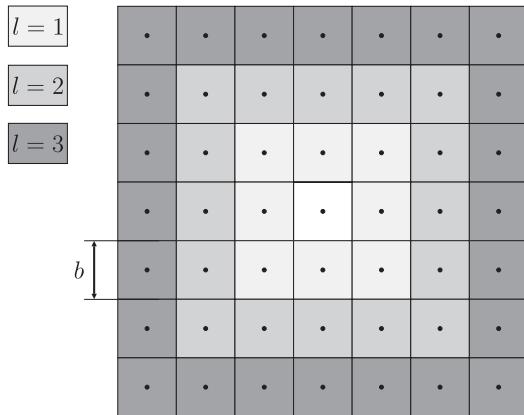


Bild 4.2: Darstellung der rechteckförmigen Erweiterung der betrachteten Zellen.

von einer weiteren Translation des Bezugsursprungs auf denjenigen des Streukörpers i ($\underline{\underline{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i)$). Damit ist lediglich die in Klammern eingefasste Doppelsumme von den Parametern der Zelle und der einfallenden Welle anhängig.

Aus anschaulichen Gründen kann die Summation in Gleichung (4.7) nicht für unendlich große p und q durchgeführt werden. Im Folgenden wird daher das Konvergenzverhalten des Ausdrucks

$$\underline{\mathbf{X}}_i(l) = \underline{\underline{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \left(\sum_{p=-l}^l \sum_{q=-l}^l \delta_{p,q} e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\underline{\alpha}}(-\underline{\mathbf{r}}_{p,q}) \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\underline{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j \quad (4.8)$$

untersucht. Bild 4.2 zeigt die Anordnung der berücksichtigten Nachbarzellen, wenn der Parameter l schrittweise erhöht wird. Als einfacher Testfall werden an den Zellmittelpunkten zentrierte Dipole ($N_c = 1$) als Quellen betrachtet. Die sechs zur Beschreibung der Dipolfelder nötigen Streukoeffizienten im Vektor $\underline{\mathbf{b}}_1$ werden beispielhaft jeweils zu 1 V/m angesetzt. Ferner gilt $f = 4 \text{ GHz}$ und $b = 6 \text{ mm}$. Bild 4.3 zeigt den Beitrag von $\underline{\mathbf{X}}_i(l)$ zur Stärke des elektrischen Feldes am globalen Ursprung für verschiedene Winkel α mit $k_x = |\mathbf{k}| \sin(\alpha)$ und $k_y = 0$. Die Ordinate ist zudem auf den Mittelwert des Ergebnisses für $\alpha = 0^\circ$ im Intervall $[lb/\lambda = 80 \dots lb/\lambda = 100]$ normiert. Die Kurven zeigen eine regelmäßige, wenngleich auch sehr langsame Konvergenz. Dabei nimmt die Konvergenzgeschwindigkeit für steigende Winkel α ab. Für den Fall $\alpha = 0^\circ$, was einer senkrecht auf die Schicht einfallenden Welle entspricht, kann die Konvergenz, wie in [74] gezeigt, mit Hilfe eines Extrapolationsverfahrens [75] effektiv beschleunigt werden. Für den generellen Fall ist dieses Verfahren jedoch nicht bzw. nur unter Inkaufnahme von extrem langen Rechenzeiten und Verlust an Genauigkeit anwendbar.

Viele der in der Literatur beschriebenen Lösungsmöglichkeiten (siehe z.B. [76–78]) zielen auf die Abbildung der Summation, also des im Ortsbereich langen „Signals“, in den entsprechenden spektralen Raum, den $\underline{\mathbf{k}}$ -Raum, ab. Dort kann die Summation aufgrund

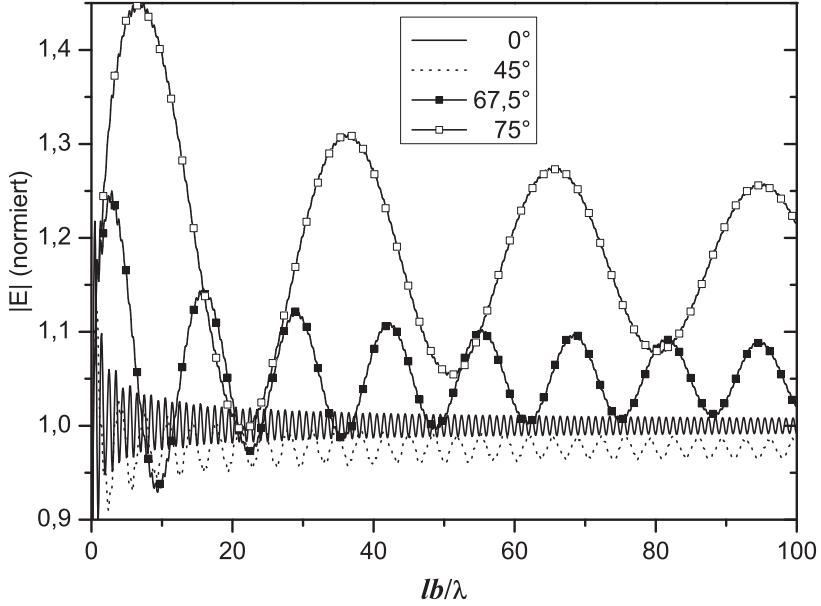


Bild 4.3: Konvergenzverhalten des elektrischen Feldes am globalen Ursprung in Abhängigkeit von der wachsenden Anzahl der berücksichtigten Nachbarzellen.

des schmalen Spektrums wesentlich effizienter durchgeführt werden. Solch ein Ansatz soll auch in dieser Arbeit verfolgt werden. Für die Lösung des durch Gleichung (4.7) definierten Problems, folglich die Ermittlung der Summe

$$\underline{\underline{\mathcal{S}}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{p,q} e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\underline{\alpha}}(-\underline{\mathbf{r}}_{p,q}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{p,q} e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_{p,q}), \quad (4.9)$$

ist die Betrachtung der ortsabhängigen Terme im Translationstheorem (siehe Anhang C) hilfreich. Prinzipiell reduziert sich die nur langsam konvergierende Bestimmung der Elemente von $\underline{\underline{\mathcal{S}}}$ auf Summen skalarer sphärischer Wellenfunktionen:

$$S_{\nu,\mu} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{p,q} e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} h_{\nu}^{(2)}(|\mathbf{k}| r_{p,q}) P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta_{p,q}) e^{-jm\phi_{p,q}}. \quad (4.10)$$

In obiger Formel stehen $r_{p,q}$, $\theta_{p,q}$ und $\phi_{p,q}$ für die Kugelkoordinaten des Vektors $\underline{\mathbf{r}}_{p,q}$. Die in dieser Arbeit gewählte Methode zur Auswertung der Terme aus Gleichung (4.10) ist hinlänglich in [79] ausgeführt. Die Methode nutzt, wie oben bereits angedeutet, die Fouriertransformation jeder sphärischen [80] Funktion, um schließlich schnell konvergierende Integrale zu erhalten. Wie später noch erläutert wird, ist die damit erzielbare Genauigkeit mehr als ausreichend für die hier betrachteten Fälle.

In der Formulierung der Interaktionen der periodischen Schicht ist bislang ein entscheidender Aspekt der Gültigkeit der Translationstheoreme vernachlässigt worden. Dieser wird im

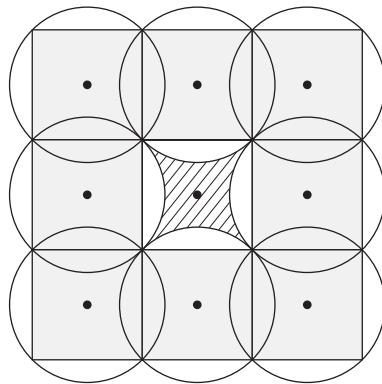


Bild 4.4: Schraffiert: Gesicherter Gültigkeitsbereich der Translationstheoreme nach Gleichung (4.7).

Folgenden aufgezeigt. Bild 4.4 illustriert die simulierte Einheitszelle am Ursprung und die acht nächsten Nachbarzellen. Für den Fall, dass mindestens ein Partikel an einer Ecke der Einheitszelle platziert ist, sind die Grenzen der Gültigkeit der Translationen mit $\underline{\beta}(-\underline{\mathbf{r}}_j)$ durch Kreise angedeutet. Die Schnittmenge aller gültigen Gebiete ergibt schließlich den schraffiert dargestellten Bereich der Einheitszelle, der nicht die gesamte Einheitszelle abdeckt. Somit ist die Wahl der Partikelpositionen eingeschränkt. Gemäß der Diskussion in Kapitel 2.3 bedarf es zur korrekten Darstellung der gestreuten Felder der Partikel aus Nachbarzellen nah den Rändern des schraffierten Gebietes Kugelwellen sehr hoher Ordnung n . Auswirkungen und Fehleranalysen für derartige Translationen finden sich z.B. in [53, 81, 82]. Für eine korrekte und numerisch unproblematische Behandlung der gegenseitigen Interaktionen wird daher eine „Pufferzone“ eingeführt (siehe auch [83]). Die Interaktionen der Partikel aus den acht direkt an die simulierte Zelle angrenzenden Zellen werden wie in Gleichung (4.5) berechnet, weiter entfernt liegende über den Umweg der jeweiligen Zellmittelpunkte. Um weiterhin das oben beschriebene Verfahren zur Auswertung der Summe $\underline{\mathcal{S}}$ nutzen zu können, lässt sich Gleichung (4.7) folgendermaßen modifizieren:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{X}}_i &= \underline{\beta}(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \left(\underline{\mathcal{S}} - \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=-1}^1 \delta_{p,q} e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_{p,q}) \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\beta}(-\underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j \\ &+ \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=-1}^1 \delta_{p,q} \left(e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{p,q} - \underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\mathbf{b}}_j \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Metallischer Schirm

In der Hochfrequenztechnik werden funktionelle Schichten, wie beispielsweise im Fall eines Absorbers, häufig vor einem metallischen Schirm angeordnet. Diese Möglichkeit ist mit der bisher dargestellten Theorie unter Annahme eines in jeder Dimension unendlich

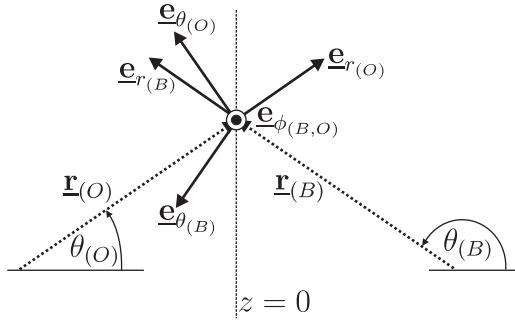


Bild 4.5: Metallischer Schirm in der Ebene $z = 0$ und Darstellung der sphärischen Einheitsvektoren der Felder des Original- und des Bild-Partikels.

ausgedehnten homogenen Matrixmaterials nicht darstellbar. Zur Vereinfachung wird nachfolgend ein ideal elektrisch leitender Schirm (engl.: *Perfect Electric Conductor (PEC)*) angenommen, der zwar eine Näherung darstellt aber das Verhalten eines technisch genutzten guten Leiters adäquat nachbildet. Im Rahmen der Bildtheorie [41] kann dieser Schirm entfernt werden. Zur Erfüllung der Randbedingungen sind dafür gespiegelte imaginäre Bilder jedes Partikels einzuführen. Prinzipiell verdoppelt sich folglich die Anzahl der Unbekannten, so dass der Speicherbedarf und die benötigte Rechenzeit ansteigen. Die hervorgerufenen Ströme auf jedem Partikel und dessen Bild ergeben sich gegenseitig aus der korrekten Spiegelung der zum Schirm senkrechten und parallelen Stromkomponenten. Aufgrund dieser Korrelation enthalten die Streukoeffizienten der Bildpartikel keine zusätzliche Information. Nachfolgend wird beschrieben, wie die gegenseitigen Kopplungen berücksichtigt werden können ohne die Anzahl der Unbekannten zu verdoppeln.

Der ideale metallische Schirm befindet sich wie in Bild 4.5 in der Ebene $z = 0$. Im Koordinatensystem des originalen (realen) Partikels ist $\underline{\mathbf{r}}_{(O)}$ ein beliebiger Punkt auf der Oberfläche des Leiters. Der gleiche Punkt wird im Koordinatensystem des Bildpunktes durch $\underline{\mathbf{r}}_{(B)}$ beschrieben. Für jede vom realen Partikel gestreute Kugelwelle muss die Randbedingung auf der Oberfläche des idealen Leiters (verschwindendes tangentiales elektrisches Feld) erfüllt sein. Die θ - und ϕ -Abhängigkeit der Felder $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(O)})$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(O)})$ bedingt, dass dafür die Addition jeweils einer vom Bild-Partikel abgestrahlten Kugelwelle $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(B)})$ bzw. $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(B)})$ genügt. Aus Bild 4.5 lässt sich ablesen, dass zur Auslöschung des elektrischen Feldes folgende Bedingungen für die einzelnen Komponenten erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{N}}_{n,m,r}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(O)}) + u_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m,r}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(B)}) &= 0, \\ \underline{\mathbf{N}}_{n,m,\theta}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(O)}) - u_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m,\theta}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(B)}) &= 0, \\ \underline{\mathbf{N}}_{n,m,\phi}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(O)}) + u_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m,\phi}^H(\underline{\mathbf{r}}_{(B)}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für die Felder $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ gilt eine entsprechende Beziehung, jedoch wird dafür der unbekannte Koeffizient $v_{n,m}$ angesetzt. Unabhängig davon, ob der reale Streukörper in der rechten ($z > 0$) oder linken ($z < 0$) Halbebene platziert ist, ergibt sich nachfolgender Zusammen-

hang für die Koordinaten:

$$\begin{aligned} r_{(B)} &= r_{(O)}, \\ \theta_{(B)} &= \pi - \theta_{(O)}, \\ \phi_{(B)} &= \phi_{(O)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ein Vergleich mit Gleichungen (2.10) und (2.11) offenbart, dass zur Lösung von (4.12) lediglich die zugeordneten Legendre-Polynome $P_n^m(\cos \theta)$ und deren Ableitung betrachtet werden müssen. Mit

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta), \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \end{aligned} \quad (4.14)$$

und den Zusammenhängen

$$P_n^m(-\cos \theta) = \begin{cases} -P_n^m(\cos \theta) & \text{für } n+m \text{ gerade} \\ P_n^m(\cos \theta) & \text{für } n+m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.15)$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(-\cos \theta) = \begin{cases} -\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) & \text{für } n+m \text{ ungerade} \\ \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) & \text{für } n+m \text{ gerade} \end{cases} \quad (4.16)$$

bestimmen sich die unbekannten Koeffizienten zu:

$$n+m \text{ gerade: } u_{n,m} = -1 \text{ und } v_{n,m} = 1, \quad (4.17)$$

$$n+m \text{ ungerade: } u_{n,m} = 1 \text{ und } v_{n,m} = -1. \quad (4.18)$$

Ordnet man nun $u_{n,m}$ und $v_{n,m}$ in der Diagonalmatrix $\underline{\underline{V}}$ an, ergibt sich für die insgesamt N_c in der simulierten Einheitszelle platzierten Partikel vor einem metallischen Schirm:

$$\underline{\underline{b}}_i = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_i \cdot \left(\underline{\underline{\mathbf{d}}}_i + \underline{\underline{\mathbf{X}}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_c} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j) \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}}_j + \sum_{j=1}^{N_c} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j^-) \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}}_j \right) \quad (4.19)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{X}}}_i &= \underline{\underline{\beta}}(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \left(\underline{\underline{\mathcal{S}}} - \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=-1}^1 \delta_{p,q} e^{j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_{p,q}) \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_c} \left(\underline{\underline{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}_j) + \underline{\underline{\beta}}(-\underline{\mathbf{r}}_j^-) \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}}_j \\ &+ \sum_{p=-1}^1 \sum_{q=-1}^1 \delta_{p,q} \left(e^{-j\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{p,q}} \sum_{j=1}^{N_c} \left(\underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{p,q} - \underline{\mathbf{r}}_j) + \underline{\underline{\alpha}}(\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{p,q} - \underline{\mathbf{r}}_j^-) \cdot \underline{\underline{\mathbf{V}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}}_j \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

In Gleichung (4.19) und (4.20) bezeichnet $\underline{\mathbf{r}}_j^-$ die Position des Bildes von Streukörper j .

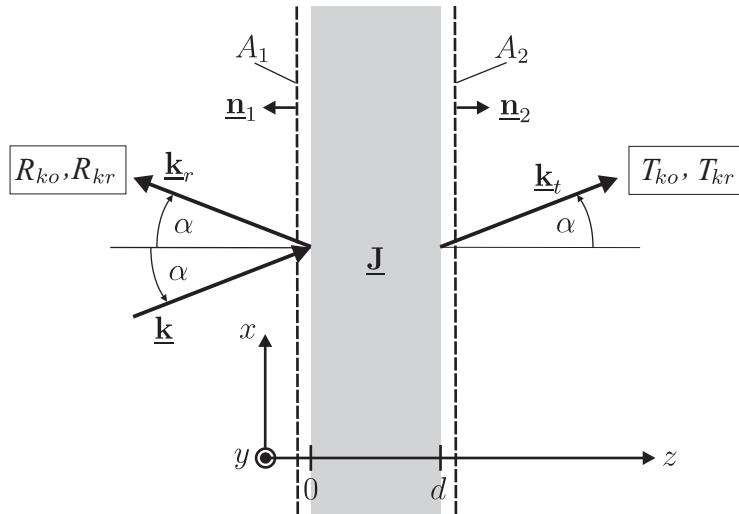


Bild 4.6: Position der unendlichen Schicht im Raum und Streuparameter zur Charakterisierung der reflektierten und transmittierten Welle.

4.3 Auswertung von Reflektion und Transmission

Um die aus der Hochfrequenztechnik bekannten und auf Wellengrößen basierenden Streuparameter zur Charakterisierung der Schichten heranziehen zu können, bedarf es einiger Vorüberlegungen. Eine homogene ebene Welle fällt, wie in Bild 4.6 mit dem Wellenvektor \underline{k} angedeutet, im Winkel α auf die Schicht ein. Die Überlagerung der hervorgerufenen Streufelder aller Partikel ergibt im Allgemeinen eine Kombination ausbreitungsfähiger homogener ebener Wellen und schnell abklingender evaneszenter Felder [2]. Erfüllt die transversale Dimension der Einheitszelle die Bedingung [84]

$$b < \frac{1}{1 + |\sin \alpha|} \lambda_0 \quad (4.21)$$

mit der Freiraumwellenlänge λ_0 , ergeben sich insgesamt zwei mögliche Ausbreitungsrichtungen – ebenfalls im Winkel α zur Schicht. Sie sind in Bild 4.6 mit den Wellenvektoren \underline{k}_r und \underline{k}_t angedeutet. Während die ko- und kreuzpolaren Reflektionsparameter R_{ko} bzw. R_{kr} sowie der kreuzpolare Transmissionsparameter T_{kr} direkt aus der entsprechenden Welle folgen, addiert sich für den kopolaren Transmissionsparameter T_{ko} das einfallende Feld.

Ist die Bedingung (4.21) nicht erfüllt, ergeben sich weitere homogene ebene Wanderwellen mit frequenzabhängigen Ausbreitungsrichtungen (engl.: *Grating Waves*). Eine Beschreibung über Streuparameter ist in diesem Fall weiterhin möglich. Da oben genannter Effekt in technischen Realisierungen meist unerwünscht ist, wird für den folgenden Teil vereinbart, dass die Ungleichung (4.21) erfüllt ist. Tatsächlich stellt diese Bedingung aufgrund der geometrisch kleinen Ausdehnung der Streukörper nur eine geringe Beschränkung dar.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie man die komplexen Amplituden der gestreuten homogenen ebenen Wellen aus den Anregungskoeffizienten der Kugelwellen berechnet.

Prinzipiell genügt dafür die Auswertung des gestreuten Feldes an zwei Punkten, einer jeweils vor und hinter der Schicht. Die Punkte müssen genügend weit von der Schicht entfernt sein, damit evaneszente Wellen das Ergebnis nicht beeinflussen. Ein relativ einfacher Weg, der ohne eine dafür notwendige Konvergenzbetrachtung und Formulierung über die Translationstheoreme auskommt, ergibt sich durch das Reziprozitätstheorem von Lorentz. Die gestreuten Felder und ihre Quellen sind mit einer beliebigen Feldverteilung (Index T), die die Maxwellschen Gleichungen erfüllt, über

$$\oint\oint (\underline{\mathbf{E}}_{Streu} \times \underline{\mathbf{H}}_T - \underline{\mathbf{E}}_T \times \underline{\mathbf{H}}_{Streu}) d\underline{\mathbf{A}} = \iiint_{V'} \underline{\mathbf{E}}_T(\underline{\mathbf{r}}') \cdot \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') dV' \quad (4.22)$$

verknüpft. Dabei erstreckt sich die Integration auf der linken Seite der Gleichung über eine Oberfläche, die alle Quellen der gestreuten Wellen umschließt. Dies ist die unendlich ausgedehnte Schicht mit Stromverteilungen $\underline{\mathbf{J}}_i(\underline{\mathbf{r}}')$ jedes Partikels i . Die Integration kann vereinfacht werden: Zunächst wird die unendlich große Fläche A in zur Schicht parallele Teilflächen A_1 und A_2 zerlegt. Dies stellt zwar keine geschlossene Fläche dar, im Unendlichen verschwinden jedoch die Beiträge der nicht berücksichtigten Teilflächen zum Integral. Die von der Schicht gestreuten Felder werden demnach wie folgt angesetzt:

$$\underline{\mathbf{E}}_{Streu}(\underline{\mathbf{r}}) = \begin{cases} E_{r,ko} \underline{\mathbf{e}}_{ko} e^{-j\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{r}}} + E_{r,kr} \underline{\mathbf{e}}_{kr} e^{-j\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{r}}} & \text{für } A_1, \\ E_{t,ko} \underline{\mathbf{e}}_{ko} e^{-j\underline{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}} + E_{t,kr} \underline{\mathbf{e}}_{kr} e^{-j\underline{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}} & \text{für } A_2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Dabei bezeichnen $\underline{\mathbf{e}}_{ko}$ und $\underline{\mathbf{e}}_{kr}$ die Einheitsvektoren der entsprechenden Polarisierung. Hier und im Folgenden sind die entsprechenden magnetischen Felder nicht explizit angegeben, sie folgen aus den Maxwell-Gleichungen. Wenn nun als „Testfelder“ ebenfalls ebene Wellen genutzt werden,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_T^{+,ko} &= E_{+,ko} e^{j\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{r}}} \underline{\mathbf{e}}_{ko}, \\ \underline{\mathbf{E}}_T^{+,kr} &= E_{+,kr} e^{j\underline{\mathbf{k}}_r \cdot \underline{\mathbf{r}}} \underline{\mathbf{e}}_{kr}, \\ \underline{\mathbf{E}}_T^{-,ko} &= E_{-,ko} e^{j\underline{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}} \underline{\mathbf{e}}_{ko}, \\ \underline{\mathbf{E}}_T^{-,kr} &= E_{-,kr} e^{j\underline{\mathbf{k}}_t \cdot \underline{\mathbf{r}}} \underline{\mathbf{e}}_{kr}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

muss die Integration nur für das Volumen und die entsprechenden Flächen einer Einheitszelle durchgeführt werden, da aufgrund der Periodizität bei der Integration jede Zelle den gleichen Beitrag leistet. Unabhängig von der Polarisierung und dem Abstand der Flächen A_1 und A_2 von der Schicht führt die Auswertung der Flächenintegrale zu nachfolgenden

Ausdrücken für die Streuparameter:

$$\begin{aligned}
 R_{ko} &= \frac{E_{r,ko}}{E_{Anr}} = -\eta \frac{\iiint_{V'_c} \underline{\mathbf{E}}_T^{+,ko} \cdot \underline{\mathbf{J}} dV'_c}{2b^2 E_{+,ko} E_{Anr} \cos \alpha}, \\
 R_{kr} &= \frac{E_{r,kr}}{E_{Anr}} = -\eta \frac{\iiint_{V'_c} \underline{\mathbf{E}}_T^{+,kr} \cdot \underline{\mathbf{J}} dV'_c}{2b^2 E_{+,kr} E_{Anr} \cos \alpha}, \\
 T_{ko} &= \frac{E_{t,ko} + E_{Anr}}{E_{Anr}} e^{-jkd/\cos \alpha} = \left(-\eta \frac{\iiint_{V'_c} \underline{\mathbf{E}}_T^{-,ko} \cdot \underline{\mathbf{J}} dV_c}{2b^2 E_{-,ko} E_{Anr} \cos \alpha} + 1 \right) e^{-jkd/\cos \alpha}, \\
 T_{kr} &= E_{t,kr}/E_{Anr} e^{-jkd/\cos \alpha} = -\eta \frac{\iiint_{V'_c} \underline{\mathbf{E}}_T^{-,kr} \cdot \underline{\mathbf{J}} dV_c}{2b^2 E_{-,kr} E_{Anr} \cos \alpha} e^{-jkd/\cos \alpha},
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

wobei jeweils eine „Testwelle“ aus Gleichung (4.24) gleicher Polarisation aber gegenläufiger Ausbreitungsrichtung für die Identifikation der komplexen Amplituden der gestreuten homogenen ebenen Wellen genügt. In obigen Formeln bezeichnet V_c das Volumen der Einheitszelle und η die Impedanz des freien Raumes. Die komplexe Amplitude des einfallen Feldes bei $z = 0$ ist durch E_{Anr} gegeben.

Die Ermittlung der Streuparameter erfordert noch die Lösung der oft *Reaktionen* genannten Volumenintegrale. Eine Aufspaltung nach den Strömen jedes Streukörpers und anschließende Taylorentwicklung analog zu den Gleichungen (2.14)-(2.17) führt zu:

$$\iiint_{V'_c} \underline{\mathbf{E}}_T \cdot \underline{\mathbf{J}} dV'_c = \sum_{i=1}^{N_c} j\omega \underline{\mathbf{E}}_T(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \underline{\mathbf{p}}_i^e - j\omega \underline{\mathbf{H}}_T(\underline{\mathbf{r}}_i) \cdot \underline{\mathbf{p}}_i^m + \frac{j\omega}{2} \nabla \underline{\mathbf{E}}_T(\underline{\mathbf{r}}_i) : \underline{\underline{\mathbf{q}}}^e_i + \dots, \tag{4.26}$$

wobei der Operator „ $:$ “ das doppelte innere Produkt (siehe z.B. [85]) kennzeichnet. Das elektrische Quadrupolmoment $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e$, welches bei der Multipolentwicklung des Vektorpotentials aus dem gleichen Term wie der magnetische Dipol erhalten wird, darf laut [86] bei der Ermittlung der makroskopischen Eigenschaften¹ bianisotroper Materialien – also jenen mit chiralen Einschlüssen und Vorzugsrichtung – für konsistente Ergebnisse nicht vernachlässigt werden. Erst bei völliger Regellosigkeit der Orientierungen mitteln sich die Wirkungen der elektrischen Quadrupolmomente heraus. Im Gegensatz zu den in [86] verwendeten Einschlüssen sind, gemäß den Ergebnissen aus Kapitel 3.4.1, die Dipolfelder der Helices im maßgeblichen Fernfeld dominant, so dass sich die Auswertung prinzipiell auf Terme mit Dipolmomenten reduzieren lässt. Der Vollständigkeit halber werden die elektrischen Quadrupolmomente dennoch zu Kontrollzwecken berücksichtigt. Sofern die Streukoeffizienten bekannt sind, können die Dipolmomente durch geeignete Inversion der Zusammenhänge aus Gleichung (2.24) bzw. (2.25) bestimmt werden. Ein entsprechendes Vorgehen für das elektrische Quadrupolmoment ist auf den ersten Blick nicht möglich,

¹Dies sind Reflektion und Transmission oder auch äquivalente Materialparameter.

da das entsprechende Gleichungssystem (2.28) unterbestimmt ist. Tatsächlich lassen sich zumindest die Nebendiagonalelemente zweifelsfrei aus den Gleichungen bestimmen. Ferner kann sehr leicht gezeigt werden, dass die genaue Kenntnis der Diagonalelemente (q_{xx}^e , q_{yy}^e und q_{zz}^e) für die Auswertung des letzten Terms in Gleichung (4.26) nicht nötig ist. Hier genügen Differenzen der Elemente, die in Gleichung (2.28) enthalten sind.

Die Herleitung der Streuparameter für den Fall eines metallischen Schirms (PEC) ist ähnlich, jedoch müssen die imaginären Bildpartikel in den Volumenintegralen Berücksichtigung finden. Befindet sich der metallische Spiegel bei $z = d$, ergibt sich nach Überlagerung des Bildes der einfallenden Welle:

$$R_{ko} = \frac{E_{r,ko} - E_{Anr} e^{-2jkd/\cos\alpha}}{E_{Anr}} = -\eta \frac{\iiint \underline{\mathbf{E}}_T^{+,ko} \cdot \underline{\mathbf{J}} dV'_c}{2b^2 E_{+,ko} E_{Anr} \cos\alpha} - e^{-2jkd/\cos\alpha}. \quad (4.27)$$

Abgesehen von der Einbeziehung der Bildpartikel findet sich der gleiche Ausdruck für den kreuzpolaren Reflektionsparameter wie in Gleichung (4.25).

4.4 Beispiel einer periodischen Schicht und Analyse der Genauigkeit

Zur Abschätzung der Gültigkeit des beschriebenen Verfahrens wird im Folgenden ein Vergleich mit einem unterschiedlichen numerischen Ansatz herangezogen. Dabei handelt es sich um die Methode der finiten Elemente (engl.: *Finite Element Method (FEM)*) [87]. Zu diesem Zweck wird das kommerzielle Simulationsprogramm *High Frequency Structure Simulator (HFSS)* [88] genutzt. Die FEM erfordert, dass neben dem Draht auch der umgebende Raum diskretisiert wird. Diese Tatsache führt im Zusammenspiel der zu berücksichtigenden Geometrie der Helix prinzipiell zu einer hohen Zahl an Unbekannten. Art und Aufbau der nachfolgend beschriebenen Anordnung wurden daher so gewählt, dass Rechenzeiten und benötigter Speicherbedarf im handhabbaren Rahmen bleiben.

Eine ideal leitende Helix, zunächst nicht zentriert in einer isotropen Kugel, befindet sich, wie in Bild 4.7 dargestellt, in einem Zweitor aufgebaut aus paarweise ideal elektrisch und magnetisch leitenden Wänden². Die entsprechenden Randbedingungen für das tangentiale elektrische und magnetische Feld sind eingezeichnet. Die elementare Feldverteilung ist transversal elektromagnetisch (TEM) mit konstanter Amplitude und Phase über dem Querschnitt. Der elektrische Feldvektor ist dabei parallel zur magnetischen Wand. Aus der Bildtheorie ergibt sich, dass mit dieser Konfiguration einer einzelnen Helix der senkrechte

²Diese Form der Anordnung wird in der englischsprachigen Literatur oft als *waveguide simulator* bezeichnet. Eine deutsche Übersetzung ist nicht verbreitet und wird daher hier nicht eingeführt.

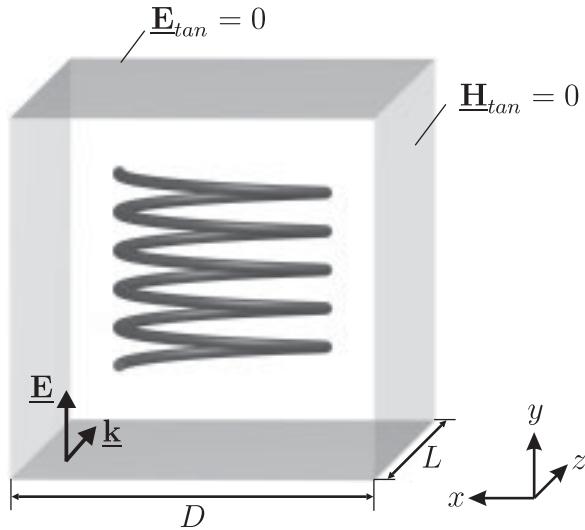


Bild 4.7: Position der Helix und verwendete Randbedingungen.

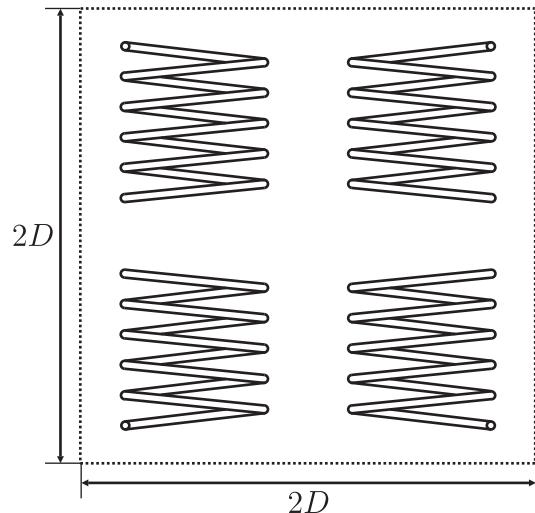


Bild 4.8: Äquivalente Anordnung einer Einheitszelle im Streuansatz.

Einfall einer homogenen ebenen Welle auf eine unendlich ausgedehnte Schicht von Helices berechnet werden kann. Dabei muss jedoch Berücksichtigung finden, dass sich die Helix und deren Bilder durch die ideal leitenden Wände spiegeln: Das Bild einer rechtsgedrehten Helix ist eine linksgedrehte und umgekehrt. Abhängig von der Spiegelebene ergeben sich zusätzlich zum originalen Partikel abweichende Orientierungen. Die Gesamtheit der originalen Helix und aller Spiegelbilder lässt sich durch die zweidimensionale periodische Fortsetzung der in Bild 4.8 skizzierten Anordnung wiedergeben. Sie bildet die im Streuansatz genutzte Einheitszelle und besteht aus insgesamt vier Helices unterschiedlicher Orientierungen und Windungsrichtungen. Dabei entspricht die Helix unten links der originalen Helix aus Bild 4.7.

Zur Erklärung und Interpretation der später vorgestellten Simulationsergebnisse werden im Folgenden zunächst einige Punkte diskutiert:

Durch die ideal leitfähigen Wände kann keine Energie transportiert werden. Solange der Raum dazwischen wie in diesem Fall keine verlustbehafteten Materialien aufweist, wird die einfallende Leistung vollständig in reflektierte und transmittierte Welle aufgeteilt, es gilt die Leistungsbilanz:

$$|R_{ko}|^2 + |R_{kr}|^2 + |T_{ko}|^2 + |T_{kr}|^2 = 1. \quad (4.28)$$

Gleichung 4.28 gilt nicht nur für diese spezielle Anordnung, sondern allgemein für jede durch eine Einheitszelle aufgespannte zweidimensionale periodische Anordnung verlustloser Materialien. So muss die Leistungsdichte genau wie die Felder periodisch sein, so dass

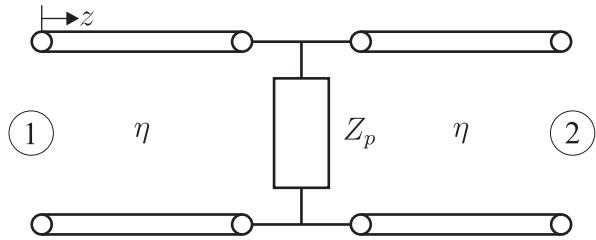


Bild 4.9: Äquivalentes Leitungseratzschaltbild der periodisch aufgebauten Schicht.

in die Einheitszelle eingebrachte Leistung an anderer Stelle wieder austritt. Die Überprüfung der Leistungsbilanz aus Gleichung (4.28) ist somit ein geeignetes Werkzeug zur Feststellung der Konsistenz der Ergebnisse.

Die Fernfelder jedes Streukörpers, die sich zu den reflektierten und transmittierten ebenen Wellen überlagern, sind hauptsächlich auf die nachfolgend betrachteten, angeregten Dipolmomente zurückzuführen. Durch die Spiegelungen zur Erfüllung der Randbedingungen heben sich die Effekte der elektrischen Dipolmomente in positiver und negativer z - und x -Richtung gegenseitig auf. Damit sind nur die elektrischen Dipolmomente in y -Richtung mitverantwortlich für die gestreuten Wellen. Ähnliches gilt auch für den magnetischen Dipol. Aufgrund der Dualität vertauschen x - und y -Komponenten aber ihre Rollen. Somit existieren keine kreuzpolarisierten Wellen – ein Fall, der auch bei *razemischen* Mischungen, d.h. bei gleicher Anzahl zufällig verteilter links- und rechtsgedrehter Helices in einem Material, vorkommt [89].

Wirksam ist folglich eine spezielle Kombination resonanter Dipole. Fasst man die Ausbreitung der ebenen Wellen im freien Raum als geführte Wellen auf einer Leitung mit dem Wellenwiderstand η auf, lässt sich die Helixschicht wie in Bild 4.9 als Störstelle in der Form einer parallelen Impedanz Z_p interpretieren [90, Kap. 4]. Sie repräsentiert einen Resonator gebildet aus der Gesamtheit der Helices. Im Resonator wird abhängig vom Aufbau, d.h. abhängig vom Parameter D , unterschiedlich viel elektrische bzw. magnetische Energie gespeichert. Es treten keine inneren Verluste auf, jedoch wird Leistung an die äußere Beschaltung (Wellenausbreitung in Luft) abgegeben. Der Resonator ist demzufolge mit einem unendlich großen Koppelfaktor überkritisch angekoppelt. In Resonanz wird daher die einfallende Leistung vollständig reflektiert [91, Kap. 4]. Auf ein Substrat aufgebrachte planare Strukturen vergleichbaren Verhaltens sind unter dem Namen *frequenzselektive Oberflächen* (engl. *Frequency Selective Surfaces (FSS)*) bekannt [2, 92].

Bild 4.10 zeigt den Betrag des erhaltenen Reflektionskoeffizienten für verschiedene Kantenlängen D . Die Berechnung erfolgt zunächst für $n_{Streu} = 1$. Wie erwartet tritt innerhalb der Resonanz der Schicht vollständige Reflektion auf. Für größere Zellen ist die Übereinstimmung der beiden Verfahren besser als für kleinere, was nach den Untersuchungen aus

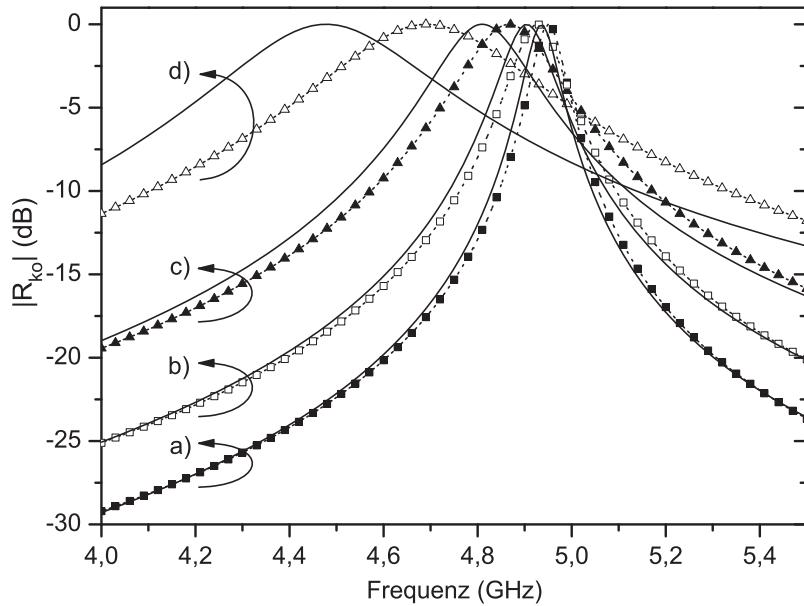


Bild 4.10: Berechnete Reflektion der Anordnung nach Bild 4.7 bzw. Bild 4.8. Durchgezogene Linien: Streuansatz, Punkte: HFSS. Dabei gilt: a) $D = 5r_{min}$, b) $D = 4r_{min}$, c) $D = 3r_{min}$ und d) $D = 2r_{min} + 3a$.

Abschnitt 3.4.2 nicht überrascht. Im Fall $D = 2r_{min} + 3a$ ergibt sich ein Frequenzversatz des Maximums zu der aus HFSS ermittelten Referenz von knapp unter 200 MHz. Dies entspricht einer relativen Abweichung von ca. 4,3 %.

Für letzteren Fall wird nun die Ordnung der Multipole, also der Parameter n_{Streu} , erhöht. In Bild 4.11 ist zu erkennen, dass der Vergleich zum aus HFSS erhaltenen Ergebnis schon für $n_{Streu} = 3$ wesentlich besser ausfällt. Für $n_{Streu} = 5$ ergibt sich allerdings eine größere Abweichung, was in einem unregelmäßigen Konvergenzverhalten begründet liegt. Zur Illustration finden sich in Tabelle 4.1 einige für $f = 4,5$ GHz, also an der ansteigenden Flanke, berechnete Werte der Reflektion. Für $n_{Streu} \geq 3$ variieren die Werte um maximal 0,47 dB. Nichtsdestotrotz verdeutlichen diese kleinen Änderungen, dass die Lösung weitestgehend stabil ist. Die in Kapitel 3.4.2 getroffenen Aussagen zum Streuverhalten zweier Helices bestätigen sich auch in diesem Fall: Sowohl ungerade Multipolordnungen als auch magnetische Momente (ausgenommen das magnetische Dipolmoment) tragen nur unwesentlich

n_{Streu}	1	2	3	4	5	6	7	8
$ R_{ko} $ (dB)	-0,01	-0,02	-2,49	-2,63	-2,17	-2,16	-2,29	-2,29

Tabelle 4.1: Berechnete Reflektion für 4,5 GHz.

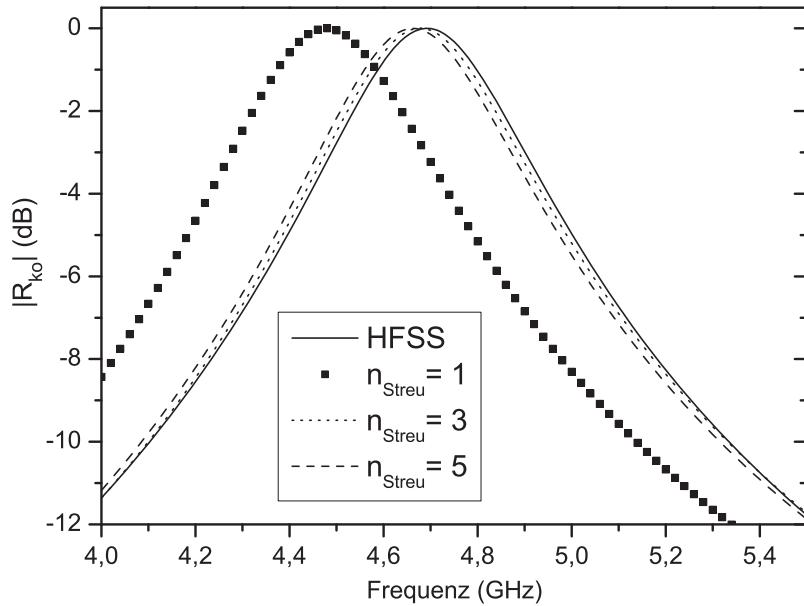


Bild 4.11: Berechnete Reflektion der Anordnung nach Bild 4.7 bzw. Bild 4.8 für $D = 2r_{min} + 3a$.

zur Verbesserung der Multipolapproximation bei. Aus diesem Grund sind nicht alle erhaltenen Kurven in Bild 4.11 aufgeführt. Die Größe der verbleibenden Abweichung kann vorwiegend mit der genutzten Näherung für dünne Drähte erklärt werden. Es ist aber auch anzuführen, dass das in HFSS implementierte Verfahren der finiten Elemente ebenso nur endlich genau sein kann. Insgesamt ergibt sich ein Frequenzversatz der Maxima von circa 30 MHz. Der relative Fehler von unter einem Prozent ist ein akzeptables Ergebnis, zumal die Rechenzeit für 150 Frequenzpunkte von 530 s gegenüber 13600 s (HFSS) den Einsatz der Näherung für dünne Drähte in Verbindung mit der Multipoldarstellung rechtfertigt. In den 530 s sind zudem die Zeiten für die Ermittlung der T-Matrizen (231 s) und der Summe \mathcal{S} aus Gleichung (4.9) (246 s) enthalten. Letztere Berechnungen sind prinzipiell losgelöst von der Anzahl der berücksichtigten Helices pro Einheitszelle. Das Verfahren verspricht somit für eine größere Anzahl Helices geeignet zu sein – nicht zuletzt weil sämtliche Untersuchungen dieser Arbeit mit einem handelsüblichen PC (Pentium 4, 3 GHz Taktrate), auf den sich alle aufgeführten Rechenzeiten beziehen, durchgeführt wurden.

Als nächstes wird die Implementierung der umhüllenden Kugel³ getestet. Zum Vergleich wird wiederholt die Anordnung aus Bild 4.7 genutzt. Wie sich in der letzten Untersuchung gezeigt hat, ist der Fall starker gegenseitiger Kopplungen ($D = 2r_{min} + 3a$) hilfreich

³Realisiert man die resonanten Streukörper (Helix in Kugel) auf diese Art, lassen sich rein zufällig positionierte und orientierte Anordnungen in einfacher Weise physikalisch verwirklichen (siehe Kapitel 7.3)

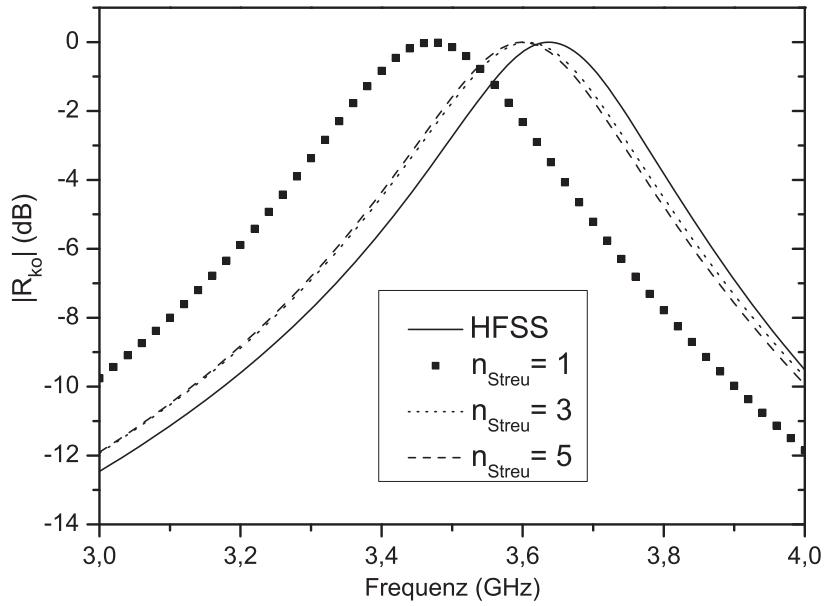


Bild 4.12: Berechnete Reflektion einer Anordnung ähnlich zu Bild 4.7. Hier ist die Helix zentriert in einer isotropen Kugel der relativen Permittivität $\varepsilon_r = 2$. Es gilt $D = 2r_{min} + 3a$ und $r_k = D/2$.

zur Abschätzung der Genauigkeit der Lösung, so dass dieser Fall auch hier herangezogen wird. Jede Helix ist in einer dielektrischen Kugel mit relativer Permittivität $\varepsilon_r = 2$ zentriert. In Experimenten wird üblicherweise aufgeschäumter Kunststoff ($\varepsilon_r \approx 1..1,1$) als dielektrisches Material verwendet. Zudem werden Proben auch durch in Harz ($\varepsilon_r \approx 3..4$) eingegossene Helices [14, 15] realisiert. In diesem Sinn ist der hier gewählte Wert $\varepsilon_r = 2$ ein Kompromiss. Für den Kugelradius gilt $r_k = D/2$. Hierdurch ist er geringfügig größer als nötig, um die Gültigkeit der Multipoldarstellung der Helix auf der Kugeloberfläche zu gewährleisten. Die Anordnung stellt damit ein weiteres *worst-case*-Szenario dar, weil zur Ermittlung der T-Matrix des gesamten Streukörpers (Kapitel 3.3) Randbedingungen auf der Oberfläche der Kugel erfüllt sein müssen. Gemäß den Untersuchungen zur Multipoldarstellung einer einzelnen Helix weist die benötigte Ordnung der Multipole sehr nah an der Helix einen stark ansteigenden Verlauf auf. Daher stellt sich die Frage, inwiefern Unzulänglichkeiten der Felddarstellung auf der Kugeloberfläche auf die errechneten Eigenschaften des Gesamtstrekörpers wirken. Bild 4.12 zeigt die erhaltenen Simulationsergebnisse. Die dielektrische Kugel bewirkt zunächst eine Belastung des Resonators. Damit verschiebt sich die Resonanz zu kleineren Frequenzen. Im Vergleich zur Helix ohne Kugel ergibt sich eine Resonanzverschiebung von knapp 1 GHz. Auch sonst ähnelt das Streuverhalten dem des Falls ohne dielektrische Kugel. Während die Position des Maximums für $n_{Streu} = 1$ eine relative Abweichung von 4,7 % aufweist, beträgt letztere für $n_{Streu} = 5$ nur noch 0,9 %.

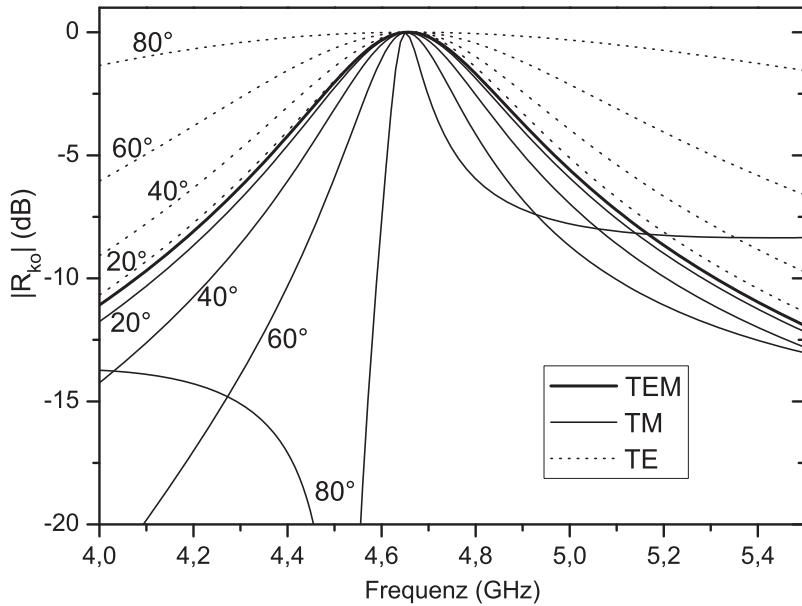


Bild 4.13: Berechnete Reflektion der Anordnung nach Bild 4.8 für $D = 2r_{min} + 3a$ und verschiedene Einfallsrichtungen.

Insgesamt ist den Ergebnissen folglich zu entnehmen, dass für den Fall des etwas komplexeren Streukörpers mit Kugel selbst im ungünstigen Fall mit wenigen Multipolen bis zu $n_{Streu} = 5$ eine brauchbare Genauigkeit zu erzielen ist. Dabei ändern sich die schon getroffenen Aussagen zum Multipol-Streuverhalten qualitativ nicht.

Bisher wurde der Einfall der homogenen ebenen Welle senkrecht zur Schicht untersucht. Für ein vollständigeres Verständnis der periodischen Schicht, gebildet durch die Einheitszelle aus Bild 4.8 ohne dielektrische Kugeln, wird im Folgenden der Fall schräger Anregung betrachtet. Hierbei gilt zu beachten, dass die Anordnung aus Bild 4.7 mit den elektrisch und magnetisch leitenden Wänden durch die dann gestörte Symmetrie nicht mehr zum Streuansatz äquivalent ist. Aus allen möglichen Einfallsrichtungen und Polarisationen werden hier lediglich zwei herausgegriffen: Transversal elektrische (TE) Anregung mit dem elektrischen Feld parallel zur y -Achse und transversal magnetische (TM) Anregung, bei der der magnetische Feldvektor parallel zur x -Achse orientiert ist. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Bild 4.13 skizziert, ebenso jenes für den senkrechten Einfall, also transversal elektromagnetische (TEM) Anregung. Alle Kurven wurden mit $n_{Streu} = 5$ berechnet. Es werden zwei Tendenzen deutlich: Im TE-Fall wird die Resonanz mit steigendem Einfallswinkel breiter. Damit wirkt die Schicht aufgrund der sinkenden effektiven Fläche einer Einheitszelle bzw. einer höheren effektiven Dichte der Helices mehr und mehr wie ein Kurzschluss denn wie ein Resonator. Umgekehrtes Verhalten ist im TM-Fall ersichtlich. Die Helix wird

am Stärksten durch ein elektrisches Feld parallel zur Helixachse angeregt. Mit größer werdenden Einfallswinkeln wird die y -Komponente des Feldvektors kleiner, so dass für große Winkel erst in der Nähe der Resonanz ein großer Strom auf jeder Helix hervorgerufen wird. Die Lage der Resonanz ist unabhängig vom Einfallswinkel – ein Zeichen dafür, dass sich Stärke und Art der gegenseitigen Kopplungen nicht ändern. Eine Darstellung für verschiedene n_{Streu} und einen Einfallswinkel von 80° (TM-Fall) findet sich in Bild E.2 im Anhang. Tatsächlich spiegeln sich darin die Positionen der Resonanzen wie in Bild 4.11 wider. Selbst wenn also weniger Multipole als nötig bei der Beschreibung Berücksichtigung finden, erhält man konsistente Ergebnisse, sowohl die Lage der Resonanzen als auch das Leistungskriterium in Gleichung (4.28) betreffend. In allen in diesem Kapitel vorgestellten Berechnungen wird Gleichung (4.28) mit einer Genauigkeit von mindestens 2% (Resonanzfall, 80° Einfallswinkel und $D = 2r_{min} + 3a$) erfüllt. Bei den meisten Konfigurationen ist dieser Wert sogar ein bis drei Größenordnungen kleiner.

5 Übergang von einer regelmäßigen zu einer zufälligen Schicht

Im vorigen Kapitel wurden unendlich ausgedehnte periodische Schichten betrachtet, jeweils angeregt durch eine – ebenfalls unendlich ausgedehnte – homogene ebene Welle. Für die Praxis kann dieser Fall zweifellos nur eine Näherung sein, da physikalisch realisierte Schichten immer eine endliche Ausdehnung besitzen. Eine ausführliche Diskussion möglicher Konsequenzen der Anwendung der periodischen Näherung auf finite passive (und aktive) Felder findet sich in [93] und soll daher nicht Gegenstand dieser Untersuchungen sein – zumal der Schwerpunkt auf dem Übergang von der periodischen zur zufälligen Schicht liegt.

Im Fall einer nicht regelmäßig aufgebauten Struktur stellt sich jedoch die Frage, inwiefern eine Probe repräsentativ ist. Ist sie so groß, dass die zugrunde liegende Statistik aufgrund einer hohen Anzahl von Partikeln ausreichend erfasst wird, so verhält sich jede Probe bei elektromagnetischer Anregung bis auf vernachlässigbare Schwankungen auf niedrigem Niveau gleich. Die Forderung nach einer großen Probe stellt dabei sowohl in messtechnischer als auch in numerischer Hinsicht eine Herausforderung dar. Benutzt man z.B. zur Charakterisierung einen Hohlleiter, der mit vertretbarem Aufwand hochempfindliche Messungen erlaubt, ist die transversale Ausdehnung begrenzt. In der Tat sind bei der Betrachtung von regellos verteilten Helices im Rundhohlleiter ausgeprägte Unterschiede zwischen den verschiedenen Proben erkennbar, die schließlich dazu führen, dass eine verlässliche Aussage nur nach Mittelung der erhaltenen Streuparameter vieler Proben gewonnen wird [94].

Auf der anderen Seite sind der Modellierung einer großen (zufälligen) Struktur Grenzen gesetzt. Bei der direkten Auswertung des für den zufälligen Fall in Frage kommenden Gleichungssystems (2.37) ergibt sich ein quadratischer und kubischer Zusammenhang zwischen der Anzahl der berücksichtigten Partikel N und dem benötigten Speicher bzw. der Rechenzeit. Im Fall der resonanten Helices sind, wie später aufgezeigt wird, sehr viele Partikel zur Beschreibung nötig. Folglich stellt sich hier die Frage, ob der Aufwand zur Implementierung der Algorithmen auf einem schnellen Rechensystem nebst eventueller Parallelisierung zum Ziel führt bzw. durch den möglichen Erkenntnisgewinn gerechtfertigt wird.

Eine alternative Methode für die Auswertung der Gleichungen zur Berechnung der Streu-

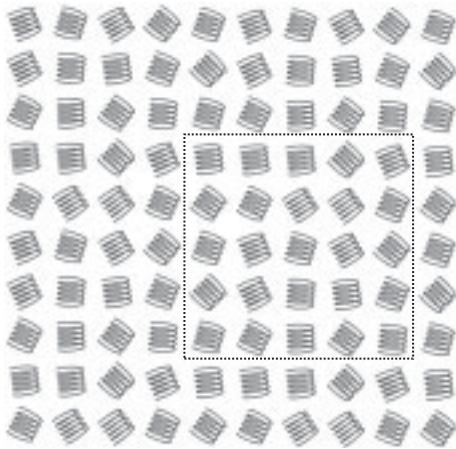


Bild 5.1: Zufällige Schicht, die durch die hervorgehobene Einheitszelle aufgespannt wird.

koeffizienten ist in [83] beschrieben. Durch eine kleinere Speicherkomplexität kann das resultierende Gleichungssystem, bei geeigneter Vorkonditionierung, mit einem iterativen Verfahren gelöst werden. In [83] werden Beispiele mit bis zu 21160 dielektrischen Kugeln angeführt. Für den Fall der resonanten Helices zeichnen sich aber klare Grenzen ab [95], deren Ursachen vorwiegend numerischer Natur sind. So spiegelt sich das ausgeprägte Streuverhalten der Helices in einer schlechten Kondition der Systemmatrix wieder. Kleine Fehler, die zweifelsohne bei der Berechnung der Einträge der Matrix und des Anregungsvektors durch endlich genaue Zahlendarstellungen in einem Rechner und durch das Abbrechen von Reihendarstellungen entstehen, können damit die Lösung des Gleichungssystems stark beeinflussen. In diesem Zusammenhang ist ebenso zu nennen, dass einige Momente, wie bereits aufgezeigt, nur sehr wenig zur Lösung beitragen. Die entsprechenden Gleichungen erhöhen die Ordnung der Matrix, sind aber nur mäßig relevant. Im Vergleich zum aufgeführten Beispiel der dielektrischen Kugeln steigen die Anforderungen an den Lösungsalgorithmus damit sehr stark an.

5.1 Mittelungsstrategie

In dieser Arbeit wird das Verhalten einer großen Schicht daher unter Zuhilfenahme eines anderen Ansatzes abgeschätzt. Grundlage ist das im vorigen Kapitel dargestellte Verfahren für periodische Anordnungen. Innerhalb einer groß genug gewählten Einheitszelle werden mehrere Partikel zufällig angeordnet. Bild 5.1 zeigt exemplarisch einen Ausschnitt einer Schicht, die durch eine Einheitszelle bestehend aus insgesamt 25 Helices gebildet wird. Zur Veranschaulichung sind die Abmessungen einer denkbaren Einheitszelle angedeutet. Die Schicht kann aber auch durch andere Zellen aufgebaut sein, die z.B. dadurch definiert sein können, dass jeweils eine Helix im Zentrum positioniert ist. Von dieser Helix

aus betrachtet gehorchen die weiteren Partikel innerhalb der Einheitszelle einer definierten Zufälligkeitsverteilung. Das Zufallsmuster wiederholt sich erst bei Partikeln, die einen Abstand von mindestens einer halben Kantenlänge einer Zelle aufweisen. Die Kopplung zu solchen Helices ist wegen der größeren Distanz weitaus geringer und kann in guter Näherung mit Dipolinteraktionen beschrieben werden. Zudem spielen die genauen Positionen und Orientierungen weit entfernter Helices eine untergeordnete Rolle. In [90] wird z.B. die Gesamtheit aller weiter entfernt liegenden Partikel wie eine Scheibe homogener Polarisation modelliert.

Mit dem beschriebenen Ansatz werden folglich die wichtigen Interaktionen mit direkten Nachbarpartikeln vollständig erfasst, der Einfluss der Schicht wird in den periodischen Randbedingungen berücksichtigt. Es wird daher angenommen, dass die hervorgerufenen Ströme auf den Helices innerhalb der Einheitszelle typisch für eine Schicht mit einer gewissen Zufälligkeit sind. Die Wiedergabe der Gesamtstatistik eben dieser Schicht bedarf jedoch der Berechnung einer statistisch relevanten Anzahl solcher Konfigurationen. Die erhaltenen Ergebnisse werden schließlich über die Anzahl der Konfigurationen gemittelt. Die Vorteile dieser Herangehensweise liegen besonders in der kleinen Zahl von Helices innerhalb der Einheitszelle. Damit wird die Berechnung eines großen Problems heruntergebrochen auf die mehrfache Lösung eines kleineren. In dieser Arbeit wird die Auswertung der Gleichungssysteme (4.4) bzw. (4.19) ausschließlich mit der schon vorher erwähnten und für diese Zwecke stabilen LU-Zerlegung durchgeführt.

5.2 Ein einfacher Testfall - Numerische Aspekte

Im Folgenden wird die Mittelungsstrategie am Beispiel einer einfachen Schicht untersucht. Neben den Konsequenzen für das Verhalten der Struktur beim Übergang zur Zufälligkeit stehen ebenso einige numerische Aspekte (Konvergenz, Rechenzeit) im Blickpunkt.

Ausgangspunkt der Analysen ist eine regelmäßige Schicht bestehend aus rechtsgedrehten Helices vom Typ i aus Tabelle 3.1. Dabei sind die Partikel auf einem quadratischen Raster im Abstand von $D = 3 \text{ mm} \approx 2,46 r_{min}$ angeordnet. Aufgrund der gegenseitigen Abstände ergibt sich, dass zur korrekten Beschreibung der Kopplungen Multipolfelder bis maximal dritter Ordnung ausreichend sind. Sofern nicht anders erwähnt, wird folglich immer mit $n_{Streu} = 3$ gerechnet. Um realistische Proben nachzubilden, werden von nun an Helices betrachtet, die eine endliche elektrische Leitfähigkeit besitzen. Letztere wird ähnlich wie bei Kupfer-Beryllium (CuBe2) zu $\sigma = 11 \text{ MS/m}$ gewählt. Die Leitfähigkeit ist immer noch sehr gut und beeinflusst die erhaltenen Streuparameter nur wenig.

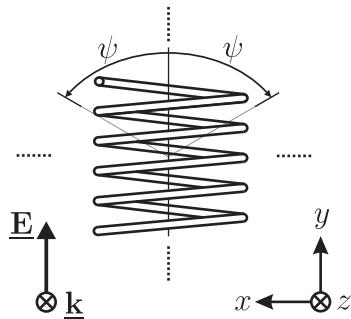


Bild 5.2: Darstellung der möglichen Achsrotation der Helix.

Ein „Aufweichen“ der Periodizität lässt sich durch Variation verschiedener geometrischer Parameter (Position, Orientierung, Helixeigenschaften) erreichen. Die zunächst untersuchte Zufallsgröße stellt die Veränderung der Helixorientierung dar. Die entsprechende Geometrie findet sich in Bild 5.2. Die Achse jeder Helix kann dabei in mathematisch positiver und negativer Richtung bis zum Winkel ψ um die z -Achse gedreht sein. Innerhalb dieses Intervalls sind die Rotationen gleichverteilt. Der nachfolgend diskutierte Fall mit $\psi = 45^\circ$ ist im bereits diskutierten Bild 5.1 veranschaulicht.

5.2.1 Anzahl der Konfigurationen

Als Grundvoraussetzung für die angestrebten Untersuchungen ist es zunächst vorteilhaft, ein Konvergenzkriterium einzuführen, welches sicherstellt, dass zum einen hinreichend viele und zum anderen nicht mehr Konfigurationen als nötig berechnet werden. Bild 5.3 zeigt dafür den Betrag der vier in diesem Fall zur Beschreibung der Schicht nötigen Streuparameter in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Konstellationen. Für die Untersuchung bei einer Frequenz von $f = 4,6$ GHz wurde eine (5×5) -Einheitszelle herangezogen. In ihrer Tendenz ähneln sich alle Kurvenverläufe: Wie erwartet ändern sich die Streuparameter kaum, wenn man sehr viele (> 2500) Konfigurationen berücksichtigt. Auf der anderen Seite sind hingegen schon wenige (≈ 100) Berechnungen ausreichend, wenn man eine relative Abweichung in der Größenordnung von ein bis zwei Prozent zulässt. Die Tatsache, dass das Konvergenzverhalten sehr unregelmäßig ist, erschwert eine Extrapolation und somit schon während der laufenden Berechnungen eine Aussage über die Genauigkeit. Selbst im Bereich vieler Konfigurationen (> 2500) finden sich Schwankungen um den Mittelwert (hier um -70 dB), welche durch die statistischen Prozesse bedingt sind. Diese Schwankungen werden umso kleiner, je mehr Konfigurationen berechnet werden. Genau hier findet sich daher ein Ansatzpunkt eines konsistenten Kriteriums: Sofern die Schwankungen um den Mittelwert eines statistisch relevanten Bereiches unterhalb einer gewissen Schwelle liegen, wird Konvergenz angenommen. Das Intervall und die Größe der tolerierbaren Abweichungen sind grundsätzlich beliebig wählbar. In dieser Arbeit hat

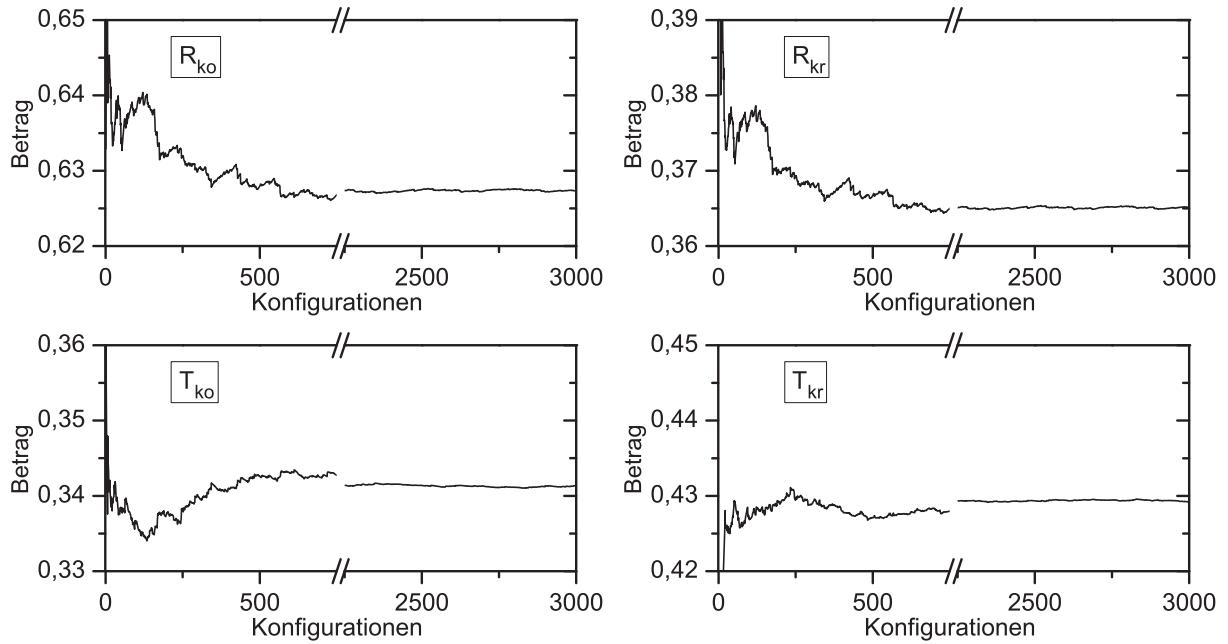


Bild 5.3: Betrag der Streuparameter in Abhängigkeit von der Anzahl der berechneten Konfigurationen ($f = 4, 6 \text{ GHz}$).

sich jedoch die Wahl von absoluten Abweichungen von 10^{-3} über die letzten 100 Konfigurationen bewährt. Die Wahl absoluter Fehler bietet ferner den Vorteil, dass nach Relevanz, d.h. nach dem Grundniveau der jeweiligen Streuparameter, unterschieden wird. Dies bedeutet für das Beispiel aus Bild 5.3, dass Konvergenz nach 538 Konfigurationen erzielt wird. Bezogen auf die Werte nach 3000 Konfigurationen ergibt sich damit eine relative Genauigkeit von größer als 0,5 %.

Durch das stark frequenzabhängige Streuverhalten der Helices ist eine ebenfalls frequenzabhängige Anzahl der benötigten Konfigurationen zu erwarten. Der Verlauf über der Frequenz ist in Bild 5.4 dargestellt – wieder für eine Einheitszelle bestehend aus insgesamt 25 Helices. Für die niedrigen und hohen Frequenzen des abgebildeten Bereiches zeigt sich ein nahezu konstanter Verlauf. Dazwischen existiert ein etwa 1,3 GHz breites Band, in dem sich die Konfigurationsanzahl stark erhöht. Überdies sind in diesem Band auch starke Schwankungen zu erkennen. Dieses Verhalten kann mit der schon in Abschnitt 3.4.2 behandelten Resonanzaufspaltung erklärt werden. Im Gegensatz zum streng periodischen Fall ist jede Helix der Einheitszelle auf andere Weise mit der Umgebung verkoppelt. Damit weist jede einzelne Konfiguration eine Vielzahl auftretender Resonanzen bzw. deren Überlagerungen auf. Als Konsequenz ergibt sich ein fluktuiierender Verlauf der Streuparameter über der Frequenz. Zur weiteren Veranschaulichung findet sich in Bild E.3 des Anhangs beispielhaft eine Gegenüberstellung der kopolaren Reflektion und Transmission der ersten

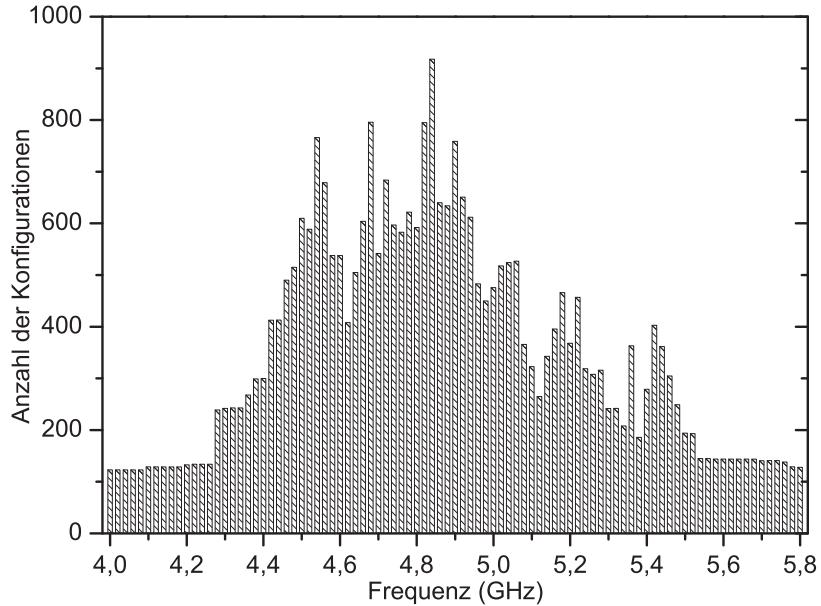


Bild 5.4: Anzahl der benötigten Konfigurationen in Abhängigkeit von der Frequenz ((5x5)-Einheitszelle).

20 Konfigurationen und der Streuparameter nach Erfüllung des Konvergenzkriteriums. Eine allgemein gültige Aussage über das Konvergenzverhalten einer beliebigen Schicht in der Nähe der Resonanz lässt sich aus Bild 5.4 nur bedingt ableiten. Der Aufbau der Schicht und nicht zuletzt auch das verwendete Konvergenzkriterium selbst spielen dafür eine zu große Rolle (vergleiche hierzu [45]). Im Wesentlichen wird die Zahl der Konfigurationen aber durch Häufigkeit, Niveau und Ausprägung der Resonanzen bei bzw. in der Nähe der betrachteten Frequenz bestimmt.

5.2.2 Größe der Einheitszelle

Die bisherigen Ausführungen beziehen sich auf die Konvergenz der Lösung für die beispielhaft gewählte (5x5)-Einheitszelle. Hier stellt sich die Frage, ob die Größe der Einheitszelle ausreichend ist, um – nach Mittelung – das Verhalten einer unendlich großen Schicht mit zufälliger Geometrie zu beschreiben, welche keine Periodizität aber die gleiche Statistik aufweist. Die Qualität der Lösung wird im Folgenden untersucht. Bild 5.5 zeigt die Streuparameter für verschiedene groß gewählte Einheitszellen ((2 x 2), (3 x 3), (4 x 4), (5 x 5), (6 x 6) und (7 x 7)). Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die zu den verschiedenen Einheitszellen gehörenden Kurven hierbei nicht näher bezeichnet. Man erkennt ein ausgeprägtes Verhalten bei der Frequenz von ca. $f = 4,6$ GHz: Die kopolare Transmission ist minimal, alle anderen Streuparameter sind maximal. Die Schicht befindet sich daher bei

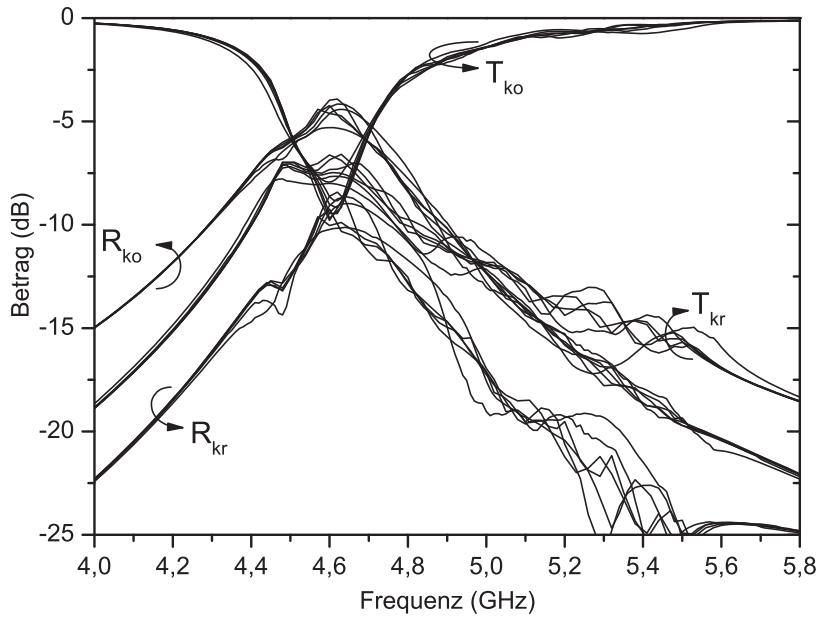


Bild 5.5: Streuparameter für verschiedene große Einheitszellen.

$f = 4,6$ GHz in Resonanz. Analog zu der periodischen Schicht aus Abschnitt 4.4 ist auch hier die Belastung jedes einzelnen Helixresonators durch die übrigen Partikel verantwortlich dafür, dass die Resonanz der Schicht im Vergleich zu der eines einzelnen Partikels ($f_{res} \approx 4,96$ GHz) nach unten verschoben ist. Fernab der Resonanz ergibt sich eine gute Übereinstimmung der Kurven. Demgegenüber sind größere Abweichungen im schon vorher diskutierten und ca. 1,3 GHz breiten Band erkennbar. Dies wird insbesondere für die kreuzpolaren Streuparameter R_{kr} und T_{kr} ersichtlich – wenngleich die größten Unterschiede auf einem niedrigen Niveau (um -20 dB bzw. -15 dB) auftreten.

Was das Niveau der auftretenden Streuparameter und das frequenzabhängige Verhalten betrifft, stellt die Schichtresonanz bei $f = 4,6$ GHz den interessantesten Fall dar. Deshalb soll im Folgenden das Konvergenzverhalten bezüglich der Größe der Einheitszelle bei dieser Frequenz näher beleuchtet werden. Zu diesem Zweck sind die berechneten Streuparameter für verschiedene groß gewählte Einheitszellen in Bild 5.6 aufgeführt. Ab einer (7 x 7)-Einheitszelle zeigt sich, dass der Einfluss der Größe abnimmt und eine Konvergenz einsetzt. Zieht man die Werte für den (11 x 11)-Fall als Referenz heran, so lässt sich feststellen, dass Abweichungen von ± 1 dB je nach gewählter Größe auftreten. Aufgrund des ausgeprägten Verhaltens der Schicht stellt der gezeigte Verlauf ein *worst-case*-Szenario dar, d.h. bei anderen Frequenzen außerhalb der Resonanz zeigt sich ein regelmäßigeres und schnelleres Konvergenzverhalten. Zum Vergleich sind die Ergebnisse bei einer Frequenz von $f = 5,3$ GHz in Bild E.4 des Anhangs aufgeführt.

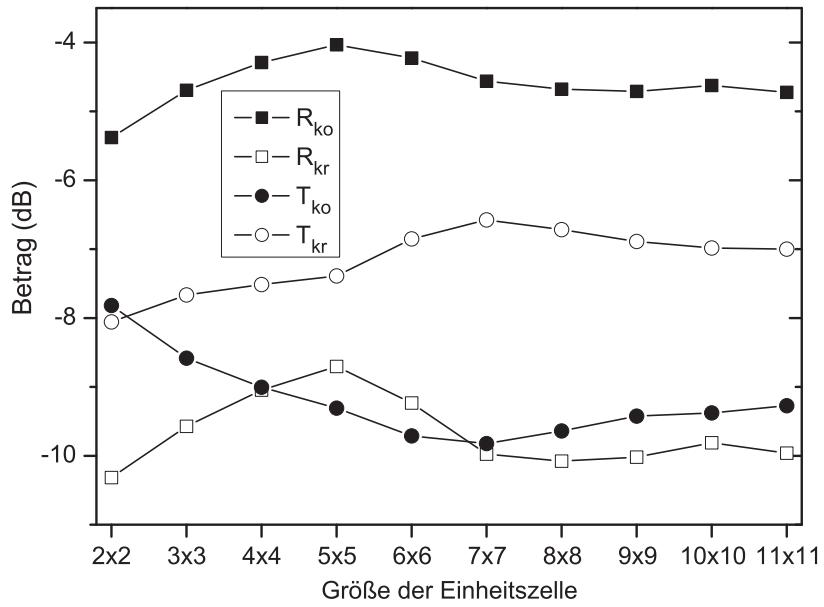


Bild 5.6: Betrag der Streuparameter in Abhängigkeit von der Größe der Einheitszelle für $f = 4,6$ GHz (Resonanz der Schicht).

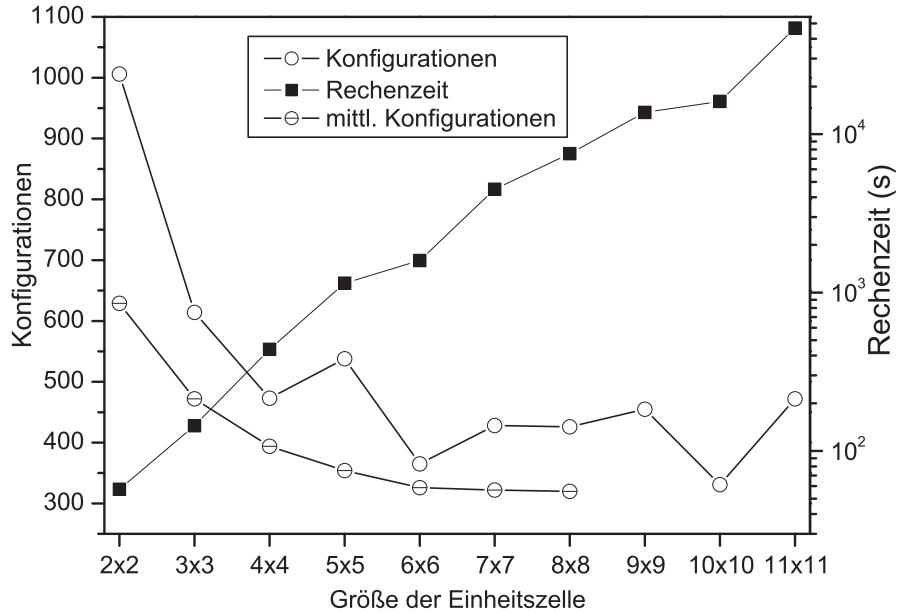


Bild 5.7: Benötigte Anzahl der Konfigurationen und Rechenzeit.

Für eine weitere Beurteilung der Lösung bietet sich die Betrachtung der Anzahl der benötigten Konfigurationen an. Der Verlauf für verschiedene Größen der Einheitszelle ist in Bild 5.7 dargestellt. Es zeichnet sich ein rasches Abfallen der Anzahl der berechneten

Konfigurationen von knapp 1000 auf ein Niveau von um die 400 ab. Der Verlauf ist jedoch nicht regelmäßig, eine weitere Folge der Betrachtung in der Nähe der Resonanz. Um eine bessere Aussage treffen zu können, ist ebenfalls die mittlere Anzahl der Konfigurationen für den Frequenzbereich von 4,0 GHz bis 5,8 GHz dargestellt. Hierfür werden insgesamt 91 Frequenzpunkte im Abstand von 20 MHz herangezogen. Es zeigt sich deutlich, dass die mittlere Anzahl ab einer Größe von ca. (6 x 6) stagniert bzw. sich nur noch sehr wenig ändert. Abgesehen von einigen wenigen Abweichungen um die Resonanz sorgt eine weitere Vergrößerung der Einheitszelle demnach nicht dafür, dass die Statistik vollständiger wiedergegeben wird. Gleichzeitig ist in Bild 5.7 die benötigte Rechenzeit für den einzelnen Frequenzpunkt bei $f = 4,6$ GHz aufgetragen. Angesichts der schnell wachsenden Rechenzeit von z.B. 13 Stunden im (11 x 11)-Fall wird deutlich, dass ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeitbedarf erforderlich ist. Da die folgenden Untersuchungen eher prinzipiellen Charakter haben, wird, wenn nicht anders erwähnt, die Größe der Einheitszelle für die weiteren numerischen Experimente dieses Kapitels zu (7 x 7) angesetzt. Wie der nächste Abschnitt zeigt, ist das auch für andere Grade der Zufälligkeit (eingestellt über den Parameter ψ) ein vernünftig gewählter Wert.

Für anders aufgebaute Schichten lässt sich eine generelle Antwort auf die Frage nach der Mindestgröße der Einheitszelle aufgrund der Vielzahl an Parametern, die das Verhalten in verschiedenster Weise beeinflussen, nicht ableiten. Hier stellt die gewählte Größenordnung der Anzahl der Partikel pro Einheitszelle folglich nur einen ungefähren Richtwert dar. Um die Darstellung und den Umfang überschaubar zu halten, wird für die Analysen in den Kapiteln 6 und 7 immer angenommen, dass die Einheitszelle für den gewünschten Grad an Genauigkeit groß genug gewählt ist.

5.2.3 Eigenschaften der Schicht bei zunehmender Unordnung

Im Folgenden wird die Ordnung der Schicht ausgehend von einer periodischen Schicht zunehmend „aufgeweicht“. Zu diesem Zweck wird der Parameter ψ verändert – also der Winkel der größten Abweichung von der Ausgangslage (siehe Bild 5.2). Dabei erstreckt sich der Wertebereich über $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ in Schritten von 15° .

Ein wichtiger Mechanismus wird anhand der Betrachtung der Leistungsbilanz

$$|R_{ko}|^2 + |R_{kr}|^2 + |T_{kr}|^2 + |T_{ko}|^2 \leq 1 \quad (5.1)$$

deutlich, wobei die Gleichheit von linker und rechter Seite bei einer periodischen Schicht verlustloser Materialien gilt (siehe Diskussion in Kapitel 4.4). In Bild 5.8 ist die linke Seite von Gleichung (5.1) für verschiedene gewählte Parameter ψ dargestellt. Als kleiner

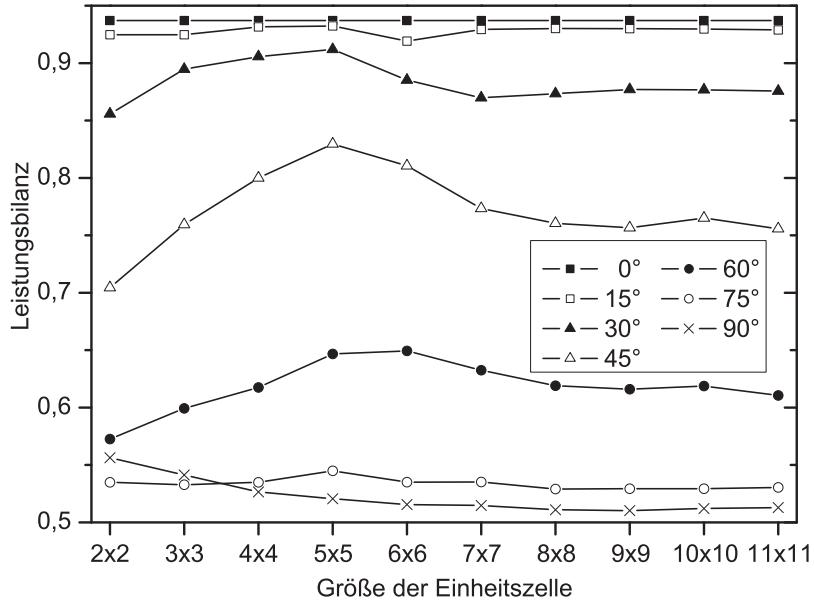


Bild 5.8: Linke Seite von Gleichung (5.1) als Funktion des Parameters ψ und der Größe der Einheitszelle.

Rückgriff auf den vorigen Abschnitt erfolgt auch hier eine Auftragung über die Größe der Einheitszelle der Werte für die feste Frequenz von $f = 4,6$ GHz. Da die hier betrachteten Helices eine endliche elektrische Leitfähigkeit besitzen, wird ein kleiner Teil der einfallenden Leistung in Wärme umgesetzt. Aus diesem Grund ergibt sich für die periodische Schicht ($\psi = 0^\circ$), dass nur ungefähr 94% der einfallenden Leistung reflektiert bzw. transmittiert wird. Es sticht hervor, dass dieser Wert mit stetig wachsendem Parameter ψ immer kleiner wird und schließlich auf etwa 51% für $\psi = 90^\circ$ fällt. Dieses Verhalten kann nicht mit erhöhten Wärmeverlusten erklärt werden, wie durchgeführte Vergleiche mit ideal leitenden Helices zeigen. Der Grund ist eher in der Streuung von Leistung in Richtungen parallel zur Schicht zu finden (die entsprechenden Feldkomponenten werden bei der Integration über Gleichung (4.22) nicht erfasst). Im streng periodischen Fall kommt es nicht zu dieser Art von Streuung; die Wirkungen der hervorgerufenen Kombination von Dipolmomenten heben sich in dieser Hinsicht gegenseitig auf. Dieser Mechanismus ist aber umso mehr gestört, je mehr Variationen in der Schicht vorhanden sind.

Der Einfluss der Variationen auf die vier zur Beschreibung der Schicht nötigen Streuparameter ist in Bild 5.9 dargestellt. Aus den Kurvenverläufen für $\psi = 15^\circ$ lässt sich entnehmen, dass sich das Verhalten der Schicht bezüglich kleiner Schwankungen der Orientierungen nur wenig ändert, auch im Fall der Resonanz. An dieser Stelle kann vorweggenommen werden, dass sich diese Eigenschaft auch bei den weiteren im Verlauf der Arbeit untersuchten

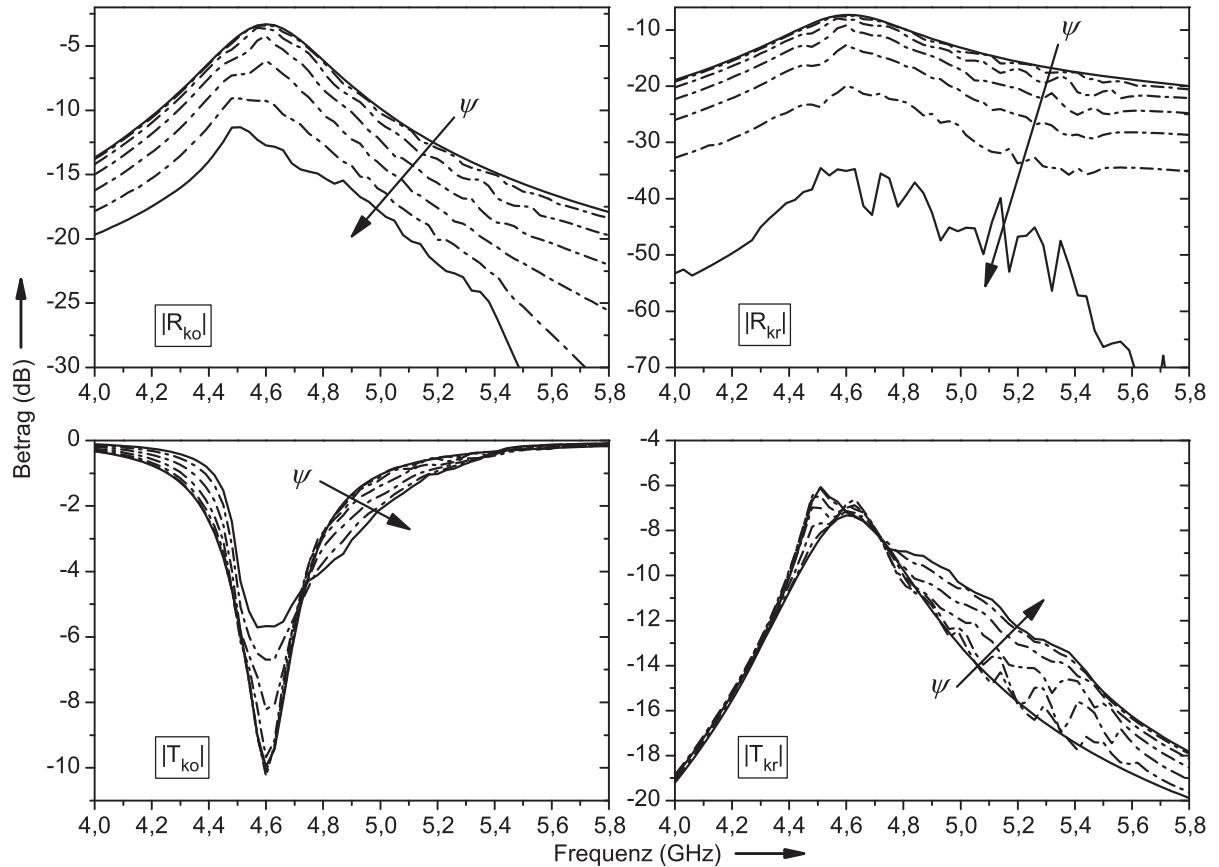


Bild 5.9: Rotationen der Helixachse in der xy -Ebene: Einfluss des Parameters ψ auf die Streuparameter der Schicht. Durchgezogene Linien: $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$, strichpunktige Linien: $\psi = i \cdot 15^\circ$ mit $i = 1 \dots 5$.

alternativen Möglichkeiten der Variation wiederfindet. Die Ursache ist zum einen dadurch gegeben, dass die gegenseitigen Kopplungen durch einige wenige Multipolfelder niedriger Ordnung und moderater Winkelabhängigkeit ($n_{\text{Streu}} = 3$) sehr gut beschrieben werden können. Zum anderen ergibt sich, dass die Stärke der Anregung, die sich, wie im Kapitel 2.3 und 4.1 beschrieben, im inhomogenen Teil des Gleichungssystems widerspiegelt, in diesem Fall nahezu kosinusförmig vom Winkel zwischen Helixachse und elektrischem Feldvektor der einfallenden Welle abhängt [96]. Erhöht man den Parameter ψ in weiteren Schritten von 15° , fällt eine wesentlich höhere Empfindlichkeit von dem untersuchten Parameter auf. Bezuglich der Kurvenverläufe lässt sich zudem festhalten, dass aufgrund der kleineren Wirkung der Anregung auf jeden Streukörper sich die kopolare Reflektion für größer werdende ψ reduziert. Gleichzeitig steigt die kopolare Transmission innerhalb der Resonanz an. Es ergeben sich bei $\psi = 90^\circ$ sehr kleine Werte von um die -40 dB für die kreuzpolare Reflektion – ein Verhalten, welches dem Verschwinden dieser Komponente im Falle eines biisotropen (chiralen) Mediums [97, Kap. 6.1] nahe kommt.

Für das Verständnis der Verläufe der kreuzpolaren Streuparameter hilft folgende Vor-
betrachtung. Die Ursache der kreuzpolaren Polarisation ist hauptsächlich – also unter Vernachlässigung höherer Momente im Fernfeld – eine Kombination aus angeregten Dipolmomenten: Ein elektrisches Dipolmoment senkrecht zum elektrischen Feldvektor der einfallenden Welle ($p_x^e \underline{\mathbf{e}}_x$) und ein magnetisches Dipolmoment ($p_y^m \underline{\mathbf{e}}_y$) parallel dazu. Die von diesen Momenten erzeugten, ebenen Wellen überlagern sich konstruktiv in einer der durch die Schicht getrennten Halbebenen und destruktiv in der jeweils anderen. Damit sind die Streuparameter R_{kr} und T_{kr} im allgemeinen Fall unterschiedlich. Durch die in Bild 5.9 verwendete Skalierung bleibt verborgen, dass dies im Fall der streng periodischen Schicht ($\psi = 0^\circ$) nicht gegeben ist. Zum besseren Vergleich sind die Streuparameter für diesen Fall in Bild E.5 des Anhangs wiederholt aufgeführt. Es zeigt sich, dass die angesprochenen Streuparameter sich kaum unterscheiden. Dies kann aber nur der Fall sein, wenn die Wirkung eines Momentes (elektrisch bzw. magnetisch) gegenüber der jeweils anderen dominiert. Tatsächlich ist die Amplitude der gestreuten kreuzpolaren Welle durch das magnetische Moment $p_y^m \underline{\mathbf{e}}_y$ um ca. drei Größenordnungen größer als jene, die auf das elektrische Dipolmoment zurückgeführt werden kann. Führt man die gleiche Untersuchung mit einer um 90° um die Ausbreitungsrichtung der Wellen gedrehten Schicht durch, zeigte sich der duale Fall: Das Moment $p_x^e \underline{\mathbf{e}}_x$ dominiert gegenüber $p_y^m \underline{\mathbf{e}}_y$. Im Fall der untersuchten Schicht mit Variationen kommt es offenbar für $\psi = 90^\circ$ dazu, dass die Wirkungen beider erwähnter Momente im Mittel gleich sind. Der hervorgerufene Strom auf der Drahtoberfläche – über den die Momente schließlich verknüpft sind – sorgt dafür, dass kreuzpolare Wellen nur in Transmissionsrichtung auftreten.

Bei der obigen Betrachtung ist zu beachten, dass für $\psi = 90^\circ$ lediglich die Achse der Helix regellos in der xy -Ebene angeordnet ist. Bezüglich dieser Achse ist die Helix nicht symmetrisch. Daher wäre eine Reglosigkeit erst bei $\psi = 180^\circ$ erreicht. Alternativ ist dieses Ziel auch im Fall $\psi = 90^\circ$ bei gleichzeitigen zufällig ausgewählten Drehungen um 180° um die Helixachse zu erreichen. Die Tatsache, dass die kreuzpolare Reflektion trotzdem auf ein sehr niedriges Niveau abfällt, lässt in Analogie zum biisotropen Fall (Verschwindendes R_{kr} , keine Vorzugsrichtung) den Schluss aufkommen, dass Drehungen um die Helixachse nur einen sehr geringen Einfluss auf die Lösung haben. Diese Vermutung wird im folgenden Kapitel unter anderem überprüft.

Zunächst soll an dieser Stelle aber noch ein bisher unerwähnter Aspekt beleuchtet werden. Die obigen Ergebnisse basieren auf der Berücksichtigung von Multipolmomenten bis zur dritten Ordnung. Wie Bild E.5 ebenfalls aussagt, ergibt sich bei der streng periodischen Schicht mit $\psi = 0^\circ$ ein Frequenzversatz von ca. 150 MHz zur Lösung, die unter Betrach-

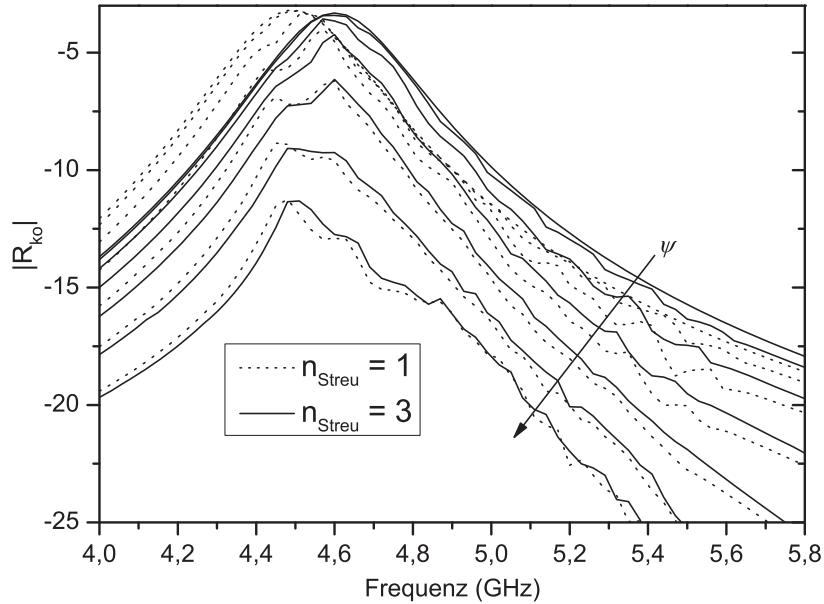


Bild 5.10: Rotationen der Helixachse in der xy -Ebene: Kopolare Reflektion für den Übergang von der periodischen zur zufälligen Schicht.

tung von Dipolmomenten erhalten wird. Eine weitere Erhöhung des Parameters n_{Streu} beeinflusst die Ergebnisse nur unwesentlich. In Bild 5.10 sind beide Lösungen, also jene für $n_{Streu} = 1$ und $n_{Streu} = 3$, in Abhängigkeit von der Zufälligkeit illustriert. Hier fällt vor allem auf, dass sich die Kurven mit zunehmender Unordnung angleichen. Der angesprochene Frequenzversatz von 150 MHz für die periodische Schicht reduziert sich bis auf knapp 20 MHz. Offenbar scheint es bei der Interaktion vieler Helices mit zufälligen Orientierung auch dazu zu kommen, dass sich Fehler wie im Fall der Kopplung zweier Helices aus Kapitel 3.4.2 weiter gegenseitig aufheben – hier desto stärker je mehr die Vorzugsrichtung verblasst. Diese Aussage ist vorerst allerdings auf diesen Fall beschränkt, herrscht hier doch eine spezielle Form der Zufälligkeit vor. Aus der Frage, ob sich dieser Schluss auch auf andere Fälle übertragen lässt, speist sich die Motivation für den folgenden Abschnitt.

5.3 Studie weiterer Variationsmöglichkeiten

In diesem Kapitel sollen in etwas verkürzter Form weitere Möglichkeiten der Variation besprochen und deren Konsequenzen für die Schicht aufgezeigt werden. Prinzipiell ergibt sich eine Vielzahl an möglichen Parametern zur „Aufweichung“ der Ordnung einer Schicht. Toleranzen der Geometrie jeder einzelnen Helix werden im experimentellen Teil dieser Arbeit (Kapitel 7) behandelt. Aus diesem Grund beschränkt sich die Diskussion auf noch

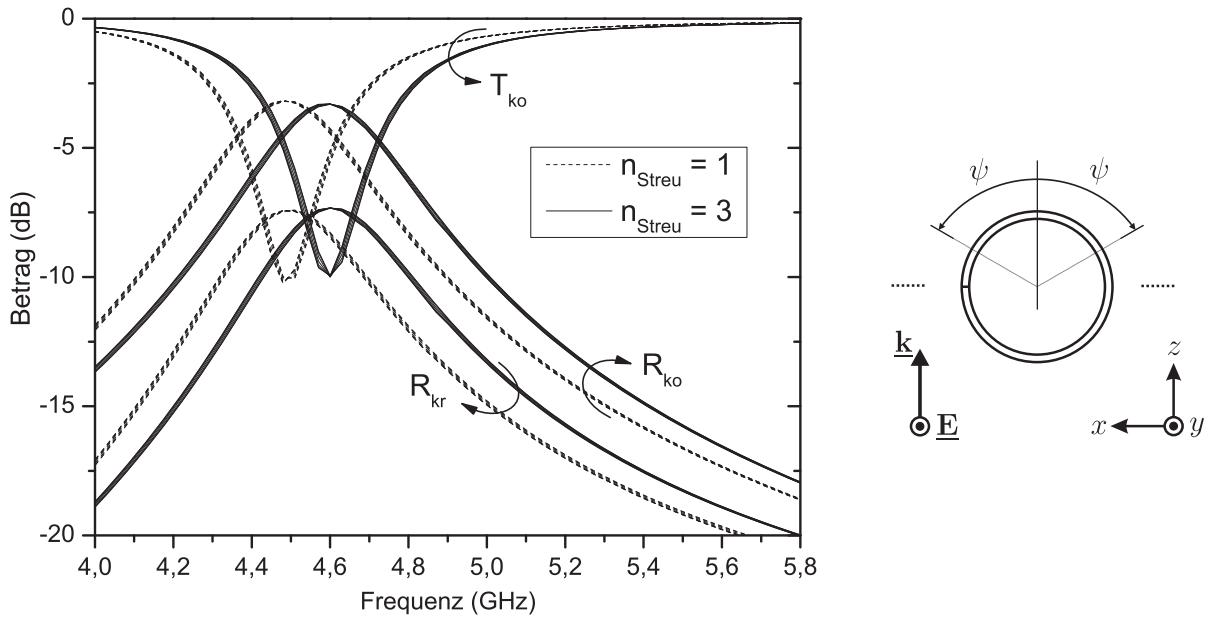


Bild 5.11: Links: Streuparameter für Rotationen um die Helixachse. Rechts: Draufsicht der Helix und Einfallsrichtung der ebenen Welle.

nicht berücksichtigte Rotationen sowie Abweichungen der Helixpositionen.

5.3.1 Rotationen

Wie im vorigen Abschnitt schon angedeutet, werden zunächst Rotationen um die Helixachse betrachtet. Analog zu Bild 5.2 sind dies Drehungen um die y -Achse. Die maximale Abweichung von der Ursprungsposition wird hierbei in Schritten von 30° erhöht, bis schließlich für 180° Abweichung die vollständige Zufälligkeit dieser Orientierung erreicht ist. Neben der Geometrie der Anordnung ist die sich ergebende Kurvenschar der Streuparameter in Bild 5.11 für $n_{Streu} = 1$ und $n_{Streu} = 3$ dargestellt. Zur besseren Übersicht sind die zu R_{kr} sehr ähnlichen Kurvenverläufe des Parameters T_{kr} nicht eingezeichnet. Wie sich an den nahezu deckungsgleichen Kurven zeigt, hat die Orientierung der Helix bezüglich ihrer Achse, wie bereits im vorigen Abschnitt vermutet, nur einen geringfügigen Einfluss auf die Lösung. Dies ist sowohl der Fall, wenn ausschließlich Dipolmomente Berücksichtigung finden, als auch wenn höhere Momente (hier bis zur dritten Ordnung) einbezogen werden. Es kommt daher in diesem Beispiel mit nachlassender Ordnung nicht zu einer allmählichen Annäherung der Lösung für verschiedene gewählte Parameter n_{Streu} .

Im Folgenden werden Variationen der Helixorientierung durch Drehung um die x -Achse untersucht (siehe Bild 5.12). Auch hier wird ψ wieder über den Bereich von 0° bis

$\psi = 90^\circ$ in Schritten von 15° verändert. An dieser Stelle ist es, wie bereits bei den Rotationen um die z -Achse (Bild 5.2), nicht sinnvoll, den Parameter ψ über 90° ansteigen zu lassen. Betrachtet man nur die möglichen Orientierungen der Helixachse innerhalb der yz -Ebene, wird klar, dass es andernfalls mit einer Gleichverteilung über alle Winkel dazu käme, dass Orientierungen innerhalb eines gewissen Winkelbereichs doppelt so häufig auftreten wie andere. Damit wäre ein komplexes Szenario mit verschiedenen gewichteten Vorzugsrichtungen geschaffen, dass sich einer systematischen Deutung entzieht. Erst bei $\psi = 180^\circ$ läge wieder ein einfacher Fall (jener regellosen Orientierung in der yz -Ebene) vor. Die Ergebnisse der hier vorgestellten Untersuchung finden sich in Bild 5.13. Auffallend ist vor allem, dass mit steigendem Parameter ψ die kopolare Reflektion sinkt, während die kopolare Transmission steigt. Dass sich zudem die Resonanz der Schicht (abgelesen am Minimum von T_{ko}) zu höheren Frequenzen verschiebt, ist zuförderst eine Folge der geringeren Anregung jeder Helix durch die einfallende Welle. Gleichzeitig verringern sich kreuzpolare Reflektion und Transmission so, dass die Kurven nahezu deckungsgleich sind. Das für kreuzpolare Wellen verantwortliche magnetische Dipolmoment $p_y^m \mathbf{e}_y$ überwiegt folglich bei dieser Art der Variation das entsprechende elektrische (siehe Diskussion zu Bild 5.9). Effekte, die im Fall eines bi-isotropen chiralen Materials die Auslöschung der kreuzpolaren Reflektion bei gleichzeitigem Auftreten der kreuzpolaren Transmission zur Folge haben, können demnach überwiegend auf Rotationen um die z -Achse bzw. durch Rotationen in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle zurückgeführt werden. Nichtsdestotrotz zeigt sich auch hier, wie in Bild 5.14 am Beispiel der kopolaren Reflektion illustriert, dass sich Fehler, die bei der ausschließlichen Beschreibung durch Dipolmomente entstehen, bei einer zufälligen Anordnung wieder herausheben können. Der Frequenzversatz sinkt von 150 MHz auf etwa 20 MHz.

Die bisher in dieser Arbeit besprochenen Drehungen werden für die Betrachtungen des nächsten Kapitels kombiniert, um den Raum der frei wählbaren Parameter der Einfachheit halber zu verkleinern. Dieses Ziel lässt sich dadurch erreichen, dass lediglich der maximale Winkel (ψ), den die Helixachse mit der originalen Achse (y -Achse) bildet, festgelegt wird. Die Ebene der Rotation ist frei. Folglich handelt es sich damit um die Hintereinanderausführung einer Drehung um die x - und um die z -Achse. Gleichzeitig wird eine Drehung um die Helixachse durchgeführt. Der entsprechende maximale Drehwinkel steigt linear mit dem Parameter ψ an, bis schließlich für $\psi = 90^\circ$ eine vollständige Regellosigkeit der Helixorientierungen erreicht ist. Die Ergebnisse finden sich im Anhang in Bild E.6 bzw. Bild E.7. Prinzipiell repräsentieren diese eine Überlagerung aller zuvor besprochenen Effekte, so dass auf eine detaillierte Verdeutlichung der Ergebnisse verzichtet wird. Ein wichtiger Punkt soll aber nicht unerwähnt bleiben: Im regellosen Fall ($\psi = 90^\circ$) ergeben

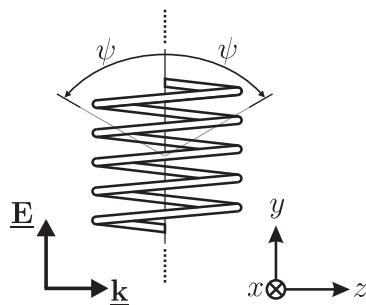


Bild 5.12: Darstellung der möglichen Achsrotation der Helix.

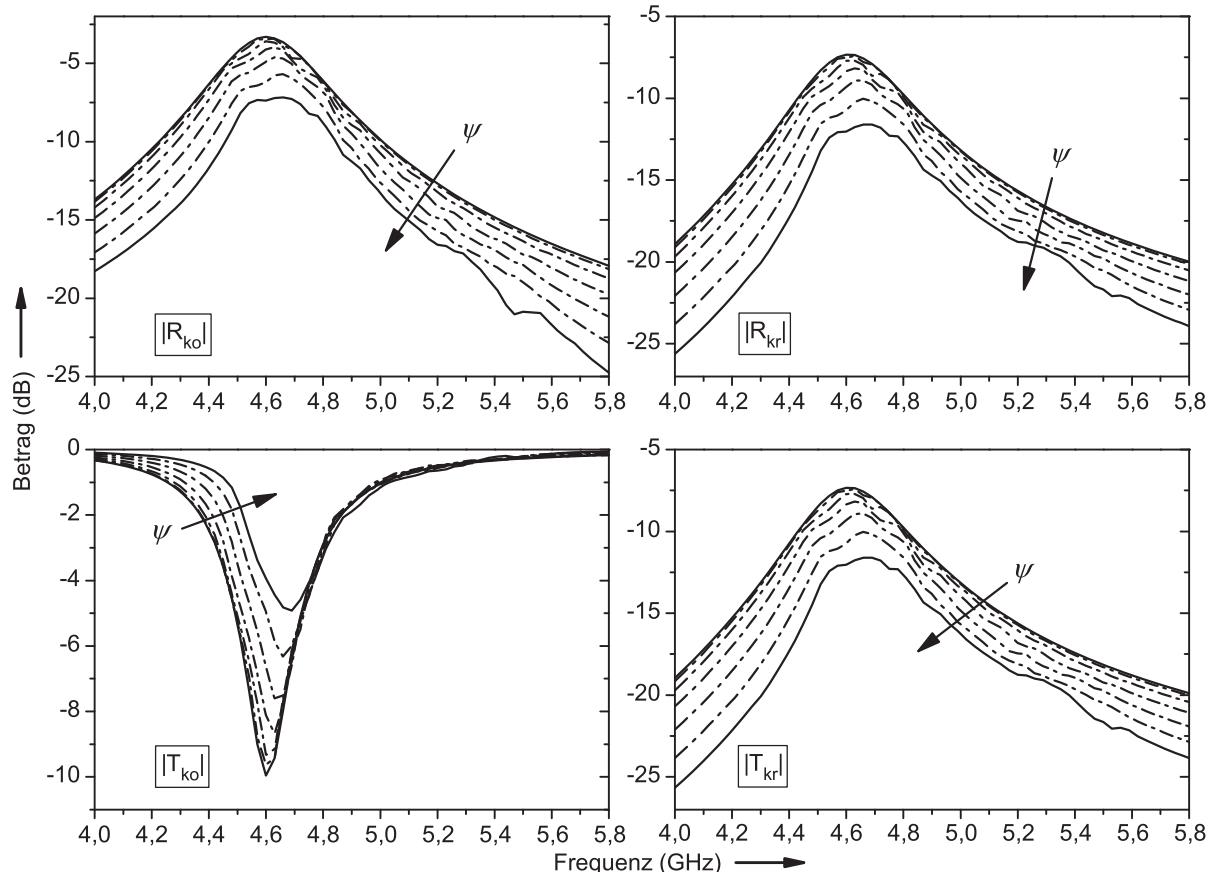


Bild 5.13: Rotationen der Helixachse in der yz -Ebene: Einfluss des Parameters ψ auf die Streuparameter der Schicht. Durchgezogene Linien: $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$, strichpunktuierte Linien: $\psi = i \cdot 15^\circ$ mit $i = 1 \dots 5$.

sich im Vergleich zu den vorigen Betrachtungen noch kleinere Unterschiede zwischen der Lösung, die auf Basis der Dipolmomente erhalten wird, und derjenigen, die aus der Berücksichtigung noch höherer Momente hervorgeht (siehe dazu Bild E.7). Damit scheinen sich die Annahmen von Dipol-Interaktionen zur Berechnung chiraler (bi-isotroper) Materialien aus [18, 37, 45, 95, 97] zu bestätigen.

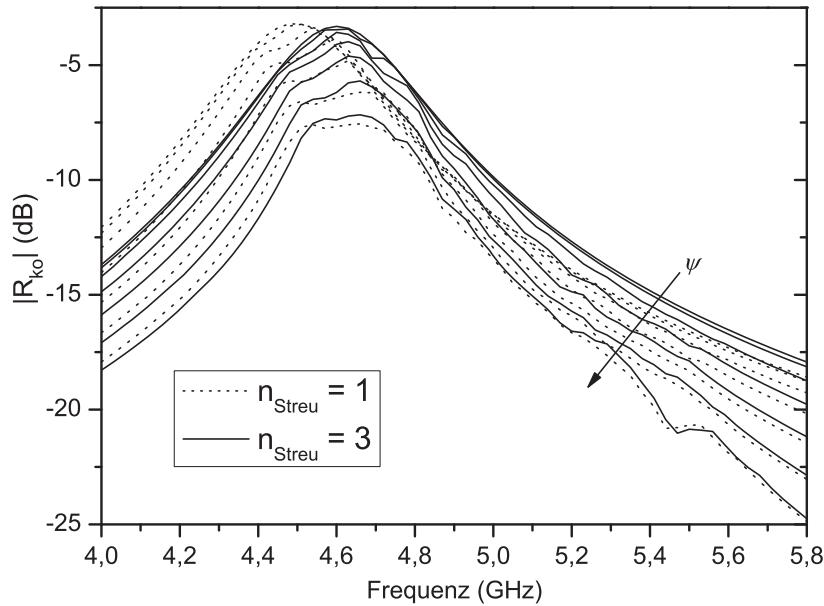


Bild 5.14: Rotationen der Helixachse in der yz -Ebene: Kopolare Reflektion für den Übergang von der periodischen zur zufälligen Schicht.

5.3.2 Positionen

Bisher wurde lediglich die Orientierung der Helix variiert, nicht deren Position. Hier bietet sich wiederum eine getrennte Betrachtung für die drei Achsen des Koordinatensystems an. Die sich ergebenden Effekte lassen sich aber auch anhand einer kombinierten Versuchsanordnung mit Translationen in allen drei Raumrichtungen erläutern. Zunächst ist es dafür notwendig die Dicke der Schicht (d) bzw. einer Einheitszelle zu definieren. Hier wird sie mit $d = D = 3\text{ mm}$ festgelegt. Analog zu den Drehwinkeln wird ein maximaler Positionsversatz ψ_p eingeführt, der zudem aus Gründen der Vergleichbarkeit auf den mittleren Abstand d_m der Partikel gemäß

$$d_m = (db^2/N_c)^{1/3} \quad (5.2)$$

normiert ist. In obiger Gleichung bezeichnet b die Kantenlänge der Einheitszelle (siehe Bild 4.1) und N_c die Anzahl der Partikel innerhalb einer Einheitszelle.

Die numerische Implementierung einer auf den periodischen Fall aufbauenden, zufallsbasierten Anordnung ist schwierig. Durch die sequentielle Abarbeitung der Partikel kann es dazu kommen, dass bereits angeordnete Partikel in Frage kommende Positionen blockieren – mit der Folge von Endlosschleifen. In dieser Arbeit hat sich für dieses Problem folgende Herangehensweise bewährt: Der erste Schritt zur Formierung einer Konfiguration besteht in der Festlegung des Abstandes jeder Helix zum originalen Gitterpunkt durch

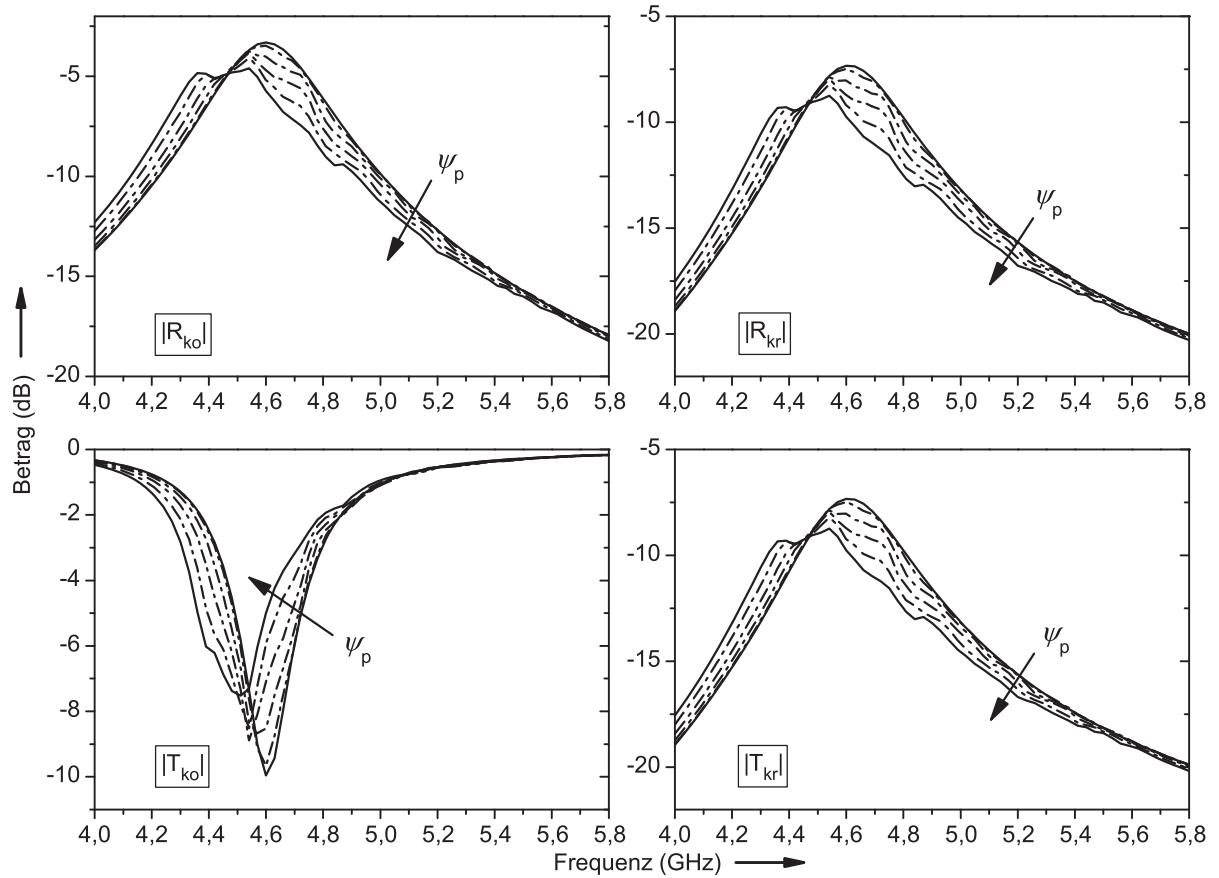


Bild 5.15: Variationen der Helixpositionen: Einfluss des Parameters ψ_p auf die Streuparameter der Schicht. Durchgezogene Linien: $\psi_p = 0$ und $\psi_p = d_m/2$, strichpunktuierte Linien: $\psi_p = i \cdot d_m/10$ mit $i = 1 \dots 4$.

Bildung eines gleichverteilten Zufallswertes aus dem Intervall $[0 \dots \psi_p]$. Mit Hilfe eines numerischen „Schüttleexperimentes“ [98] werden die Helices schließlich in vielen aufeinander folgenden kleinen Schritten von ihrer originalen (periodischen) Position versetzt, bis sie schließlich den vorher definierten Abstand aufweisen. Die Berechnung einer angemessenen Schrittweite erfolgt hierbei adaptiv, bis eine gewisse Kollisionswahrscheinlichkeit (40-70%) vorherrscht.

Die Ergebnisse finden sich in Bild 5.15, wobei der Parameter ψ_p im Bereich von $[0 \dots d_m/2]$ verändert worden ist. Größere geometrische Abweichungen sind aufgrund der im periodischen Fall schon sehr eng beieinander positionierten Helices nicht möglich. Hier zeigt sich ebenfalls, dass die kreuzpolare Reflektion und Transmission stets gleich sind und sich die Verhältnisse der dafür verantwortlichen Dipolmomente folglich kaum ändern. Gleichzeitig verschiebt sich die Resonanz der Schicht mit wachsender Unordnung zu tieferen Frequen-

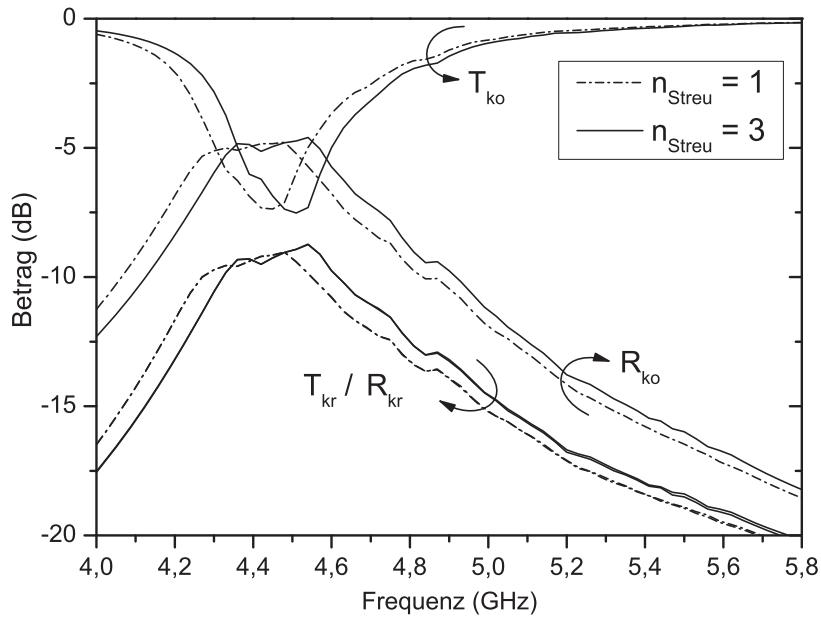


Bild 5.16: Variationen der Helixpositionen: Streuparameter für $\psi_p = d_m/2$.

zen. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Helices im Mittel stärker belastet werden, obwohl der mittlere Abstand der Helices nach Gleichung (5.2) konstant bleibt. Diese Tatsache verwundert nicht, da die gegenseitige Kopplung der Helices keine lineare Funktion des Abstandes zueinander ist.

Es bleibt anzumerken, dass in diesem Beispiel die Positionen einer einem Gitterpunkt zugeordneten Helix in einem gewissen Raum zwar gleichverteilt sind, aber durch die Unmöglichkeit des gegenseitigen Durchdringens miteinander korreliert sein können. Für analytische Methoden lassen sich solche Verteilungen beispielsweise durch statistische Mittel zweiter Ordnung [99] charakterisieren.

In Bild 5.16 sind alle hier betrachteten Streuparameter für $\psi_p = d_m/2$ illustriert. Es ergibt sich ein Frequenzversatz von etwa 60 MHz zwischen der Lösung für $n_{Streu} = 1$ und $n_{Streu} = 3$. Berücksichtigt man den ursprünglichen Wert von 150 MHz, demonstriert dies, dass sich Fehler nicht nur durch rotierte, sondern auch durch in der Position versetzte Helices effektiv herausmitteln können. In Hinblick darauf hat das folgende Kapitel nicht nur den Übergang auf mehrschichtige Anordnungen zum Thema, sondern auch die gleichzeitige Berücksichtigung von Rotationen und Translationen.

6 Mehrlagige Schichten

In diesem Kapitel erfolgt der Übergang zu mehrlagigen Strukturen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, aber im Sinne einer Vereinfachung der Auswertungen, werden Schichten betrachtet, die sich zu gleichen Teilen aus links- und rechtsgedrehten Helices zusammensetzen. Diese sind immer so positioniert, dass keine kreuzpolaren Wellen angeregt werden. Das Kapitel startet mit einem einfachen Beispiel. Zur Vermeidung von Wiederholungen werden die Streumechanismen aber nicht so tiefgehend behandelt wie im vorigen Kapitel.

Es liegt nahe, mehrlagige Strukturen mit vielen kleinen Einschlüssen und einer gewissen Dicke als homogenes Medium zu verstehen. Dieses ließe sich beispielsweise durch Inversion der erhaltenen Streuparameter auf Basis *äquivalenter* Materialparameter beschreiben (z.B. [100, 101]). Im Gegensatz dazu lassen sich *effektive* Materialparameter, wie in der Einleitung bereits erwähnt, aus der Anwendung von Mischformeln gewinnen. Der Frage, inwiefern sich Mischformeln zur Beschreibung der untersuchten kompositen Schichten eignen, wird im weiteren Verlauf des Kapitels am Beispiel der Clausius-Mossotti-Theorie und einer dreischichtigen Anordnung nachgegangen. Anstatt die äquivalenten den effektiven Materialparametern gegenüberzustellen, erfolgt der Vergleich der berechneten Streuparameter. Die Unterschiede der Theorien und die Konsequenzen lassen sich daran wesentlich anschaulicher darlegen.

6.1 Ein Beispiel

Der Ausgangspunkt der Untersuchung ist die Erweiterung der periodische Anordnung aus Kapitel 4.4 (siehe dazu Bilder 4.7 und 4.8 auf Seite 50) auf den Fall zweier hintereinander positionierter Schichten. Der Abstand der Lagen beträgt, analog zur zweidimensionalen Rasterung mit $D = 3$ mm, ebenfalls D .

Die zunächst untersuchte Zufallsgröße stellt die Variation der Positionen dar. Bild 6.1 zeigt die Reflektion und Transmission für verschiedene Werte von ψ_p , welche auf den mittleren Abstand d_m (Gleichung 5.2) normiert sind. Hierbei ist die Schichtdicke zu $d = 6$ mm gewählt, d.h. alle Partikel befinden sich vollständig innerhalb der durch die Dicke definierten unendlichen Scheibe. Insgesamt 72 Helices pro Einheitszelle werden mit jeweils $n_{Streu} = 3$

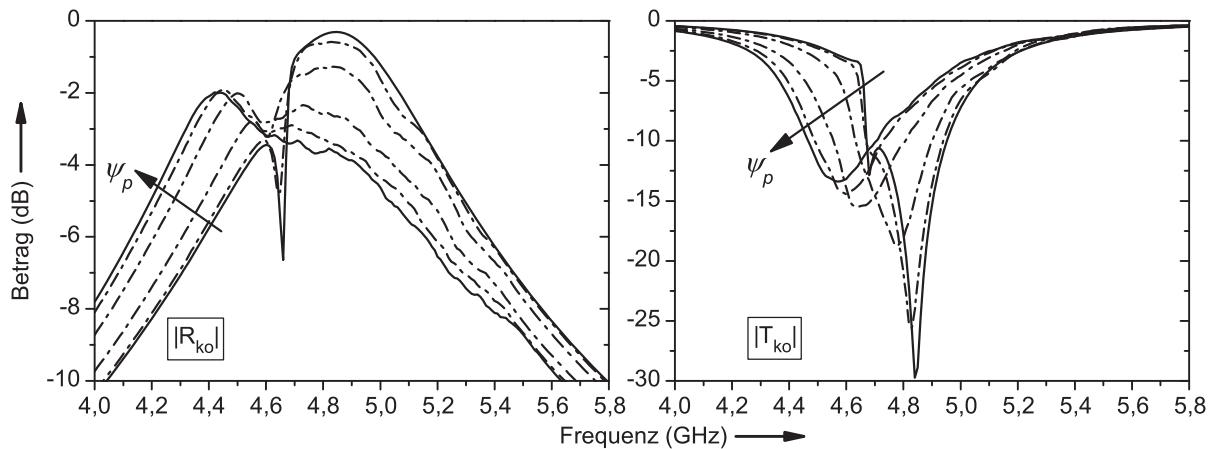
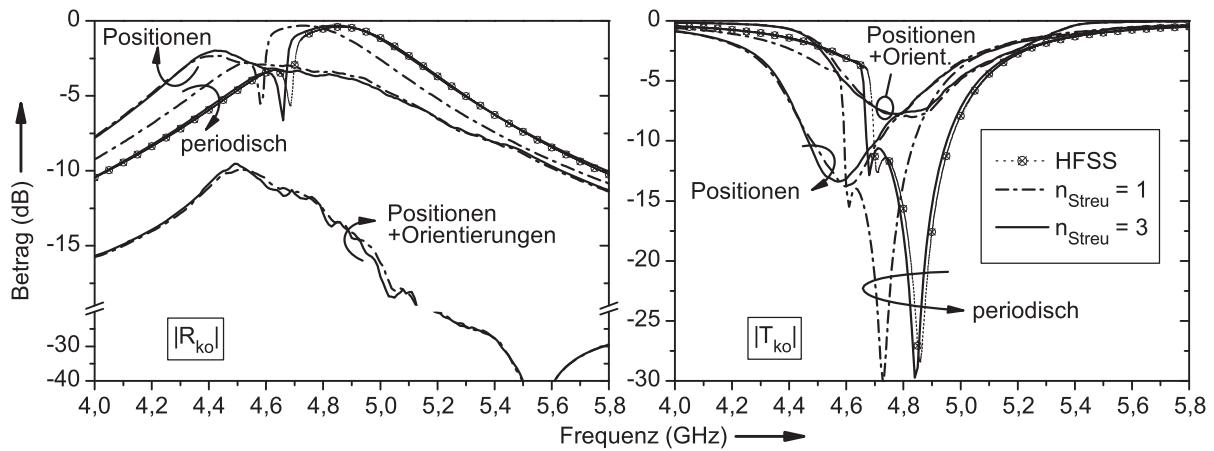


Bild 6.1: Variationen der Helixpositionen: Einfluss des Parameters ψ_p auf die Streuparameter der Schicht. Durchgezogene Linien: $\psi_p = 0$ und $\psi_p = d_m$, strichpunktuierte Linien: $\psi_p = i \cdot d_m / 5$ mit $i = 1 \dots 4$.

beschrieben. Man erkennt deutlich, dass im periodischen Fall eine zusätzliche Resonanz bei $f \approx 4,65$ GHz auftritt. Dies ist durch die Wechselwirkungen der beiden Schichten zu erklären. Erhöht man den Parameter ψ_p , ergibt sich ein allmähliches Aufweichen dieser Resonanz bedingt durch unterschiedliche gegenseitige Verkopplungen. Ähnlich wie im einlagigen Fall führt die Verringerung der Ordnung zu kleineren Distanzen zwischen den Partikeln, so dass sich die ausgeprägtere Resonanz der Schicht (Maximum der Reflektion, Minimum der Transmission) zu tieferen Frequenzen verschiebt. Ferner erweckt die Tatsache, dass sich die Kurven für $\psi_p = 0,8 \cdot d_m$ und $\psi_p = d_m$ nur leicht unterscheiden, den Eindruck, dass mit $\psi_p = d_m$ der vollends zufällige Zustand bezüglich der Positionierung praktisch erreicht ist. Aufgrund der schon im vorigen Abschnitt erfahrenen Beschränkung der Methode zur Platzierung der Partikel wird dieser Punkt nicht eingehender untersucht.

Einen Vergleich mit den aus der Dipolnäherung erhaltenen Ergebnissen gestattet Bild 6.2. Dabei werden die Kurven für die periodische Schicht, für den Fall zufälliger Positionen ($\psi_p = d_m$) und für jenen mit zusätzlich regellosen Orientierungen in allen drei möglichen Drehrichtungen ($\psi_p = d_m, \psi = 90^\circ$) dargestellt. Wie erwartet ergibt sich im periodischen Fall eine größere Abweichung zwischen den Lösungen für $n_{Streu} = 1$ und $n_{Streu} = 3$. Hier lässt sich ein Frequenzversatz von ca. 120 MHz ausmachen. Dass sich die auftretenden Fehler in der Feldbeschreibung bei der ausschließlichen Berücksichtigung von Dipolmomenten und regellos orientierten Helices (wie hier zu sehen) effektiv herausmitteln, kann aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels geschlossen werden. Dass dieses Verhalten bereits bei zufälligen Positionen auftritt, ist bemerkenswert, lässt sich aber dadurch erklären,


 Bild 6.2: Variationen der Helixpositionen: Streuparameter für $\psi_p = d_m/2$.

dass hier zwar nicht die Orientierungen der Partikel bezüglich des globalen Koordinatensystems variieren, aber die auf die Helixachsen bezogenen, relativen Winkel zwischen den Helices. Die unterschiedliche Stärke der externen Anregung, welche durch den Winkel der Helixachse zur Polarisationsrichtung der einfallenden Welle bestimmt wird, spielt für den Mittelungseffekt offenbar keine Rolle.

Zum Zweck der Verifikation finden sich in Bild 6.2 darüber hinaus die mit Hilfe des Programms HFSS [88] simulierten Daten der periodischen Schicht. Hier ergibt sich ein Frequenzversatz von ca. 25 MHz zur Lösung des Streuansatzes mit $n_{Streu} = 3$, was mit dem in Kapitel 4.4 beleuchteten Verhalten vergleichbar ist.

6.2 Vergleich mit dem Clausius-Mossotti-Materialmodell

Der aus der Theorie der effektiven Medien bekannte Ansatz von Clausius und Mossotti wird an dieser Stelle nicht vollständig skizziert, da er in der einschlägigen Literatur (z.B. [23]) hinreichend erläutert ist. Eine umfassende Beschreibung findet sich zudem in der Einleitung dieser Arbeit. Es genügt zu wissen, dass sich die effektiven Materialparameter eines allgemeinen bianisotropen Mediums der Theorie zufolge über einen einfachen analytischen Zusammenhang berechnen lassen (siehe dazu Anhang D). Neben den Eigenschaften des Wirtsmaterials (hier Luft) und der Dichte n der Einschlüsse werden die mittleren Dipolpolarisierbarkeiten der Einschlüsse benötigt. Bei bekannten Dipolpolarisierbarkeiten ist die Mittelung über eventuell verschiedene Einschlüsse und ihre jeweiligen Dichten (die sogenannte „Multiphasenmischung“) und die Verteilung der Orientierungen durchzuführen. Der Einfachheit halber wird dieser Vorgang in dieser Arbeit nicht getrennt vom Streuansatz

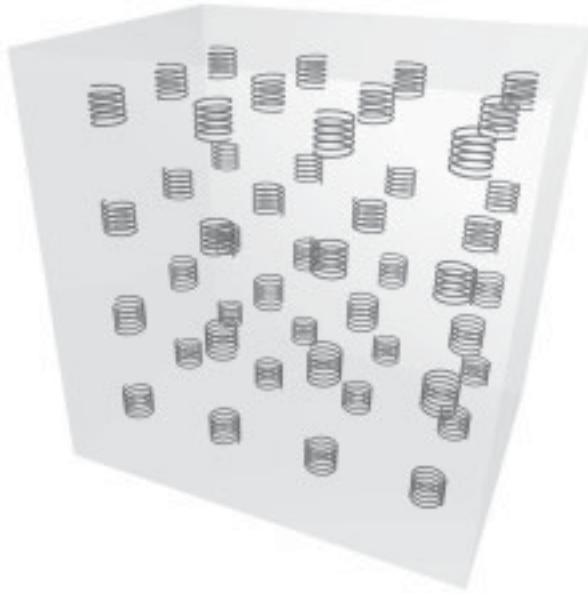


Bild 6.3: Quaderförmiger Ausschnitt eines Beispiels der in diesem Kapitel betrachteten Schichten. Die rechts- und linksgedrehte Helices sind in drei Lagen und in einem festen Raster (hier im Bild: $D = 6 \text{ mm}$) angeordnet.

durchgeführt. Tatsächlich wird im Streuansatz bereits eine statistisch relevante Anzahl von T-Matrizen berechnet. Mittelt man diese über alle Partikel und Anordnungen, erhält man entsprechend die mittlere T-Matrix $\langle \underline{\underline{T}} \rangle$ der Einschlüsse. Die mittleren Dipolpolarisierbarkeiten bestimmen sich damit laut Gleichung (3.1) direkt aus einer 36 Elemente umfassenden Submatrix von $\langle \underline{\underline{T}} \rangle$. Ein wichtiger Aspekt erschließt sich an dieser Stelle sofort: Sowohl die T-Matrix als auch die Dipolpolarisierbarkeiten sind auf den Streukörpermittelpunkt bezogen definiert und nicht auf die Position des Partikels. Wie im vorigen Abschnitt dargelegt, können sich die Streuparameter aber für verschiedene Positionsverteilungen unterscheiden, auch wenn die Dichte konstant bleibt. Was diesen Punkt betrifft findet in der Clausius-Mossotti-Theorie lediglich die Dichte Berücksichtigung. Allein dadurch ergibt sich eine gewisse Unsicherheit, ob die Clausius-Mossotti-Theorie als Mittel zur Vorhersage der Eigenschaften sinnvoll angewendet werden kann.

Bild 6.3 zeigt einen Ausschnitt der Schicht, die im Folgenden als Ausgangspunkt der Untersuchungen dienen soll. Neben den drei Lagen rechts- und linksgedrehter Helices fällt vor allem ein größerer Abstand zwischen den Partikeln auf, die in einem Raster von $D = 6 \text{ mm}$ angeordnet sind. Der größere Abstand soll der Erwartung Rechnung tragen, dass die Clausius-Mossotti Mischformel eine gute Vorhersage am ehesten für Medien mit einer geringen Dichte der Einschlüsse liefert.

Durch den vorgegebenen Aufbau werden keine kreuzpolaren Wellen angeregt. Zur phänomenologischen Beschreibung im Kontext eines effektiven Mediums genügen damit immer Permittivität und Permeabilität, die durch den geordneten Aufbau allerdings keine skalar, sondern tensorielle Größen sind. Wählt man die Orientierungen der Helices so, dass

die Vorzugsrichtung bzw. die Bezugsrichtung wie zuvor bei zufälligen Schichten immer in Richtung einer der Achsen des Koordinatensystems liegt, folgt für die relativen Materialparameter in guter Näherung:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_r = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ und } \underline{\underline{\mu}}_r = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Die Diagonalelemente sind dabei im allgemeinen Fall unterschiedlich, was gleichbedeutend mit dem Vorhandensein richtungs- und polarisationsabhängiger Eigenschaften des anisotropen Mediums ist. Erst bei völliger Reglosigkeit der Orientierungen findet sich

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \text{ und } \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} \quad (6.2)$$

und das folgende isotrope Medium ist durch skalare Größen beschreibbar.

Sind die effektiven Materialparameter bekannt, können Reflektions- und Transmissionskoeffizienten nach Festlegung der Schichtdicke aus den Stetigkeitsbeziehungen an den beiden Grenzflächen zum umgebenden Medium berechnet werden. Eine Herleitung der dafür genutzten mathematischen Beziehungen ist z.B. in [102] zu finden. Es bleibt die Frage, wie die Schichtdicke festgelegt wird. Bei Scheiben eines Mediums mit sehr vielen Lagen, so dass der Durchmesser der Grundbausteine um viele Größenordnungen kleiner ist als die Dicke, ist diese Diskussion wenig relevant. Im Gegensatz dazu stellen die in dieser Arbeit beschriebenen Anordnungen eher sehr dünne Schichten dar. Ein Versuch zur Lösung des genannten Problems für rein zufällige Anordnungen (Positionen und Orientierungen) wurde bereits in [95] unternommen. Starke unterschiedliche Verkopplungen (Resonanzaufspaltungen) erschweren in [95] jedoch eine erschöpfende Klärung. Deshalb wird dieser Punkt hier als Ergänzung für periodische Anordnungen beleuchtet.

Bild 6.4 zeigt die berechneten Streuparameter für die periodische Anordnung aus Bild 6.3. Hierbei fällt die homogene ebene Welle senkrecht zur Schicht ein, der Vektor der elektrischen Feldstärke ist parallel zur Achse der Helices gerichtet. Für das Clausius-Mossotti-Modell werden verschiedene Schichtdicken d im Raster von einem Millimeter angesetzt; die jeweilige Dichte n berechnet sich entsprechend durch die Anzahl der Partikel im dann definierten Volumen einer Einheitszelle. Besonders im Transmissionsverhalten sind in der Nähe der Resonanz starke Unterschiede vorhanden, die zum Teil mehr als 10dB betragen. Allerdings treten diese Abweichungen auf einem niedrigen Grundniveau auf. Für welchen Parameter d die beste Übereinstimmung erzielt wird, lässt sich anhand von Bild 6.4 nur schwer einschätzen. Im Prinzip ist immer eine Priorisierung nötig, etwa hinsichtlich des Frequenzbereiches oder des Niveaus der Streuparameter. Um solch eine Beurteilung zu

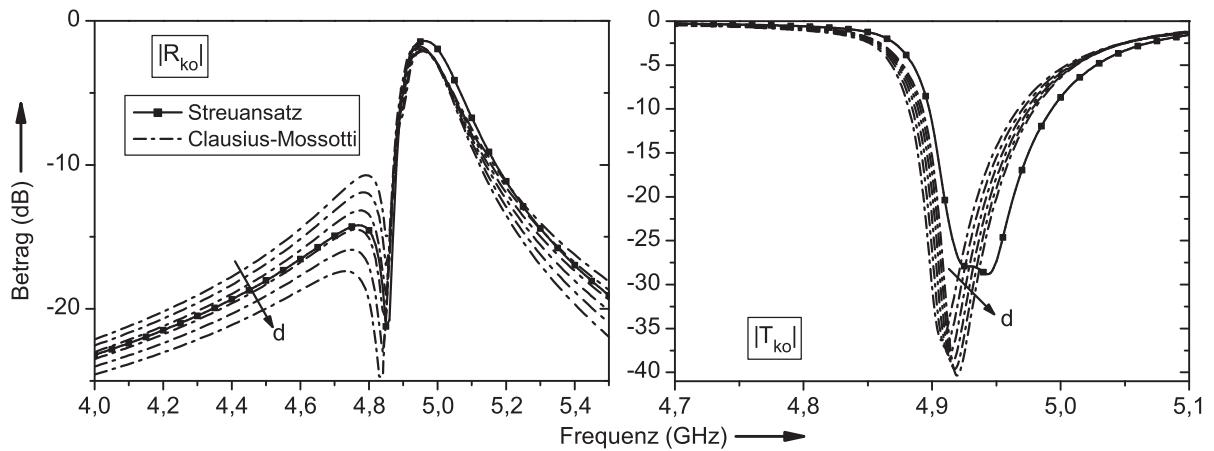


Bild 6.4: Streuparameter bei senkrechtem Einfall für verschiedene gewählte Dicken der Schicht ($d = 15, 16, 17, 18, 19, 20$ mm) im Clausius-Mossotti Modell und Vergleich mit dem Streuansatz ($\psi = 0$).

ermöglichen, wird folgende mathematische Definition der Abweichung δ zwischen Streuansatz und Clausius-Mossotti-Modell (Index „CM“) verwendet:

$$\delta = \frac{1}{N_F} \sum_{i=1}^{N_F} ((|R_{ko,Streu}| - |R_{ko,CM}|)^2 + (|T_{ko,Streu}| - |T_{ko,CM}|)^2) . \quad (6.3)$$

Dabei ist N_F die Anzahl der berücksichtigten Frequenzpunkte, die hier gleichförmig in Schritten von 10 MHz über den in Bild 6.4 dargestellten Frequenzbereich verteilt sind. Gemäß der Definition aus Gleichung (6.3) zeigt sich die kleinste Abweichung bei einer angenommenen Schichtdicke von $d = 18$ mm, worin sich sogar das vorgegebene Raster von $D = 6$ mm als Abstand zwischen den insgesamt drei Lagen widerspiegelt. Das Minimum ist nur sehr grob und exemplarisch bestimmt worden. Dennoch verdeutlicht dieser Wert, der in einer ersten Schätzung bereits antizipiert werden können und zudem zu einer guten Übereinstimmung des Reflektionsparameters führt, dass die Clausius-Mossotti-Theorie für den hier untersuchten Fall der rein periodischen Anordnung mit senkrechtem Welleneinfall als einfache Näherung sinnvolle Anwendung findet.

Für verschiedene Einfallswinkel ist die Abweichung δ , berechnet nach Gleichung (6.3), in Bild 6.5 dargestellt. Hierbei sind zu Vergleichszwecken die Ergebnisse für weitere Schichtdicken aufgenommen. Abgesehen von sehr stumpfen Einfallswinkeln ab ca. 80° , lässt sich im TE-Fall eine stark zunehmende Abweichung bei Vergrößerung des Einfallswinkels feststellen, die im TM-Fall längst nicht so ausgeprägt ist. Tatsächlich ist, wie bereits beim schrägen Einfall an einer periodischen Lage erläutert, für die Stärke der Anregung jeder Helix maßgeblich, welchen Winkel die Helixachse und der elektrische Feldvektor bilden. Das Steigen

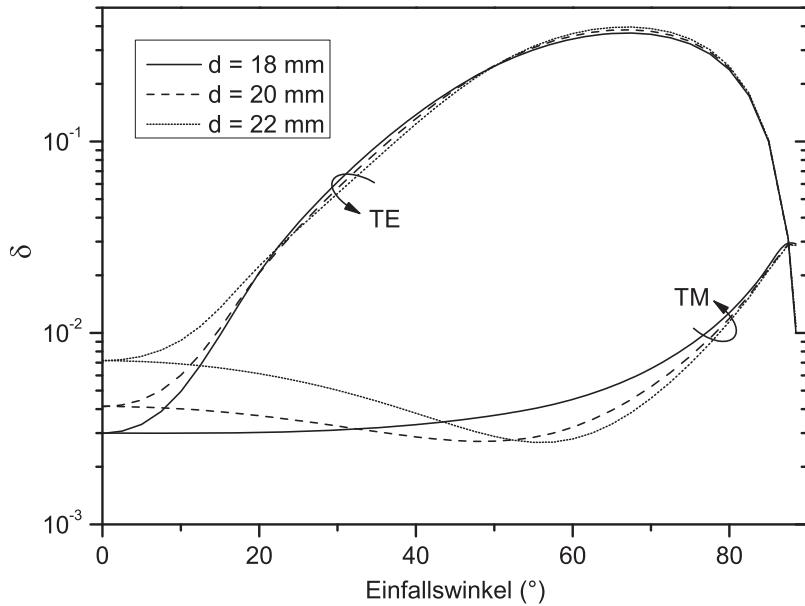


Bild 6.5: Reflektion für verschiedene gewählte Dicken der Schicht im Clausius-Mossotti Modell und Vergleich mit dem Streuansatz ($\psi = 0$).

dieses Winkels bei wachsenden Einfallswinkeln im TM-Fall begünstigt offenbar, dass über einen großen Winkelbereich eine gute Übereinstimmung der beiden Theorien erzielt wird. Auffällig ist ferner, dass die Abweichung δ im TM-Fall und bei Einfallswinkeln von um die 60° sogar kleiner wird, wenn eine größere Schichtdicke im Clausius-Mossotti-Modell angenommen wird. Dies ist ein weiterer Hinweis darauf, wie schwierig die Definition einer geeigneten Schichtdicke ist.

Im Folgenden wird die Dichte der Partikel durch Variation der Rasterung der Schicht, ausgedrückt durch den Abstand D , variiert. Die Schichtdicke für den Ansatz nach Clausius-Mossotti wird dabei wie zuvor angenommen, d.h. jeweils als das Dreifache des Parameters D . Eine Darstellung der Ergebnisse für den Reflektionsparameter findet sich in Bild 6.6. Der Übersichtlichkeit halber wird an dieser Stelle auf eine Abbildung zum Transmissionsverhalten verzichtet, die entsprechenden Ergebnisse sind jedoch in Bild E.8 im Anhang wiedergegeben. Auffällig in Bild 6.6 ist, dass sich für sehr nahe Partikel ($D = 3 \text{ mm}$) und die daraus resultierende starke gegenseitige Kopplung ein größer werdender Frequenzunterschied im Resonanzverhalten ergibt. Sobald also Momente höherer Ordnung ($n_{\text{Streu}} \geq 1$) in Erscheinung treten, zeigt die auf einem einfachen Dipolmodell beruhende Clausius-Mossotti-Theorie einige Schwächen. Diese Tatsache wird durch die recht gute Übereinstimmung untermauert, wenn ebenfalls im Streuansatz lediglich Dipolmomente Berücksichtigung finden ($n_{\text{Streu}} = 1$). Im Kontext der Ergebnisse aus Bild 6.2 wird außerdem

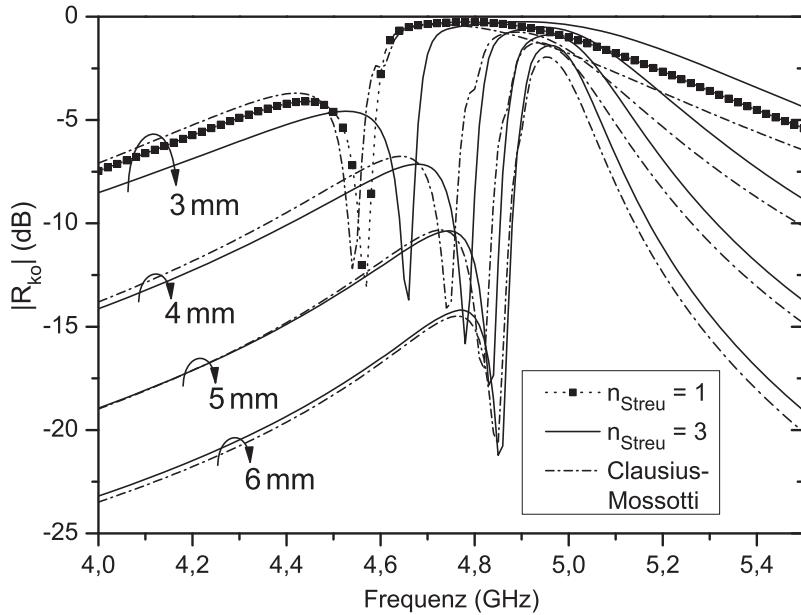


Bild 6.6: Reflektion der dreilagigen periodischen Schicht bei verschiedener Rasterung D und senkrechttem Welleneinfall. Vergleich von Clausius Mossotti-Modell und Streuansatz.

klar, dass im Fall zufälliger Positionen weitere Abweichungen zu erwarten sind, die sich z.B. durch unterschiedliche Werte der maximalen Reflektion ausdrücken: Die Dichte und die mittleren Dipolpolarisierbarkeiten als Eingabeparameter ändern sich nicht, was nach Clausius-Mossotti zur gleichen Lösung führt. Tatsächlich verringert sich das Maximum der Reflektion durch die dann auftretenden unterschiedlichen Kopplungen innerhalb des Mediums.

Das hier am Beispiel des Reflektionsparameters diskutierte Verhalten gilt prinzipiell auch für die Transmission. Allerdings unterscheiden sich die Kurvenverläufe, wie in Bild E.8 aufgezeigt, zum Teil erheblich, insbesondere was das Minimum der Transmission betrifft.

Nachfolgend wird die Anwendbarkeit der Clausius-Mossotti-Theorie für Schichten mit geringerer Ordnung erörtert. Als Basis dient die periodische Anordnung mit $D = 4 \text{ mm}$, für die, zumindest was die Reflektion betrifft, eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den beiden hier diskutierten Modellen besteht. Neben den Streuparametern für den periodischen Fall sind in Bild 6.7 vergleichend jene für eine weniger geordnete und für eine rein zufällige Schicht dargestellt ($\psi = 54^\circ$, $\psi_p = 0,6 d_m$ bzw. $\psi = 90^\circ$, $\psi_p = d_m$). Hier fällt vor allem auf, dass der Reflektionsparameter nach Clausius-Mossotti bei erhöhter Zufälligkeit einen durch mehrere Resonanzen geprägten Verlauf in der Nähe des Reflektionsmaximums aufweist. Außerdem nehmen die Unterschiede der beiden Modelle in der Transmission für steigende Zufälligkeit zu. Die durch den Streuansatz ermittelte Resonanz

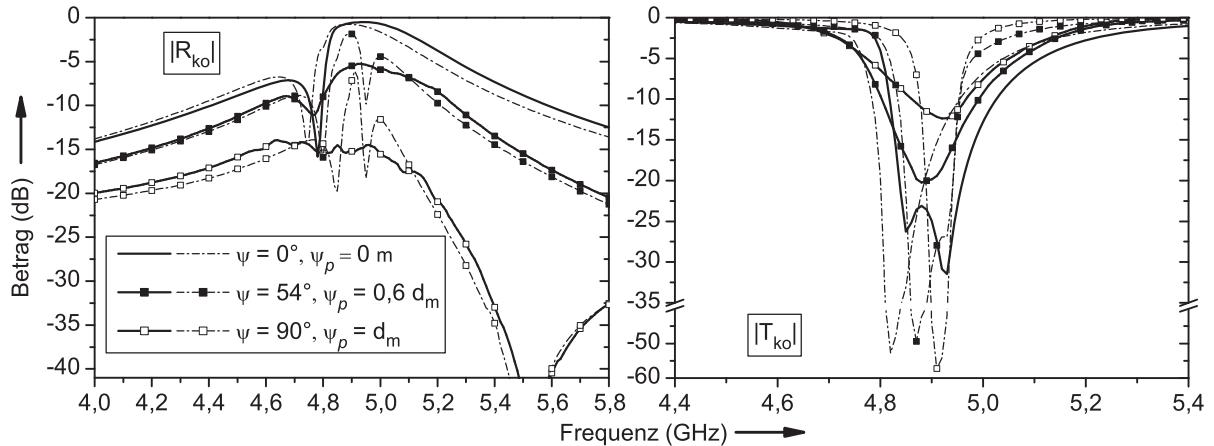


Bild 6.7: Streuparameter für $D = 4$ mm und verschiedene Grade der Zufälligkeit. Durchgezogene Linien: Streuansatz, strichpunktige Linien: Clausius-Mossotti-Theorie.

ist wesentlich breiter und nicht so stark ausgebildet. Der Unterschied des Transmissionsminimums beträgt für die rein zufällige Schicht mehr als 45 dB. Hier zeigen sich deutlich die Grenzen der Clausius-Mossotti-Theorie, die auf der Annahme basiert, dass alle Partikel in gleicher Weise mit der Umgebung wechselwirken. Konkret bedingen unterschiedliche gegenseitige Kopplungen eine Vielzahl von Resonanzen bei unterschiedlichen Frequenzen. Das Verhalten der Schicht gründet sich auf die Überlagerung aller Resonanzen, was zu einer Reduzierung der Güte der als Resonator aufgefassten Schicht führt. Zudem reproduziert sich die schlechte Übereinstimmung im Fall der Transmission deutlich wenn zufällige Schichten vor einem metallischen Schirm betrachtet werden [18,95]. Dies lässt den Schluss zu, dass die Clausius-Mossotti-Theorie für eine Vielzahl von Strukturen, bestehend aus den hier betrachteten Helices, nur unzureichend bzw. nur zum Zweck der ersten Schätzung anwendbar ist.

Nichtsdestotrotz lässt sich nach den vorangegangenen Überlegungen festhalten, dass die Clausius-Mossotti-Theorie Stärken aufweist, wenn

- eine möglichst gleichförmige Verteilung der Partikel vorliegt,
- zwischen den Partikeln keine starke Kopplung auftritt, z.B. durch eine geringe Dichte.

Um den letzten Punkt weiter zu erhärten, wird im Folgenden die rein zufällige Schicht betrachtet, die aus der periodischen Anordnung mit $D = 4$ mm hervorgeht. Hier erfolgt jedoch das Einbeziehen unterschiedlicher Dämpfung durch Kugeln (Durchmesser 3 mm) eines verlustbehafteten Dielektrikums, in welche die Helices zentriert positioniert sind. Bild 6.8 stellt die Ergebnisse dar. Wie erwartet zeichnet sich mit Erhöhung der Dämpfung

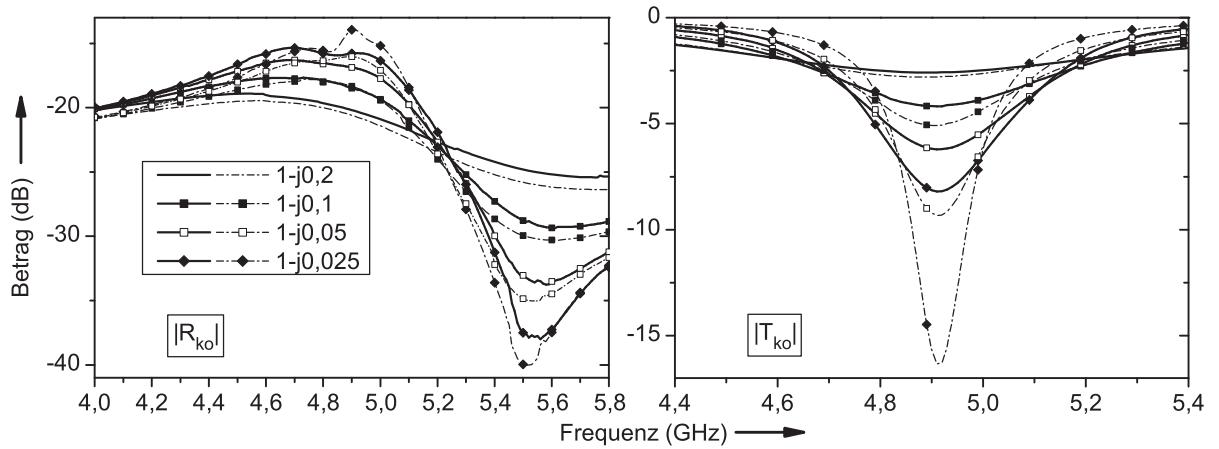


Bild 6.8: Streuparameter für $\psi = 90^\circ$, $\psi_p = d_m$ und unterschiedlich gewählte Dielektrika der umhüllenden Kugel (repräsentiert durch den relativen Permittivitätsparameter). Durchgezogene Linien: Streuansatz, strichpunktierter Linien: Clausius-Mossotti-Theorie.

eine steigende Übereinstimmung zwischen den Theorien ab. Verringert man folglich die gegenseitige Kopplung, wie etwa im Fall eines Mikrowellenabsorbers, durch ein dämpfendes Hintergrundmedium [18], ergibt sich unter Umständen die Möglichkeit, auch bei zufälligen Schichten eine Dimensionierung mit Hilfe der Clausius-Mossotti-Theorie sinnvoll vornehmen zu können [17]. In Kapitel 7 wird dieser Gedanke bei Versuchen mit zufälligen Schichten wiederholt aufgegriffen.

7 Experimente

Die im Verlauf der Arbeit entwickelte Theorie und die gewonnenen Erkenntnisse sollen in diesem Kapitel durch Messungen fundiert werden. Dafür wird zunächst der zu diesem Zweck herangezogene Messplatz beschrieben. Eine umfassende experimentelle Studie ist langwierig und mit hohem Aufwand verbunden. Daher werden anschließend beispielhaft einige Fälle herangezogen, die eine punktweise Überprüfung der Ergebnisse ermöglichen.

7.1 Messplatz

Die in dieser Arbeit genutzte Vorrichtung zur Vermessung der Reflektions- und Transmissionseigenschaften der hergestellten Schichten ist in Bild 7.1 dargestellt. Die wichtigsten Be-



Bild 7.1: Freiraummessplatz in Transmissionssstellung. Bezeichnungen: 1) Breitband-Hornantenne, 2) dielektrische Linse, 3) Probenhalter, 4) feinmechanisches Verschiebesystem.

standteile dieses Aufbaus sind die beiden Antennenelemente. Dabei handelt es sich jeweils um eine Kombination aus Breitbandhorn und dielektrischer Linse (Material: PTFE¹). Letztere wird eingesetzt, um die abgestrahlte Leistung auf die Messebene zu fokussieren [103]. Im Prinzip stellt diese Anordnung einen Linsenleiter dar [104]. In der Messebene zwischen

¹PTFE ist auch unter dem Handelsnamen Teflon® der Firma DuPont bekannt.

f in GHz	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
w in m	0,262	0,239	0,222	0,207	0,196	0,185

 Tabelle 7.1: Strahltaille w für ausgewählte Frequenzen

den beiden Antennen ergibt sich folglich eine lokal begrenzte Welle, die idealerweise eine transversal elektromagnetische Feldverteilung mit Gauss-förmigem Profil aufweist. Die Breite des Gauss'schen Strahls ist ein wichtiger Parameter: Die Forderung nach geringen Randeffekten konkurriert mit jener, die Statistik eines kompositen Materials durch eine entsprechend große Ausleuchtung der Probe genau genug zu erfassen. Die Kenndaten der Antennenelemente sind dabei so gewählt, dass sich ein Kompromiss zwischen Messdynamik, Größe des Messobjektes und Handhabbarkeit des Aufbaus ergibt [105]. Für die frequenzabhängige Strahltaille² w des Messplatzes lässt sich folgende Relation anführen:

$$w \approx \sqrt{\frac{1,72 \cdot 10^8 \text{ m}^2/\text{s}}{f}}. \quad (7.1)$$

Zur Verdeutlichung sind einige Strahlbreiten für den in dieser Arbeit für Messungen genutzten Frequenzbereich in Tabelle 7.1 aufgelistet.

Als Signalquelle und Messempfänger zugleich kommt ein vektorieller Netzwerkanalysator³ zum Einsatz, der über koaxiale Kabel an die Eingangsbuchsen der Hornantennen angeschlossen wird. Zuvor muss jedoch durch eine Kalibrierung sicher gestellt sein, dass systematische Messfehler durch nichtideale Bauteile im Gerät (Koppler, Kabel, Übergänge etc.) und schließlich auch durch den Aufbau selbst (Eingangsimpedanz der Antennen, Reflexion an den Linsen) weitgehend unterdrückt werden. Die notwendigen Kalibrierstandards werden dafür in der Messebene am Probenhalter angebracht.

Für den Fall, dass der senkrechte Einfall untersucht wird, bieten sich zwei Möglichkeiten der vektoriellen Kalibrierung [106] an: Zum einen die TRL-Kalibrierung (engl.: *Through-Reflect-Line*) und zum anderen, wenn nur die Kenntnis der Reflektionscharakteristik von Interesse ist, die OSL-Kalibrierung (engl.: *Open-Short-Load*) bei der Verwendung von nur einer Antenne. Der *Reflect-* bzw. *Short*-Standard wird dabei durch eine sehr gut leitende metallische Platte realisiert, während der Probenhalter im Fall des *Through-* und *Load*-Normals offen gelassen wird. Mit Hilfe des feinmechanischen Verschiebesystems [107] kann eine Antenne in ihrer Position präzise von der Messebene weg verschoben werden. Der

²Mit der Strahltaille ist der gedachte Durchmesser eines Kreises gemeint, auf welchem die abgestrahlte Leistungsdichte der Antennen auf den halben Wert ($\equiv -3 \text{ dB}$) bezüglich der Leistungsdichte im Kreiszentrum gefallen ist.

³Hierbei handelt es sich um das Gerät HP 8510C der Firma Hewlett-Packard.

resultierende längere Weg der Welle im freien Raum bei Transmission stellt damit die Implementierung des *Line*-Standards dar. Auf ähnliche Weise ergibt sich der *Open*-Standard, der als verschobene Metallplatte (engl.: *Offset Short*) ausgeführt wird. Bei den hier gezeigten Messungen hat sich herausgestellt, dass die OSL-Kalibrierung etwas zuverlässiger und robuster ist als die TRL-Kalibrierung. Da die Messungen in dieser Arbeit für Zwecke der Verifikation durchgeführt werden, stellt die Reduzierung der Diskussion auf den Reflektionsparameter keine wesentliche Einschränkung dar. Aus diesem Grund wird für senkrechten Einfall lediglich die OSL-Kalibrierung genutzt.

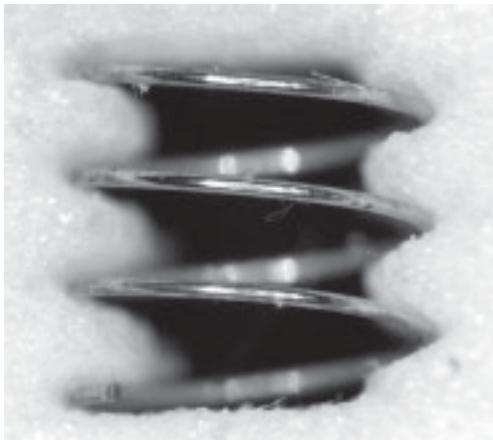
Bei schrägem Einfall ist die Nutzung beider Antennenelemente nötig. Durch die resultierende Antennenanordnung ergeben sich für die Mechanik des Messplatzes wesentlich höhere Anforderungen für eine sinnvolle vektorielle Kalibrierung. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf ein vereinfachtes skalares Verfahren zurückgegriffen (siehe hierzu [105]), welches den Reflektionsparameter der Probe zu zwei gemessenen Referenzen (Metallplatte und offen gelassener Probenhalter) in Beziehung setzt.

7.2 Einlagige Schichten

In diesem Kapitel werden durchgeführte Messungen an zwei verschiedenen einlagigen Schichten vorgestellt, die aus paarweise links- und rechtsgedrehten Helices bestehen. Die Ergebnisse werden zudem mit jenen verglichen, die sich aus der Analyse mit Hilfe des Streuansatzes ergeben. Bezuglich der Herstellung dieser Schichten sind zuvor einige Be trachtungen notwendig, die insbesondere die sich ergebenden Toleranzen zum Thema haben.

7.2.1 Vor betrachtungen

Aus dünnem Kupferdraht hergestellte Federn besitzen nur eine geringe Elastizität. Neben dem nicht idealen Herstellungsprozess des Zulieferers trägt eine weitere Verarbeitung von Hand unweigerlich zu erhöhten geometrischen Abweichungen bei. In diesem Sinn ist die Helixsteigung p , die zudem einen starken Einfluss auf die Resonanzfrequenz hat, am Stärksten betroffen. Für die Herstellung einer Schicht mit einer definierten Ordnung bzw. gewissen Zufälligkeit ist folglich eine Methode wünschenswert, die ein genaues Platzieren ermöglicht und zugleich für eine Kontrolle der Resonanzfrequenzen sorgt. Aus diesem Grund wird die Möglichkeit der Anordnung der Helices in einem Trägermaterial gemäß Bild 7.2 betrachtet. Die Helix (hier im Bild: linksgedreht) befindet sich dabei in einer Aussparung einer 6 mm dicken Platte eines aufgeschäumten und geschlossenporigen Kunststoffes. Hierbei handelt



Steigung p	1,265 mm
Helixradius r_0	2,07 mm
Drahtradius a	0,1 mm
Windungen	3

Bild 7.2: Helix im Trägermaterial und Nominalabmessungen.

es sich um Rohacell® 31HF, dessen relative Permittivität bei 5 GHz nach Herstellerangaben einen geringen Wert von $\epsilon_r = 1,05$ aufweist und der Einfachheit halber im weiteren Verlaufe der Arbeit in den Simulationen wie Vakuum behandelt wird. Die spezielle Form der Aussparung wird mit einem computergestützten Laserschneidesystem in das Material eingebracht. Sieben kleine Einbuchtungen sorgen dafür, dass die Windungen und Drahtenden gestützt werden. Auf diese Weise ist die statistische Verteilung der Helixsteigung stark mit den Positionen der Einbuchtungen verknüpft – mit dem Vorteil, dass letztere eine wesentlich höhere Reproduzierbarkeit aufweisen. Zudem lässt sich die Geometrie der gesamten Aussparung so ausführen, dass eine zuverlässige kraftschlüssige Verbindung zwischen der Helix und dem umgebenden Material ermöglicht wird. Die angesprochene Methode der Positionierung ist prinzipiell skalierbar. Es ergeben sich aber bei kleineren Partikeln (ergo höheren Resonanzfrequenzen) Grenzen, die zum einen aus der endlichen Laserstrahlbreite resultieren und sich zum anderen in einer schlechten Handhabbarkeit erklären. Die Wahl der Geometrie der Helix erfolgte so, dass sowohl der technische als auch der manuelle Aufwand tragbar sind.

Um die Fertigungstoleranzen der Helices und die Wirkung der Platzierungsmethode besser einschätzen zu können, bietet sich die Messung der Resonanzfrequenzen einer Auswahl der Helices an. Hierfür wird eine koaxiale Leitung (Innen- und Außendurchmesser 10 mm bzw. 40 mm) verwendet, die am Anfang mit dem bereits erwähnten, vektoriellen Netzwerk-analysator verbunden ist. Sie besitzt einen am Ende der Leitung um 80 mm fortgeföhrten Innenleiter, der eine ausreichende Anpassung ermöglicht. Zur Messung der Resonanzfrequenzen werden die Helices nah am Ende der koaxialen Leitung zwischen Innen- und Außenleiter positioniert (siehe auch Bild E.9 im Anhang). Bildet man die Differenz aus der beobachteten Reflektion bei eingebrachtem Partikel mit derjenigen für den „ungestör-

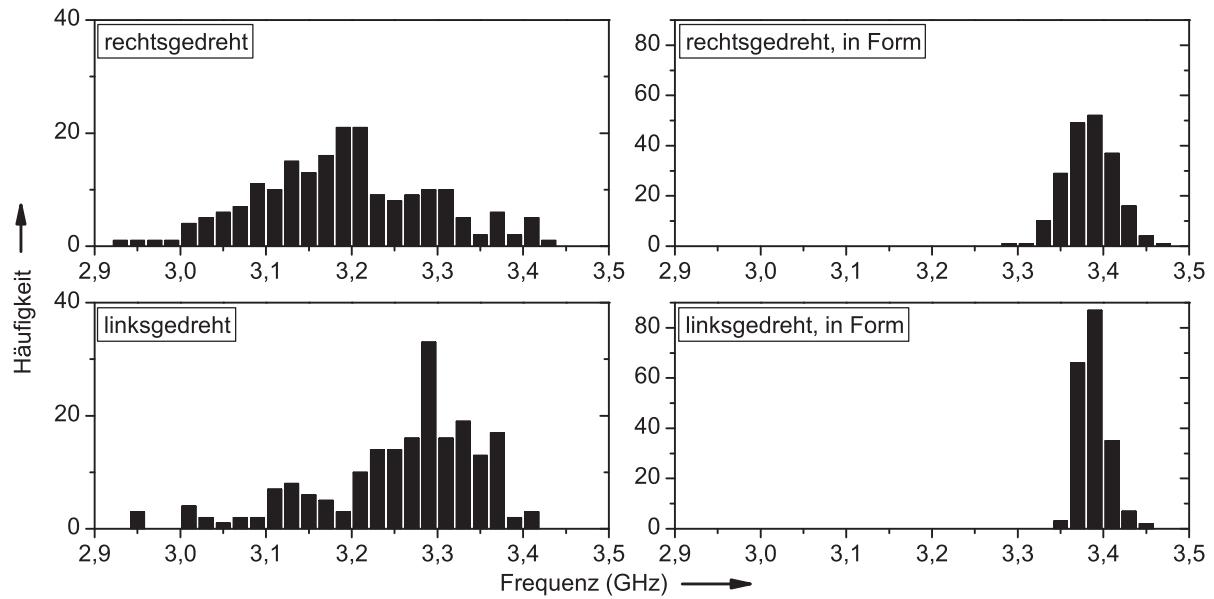


Bild 7.3: Statistische Verteilung der Resonanzfrequenzen von je 200 zufällig ausgewählten rechts- und linksgedrehten Helices.

ten“ Fall, ergibt sich schließlich eine ausgeprägte und leicht auf der Anzeige des Gerätes ablesbare Resonanz. Die Ergebnisse für 200 maßgefertigte Helices jeder Sorte finden sich in Bild 7.3. Hier sind sowohl Helices im Trägermaterial als auch solche, die nicht gestützt werden, erfasst. Die Streubreite der Resonanzfrequenzen reduziert sich durch den Einsatz der Form erheblich, d.h. um fast das Vierfache. Zeitgleich erhöht sich die mittlere Resonanzfrequenz, was den Schluss nahe legt, dass die originalen Helices im Mittel eine kleinere Steigung aufweisen als es durch die Aussparungen vorgegeben wird. In der Tat zeigen geometrische Analysen unter dem Mikroskop, dass vor allem die rechtsgedrehten Helices außerhalb der Spezifikationen gefertigt sind. Dennoch unterstreicht die Auswertung der Resonanzfrequenzen, dass Herstellungstoleranzen durch das Stützen des Drahtes mit Aussparungen weitgehend kompensiert werden können – trotz der manuellen Weiterverarbeitung. Die verbleibenden Abweichungen können im Wesentlichen auf unterschiedliche Drahtlängen zurückgeführt werden. So ist z.B. in Bild 7.2 deutlich zu erkennen, dass die Helix nicht, wie ursprünglich spezifiziert, exakt drei Windungen aufweist, sondern eher etwas mehr.

Die Abweichungen der Helixgeometrien lassen sich in der Simulation ebenso berücksichtigen wie die in den vorangegangenen Kapiteln betrachteten Variationen. Die Einheitszelle einer Konfiguration besteht somit aus Helices unterschiedlicher Resonanzfrequenz. Vereinfachend wird hierfür angenommen, dass die Menge der einzeln vermessenen Helices statistisch so relevant ist, dass sie als Grundgesamtheit für Stichproben dienen kann. Ferner

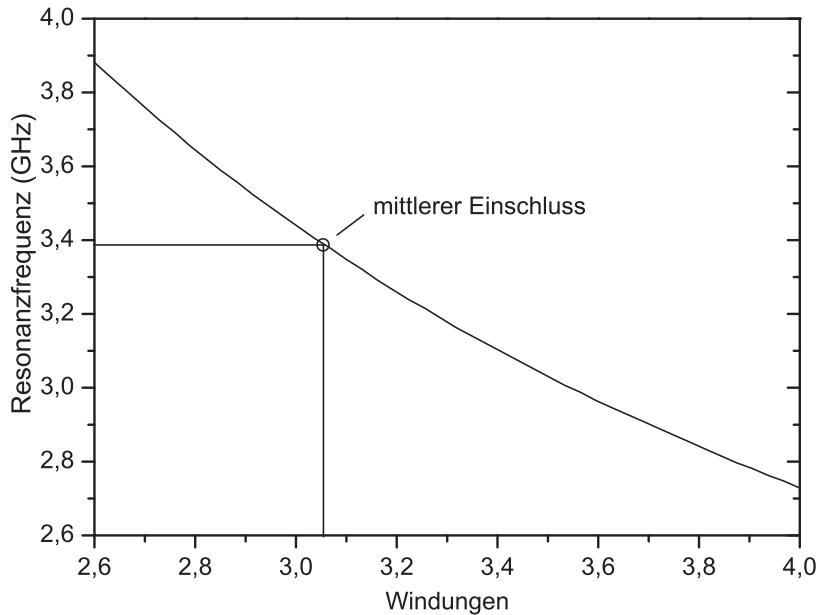


Bild 7.4: Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Windungszahl. Die Daten einer mittleren linksgedrehten Helix im Trägermaterial aus Bild 7.3 (unten rechts) sind explizit gekennzeichnet.

muss für die Berechnung der T-Matrix einer Helix nach Maßgabe ihrer Resonanzfrequenz eine Zuordnung zu der entsprechenden Geometrie bekannt sein. Wie oben erläutert, wird dieser Zusammenhang hier zweckmäßigerweise über die Windungszahl hergestellt. Bild 7.4 zeigt die Resonanzfrequenz einer einzelnen Helix als Funktion der Windungszahl. Alle übrigen Geometrieparameter werden weiterhin wie in Bild 7.2 aufgeführt angenommen. Berücksichtigt wird ferner eine endliche Leitfähigkeit von $\sigma = 58\text{MS/m}$. Wie erwartet sinkt die Resonanzfrequenz mit steigender Windungszahl und damit steigender Drahtlänge. Die Daten einer linksgedrehten Helix mittlerer Resonanzfrequenz (gemäß Messung mit Trägermaterial) bestätigen den aus Bild 7.2 gewonnenen Eindruck, dass eine durchschnittliche Helix tatsächlich etwas mehr als 3 Windungen aufweist.

7.2.2 Aufbau und Vermessung der hergestellten Schichten

Für die stichprobenhafte Untermauerung der Theorie wurden zwei einlagige Proben gefertigt. Fotografierte Ausschnitte finden sich in Bild 7.5. Jede Schicht besteht aus insgesamt 3600 (60 x 60) Aussparungen, die im Abstand von je 7mm auf einem quadratischen Raster angeordnet sind. Die Seitenlänge der quadratischen Probe beträgt demnach 42cm. Wie auf einem Schachbrett sind die Formen hierbei wechselweise mit links- und rechtsgedrehten Helices versehen.

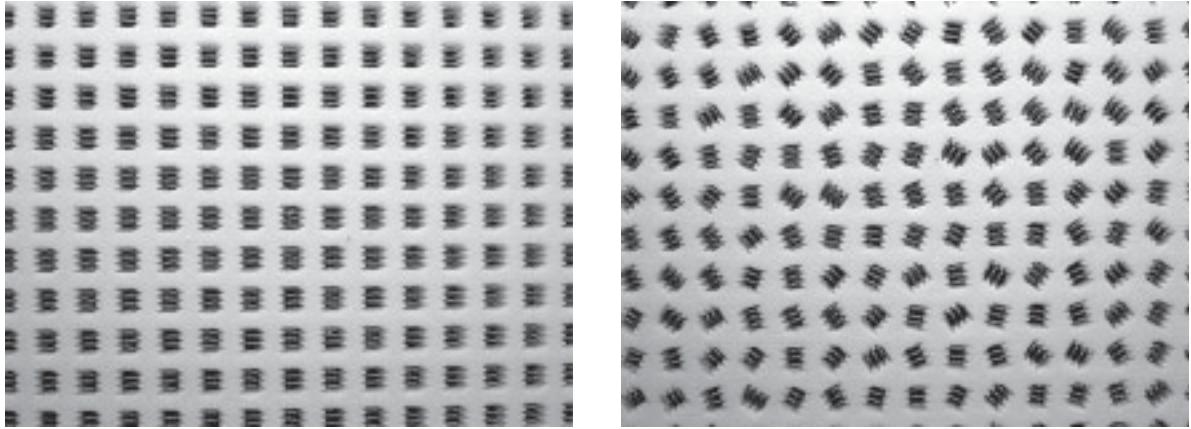


Bild 7.5: Ausschnitte der hergestellten Schichten mit Helices im Trägermaterial. Links: Periodische Positionen (Schicht A). Rechts: Statistisch ausgewählte Orientierungen (Schicht B).

Betrachtet man die linke Anordnung, d.h. den Fall periodischer Aussparungen, fällt auf, dass der Aufbau ähnlich zu dem in Kapitel 4.4 untersuchten ist. Abgesehen von der veränderten Geometrie der Helix weicht die hergestellte Schicht im Wesentlichen durch Rotationen um die Helixachse von erwähnter Untersuchung ab. Wie bereits festgestellt wurde, haben diese Orientierungen nur einen marginalen Einfluss auf das Verhalten der Schicht, so dass auch hier im Idealfall (alle Helices gleich, unendliche Leitfähigkeit) mit einer vollständigen Reflektion der einfallenden Welle zu rechnen ist. Zur besseren Unterscheidung wird die linke Anordnung fortan mit „Schicht A“ bezeichnet, die rechte mit „Schicht B“.

Für Schicht A zeigt Bild 7.6 den Vergleich der Messwerte, die mit Hilfe der fokussierenden Antennen erzeugt wurden, mit den Ergebnissen der Simulation. Als Ergänzung zum senkrechten wurde hier zudem der schräge Einfall (TE) mit 60° aufgenommen. Insgesamt ergibt sich für beide Fälle eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Bei den unteren Frequenzen sind einige Schwankungen in den gemessenen Kurvenverläufen zu sehen, die im Wesentlichen auf die Unvollkommenheit des Messplatzes bzw. auf das begrenzte Fehlermodell der Kalibrierung zurückgeführt werden können. Im Vergleich zum vektoriellen OSL-Verfahren (senkrechter Einfall) offenbaren die Messwerte aus der skalaren Kalibrierung (schräger Einfall) keine schlechtere Übereinstimmung mit den simulierten Werten. Für die Simulation wurde eine (6×6) -Einheitszelle herangezogen, die folglich aus 18 links- und 18 rechtsgedrehten Helices besteht. Auch hier zeigt sich, dass maximal $n_{Streu} = 3$ zur Beschreibung beider Schichten nötig ist. Bei der alleinigen Berücksichtigung von Dipolmenten ergibt sich hingegen ein Frequenzversatz von ca. 55 MHz zu tieferen Frequenzen (vergleiche dazu [108]).

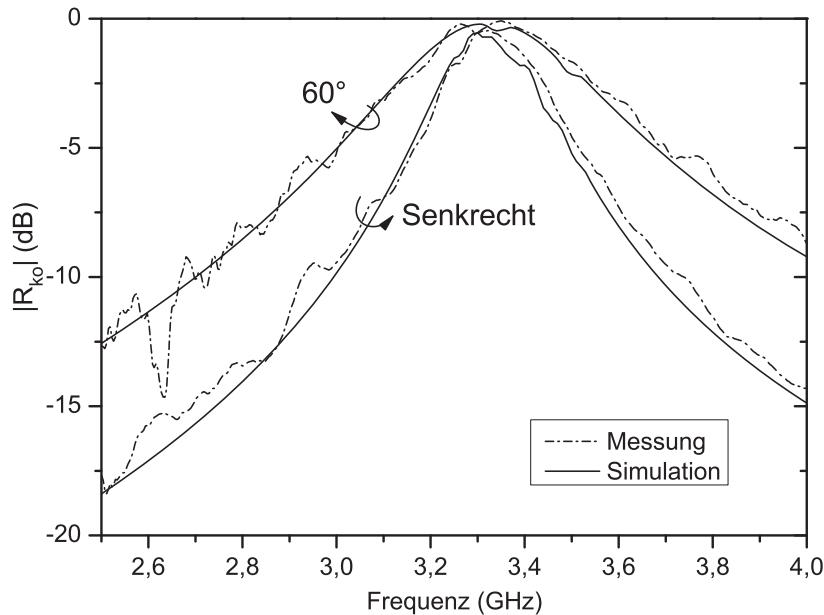


Bild 7.6: Schicht A: Betrag des Reflektionskoeffizienten für senkrechten (0°) und schrägen (60°) Einfall. Simulation mit (6 x 6)-Einheitszelle und $n_{Streu} = 3$.

Hinsichtlich der Leistungsmerkmale der funktionellen Schicht für den senkrechten Einfall lassen sich abschließend zwei wesentliche Punkte anführen:

- Das Maximum der Reflektion liegt gemessen bei ca. $-0,46$ dB (simuliert: $-0,54$ dB) und ist damit nur etwa $0,26$ dB ($0,34$ dB) kleiner als der Wert, der sich für den streng periodischen Fall gleicher Helices der Resonanzfrequenz $f_{res} = 3,384$ GHz (mittlere Helix aus Bild 7.4) ergäbe.
- Würde man Helices nutzen, deren Streubreite nicht durch die Aussparungen reduziert ist, ergibt sich bei gleicher Annahme des funktionalen Zusammenhangs zwischen Resonanzfrequenz und Anzahl der Windungen ein Maximum bei etwa -4 dB [108]. Da bei nicht unterstützten Helices einige andere Geometrieparameter, insbesondere die Steigung, zusätzlich die Resonanzfrequenz beeinflussen, ist dies nur ein hypothetisches Modell. Dennoch verdeutlicht es den Vorteil, der sich im Kontext einer möglichst hohen Reflektion aus der vorgeschlagenen Methode zur Positionierung der Partikel ergibt.

Bei der zweiten Rohacell®-Platte (Schicht B aus Bild 7.5) sind die Orientierungen der Aussparungen innerhalb der Ebene der Schicht zufällig gewählt (vergleiche dazu Kapitel 5.2.3). Der maximale Winkel zur ursprünglichen Orientierung ist zu 60° gewählt. Zwischen diesen Extremen sind die Winkel gleichverteilt. Durch die erhöhte Unordnung im Vergleich

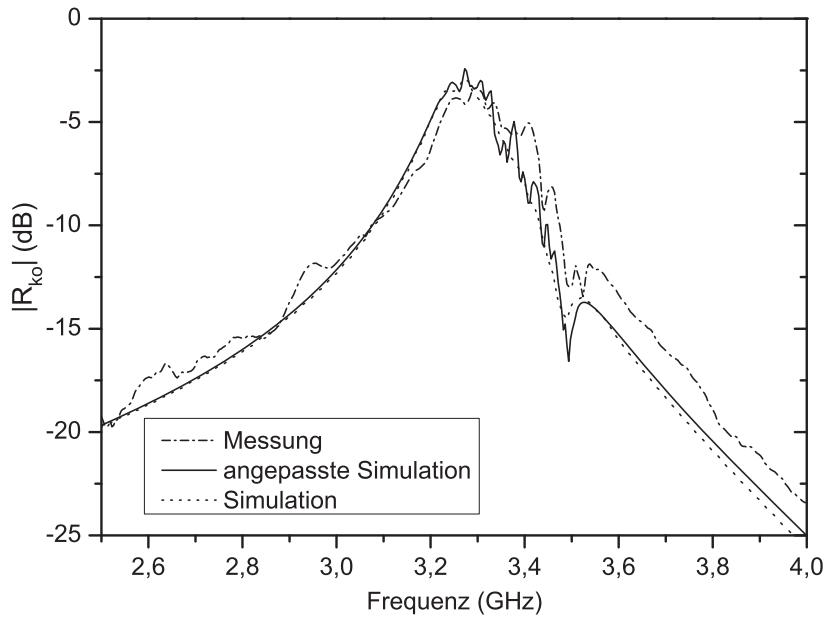


Bild 7.7: Schicht B: Betrag des Reflektionskoeffizienten für senkrechten Einfall. Vergleich der Messung mit der Simulation und der angepassten Simulation mit nur 31 Konfigurationen.

zu Schicht A wird keine vollständige, sondern eine um einen gewissen Betrag reduzierte Reflektion bei der Resonanz erwartet. Die Ergebnisse werden in Bild 7.7 zusammengefasst. Wie erwartet sinkt das Maximum des Reflektionsfaktors ab – hier auf etwa $-2,5$ dB bis -3 dB. Abgesehen von den durch den Messaufbau bedingten Schwankungen bei tiefen Frequenzen, die auch in den Messungen der Schicht A sichtbar sind, fallen auf der abfallenden Flanke nach der Resonanz einige Unregelmäßigkeiten auf. Diese sind in der Simulation (gleiche Parameter wie zuvor) so nicht erkennbar. Der Grund liegt in der begrenzten Größe der Schicht, was wie folgt erklärt werden kann [109]: Gewichtet man jeden Partikel mit der Leistung des anregenden Gauss'schen Strahls, ergibt sich, dass im Mittel nur 1133 statt der 3600 realen Partikel mit voller Leistung beleuchtet werden. Bei Schicht A fällt dieser Umstand aufgrund der Regelmäßigkeit nicht ins Gewicht. Im Gegensatz dazu mitteln sich die unterschiedlichen gegenseitigen Kopplungen aufgrund der variierenden Orientierungen in Schicht B erst für größere Schichten bzw. eine höhere Anzahl beteiligter Partikel heraus.

Um diese Theorie auch rechnerisch zu überprüfen, ist die Simulation dahingehend verändert worden, dass lediglich 31 Konfigurationen einer Einheitszelle, die aus 36 Helices besteht, berechnet werden. Im strengen Sinn spiegelt dieses Szenario nicht das Verhalten einer finiten Schicht mit insgesamt $31 \times 36 = 1116 \approx 1133$ Partikeln wider. Die Ergebnisse dieser angepassten Simulation sind daher eher als Hinweis auf mögliche Konsequenzen



Steigung p	0,35 mm
Helixradius r_0	0,85 mm
Drahtradius a	0,05 mm
Windungen	5,2

Bild 7.8: Verwendete Helix und Nominalabmessungen.

einer zu kleinen Schicht zu werten, also nur qualitativ zu verstehen. Für deckungsgleich zur Messung gewählte Frequenzinkremente ist die erhaltene Kurve ebenfalls in Bild 7.7 eingezeichnet. Die sich ergebenden Unregelmäßigkeiten auf der abfallenden Flanke sind im Vergleich zur Messung leicht unterschiedlich ausgeprägt, bestätigen aber die Vermutung, dass hier Effekte durch die Größe der Schicht auftreten.

Insgesamt kann auch bei Schicht B eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung ausgemacht werden.

7.3 Bi-isotropes Material

In diesem Abschnitt werden Schichten betrachtet, die aus möglichst zufällig angeordneten Helices, sowohl bezüglich der Position als auch der Orientierung, bestehen. Eine Reduktion der Komplexität des Aufbaus ergibt sich aus der Tatsache, dass lediglich rechtsgedrehte Helices verwendet werden. Die Menge aller Einschlüsse bildet damit ein bi-isotropes Material. Der mehrschichtige Aufbau gemäß Kapitel 6 sowie kleinere Abmessungen der Helices sorgen dafür, dass Probleme hinsichtlich der Größe der Probe (wie im vorigen Kapitel deutlich geworden ist) nicht auftreten. Bild 7.8 zeigt die hier genutzte Helix und die nach Auswertung mit Hilfe eines Mikroskops erhaltenen mittleren Geometrieparameter. Um eine gewisse Stabilität zu gewährleisten, besteht der Draht aus einer Kupferlegierung (Kupfer-Beryllium, CuBe2) mit einer elektrischen Leitfähigkeit von ca. $\sigma \approx 11 \text{ MS/m}$.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, können bi-isotrope Schichten gebildet mit Helices vor allem in Mikrowellenabsorbern ihren Einsatz finden. Letztere sind meist gestaffelt aufgebaut. Die Struktur ist dabei so gewählt, dass die einfallende Welle eine allmähliche Änderung des Wellenwiderstandes erfährt und daher nur wenig reflektiert wird. Gleichzeitig sind die Materialien verlustbehaftet, damit die Leistung der einfallenden Welle in

Wärme umgesetzt wird. Bei tiefen Frequenzen, also großen Wellenlängen, wechselwirkt die einfallende Welle kaum mit dem begrenzt ausgedehnten Absorber, so dass dem elektromagnetischen Feld nur ein geringer Teil der Leistung entzogen wird. Versetzt man den Absorber allerdings mit Helices, ergibt sich zusätzlich ein in dieser Arbeit schon häufiger diskutierter Mechanismus. Die Streuung quer zur Ausbreitungsrichtung der anregenden ebenen Welle führt dazu, dass die Felder viel besser in den Absorber eindringen und mehr von seiner Absorptionsfähigkeit erfahren. In und um die Resonanz steigt seine Leistungsfähigkeit [16–18]. Der Entwurf solcher Absorber ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Zur Veranschaulichung der Größenordnungen der auftretenden Effekte werden aber, in Anlehnung an diesen konkreten Anwendungsfall, Schichten betrachtet, die mit einer Metallplatte abgeschlossen sind. Zudem besitzt dieses Vorgehen den Vorteil, dass bei einer bi-isotropen Schicht vor einer leitenden Ebene lediglich kopolare Reflektion auftritt. Die Auswertung ist somit vereinfacht.

7.3.1 Vorbetrachtung

Herstellung der Einschlüsse und Toleranzen

Um in der Materialprobe jedwede Vorzugsrichtung der Helixorientierungen auszuschließen und gleichzeitig eine gewisse Zufälligkeit in der Platzierung zu ermöglichen, wird auf nachfolgend erläuterte Vorgehensweise zurückgegriffen [69, 110]. Die Grundidee hierbei ist, dass jede Helix in einer Kugel isotroper Materialeigenschaften positioniert ist. Dieses Verfahren hat neben der Erfüllung der Anforderung einer zufälligen Orientierung und Platzierung den Vorteil, dass damit auch ein elektrischer Kontakt zwischen den Drähten verhindert wird. Zur Realisierung wird jede Helix zunächst in einen sphärischen Hohlraum einer Gussform gesetzt. Anschließend wird ein selbst härtender Polyurethan-Schaum (PU-Schaum oder auch Montageschaum) eingespritzt. Messungen in einem zylindrischen Hohlleiter ergeben, dass der expandierte Schaum im hier relevanten Frequenzbereich eine relative Permittivität von $\varepsilon_r \approx 1,046 - j0,003$ besitzt. Tatsächlich führt das druckvolle Einbringen in die Form aber dazu, dass der Schaum nicht expandieren kann. Daher ist eine Vergleichsmessung mit auf diese Weise hergestellten Kugeln (3 mm Durchmesser) ohne Helix durchgeführt worden. Die anschließende Interpolation der für den vorherrschenden Füllgrad erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe der Clausius-Mossotti-Mischformel führt schließlich zur tatsächlichen Permittivität der Kugel, die eher im Bereich von $\varepsilon_r \approx 1,25 - j0,008$ anzusiedeln ist. Zur Veranschaulichung zeigt Bild E.10 im Anhang die beiden vermessenen Proben im genutzten zylindrischen Hohlleiter-Aufbau.

Wie zuvor ist es auch hier notwendig, die Eigenschaften einer relevanten Anzahl herge-

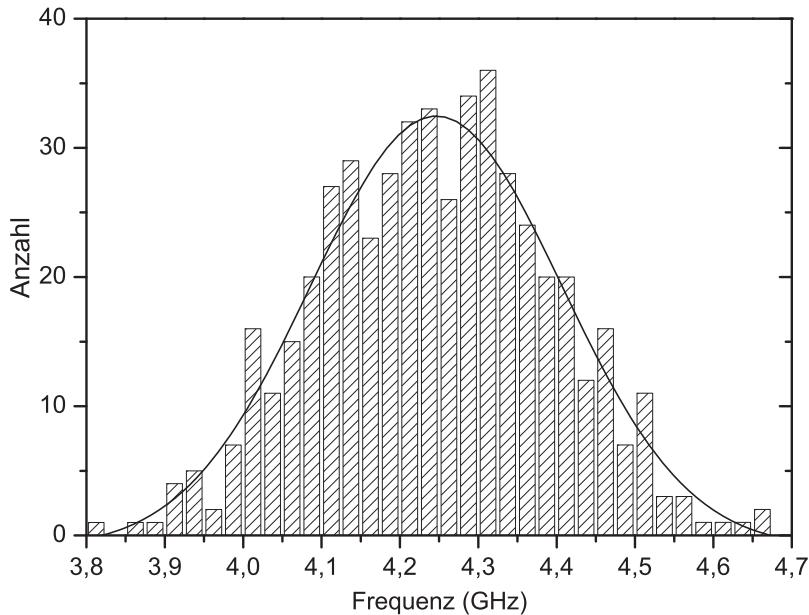


Bild 7.9: Statistische Verteilung der Resonanzfrequenzen von 500 zufällig ausgewählten Einschlüssen. Zusätzlich ist eine an die Messwerte angenäherte Normalverteilung eingezeichnet.

stellter Einschlüsse zu kennen. Eine Auswertung der Resonanzfrequenzen führt zu der in Bild 7.9 illustrierten Verteilung [95]. Als statistische Grundlage dienen insgesamt 500 Einschlüsse. Es zeigt sich eine Streubreite von fast einem GHz, was in diesem Fall einer relativen Abweichung von ca. $\pm 10\%$ um die mittlere Resonanzfrequenz von $\overline{f_{res}} = 4,24$ GHz entspricht. Dieser Umstand ist im Wesentlichen durch die manuelle Verarbeitung, das unkontrollierte Einspritzen und die daraus resultierenden mechanischen Verformungen der Helices bedingt. Die Tatsache, dass die Resonanzen nahezu normalverteilt sind, erhärtet die Annahme, dass mehrere unabhängige Zufallsprozesse bei der Herstellung eine Rolle spielen. Die Streubreite der Resonanzfrequenzen ist hier im Vergleich zum vorigen Fall wesentlich höher. Zudem fällt eine Abbildung der gemessenen Resonanzfrequenzen auf eine entsprechende Geometrie schwerer, da immer eine Kombination aus veränderter Helixsteigung nebst Windungszahl wirksam ist. Vereinfachend wird im Folgenden angenommen, dass lediglich die Helixsteigung von Toleranzen betroffen ist (vergleiche [95]). Das Einbeziehen der Verteilung in die Simulation erfolgt analog zur bisherigen Verfahrensweise.

Lokale Verteilung der Partikel

Auf der linken Seite von Bild 7.10 ist das angefertigte Material abgebildet. Dabei dienen kleine Polystyrolkugeln zur Einstellung der Dichte der hergestellten Einschlüsse. In dem

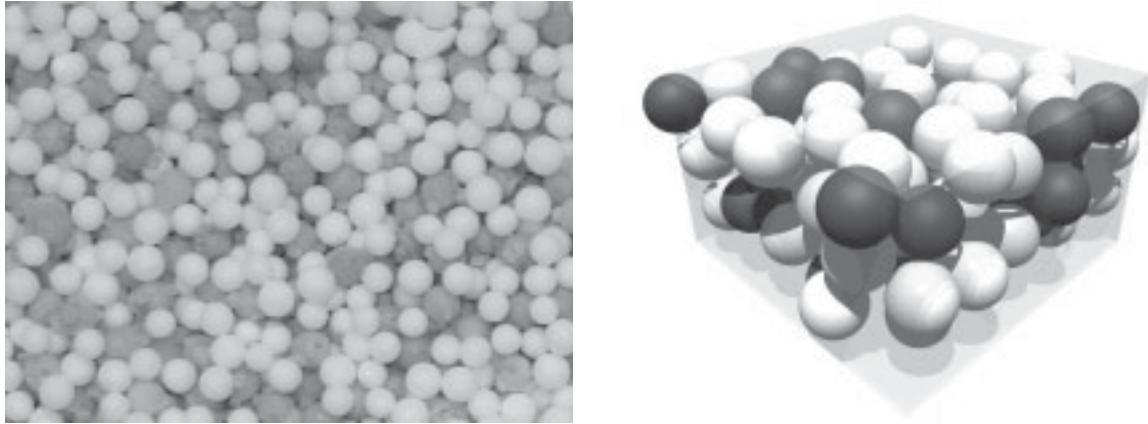


Bild 7.10: Links: Ausschnitt einer hergestellten Schicht. Hierbei nehmen die mit Helices gefüllten dielektrischen Kugeln (dunkel) ein Raumvolumen von ca. 20% ein. Rechts: Dazu passende simulierte Verteilung innerhalb einer Einheitszelle gemäß [111].

dargestellten Fall nehmen die resonanten Einschlüsse (dunkel) einen Raumanteil von etwa 20% ein. Die Partikel wurden manuell und mit großer Sorgfalt eingestreut, so dass sie möglichst gleichverteilt im Raum angeordnet sind. Dennoch ist sichtbar, dass der Fall direkt aneinander grenzender Partikel wesentlich öfter auftritt als bei zufälliger Positionierung im freien Raum erwartet. Wegen der starken Abhängigkeit der Kopplung von der Distanz der Partikel ist insbesondere um die Resonanz ein starker Einfluss dieser Positionierung zu erwarten. Um letztere auch in der Simulation berücksichtigen zu können, werden die Positionen der Partikel wie in [111] vorgeschlagen in einem numerischen Fallexperiment ermittelt. Dazu wird für eine imaginäre Kugel mit dem Durchmesser von 3 mm zunächst eine Anfangsposition oberhalb der Schicht berechnet. Jede Kugel fällt entweder direkt zum Boden der Schicht oder rollt an einer oder zwei schon positionierten Kugeln entlang, bis eine stabile Position erreicht ist. Sobald die Schicht vollständig mit imaginären Kugeln gefüllt ist, wird die gewünschte Dichte eingestellt, indem zufällig ausgewählte Kugeln durch einen resonanten Einschluss ersetzt werden. Ein Beispiel einer so erhaltenen Verteilung ist auf der rechten Seite von Bild 7.10 gezeigt. Die Dicke der Schicht ist zu 10 mm angenommen und wird schließlich durch eine Einheitszelle aus insgesamt 98 Kugeln (40 resonante Einschlüsse, 58 Kugeln aus Luft) aufgespannt. Mit den Abmessungen einer Einheitszelle von $10 \text{ mm} \times 16,8 \text{ mm} \times 16,8 \text{ mm}$ ergibt sich korrespondierend zur linken Seite von Bild 7.10 eine Dichte von 20%.

Der Einfluss dieser „physikalischen“ Methode der Anordnung der Partikel wird in Bild 7.11 durch den Vergleich mit dem Ergebnis, welches sich aus zufälligen Positionen ergibt, veranschaulicht. Diese Untersuchung ist zudem mit unterschiedlichen Dichten der Partikel

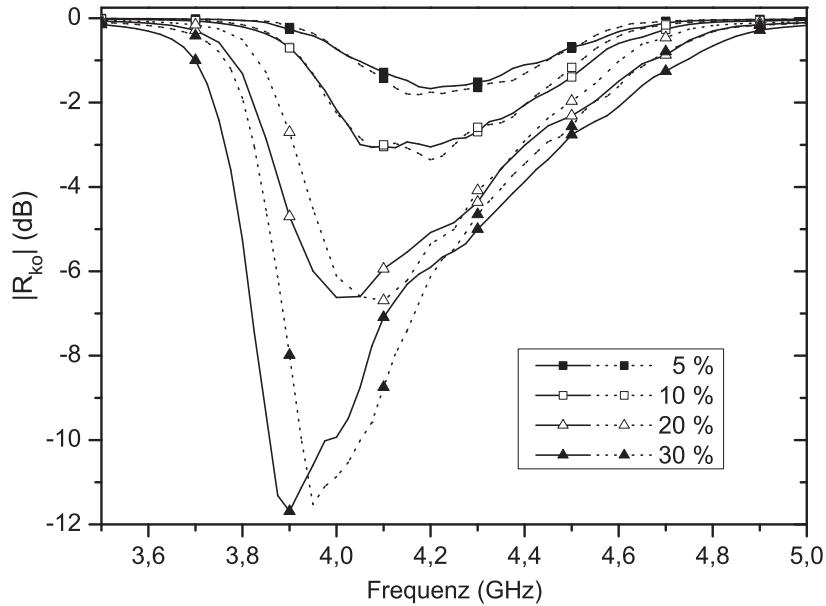


Bild 7.11: Vergleich der Reflektion berechnet mit rein zufällig im Raum positionierten Einschlüssen (punktierte Linien) und der „physikalischen“ Verteilung nach [111] (durchgezogene Linien) für verschiedene Dichten der Einschlüsse.

durchgeführt worden. Die Dicke der Schicht beträgt 10 mm. Ferner werden gemäß Kapitel 6 nur Dipolinteraktionen bei der Berechnung berücksichtigt. Wie anfangs vermutet, ergibt sich für hohe Partikeldichten (20% und 30%) ein nennenswerter Unterschied in den berechneten Reflektionen, der auf die im Mittel stärkeren Interaktionen dicht beieinander liegender resonanter Einschlüsse zurückgeführt werden kann. Im Gegensatz dazu fallen Unterschiede für kleinere Partikeldichten (5% und 10%) nicht ins Gewicht. Für den im folgenden Abschnitt durchgeführten Vergleich des Streuansatzes mit Messungen wird stets die hier eingeführte Methode nach [111] herangezogen.

7.3.2 Messungen

Die Herstellung einer ähnlich großen Schicht wie im Fall der einlagigen Strukturen gestaltet sich aufgrund der Vielzahl der dafür notwendigen Einschlüsse sehr aufwändig. Für ein gutes Verhältnis zwischen Aufwand und Nutzen (im Labormaßstab) wird daher ein verkleinerter, achteckiger Probenhalter genutzt, der zudem durch eine Rohacell®-Frontplatte dafür sorgt, dass die lose zusammen gestellte Schicht aufrecht im Freiraumaufbau vermessen werden kann. Die Grundfläche des Probenhalters ist ca. 533cm^2 . Aus Dicke und Dichte der hergestellten Schichten ergibt sich, dass immer mindestens 1900 resonante Einschlüsse (Maximum: 11300) von der einfallenden Welle beleuchtet werden.

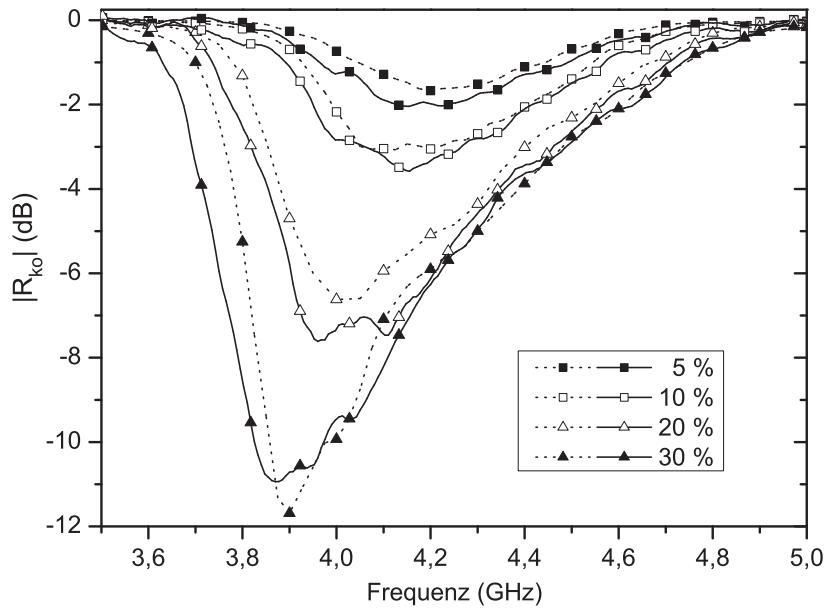


Bild 7.12: Erhaltene Reflektion einer 10 mm dicken Schicht vor einem metallischen Abschluss. Punktierte Linien: Simulation über Streuansatz. Durchgezogene Linien: Messung.

Zunächst wird die Dicke der Schicht (10 mm) beibehalten. Für verschiedene Dichten findet sich in Bild 7.12 eine Gegenüberstellung der schon in Bild 7.11 gezeigten simulierten Kurven mit den aus Messungen erhaltenen Werten. Insgesamt ist eine sehr gute Übereinstimmung feststellbar. Tendenziell offenbaren die gemessenen Verläufe aber eine leicht verbreiterte Resonanz. Das Minimum der Reflektion ist bis auf den Fall hoher Dichte (30%) von der Simulation etwas höher eingestuft als es gemessen wird.

Die zu obiger Untersuchung passenden und aus dem Clausius-Mossotti-Ansatz (hier aus dem Multiphasen-Ansatz [95, 112]) erhaltenen Ergebnisse werden in Bild 7.13 den Messergebnissen gegenübergestellt. Gemäß Kapitel 6 ist für diesen Fall (wenig interne Wärmeverluste) keine gute Übereinstimmung zu erwarten. Dennoch erhält man zumindest für niedrige Dichten eine zufriedenstellende Approximation. Dieses Verhalten lässt sich analog zu den in diesem Zusammenhang getroffenen Aussagen über bedämpfendes Material in dem Komposit damit erklären, dass Helices unterschiedlicher Resonanzfrequenzen eine geringere gegenseitige Kopplung aufweisen. Die nicht im Clausius-Mossotti-Modell erfasssten Einflüsse werden damit geringer. Bei Anwesenheit von bedämpfenden Materialien in Kombination mit einer gewissen Streubreite der Helices ist demzufolge eine noch bessere Eignung der Mischformel zu erwarten, auch bei höheren Dichten der beteiligten Einschlüsse. Damit lässt sich schließlich auch die gute Übereinstimmung zwischen dem zum Zwecke

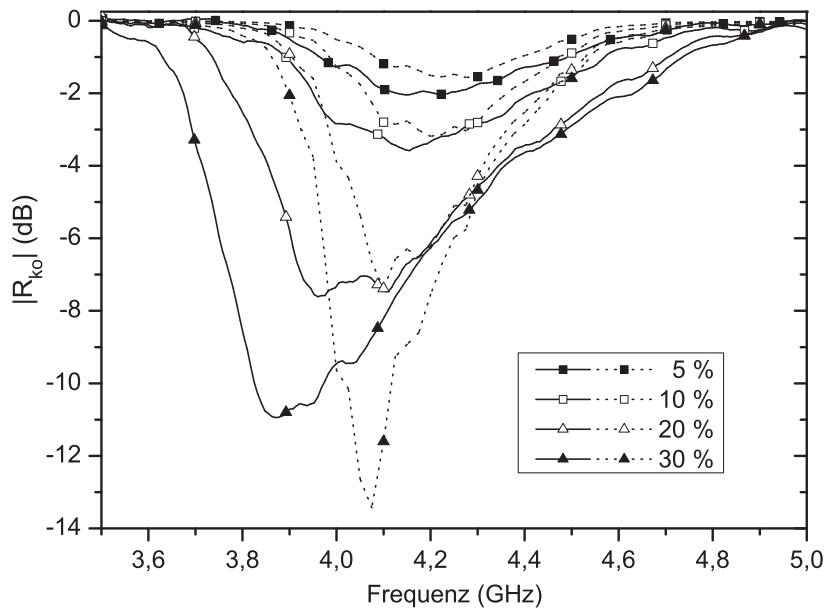


Bild 7.13: Erhaltene Reflektion einer 10 mm dicken Schicht vor einem metallischen Abschluss. Punktige Linien: Multiphasen-Mischformel nach Clausius-Mossotti. Durchgezogene Linien: Messung.

des Entwurfs eines chiralen Schichtabsorbers genutzten einfachen Materialmodell und den entsprechenden Messergebnissen in [17] deuten. Für die hier untersuchte Schicht wird es allerdings sinnvoll, bei höherer Dichte mit dem Streuansatz zu rechnen.

Als letztes Beispiel wird die Dicke der Schicht variiert, die Dichte bleibt konstant bei 20%. Bild 7.14 fasst die Ergebnisse zusammen. Die Genauigkeit bzw. die Güte der Lösung ist im Wesentlichen mit der aus der Untersuchung für verschiedene Dichten vergleichbar. Der größte Unterschied fällt bei der 15 mm dicken Schicht auf.

Im Vergleich zu den Messungen an den einlagigen Schichten fällt die Genauigkeit des Streuansatzes in diesem Abschnitt etwas ab. Hier ist jedoch zu beachten, dass sich eine Vielzahl von Einflüssen der Kontrolle entziehen bzw. nur sehr aufwendig in der Simulation mit einbezogen werden können:

- Bei der Verteilung von Hand treten unweigerlich lokale Dichteschwankungen auf. Obwohl die „physikalische“ Verteilung der Partikel Berücksichtigung findet, ist die tatsächliche Statistik damit noch nicht exakt im Streuansatz wiedergegeben.
- Nach dem Einspritzen des Polyurethanschaumes lassen sich nur noch indirekt über die Resonanzfrequenz einige Aussagen bezüglich der Geometrie der Helices treffen.

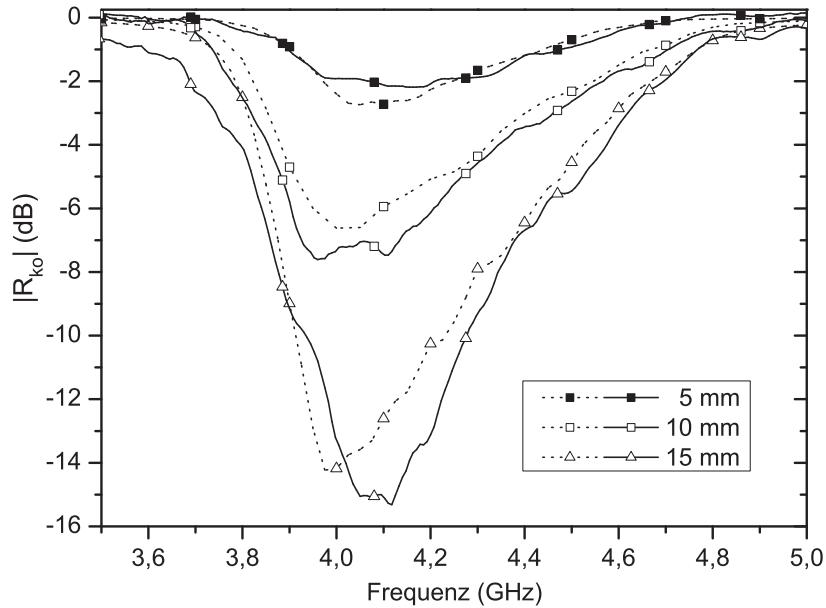


Bild 7.14: Erhaltene Reflektion verschieden dicker Schichten vor einem metallischen Schirm. Die Dichte der Partikel beträgt jeweils 20%. Punktige Linien: Simulation über Streuansatz. Durchgezogene Linien: Messung.

Ungleichmäßigkeiten der Helixsteigung oder weitere mögliche Kombinationen der Geometrieparameter sind in der Simulation nicht erfasst.

- Da Energie quer zur Schicht abgestrahlt wird, können Reflektionen am verwendeten Probenhalter aus Kunststoff dazu führen, dass das mittlere Feld am Ort einer Helix sich von dem berechneten unterscheidet.
- Das Verhältnis der Geometrie des Probenhalters zur Breite des Gauss'schen Strahls ist hier noch kleiner als bei den einlagigen Schichten. Obwohl Absorbermaterialien um den Probenhalter positioniert wurden, können zusätzliche Randeffekte nicht ausgeschlossen werden.
- Eine stichprobenhafte Überprüfung der hergestellten Einschlüsse zeigt, dass die Helices oft nicht in der Mitte der dielektrischen Kugel, sondern eher am Rand angesiedelt sind. Diese Situation könnte im Streuansatz durch eine veränderte Parametrisierung der Helix (vergleiche Formel 3.3) berücksichtigt werden. Da die Auswirkungen auf das rechnerische Ergebnis im Vergleich zu den erstgenannten Punkten noch am geringsten eingeschätzt werden, wurde dieser Schritt nicht mehr vollzogen.

Zusammenfassend lässt sich für die hier untersuchten Schichten sagen, dass die Größe der Messungenauigkeiten durchaus im Rahmen des Erwartbaren liegt und damit als gut zu

bewerten sind. Um hier eine bessere Übereinstimmung zu erzielen, sind, wie erläutert, entweder wesentliche Verbesserungen der Abbildung der Realität in der Simulation zu betreiben oder zumindest erhebliche konstruktive Änderungen vorzunehmen, was sowohl jeden Einschluss selbst als auch die Schicht betrifft.

8 Zusammenfassung

Die Forschung auf dem Gebiet komplexer, kompositer Materialien verfolgt das Ziel elektromagnetisch wirksame Schichten zu charakterisieren. Dabei ist die Erfassung der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Grundbausteinen ein wesentliches Element, um ein Verständnis des Streuverhaltens solcher Strukturen zu entwickeln. Nur mit wissensbasiertem Vorgehen und einem genauen Modell ist es möglich, funktionelle Schichten hinsichtlich ihrer elektromagnetischen Eigenschaften zu optimieren. In der vorliegenden Arbeit werden Anordnungen aus kleinen metallischen Helices betrachtet, die aus dem Anfang der 1990er Jahre aufkeimenden Gebiet der chiralen Materialien für den Mikrowellenbereich bekannt sind. Die geometrischen Abmessungen der Partikel sind klein gegenüber der Wellenlänge, so dass solche Strukturen im Allgemeinen homogen erscheinen. Hinsichtlich der Modellierung begründen sich die Herausforderungen vor allem aus dem ausgeprägten Streuverhalten bei der ersten Resonanz der Partikel. Eine wesentliche Aufgabenstellung liegt ferner in der Erfassung des Streuverhaltens beim Übergang von periodischen zu zufälligen Schichten.

Die Beschreibung der gegenseitigen Interaktionen erfolgt in dieser Arbeit auf Basis von Multipolmomenten, welche sich über eine Taylorreihenentwicklung der Stromverteilung definieren. Obschon die Streufelder dieser Multipolmomente Kugelwellen entsprechender Ordnung sind, ist bei gegebenem Multipolmoment eine direkte Zuordnung zu den Vorfaktoren der Kugelwellen durch eine analytische Abbildung schwierig. Mit Hilfe der Näherung für dünne Drähte, d.h. der Annahme eines infinitesimal dünnen Stromfadens, gelingt schließlich die automatisierte, spaltenweise Berechnung der sogenannten T-Matrix. Anwendung findet ferner die Zerlegung des Stromes in einzelne Dipole und das Translationstheorem für sphärische Wellen. Die T-Matrix verknüpft in einer linearen Abbildung die komplexen Amplituden der einfallenden und gestreuten Kugelwellen. Demnach ergibt sich die Ordnung und Art der hervorgerufenen Multipolmomente im Umkehrschluss. Das Modell wird ferner auf den insbesondere bei Experimenten auftretenden Fall einer kugelförmigen Umhüllung einer Helix erweitert.

Aus dem Streuverhalten einer einzelnen Helix lassen sich bereits einige Erkenntnisse ableiten. So nimmt für die Einhaltung gewisser Fehlergrenzen der Felddarstellung die Anzahl der zu berücksichtigenden Multipole zu, wenn der Abstand der Beobachtungspunkte zur Helix reduziert wird. In großer Entfernung lässt sich das Streufeld dagegen bereits mit dem

Beitrag der Dipolmomente gut beschreiben. Ein weiteres Resultat ist, dass die Qualität der Felddarstellung bei gegebenem maximalen Multipolmoment und Abstand im Wesentlichen durch das Verhältnis von Helixdurchmesser und -höhe bestimmt wird. Für einen möglichst kompakten Streukörper sollten diese beiden Parameter immer ähnlich gewählt werden, so dass für die nachfolgenden numerischen Untersuchungen die Auswahl einer Helixgeometrie – und einer damit verbundenen Resonanzfrequenz – keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Weitere Aspekte bestätigen sich bei der Interaktion zweier Helices: Abgesehen von den notwendigen magnetischen und elektrischen Dipolmomenten ist der Einfluss elektrischer Momente bedeutend größer als jener der magnetischen. Zudem zeichnet sich ab, dass vorwiegend ungerade Ordnungen der Multipolmomente zum Streufeld beitragen. Durch Mittelungseffekte heben sich Fehler in der Beschreibung der Wechselwirkung zweier Helices auf, so dass selbst bei sehr nahen Helices eine genaue Modellierung mit Multipolmomenten bis zu fünfter Ordnung möglich ist. Die Aufspaltung der Resonanz lässt erwarten, dass die Betrachtung der Streueffekte innerhalb größerer Strukturen bzw. Schichten aus vielen Helices ein komplexes Modell erfordert.

Ein Grundbaustein dieses Modells ist die Implementierung periodischer Randbedingungen in dem Streuansatz. Die dafür notwendigen mathematischen Formulierungen werden in Kapitel 4.1 dargelegt. Im Prinzip genügt die Berechnung einer unendlichen Doppelsumme, um alle Interaktionen vollständig zu erfassen. Zur Konvergenzverbesserung wird ein Verfahren eingesetzt, welches die Auswertung der Reihe mit Hilfe einer Fouriertransformation in den Bildraum verschiebt. Die Ergebnisse einer speziellen periodischen Anordnung (schachbrettförmige Verteilung links- und rechtsgedrehter Helices) werden mit denen eines kommerziellen Simulationswerkzeuges verglichen. Für die im Sinne einer Bandsperre frequenzselektiv wirkende Schicht zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Ansätzen. Ein kleiner, verbleibender Frequenzversatz lässt sich mit der verwendeten Näherung für dünne Drähte erklären sowie damit, dass das Vergleichsverfahren, ebenso wie der Streuansatz, nur endlich genau sein kann. Bei dieser Anordnung reproduzieren sich die Erkenntnisse aus der Untersuchung mit zwei Helices: Nur bei sehr nah beieinander positionierten Helices ist ein Einfluss von Momenten bis zu fünfter oder siebter Ordnung ersichtlich. Meist genügt jedoch die Berücksichtigung von Multipolen dritter oder sogar erster Ordnung (Dipole).

Der Ansatz zur Beschreibung von Schichten mit zufälligem Aufbau nutzt periodische Randbedingungen. Innerhalb einer Einheitszelle werden die Streukörper gemäß einer vorgegebenen Verteilung positioniert und orientiert. Die Streuparameter einer Schicht ohne Periodizität ergeben sich aus der mehrfachen Berechnung vieler solcher Konfigurationen und anschlie-

ßender Mittelung. Nach ersten Betrachtungen zum Konvergenzverhalten (benötigte Anzahl der Konfigurationen, Größe der Einheitszelle) erfolgt die umfangreiche Studie einer einlagigen Schicht. Als wesentliche Erkenntnis lässt sich hier ableiten, dass die Relevanz höherer Momente (hier bis zu dritter Ordnung), welche sich überwiegend in einem Frequenzversatz zur Dipollösung äußert, mit wachsender Unregelmäßigkeit der Schicht sinkt. Insbesondere im Fall, dass die Helices keine Vorzugsrichtung aufweisen, ergeben sich die tatsächlichen Streuparameter der Schicht bereits aus der Berücksichtigung der Dipolmomente. Ähnlich wie bei der Verkopplung zweier Helices lässt sich dieser Umstand mit Mittelungseffekten erklären.

Die beschriebenen Streueffekte offenbaren sich in sehr ähnlicher Weise bei mehrlagigen Schichten, so dass zunächst kein weiterer Erkenntnisgewinn vorliegt. Ein Vergleich mit der populären Clausius-Mossotti-Theorie im Kontext der effektiven Medien bietet dennoch interessante Einblicke. Aufgrund vereinfachender Annahmen bei der Herleitung, die in vorliegendem Anwendungsfall nicht gültig sind, ist die Mischformel prinzipiell nicht anwendbar. Gleichwohl ergibt sich für den Fall einer streng periodischen, dreilagigen Anordnung geringer Streukörperdichte eine erstaunliche Übereinstimmung, womit sich die Tauglichkeit des Clausius-Mossotti-Modells als erste Näherung für das Streuverhalten solch einer Schicht begründet. Für höhere Partikeldichten und insbesondere für geringere Ordnung zeigen sich die Grenzen des Materialmodells recht deutlich. Die einzelnen Resonatoren sind in diesem Fall unterschiedlich miteinander verkoppelt und bedingen somit eine Vielzahl auftretender Resonanzen, die überlagernd die Streuparameter bestimmen. Größere Unterschiede sind speziell im Transmissionsparameter ersichtlich. Verringert man die gegenseitige Kopplung, ergibt sich wieder eine bessere Übereinstimmung, wie anhand eingebrachter verlustbehafteter dielektrischer Kugeln gezeigt wird.

Kapitel 7 ist der experimentellen Überprüfung der Streutheorie gewidmet. Die Charakterisierung der angefertigten Proben erfolgt mit einem Freiraummessplatz. Für die Herstellung einer periodischen Anordnung sowie einer Schicht mit einer vorgegebenen Zufallsverteilung wird eine Methode zur korrekten Platzierung der Helices vorgeschlagen. In einen geschlossenenporigen Schaumstoff werden mit Hilfe eines computergestützen Laserschneidesystems kleine Aussparungen eingebracht, die neben der korrekten Position auch reproduzierbare Steigungen der Helices ermöglichen. Die herstellungsseitigen Toleranzen der einzelnen Partikel können damit gezielt verringert werden. Die sehr gute Übereinstimmung zwischen den Simulations- und den Messergebnissen untermauert die Gültigkeit des Modells. Es werden Messungen an Schichten eines vollends zufälligen Materials vor einem metallischen Schirm vorgestellt. Hierbei sind die Helices in dielektrische Kugeln eingebettet. Die Ergebnisse zeigen auf, dass der in dieser Arbeit verwendete Streuansatz zu sinnvollen und im Vergleich zur Clausius-Mossotti-Theorie verbesserten Ergebnissen führt.

Abschließend lässt sich sagen, dass die in dieser Arbeit entwickelten Modelle und Methoden für eine Vielzahl anders aufgebauter Schichten adaptierbar sind. Das erlangte Wissen, dass für die vollständige Beschreibung eines Materials mit regellose Orientierung (und Positionierung) lediglich Dipolmomente notwendig sind, erleichtert zukünftige Analysen. Denkbar sind auch verbesserte (semi-)analytische Modelle, die etwa die Winkel- und Positionsverteilung zusammen mit vereinfachenden Ansätzen zur Beschreibung der Kopplungen berücksichtigen.

A Koordinatentransformation nach Euler

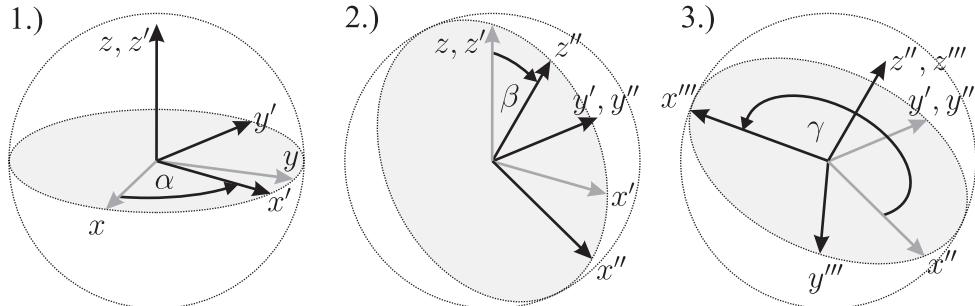


Bild A.1: Definition der Euler-Winkel.

Die in dieser Arbeit genutzte $zy'z''$ -Konvention der Euler-Winkel ist in Bild A.1 illustriert. Dabei ist die Reihenfolge der Rotationen, die immer im mathematisch positiven Sinn durchgeführt werden, nicht beliebig. Der erste Schritt besteht in der Rotation mit dem Winkel α um die z -Achse. Damit ergibt sich aus dem originalen und ungestrichenen Koordinatensystem (xyz) das neue gestrichene System ($x'y'z'$). Anschließend erfolgt die Rotation mit dem Winkel β um die y' -Achse, danach die Drehung mit γ um die Achse z'' .

Der Hauptgrund des Gebrauchs oben beschriebener Rotationen ist das Rotationstheorem sphärischer Wellenfunktionen [44], das auf Basis eben dieser Winkel beschrieben ist. Ein z.B. bei der zufälligen Orientierung von Helices erscheinendes Problem ist die Identifikation der drei Euler-Winkel, wenn das globale (originale) und ein dazu gedrehtes Koordinatensystem gegeben sind. In kartesischen Koordinaten lässt sich die Abbildung der entsprechenden Einheitsvektoren wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}_x''' \\ \underline{\mathbf{e}}_y''' \\ \underline{\mathbf{e}}_z''' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}_x \\ \underline{\mathbf{e}}_y \\ \underline{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}_x \\ \underline{\mathbf{e}}_y \\ \underline{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Nutzt man den auch für das Rotationstheorem sphärischer Wellenfunktionen [44] angenommenen eingeschränkten Wertebereich der Winkel gemäß

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi, \quad (\text{A.2})$$

ergibt sich für $|z_3| = 1$:

$$\alpha + \gamma = \begin{cases} \arccos x_1 & \text{für } x_2 \geq 0, \\ -\arccos x_1 + 2\pi & \text{für } x_2 < 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

und

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{für } z_3 = 1, \\ \pi & \text{für } z_3 = -1. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Für alle anderen Fälle findet sich:

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} & \text{für } z_2 \geq 0, \\ -\arccos \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} + 2\pi & \text{für } z_2 < 0, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\beta = \arccos z_3, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma = \begin{cases} -\arctan \frac{y_3}{x_3} \pm \pi & \text{für } x_3 > 0, \\ -\arctan \frac{y_3}{x_3} & \text{für } x_3 < 0. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

B Anregende Welle

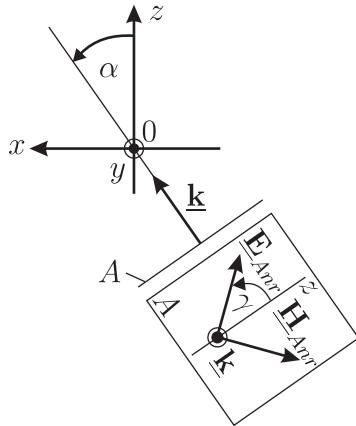


Bild B.1: Ausbreitungsrichtung und Polarisierung der einfallenden homogenen ebenen Welle.

Betrachtet wird eine anregende homogene ebene Welle gemäß Bild B.1. Der Wellenvektor \underline{k} befindet sich im Winkel α zur z -Achse in der xz -Ebene. Der elektrische Feldvektor steht im Winkel γ zur Projektion der z -Achse auf die Phasenfront A . Die Welle beschreibt sich folglich durch

$$\underline{E}_{Anr}(\underline{r}) = E_0 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma \end{pmatrix} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \text{ mit } \underline{k} = |\underline{k}| \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (B.1)$$

Gemäß [49] liefert die Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelwellen bezüglich des Ursprungs mit $z_n(kr) = j_n(kr)$ folgende Entwicklungskoeffizienten:

$$c_{n,m} = (-j)^{n+1} E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\cos \gamma \frac{d}{d\theta} - j \sin \gamma \frac{m}{\sin \alpha} \right] P_n^m(\cos \alpha), \quad (B.2)$$

$$d_{n,m} = (-j)^{n+1} E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\cos \gamma \frac{m}{\sin \alpha} - j \sin \gamma \frac{d}{d\theta} \right] P_n^m(\cos \alpha). \quad (B.3)$$

Für einen nicht am Ursprung platzierten Streukörper i stellt sich die Frage, wie sich die Koeffizienten $c_{i,n,m}$ und $d_{i,n,m}$ in Gleichung (2.32) aus obigen berechnen lassen. Prinzipiell kann man dafür das in Bild 2.2c) illustrierte Translationstheorem heranziehen. Wesentlich schneller und zugleich einfacher ist hier allerdings, die Eigenschaften der ausbreitenden Welle zu nutzen. Es folgt:

$$c_{i,n,m} = c_{n,m} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}_i} \text{ bzw. } d_{i,n,m} = d_{n,m} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}_i}. \quad (B.4)$$

C Translatorisches Additionstheorem

Gesucht ist die Entwicklung der Vektor-Wellenfunktionen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)})$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)})$ bezüglich Koordinatensystem j nach Vektor-Wellenfunktionen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})$ bezüglich des um $\underline{\mathbf{r}}_t = \underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_j$ verschobenen Ursprungs. Nach [52] lässt sich diese Koordinaten-Translation wie folgt formulieren:

$$\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (A_{\nu,\mu}^{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{\nu,\mu}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) + B_{\nu,\mu}^{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{\nu,\mu}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})) , \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} (A_{\nu,\mu}^{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{\nu,\mu}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)}) + B_{\nu,\mu}^{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{\nu,\mu}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})) . \quad (\text{C.2})$$

Für die Koeffizienten $A_{\nu,\mu}^{n,m}$ und $B_{\nu,\mu}^{n,m}$ gilt:

$$A_{\nu,\mu}^{n,m} = (-1)^{\mu} \sum_p a(m, n| -\mu, \nu| p) a(n, \nu, p) z_p(kr_t) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_t) e^{-j(m-\mu)\phi_t}, \quad (\text{C.3})$$

$$B_{\nu,\mu}^{n,m} = (-1)^{\mu+1} \sum_p a(m, n| -\mu, \nu| p, p-1) b(n, \nu, p) z_p(kr_t) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_t) e^{-j(m-\mu)\phi_t}.$$

Der Parameter p der in obigen Gleichungen durchgeführten Summationen umfasst den Bereich $|n - \nu|, |n - \nu| + 1, \dots, (n + \nu)$. Für $|\underline{\mathbf{r}}_i| < r_t$ werden auf der rechten Seite der Gleichung (C.2) Felder $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^B(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^B(\underline{\mathbf{r}}_{(i)})$ herangezogen. Die in den Koeffizienten $A_{\nu,\mu}^{n,m}$ und $B_{\nu,\mu}^{n,m}$ vorkommenden sphärischen Funktionen z_p sind dann vom gleichen Typ wie die in den Feldern $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)})$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^{B,H}(\underline{\mathbf{r}}_{(j)})$. Für $|\underline{\mathbf{r}}_i| > r_t$ dagegen besitzen die Kugelwellen auf beiden Seiten der Gleichung (C.2) die gleiche radiale Abhängigkeit. Es gilt dann $z_p = j_n$ in den Koeffizienten $A_{\nu,\mu}^{n,m}$ und $B_{\nu,\mu}^{n,m}$.

Die verbliebenen Koeffizienten bestimmen sich zu

$$\begin{aligned} a(n, \nu, p) &= (-j)^{\nu+p-n} [2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + (\nu+1)(n-\nu+p+1)(n+\nu-p) \\ &\quad - \nu(\nu-n+p+1)(n+\nu+p+2)] / [2\nu(\nu+1)], \\ b(n, \nu, p) &= -(-j)^{\nu+p-n} \sqrt{(n+\nu+p+1)(\nu-n+p)(n-\nu+p)(n+\nu-p+1)} \\ &\quad \cdot (2\nu+1) / (2\nu(\nu+1)) \end{aligned}$$

und

$$a(m, n|\mu, \nu|p, q) = (-1)^{m+\mu} (2p+1) \sqrt{\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!}} \cdot \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$a(m, n|\mu, \nu|p) = (-1)^{m+\mu} (2p+1) \sqrt{\frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!}} \cdot \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

das Wigner 3j-Symbol, definiert durch:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3, -m_3). \quad (\text{C.7})$$

Ausführliche Darstellungen für den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3, m_3)$ finden sich in [113].

D Clausius-Mossotti-Mischformel

Ziel ist die Beschreibung der effektiven Materialparameter eines kompositen Mediums, das aus zwei Phasen aufgebaut ist. Eine Phase ist durch das Wirtsmaterial (auch Hintergrund- oder Matrixmaterial genannt) gegeben, die andere durch die Einschlüsse innerhalb dieses Wirtsmaterials. Im folgenden werden die gesuchten effektiven Materialparameter des kompositen Mediums in der 6x6-Matrix

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}}_r & -j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \underline{\underline{\kappa}} \\ j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \underline{\underline{\kappa}} & \mu_0 \underline{\underline{\mu}}_r \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

zusammengefasst. Dabei bezeichnet $\underline{\underline{\epsilon}}_r$ den Tensor der relativen Permeabilität, $\underline{\underline{\mu}}_r$ den Tensor der relativen Permeabilität und $\underline{\underline{\kappa}}$ den Tensor der Chiralität. Hier ist folglich ein allgemeiner Fall, der eines (reziproken) bi-anisotropen Mediums, erfasst. Basierend auf den mittleren Dipolpolarisierbarkeiten der verwendeten Einschlüsse gemäß

$$\langle \underline{\underline{\alpha}} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \underline{\underline{\alpha}}_{ee} \rangle & \langle \underline{\underline{\alpha}}_{ee} \rangle \\ \langle \underline{\underline{\alpha}}_{me} \rangle & \langle \underline{\underline{\alpha}}_{mm} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

bestimmt sich $\underline{\underline{\underline{C}}}$ über die Dichte n der Einschlüsse aus dem Zusammenhang (frei nach [23])

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{\underline{M}}} + n \left(\underline{\underline{\underline{I}}} - n \frac{1}{3} \langle \underline{\underline{\alpha}} \rangle \cdot \underline{\underline{\underline{M}}} \right) \cdot \langle \underline{\underline{\alpha}} \rangle . \quad (\text{D.3})$$

In obiger Gleichung finden sich die Eigenschaften des Hintergrundmaterials in der Matrix $\underline{\underline{\underline{M}}}$ wieder. Die Elemente dieser Matrix bestimmen sich analog zu $\underline{\underline{\underline{C}}}$. Weiters enthält Gleichung (D.3) die Einheitsmatrix $\underline{\underline{\underline{I}}}$.

E Ergänzende Daten

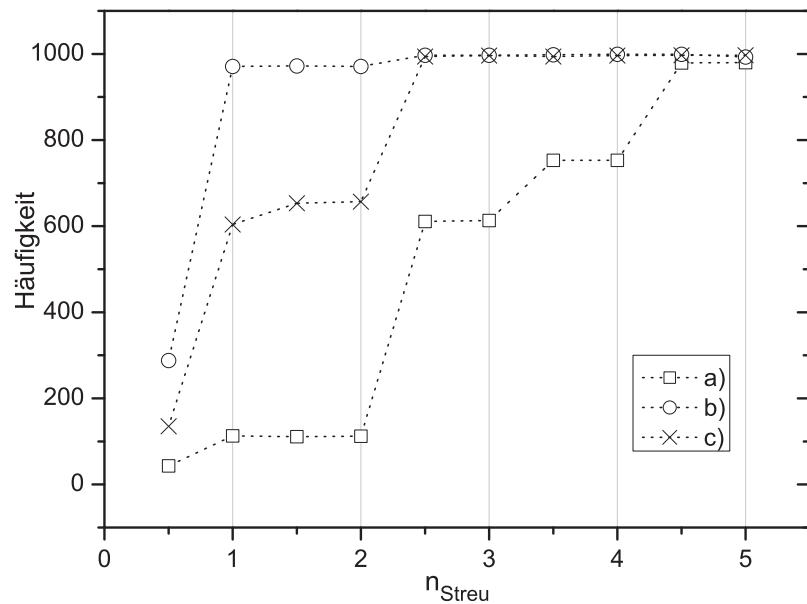


Bild E.1: Helixtyp ii: Häufigkeit der Abweichungen von maximal einem Frequenzschritt für a) $D = 2r_{\min} + 3a$, b) $D = 3r_{\min}$ und c) $D = 4r_{\min}$.

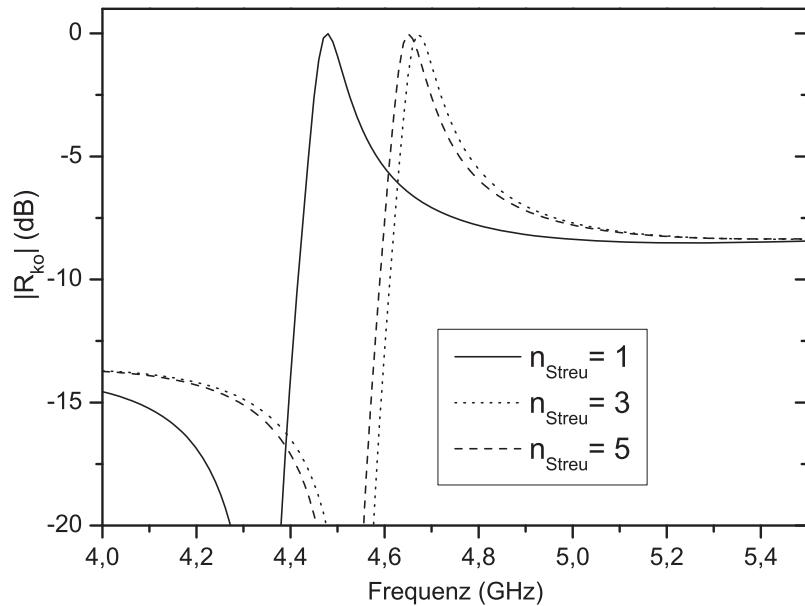


Bild E.2: Berechnete Reflektion der Anordnung nach Bild 4.8 für $D = 2r_{min} + 3a$. TM-Anregung, 80° Einfallswinkel.

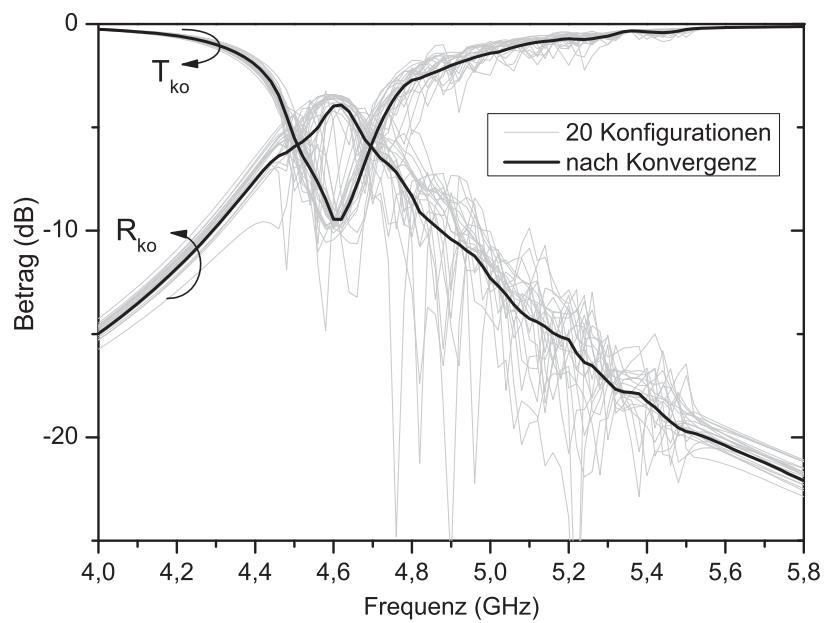


Bild E.3: Ausgewählte Streuparameter der ersten 20 zufälligen Konfigurationen. Zum Vergleich sind die Streuparameter, die aus dem Konvergenzkriterium erhalten werden, ebenfalls dargestellt.

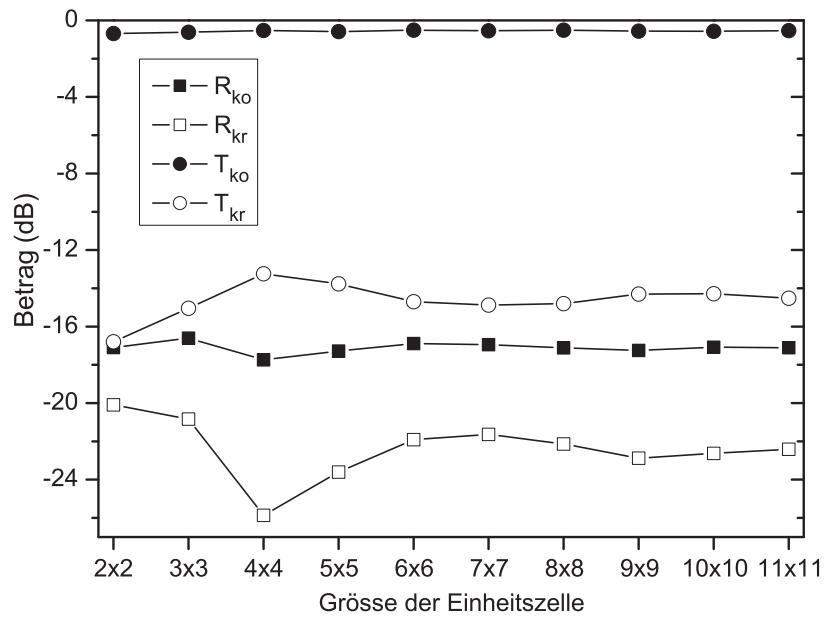


Bild E.4: Betrag der Streuparameter in Abhängigkeit von der Größe der Einheitszelle für $f = 5,3$ GHz.

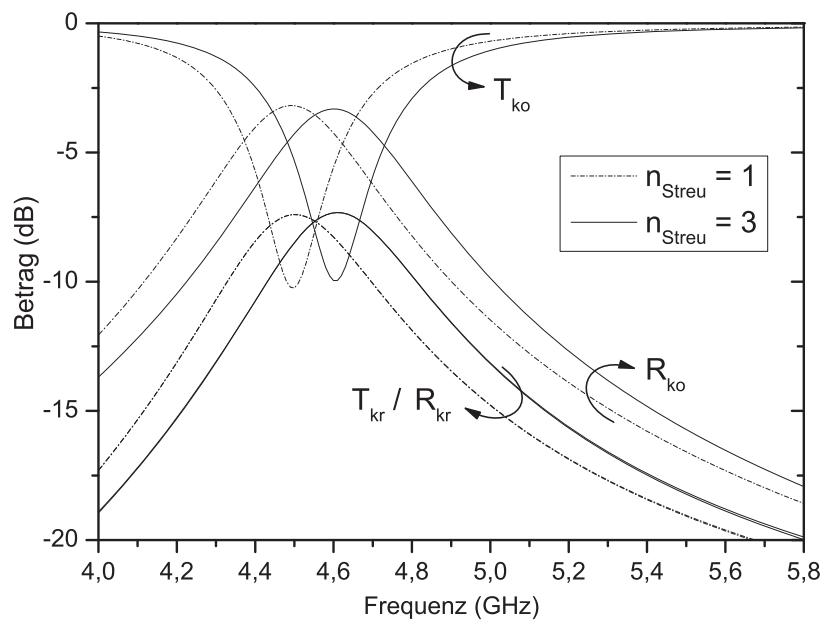


Bild E.5: Betrag der Streuparameter für eine rein periodische Anordnung ($\psi = 0^\circ$).

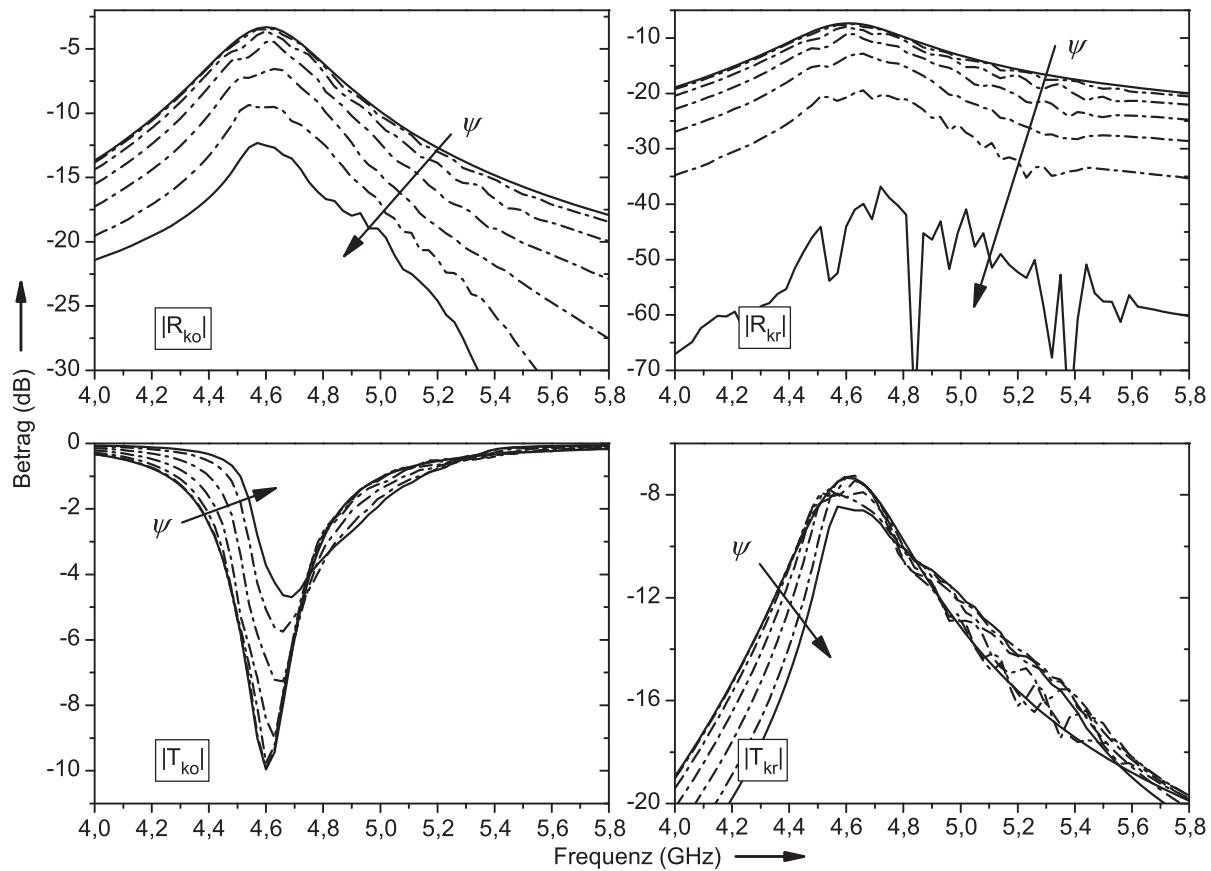


Bild E.6: Kombination aller Arten der Drehung der Helices: Einfluss des Parameters ψ auf die Streuparameter der Schicht. Durchgezogene Linien: $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$, strichpunktuierte Linien: $\psi = i \cdot 15^\circ$ mit $i = 1 \dots 5$.

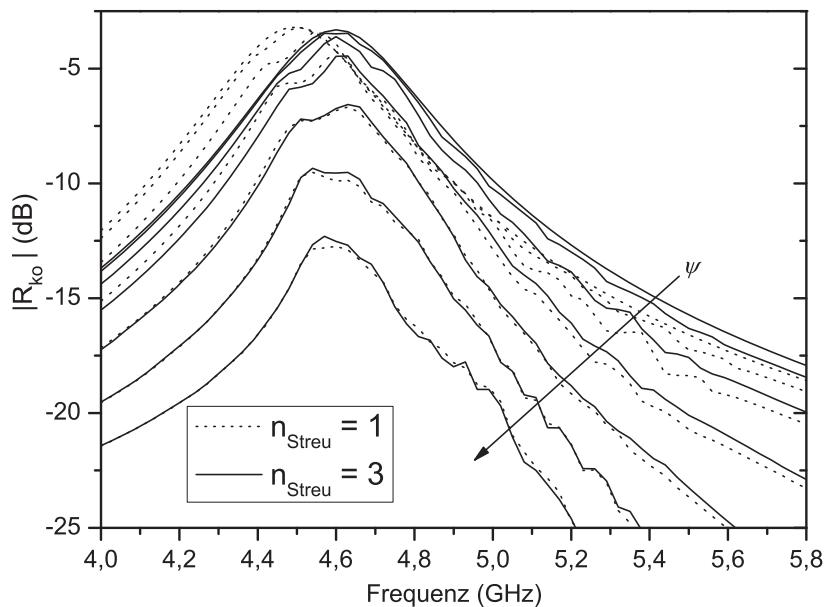


Bild E.7: Kombination aller Arten der Drehung der Helices: Kopolare Reflexion für den Übergang von der periodischen zur zufälligen Schicht.

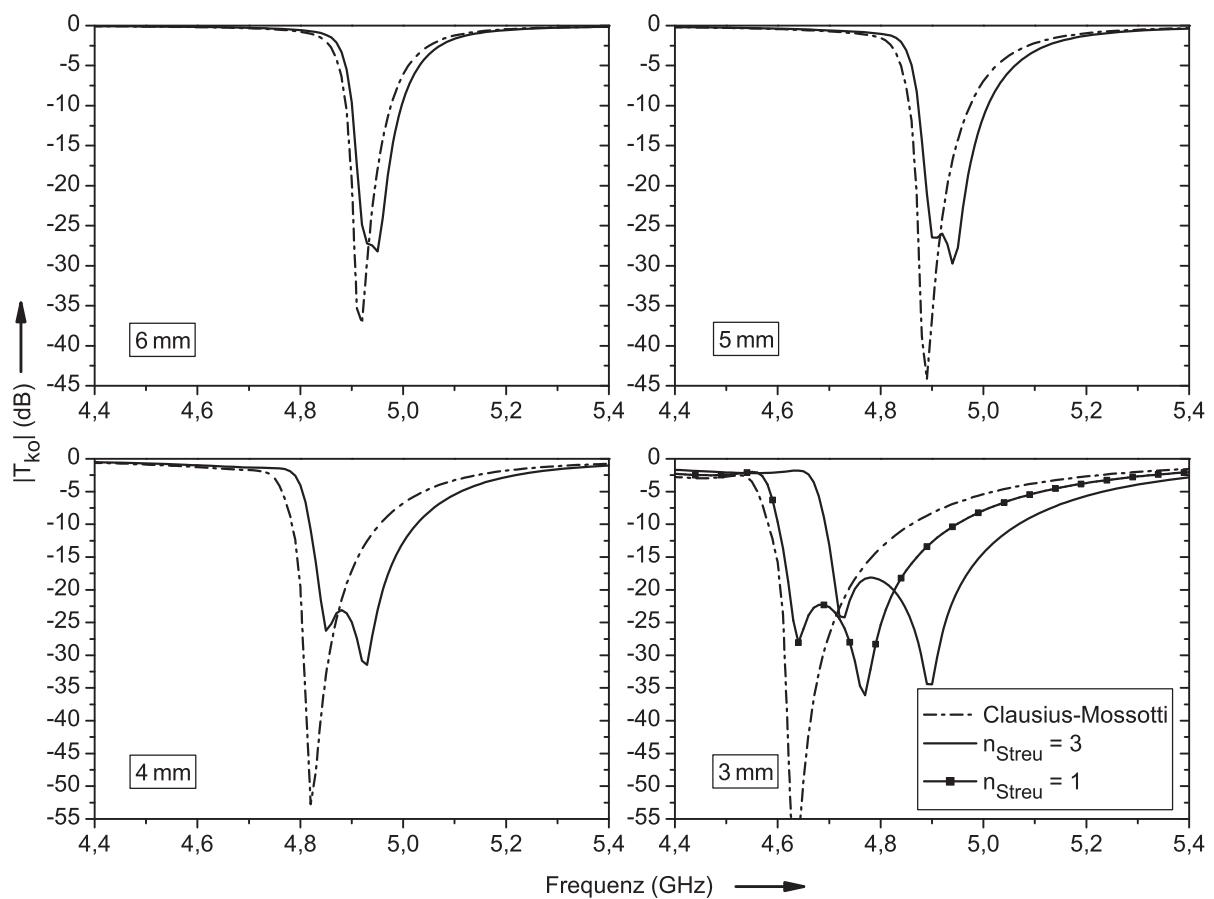


Bild E.8: Transmission bei senkrechtem Einfall für die dreilagige periodische Schicht bei verschiedener Rasterung D . Vergleich von Clausius Mossotti-Modell und Streuansatz.



Bild E.9: Anordnung zur Vermessung der Resonanzen einzelner Partikel. Zum Schutz des angeschlossenen vektoriellen Netzwerkanalysators vor elektrostatischer Entladung ist der Innenleiter der offenen koaxialen Leitung elektrisch isoliert.



Bild E.10: Polyurethan-Proben im Hohlleiter-Aufbau. Links: Aufgeschäumtes Material. Rechts: Kugeln nach Anwendung des Spritzgussverfahrens.

Literaturverzeichnis

- [1] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn: *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Princeton, New York, 1995
- [2] B. A. Munk: *Frequency Selective Surfaces: Theory and Design*, Wiley, New York, 2000
- [3] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Nemat-Nasser, S. Schultz: *Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, Phys. Rev. Lett., **48**, S. 4184–4187, Mai 2000
- [4] N. Engheta, R. W. Ziolkowski: *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*, Wiley, Piscataway, New York, 2006
- [5] R. Luebbers, H. S. Langdon, F. Hunsberger, C. F. Bohren, S. Yosikawa: *Calculation and Measurement of the Effective Chirality Parameter of a Composite Chiral Material Over a Wide Frequency Band*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **43**, S. 123–130, Februar 1995
- [6] C. R. Brewit-Taylor, P. G. Lederer, F. C. Smith, S. Haq: *Measurement and Prediction of Helix-Loaded Chiral Composites*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **47**, S. 692–700, April 1999
- [7] T. Robin, B. Souillard, R. Accolas, P. Theret, S. Bolioli: *Modelling of electromagnetic properties of helix-loaded chiral media*, Proc. 3rd International Workshop on Chiral, Bi-isotropic and Bi-anisotropic Media, S. 103–108, Périgueux, Frankreich, Mai 1994
- [8] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, A. J. Viitanen: *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, London, 1994
- [9] D. F. Arago: *Sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes, et sur quelques autres nouveaux phénomènes d'optique*, Mém. de l'Inst. I, S. 93–134, 1811

- [10] J. B. Biot: *Mémoire sur un nouveau genre d'oscillations que les molécules de la lumière éprouvent, en traversant certains cristaux*, Mém. de l'Inst. I, S. 1, 1812
- [11] K. F. Lindmann: *Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen*, Ann. d. Physik, **63**, S. 621–644, 1920
- [12] C. R. Brewitt-Taylor: *Fundamental Limitations on the Performance of Chiral Radar Absorbing Materials*, Proc. Bianisotropics 2000, S. 363–366, Lissabon, Portugal, September 2000
- [13] I. V. Lindell: Methods for Electromagnetic Field Analysis, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1992
- [14] F. Guérin, P. Bannelier, M. Labeyrie, J.-P. Ganne, P. Guillon: *Scattering of Electromagnetic Waves by Helices and Application to the Modelling of Chiral Composites: II. Maxwell Garnett Treatment*, J. Phys. D.: Appl. Phys., **28**, S. 643–656, 1995
- [15] A. Sihvola, I. Lindell, M. Oksanen, A. Hujanen: *Broadband Microwave Measurement and Analysis of Artificial Chiral Materials*, Proc. 24th European Microwave Conference, S. 378–383, Cannes, Frankreich, September 1994
- [16] J. Psilopoulos, J. H. Kaiser, J. Reinert, A. F. Jacob: *Performance Enhancement of Dielectric Absorbers by Means of Chiral Inclusions*, Proc. 10th European Electromagnetic Structures Conference (EESC), S. 125–132, München, Oktober 2001
- [17] J. Reinert, J. Psilopoulos, J. Grubert, A. F. Jacob: *On the Potential of Graded-Chiral Dallenbach Absorbers*, Microwave Opt. Technol. Letters, **30**, S. 254–257, August 2001
- [18] C. Meiners, A. F. Jacob: *Full-Wave Analysis of Composite Absorbing Layers*, Proc. 36th European Microwave Conference, Manchester, UK, S. 1011–1014, September 2006
- [19] R. W. Ziolkowski: *Desing, Fabrication, and Testing of Double Negative Metamaterials*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **51**, S. 1516–1529, Juli 2003
- [20] P. T. Teo, K. S. Lee, C. K. Lee: *Analysis and design of band-pass frequency-selective surfaces using the FEM CAD tool*, International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, **14**, S. 391–397, 2004

- [21] S. Bassiri, C. H. Papas, N. Engheta: *Electromagnetic wave propagation through a dielectric-chiral interface and through a chiral slab*, J. Opt. Soc. Am. A, **5**, S. 1450–1459, September 1988
- [22] F. Guérin: *Microwave Chiral Materials: a Review of Experimental Studies and Some Results on Composites with Ferroelectric Ceramic Inclusions*, in A. Priou, Hrsg., *Bianisotropic and Bi-isotropic Media and Applications, Progress In Electromagnetics Research*, PIER 9, S. 219–264, EMW Publishing, Cambridge, MA, 1994
- [23] A. H. Sihvola: *Electromagnetic Mixing Formulae and Applications*, Electromagnetic Waves Series 47, IEE, London, 1999
- [24] T. C. Choy: *Effective Medium Theory: Principles and Applications*, Clarendon Press, Oxford, 1999
- [25] D. K. Ghodgaonkar, V. V. Varadan, V. K. Varadan: *Free-Space Measurement of Complex Permittivity and Complex Permeability of Magnetic Materials at Microwave Frequencies*, IEEE Trans. Instrumentation Measurement, **39**, S. 387–394, April 1990
- [26] G. B. Smith, A. I. Maroof: *Optical response in nanostructured thin metal films with dielectric over-layers*, Optics Communications, **242**, S. 383–392, Dezember 2004
- [27] S. A. Tretyakov, A. H. Sihvola: *On the Homogenization of Thin Isotropic Layers*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **48**, S. 1858–1861, Dezember 2000
- [28] M. G. Silveirinha, C. A. Fernandes: *Homogenization of Metamaterial Surfaces and Slabs: The Crossed Wire Mesh Canonical Problem*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **53**, S. 59–69, Januar 2005
- [29] E. Saenz, P. Ikonen, R. Gonzalo, S. Tretyakov: *On the Definition of Effective Permittivity and Permeability for Thin Composite Layers*, J. Appl. Phys., **101**, S. 114910–114910–7, Juni 2007
- [30] P. Ikonen, E. Saenz, R. Gonzalo, C. Simovski, S. Tretyakov: *Mesoscopic effective material parameters for thin layers modeled as single and double grids of interacting loaded wires*, Metamaterials, **1**, S. 89–105, Dezember 2007
- [31] P. A. Belov, C. R. Simovski: *Homogenization of electromagnetic crystals formed by uniaxial resonant scatterers*, Phys. Rev. E, **72**, 026615, 2005

- [32] F. Mariotte, S. A. Tretyakov, B. Sauviac: *Isotropic Chiral Composite Modeling - Comparison Between Analytical, Numerical, and Experimental Results*, Microwave Opt. Technol. Letters, **7**, S. 861–864, 1994
- [33] M. J. Facchini, D. H. Werner: *Fractal Spheres as Molecules for Artificial Dielectric Metamaterials*, Electromagnetics, Special Issue on Complex Media and Metamaterials, **26**, S. 289–300, April-Juni 2006
- [34] S. Van Damme, A. Franchois: *A Full-Wave Homogenization Technique for Steel Fiber Reinforced Concrete*, Electromagnetics, Special Issue on Complex Media and Metamaterials, **26**, S. 301–314, April-Juni 2006
- [35] W. C. Chew, J. A. Friedrich, R. Geiger: *A Multiple Scattering Solution for the Effective Permittivity of a Sphere Mixture*, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **28**, S. 207–214, März 1990
- [36] K. W. Whites: *Full Wave Computation of Constitutive Parameters for Lossless Composite Chiral Materials*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **43**, S. 376–384, April 1995
- [37] J. Psilopoulos, C. Meiners, A. F. Jacob: *A Scattering Approach for the Characterization of Composite Materials*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **53**, S. 1507–1513, April 2005
- [38] R. F. Harrington: Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961
- [39] J. A. Stratton: Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941
- [40] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Hrsg.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, US Government Printing Office, Washington, DC, 10. Auflage, 1972
- [41] H.-G. Unger: Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik, Teil 1, Hüthig, Heidelberg, 2. Auflage, 1988
- [42] J. van Bladel: Singular Electromagnetic Fields and Sources, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1995
- [43] S. Stein: *Addition Theorems for Spherical Wave Functions*, Q. J. Appl. Math., **19**, S. 15–24, 1961
- [44] A. Messiah: Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 2. Auflage, 1966

- [45] C. Meiners, A. F. Jacob: *Fast Numerical Analysis of Infinite Helix Layers*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **55**, S. 154–161, Januar 2007
- [46] C. Meiners, A. F. Jacob: *On the Scattering Properties of Composite Materials (invited)*, Proc. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, S. 566–569, Seoul, South Korea, Juli 2005
- [47] J. Jackson: Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 3. Auflage, 1999
- [48] J. E. Hansen: Spherical Near-Field Antenna Measurements, Peter Peregrinus Ltd., 1988
- [49] J. H. Bruning, Y. T. Lo: *Multiple Scattering of EM Waves by Spheres, Part I – Multipole Expansion and Ray-Optical Solutions*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **19**, S. 378–390, Mai 1971
- [50] W. C. Chew: Waves and Fields in Inhomogeneous Media, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990
- [51] G. Mie: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*, Ann. d. Physik, **25**, S. 377–445, 1908
- [52] O. R. Cruzan: *Translational Addition Theorems for Spherical Vector Wave Functions*, Q. J. Appl. Math., **20**, S. 33–40, 1962
- [53] C. Meiners, J. Psilopoulos, A. F. Jacob: *Determining the Scattered Fields of Dense Particles Using Recursive Algorithms*, Microwave Opt. Technol. Letters, **40**, S. 523–529, März 2004
- [54] E. B. Graham, J. Pierrus, R. E. Raab: *Multipole Moments and Maxwell's Equations*, J. Physics B, **25**, S. 4673–4684, 1992
- [55] C. Meiners, A. F. Jacob: *The T-Matrix of a Scatterer Based on its Dipole Polarizabilities*, Proc. Bianisotropics 2004, S. 140–143, Ghent, Belgien, September 2004
- [56] S. A. Tretyakov, F. Mariotte, C. R. Simovski, T. G. Kharina, S. Bolioli: *Antenna Model for Individual Chiral and Omega Particles*, Proc. Chiral '94, S. 41–48, Périgueux, Frankreich, Mai 1994
- [57] J. Reinert, A. F. Jacob: *Multipolarizability Tensors of Thin-wire Scatterers: A Direct Calculation Approach*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **49**, S. 1532–1538, November 2001

- [58] P. C. Waterman: *Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering*, Phys. Rev. D, **3**, S. 825–839, 1971
- [59] M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, L. D. Travis, Hrsg.: Light Scattering by Non-spherical Particles: Theory, Measurements, and Applications, Academic Press, San Diego, 2000
- [60] T. A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop, N. R. Heckenberg: *Calculation of the T-matrix: General considerations and application of the point-matching method*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, **79-80**, S. 1019–1029, 2003
- [61] D. W. Mackowski: *Discrete dipole moment method for calculation of the T matrix for nonspherical particles*, J. Opt. Soc. Am. A, **19**, S. 881–893, Mai 2002
- [62] C. Meiners, M. D. Richter, A. F. Jacob: *Higher Order Multipole Model of a Thin-Wire Helix*, IEEE Trans. Ant. Propagat., **56**, S. 3166–3172, Oktober 2008
- [63] S. Ramo, J. Whinnery, T. van Duzer: Fields and Waves in Communication Electronics, John Wiley & Sons, New York, 1965
- [64] J. Reinert: Charakterisierung chiraler Streukörper und Materialien, Dissertation, Institut für Hochfrequenztechnik, TU Braunschweig, 2001
- [65] R. F. Harrington: Field Computation by Moment Methods, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993
- [66] R. F. Harrington: *Origin and development of the method of moments for field computation*, IEEE Antennas Propagat. Magazine, **32**, S. 31–35, Juni 1990
- [67] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2. Auflage, 1996
- [68] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, A. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen: LAPACK Users' Guide, SIAM, Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 3. Auflage, 1999
- [69] G. Busse, J. Reinert, A. F. Jacob: *Waveguide Characterization of Chiral Material: Experiments*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **47**, S. 297–301, März 1999

- [70] G. J. Burke, A. J. Poggio: *Numerical Electromagnetics Code (NEC) - Method of Moments*, Technical document 116, Naval Ocean Systems Center, San Diego, CA, Januar 1981
- [71] E. F. Knott: Radar Cross Section, Artech House, 685 Canton Street, Norwood, MA 02062, 2. Auflage, 1993
- [72] E. B. Graham, R. E. Raab: *Light Propagation in Cubic and Other Anisotropic Crystals*, Proc. R. Soc. London A, **430**, S. 593–614, 1990
- [73] G. Floquet: *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Ann. École Norm. Sup., **12**, S. 47–88, 1883
- [74] C. Meiners, A. F. Jacob: *Numerical Aspects in the Analysis of Infinite Regular and Random Helix Arrays*, Microwave Opt. Technol. Letters, **49**, S. 2609–2613, Oktober 2007
- [75] A. C. Aitken: *On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **46**, S. 289–305, 1926
- [76] R. E. Jorgenson, R. Mittra: *Efficient Calculation of the Free-Space Periodic Green's Function*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **38**, S. 633–642, Mai 1990
- [77] J. Blackburn, L. R. Arnaud: *Numerical Convergence in Periodic Method of Moments of Frequency-Selective Surfaces Based on Wire Elements*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **53**, S. 3308–3315, Oktober 2005
- [78] C. Craeye, A. Bart Smolders, D. H. Schaubert, A. G. Tijhuis: *An Efficient Computation Scheme for the Free Space Green's Function of a Two-Dimensional Semiinfinite Phased Array*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **51**, S. 766–771, April 2003
- [79] S. Enoch, R. C. McPhedran, N. A. Nicorovici, L. C. Botten, J. N. Nixon: *Sums of spherical waves for lattices, layers, and lines*, J. Math. Phys., **42**, S. 5860–5870, Dezember 2001
- [80] R. C. Wittmann: *Spherical Wave Operators and the Translation Formulas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **36**, S. 1078, August 1988
- [81] A. Sahin, E. L. Miller: *Recursive T-Matrix Method for Scattering from Multiple Dielectric and Metallic Objects*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **46**, S. 672–678, Mai 1998

- [82] P. R. Siqueira, K. Sarabandi: *T-Matrix Determination of Effective Permittivity for Three-Dimensional Dense Random Media*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **48**, S. 317–327, Februar 2000
- [83] C. Meiners, A. F. Jacob: *Scattering from Thin Layers of Composite Materials: A Numerical Approach*, Electromagnetics - Special Issue, **26**, S. 235–246, April-Juni 2006
- [84] J. Volakis: Antenna Engineering Handbook, McGraw-Hill, New York, 4. Auflage, 2007
- [85] H. Schade, K. Neemann: Tensoranalysis, de Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 2006
- [86] I. P. Theron, J. H. Cloete: *The Electric Quadrupole Contribution to the Circular Birefringence of Nonmagnetic Anisotropic Chiral Media: A Circular Waveguide Experiment*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **44**, S. 1451–1459, August 1996
- [87] U. van Rienen: Numerical Methods in Computational Electrodynamics: Linear Systems in Practical Applications, Springer, Berlin, 2001
- [88] High Frequency Structure Simulator, HFSSTMv10: Ansoft Corporation, www.hfss.com, Pittsburgh, PA 15219
- [89] A. Lakhtakia, W. S. Weiglhofer: *Electromagnetic Waves in a Material with Simultaneous Mirror-Conjugated and Racemic Chirality Characteristics*, Electromagnetics, **20**, S. 481–488, November 2000
- [90] S. Tretyakov: Analytical Modeling in Applied Electromagnetics, Artech House, New York, 2003
- [91] M. Kummer: Grundlagen der Mikrowellentechnik, VEB Verlag Technik, Berlin, 2. Auflage, 1989
- [92] J. C. Vardaxoglou: Frequency Selective Surfaces, Research Studies Press LTD., Taunton, 1997
- [93] B. A. Munk: Finite Antenna Arrays and FSS, Wiley - IEEE Press, 2003
- [94] J. Busse: *Meßtechnische Charakterisierung chiraler Materialien im Rundhohleiter*, Dissertation, Institut für Hochfrequenztechnik, TU Braunschweig, 1999
- [95] C. Meiners, A. F. Jacob: *Numerical and Experimental Parameter Study of Helix Layers*, IEEE Trans. Antennas Propagat., **56**, S. 1321–1328, Mai 2008

- [96] M. Richter: Untersuchung der Multipol-Streuung und -Interaktion zufälliger und ungeordneter Strukturen metallischer Helices, Diplomarbeit, Institut für Hochfrequenztechnik, TU Hamburg-Harburg, 2006
- [97] J. Psilopoulos: Ein Streuverfahren zur Charakterisierung kompositer Materialien, Dissertation, Institut für Hochfrequenztechnik, TU Braunschweig, 2003
- [98] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller: *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, The Journal of Chemical Physics, **21**, S. 1087–1092, Juni 1953
- [99] K. H. Ding, C. E. Mandt, L. Tsang, J. A. Kong: *Monte Carlo Simulations of Pair Distribution Functions of Dense Discrete Random Media With Multiple Sizes of Particles*, J. Electromagn. Waves Appl., **6**, S. 1015–1030, 1992
- [100] D. R. Smith, S. Schultz, P. Marcoš, C. M. Soukoulis: *Determination of Effective Permittivity and Permeability of Metamaterials from Reflection and Transmission Coefficients*, Phys. Rev. B, **65**, S. 195104, 2002
- [101] X. Chen, T. M. Grzegorczyk, B. Wu, J. Pacheco, Jr, J. A. Kong: *Robust Method to Retrieve the Constitutive Effective Parameters of Metamaterials*, Phys. Rev. E, **70**, S. 016608, 2004
- [102] D. W. Berreman: *Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation*, J. Opt. Soc Am., **62**, S. 502–510, April 1972
- [103] J. Musil, F. Zacek: *Microwave Measurements of Complex Permittivity by Free Space Methods and Their Applications*, Elsevier, 1986
- [104] H.-G. Unger: *Optische Nachrichtentechnik (Band 1)*, ELTEX Studientexte Elektrotechnik, Hüthig Verlag, 3. Auflage, 1993
- [105] J. Grubert: Ein automatischer bistatischer Messplatz für Reflexionsmessungen an absorbierenden Schichten, Diplomarbeit, Institut für Hochfrequenztechnik, TU Braunschweig, 1999
- [106] Agilent Technologies: *AN 1287-3: Applying Error Correction to Network Analyzer Measurements*, Application Note
- [107] M. Hahn: Charakterisierung eines Freiraummessplatzes zur breitbandigen Untersuchung chiraler Materialien, Studienarbeit, TU Braunschweig, Institut für Hochfrequenztechnik, 2002

- [108] C. Meiners, A. F. Jacob: *Analysis and Fabrication of a Frequency-Selective Helix Layer*, Proc. German Microwave Conference (GeMiC) 2008, S. 356–359, Hamburg, März 2008
- [109] C. Meiners, A. F. Jacob: *Analysis, Fabrication, and Measurement of Frequency-Selective Helix Layers*, Proc. Eur. Microwave Assoc. (Special Issue), **4**, S. 73–78, Dezember 2008
- [110] J. Psilopoulos, J. Reinert, A. F. Jacob: *Fabrication Effects on the Resonance Bandwidth of Chiral Material*, Proc. Bianisotropics 2000, S. 313–316, Lissabon, Portugal, September 2000
- [111] W. M. Visscher, M. Bolsterli: *Random Packing of Equal and Unequal Spheres in Two and Three Dimensions*, Nature, **239**, S. 504–507, 1972
- [112] A. H. Sihvola, I. V. Lindell: *Analysis on Chiral Mixtures*, J. Electromagnetic Waves and Appl., **6**, S. 553–572, 1992
- [113] E. W. Weisstein: Concise Encyclopedia of Mathematics, CRC, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, New York, Washington DC, 1999

