1. Stabilität des Schiffes in nahezu aufrechter Schwimmlage ($\Phi < 5°$)

1.1. Allgemein

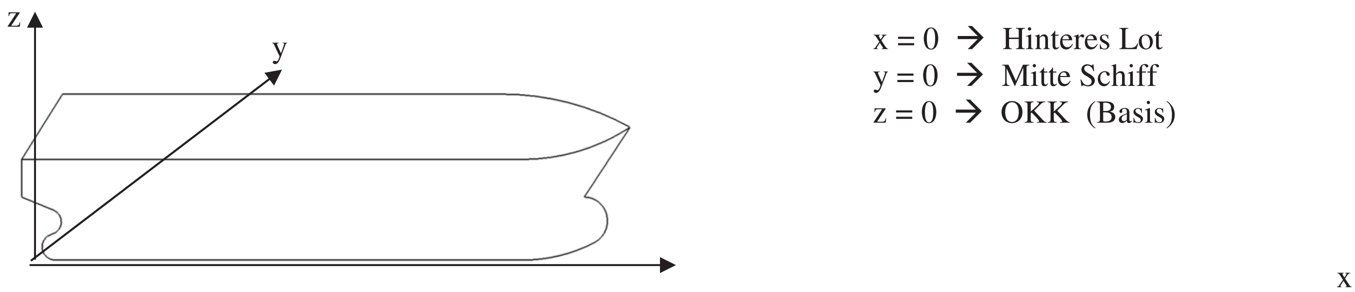
Es ist tägliche Aufgabe der Bordbesatzung, zu errechnen, welche Schwimmlage sich bei einem Schiff einstellt, wenn es mit bestimmten Kräften oder Momenten belastet wird [z.B. der Ladung]. Dieser Abschnitt soll den physikalischen Zusammenhang zwischen den Kräften und Momenten am Schiff und der daraus folgenden Schwimmlage untersuchen.

Die an einem Schiff wirkenden Kräfte sind
- „Auftriebskräfte“ aus der Schiffsform, die sich sehr genau berechnen lassen.
- „Massenkräfte“ [Leerschiffsmasse, Ladung...], die entweder bekannt sind oder durch Versuche gemessen werden [z.B. Krängungsversuch]
- „Sonstige Kräfte“ [Winddruck-Kraft, Zentrifugalkraft im Drehkreis, Eis an Deck], die nicht genau bekannt sind und aufgrund von Erfahrung geschätzt werden.

Als Koordinatensystem wird folgendes System vereinbart:

Der Ursprung liegt bei:

x = 0 → Hinteres Lot
y = 0 → Mitte Schiff
z = 0 → OKK (Basis)



F_z = Kraft in z-Richtung
M_T, I_T = Breiten-Moment um die x-Achse [transverse]
M_L, I_L = Längen-Moment um die y-Achse [longitudinal]
M_V = Höhen –Moment um die y-Achse [vertical]

Nomenklatur				
Deutsch	Englisch	dt.	engl.	Sonst.
Tiefgang (OKK)	Draft (TOK)	T	D	Tm
Längenschwerpunkt der WL (vor HL	Longitudinal center of flotation	xwl	lcf	AF,cof
Längenschwerp. der Verdrängung	Longitudinal center of bouyanc	xv	lcb	AB
Längenschwerp. des Gewichtes	Longitudinal center of gravity	xg	lcg	
Höhenschwerp. der Verdrängung	Vertical center of bouyancy	KF	KB	vcb
Höhenschwerp. des Gewichtes	Vertical center of gravity	KG	vcg	
Seitenschwerpunkt des Gewichtes	Transverse center of gravity	yg	tcg	
Vertikal-Abstand Kiel-Metazentrum	Distance keel=>metacentrum	KM	KM	KMT
Breiten-Trägheitsmoment	Transv. moment of inertia	Ib	IT	Ix
Trimmfaktor (v , h)	Trim coefficient (fore,aft)	tv,th	tf,ta	
Tiefertauchung (t/cm)	Immersion ; Inc. of Displacem.	Immers	TCP	TP ; Jnc
Oberfläche	Surface	O	Surf.	
Pantokarenen	Cross curves	KN	w	
Hebelarm	Heeling lever	hst	h	

Weitere Definitionen:

- Die Masse eines Schiffes wird Deplacement [Depl in t] genannt.
- Die Verdrängung eines Schiffes ist das Volumen des Unterwasserschiffes [∇ in m^3].
- Die Dichte des Wassers wird als Rho bezeichnet [$\rho = 1{,}025\ t/m^3$ bei Seewasser].
- Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9{,}81\ m/s^2$.
  Über $F = m \cdot g$ werden Kräfte und Massen umgerechnet: $1{,}0\ t \approx 9{,}81\ kN$.

1.2. Das Archimedische Prinzip (280 v. Chr.)

Warum schwimmt ein Schiff aus Eisen? Machen Sie ein Gedanken-Experiment:

- nehmen Sie einen Eisenklotz und legen Sie ihn auf das Wasser. Er wird untergehen.
- formen Sie aus dem Eisenklotz eine Schale und sie wird schwimmen.

<u>Dahinter steckt das „archimedische Prinzip“:</u>

> „Ein Körper schwimmt im Gleichgewicht, wenn sein Eigengewicht genauso groß ist wie das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.“

⇨ Der Klotz kann nicht genügend Wasser verdrängen und geht unter. Die Schale dagegen verdrängt genügend Wasser und schwimmt.

Das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit wird „Auftrieb“ genannt (engl. Buoyancy).
Die Auftriebskraft ist also $F_B = \rho \cdot g \cdot \nabla$
Das Gewicht des Schiffes wird „Deplacement“ genannt: $F_G = g \cdot Depl$

→ Für ein frei schwimmendes Schiff im Gleichgewicht gilt:

$$F_G = F_B$$

$$g \cdot Depl \qquad\qquad \rho \cdot g \cdot \nabla$$

$$\boxed{\textbf{Depl} = \boldsymbol{\rho \cdot \nabla} \quad \textbf{im Gleichgewicht}}$$

Daher kann man Wasser auch als Präsisionwaage verwenden:
Wenn man das getauchte Unterwasservolumen eines Schiffes kennt, kann man das Eigengewicht des Schiffes sehr genau berechnen.

Genau diese Verfahren werden bis heute bei jedem Schiffsneubau zur Bestimmung seines Eigengewichts durchgeführt.

Zusatzfrage: Warum schwimmt ein Eisberg mit -10° Eistemperatur in +5° warmem Wasser?

Antwort: $Depl_{const} = \nabla_{-10°} \cdot \rho_{-10°} \overset{!}{=} \nabla_{+5°} \cdot \rho_{+5°} \rightarrow$

$\nabla_{-10°} = \frac{\nabla_{+5°} \cdot \rho_{+5°}}{\rho_{-10°}}$ ist kleiner als $\nabla_{+5°}$, daher schaut ein Teil oben raus.

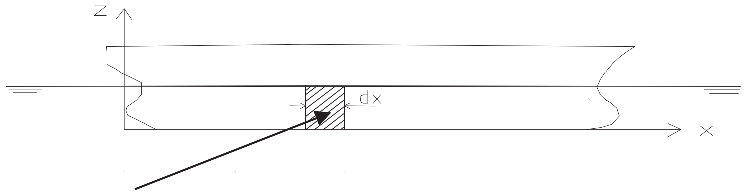
1.3. Die Verdrängung

a) Der Auftrieb ist ein Kraft-Vektor, der stets senkrecht zur WL-Fläche gerichtet ist.

$$F_B = \rho \cdot g \cdot \nabla$$

b) Für die Berechnung der Verdrängung gibt es 2 Wege

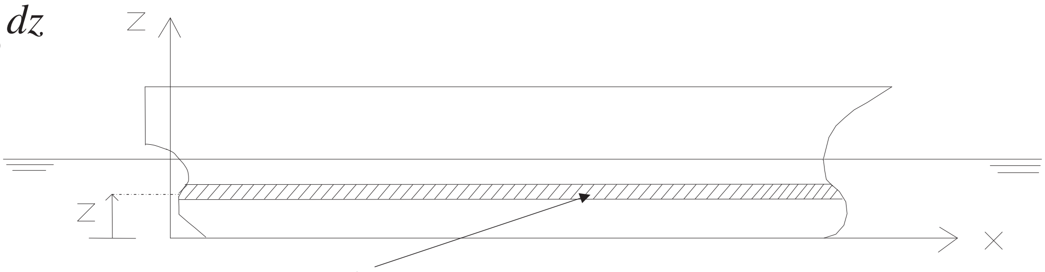
$$\nabla = \int_0^L A_{spt_{(x)}} \, dx$$



dVol = $A_{Spt_{(x)}} \cdot dx$

oder

$$\nabla = \int^T A_{WL_{(z)}} \, dz$$



dVol = $A_{WL_{(z)}} \cdot dz$

Das archimedische Prinzip gilt auch für Zusatzgewichte

⇨ $m_H = \rho \cdot A_{WL} \cdot dT = TPC \cdot dT \cdot 100 \text{ cm/m}$

$$\text{mit } TPC = \frac{A_{WL} \cdot \rho}{100 cm/m}$$

Der Angriffspunkt der Verdrängungskraft liegt im Volumenschwerpunkt des Unterwasserschiffes. Der Abstand zum HL wird als Lcb (longitudinal center of buoyancy) bezeichnet. Der Wert wird bestimmt mit Hilfe einer Momentenbilanz um den Ursprung:

$$M_L = \nabla \cdot lcb = \int_0^L x \cdot A_{spt_{(x)}} \, dx \quad \Longrightarrow \quad lcb = \frac{\int_0^L x \cdot A_{spt} \cdot dx}{\nabla}$$

1.4. Das Deplacement (Breakdown in Einzelmassen)

Am freischwimmenden Schiff greifen nur Massenkräfte und Auftriebskräfte an. Die Gesamtmasse des Schiffes – das Deplacement – wird in folgende Einzelpositionen aufgeteilt:

1) Nettostahl	NST	Leerschiffsmasse MLS
2) Einrichtung und Ausrüstung	E+A	
3) Ladungsanlage	C	
4) Maschinenanlage	M	
5) Brennstoff, Schmieröl, Frischwasser Proviant, Besatzung und Effekten	Vorräte	Tragfähigkeit „all told“
6) Wasserballast (in einzelnen Ladefällen)	WB	
7) Ladung	Payload	

$\sum$ = Deplacement

Die Gesamtmasse [Deplacement] ergibt sich als Summe der Einzelmassen.
Die Schwerpunkte ergeben sich durch Momentenbilanz:

$$\mathrm{Depl} = \sum_1^i m_i \qquad \mathrm{lcg} = \frac{\sum_1^i m_i x_i}{\mathrm{Depl}} \qquad \mathrm{KG} = \mathrm{vcg} = \frac{\sum_1^i m_i z_i}{\mathrm{Depl}} \qquad \mathrm{tcg} = \frac{\sum_1^i m_i y_i}{\mathrm{Depl}}$$

$\sum m_i$ =Summe der Einzelmassen
x_i, y_i, z_i = Längen / Breiten / Höhenabstand zum Ursrpung
lcg = longitudinal center of gravity
KG = vcg = vertical center of gravity
tcg = transverse center of gravity

1.5. Die Gleichgewichtsbedingungen

In der Hydrostatik wird – wie der Name schon sagt – ein statischer, zeitlich nicht veränderlicher Zustand vorausgesetzt. Dies bedeutet: glattes Wasser, Gleichgewicht, Schiff ohne Fahrt, keine Massenträgheit.
Die Gleichgewichtsbedingungen lauten in allgemeiner Form: $\sum F = 0$; $\sum M = 0$

In unserem Spezialfall der Hydrostatik treten Vertikalkräfte, Krängungs- und Trimmmomente auf. Daher reduzieren sich die Gleichgewichtsbedingungen auf

$$\sum F_z = 0 \ \text{[Tiefgang]}$$
$$\sum M_T = 0 \ \text{[Krängung]}$$
$$\sum M_L = 0 \ \text{[Trimm]}$$

Fahren ($\sum F_x = 0$), Driften ($\sum F_y = 0$) und Manövrieren ($\sum M_v = 0$) werden in der Hydrostatik nicht untersucht und gehören in das Gebiet der der Hydrodynamik.

In der Hydrostatik ist es üblich, die Kräfte als Massen und die Momente als Massenmomente [Masse · Hebel] darzustellen. Die Einheiten sind also „t“ oder „t·m“.
Die Erdbeschleunigung „g“ wird nicht mitgeführt, da sie sich in der Kräfte- und Momentenbilanz wieder herauskürzen würde. $1\,\mathrm{t} \cdot g = 9{,}81\,\mathrm{kN}$

1.6. Das Metazentrum

Das Metazentrum wird dargestellt an einem Schwimmkörper, der durch ein äußeres Moment M_{Kr} zur Seite gekrängt wird [z.B. Winddruckmoment].

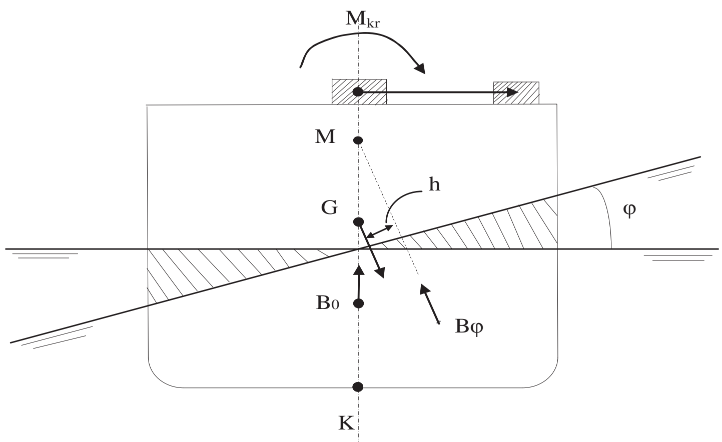
Die Kräfte, die an dem Schwimmkörper angreifen, werden an einem Spantquerschnitt dargestellt.

F_G = Depl = Masse	greift in G an	$G_0 = G_\varphi$
$F_B = \rho \cdot \nabla$ = Auftrieb	greift zunächst in B_0 an, wandert aufgrund der eintauchenden und austauchenden Keilstücke zur Seite nach B_φ aus	

Das Metazentrum hat eine anschauliche und eine mathematische Erklärung:

- mathematisch: Das Metazentrum M ist der Schnittpunkt zweier benachbarter Auftriebsvektoren bei kleiner Winkeldrehung ($d\varphi \Rightarrow 0$).

- anschaulich: Betrachtet man das Schiff als ein hängendes Pendel, so ist das Metazentrum der Aufhängungspunkt. Die Masse des Pendels ist im Punkt G vereint.



1.7 . Das aufrichtende Moment bei kleinen Neigungswinkeln ($\varphi < 5°$)

Im Bild erkennt man, dass bei gekrängtem Schwimmkörper die Wirkungslinien der Gewichtskraft „F_G“ und der Auftriebskraft „$F_{B\varphi}$“ versetzt sind. Dadurch entsteht ein aufrichtendes Moment, welches dem äußeren Krängungsmoment entgegen wirkt.

Die Größe des aufrichtenden Momentes beträgt $M_A = F_B \cdot h$

Mit $F_B = \rho \cdot \nabla$, $h = GM \cdot \sin\varphi$ und $GM = KM - KG$ gilt: $M_A = \rho \cdot \nabla \cdot GM \cdot \sin\varphi$

Mit Hilfe des aufrichtenden Momentes kann die Art des Gleichgewichtes bestimmt werden:

Stabiles Gleichgewicht liegt vor, wenn	$M_A > 0$ => $GM > 0$ => M liegt über G
Labiles Gleichgewicht liegt vor, wenn	$M_A < 0$ => $GM < 0$ => M liegt unter G
Indifferentes Gleichgewicht liegt vor, wenn	$M_A = 0$ => $GM = 0$ => M liegt in G

Die Strecke GM wird Anfangsstabilität genannt. Sie stellt ein Maß dafür dar, welche Stabilität in der Anfangsschwimmlage ($\varphi \sim 0$) vorliegt.

1.8. Berechung des Krängungswinkels bei kleinen Neigungen (φ < 5°)

Den Krängungswinkel erhält man aus der Gleichgewichtsforderung $\sum M = \sum M_{Kr} - \sum M_A = 0$.

Beispiel 1: Ein Schiff werde durch ein Windmoment „M_W“ gekrängt

$$\left.\begin{array}{l} M_{Kr} = M_{W0}\,[\text{tm}] \cdot \cos\varphi \\ \\ M_A = \rho \cdot \nabla \cdot GM \cdot \sin\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{M_{W_0}}{\rho \cdot \nabla \cdot GM}$$

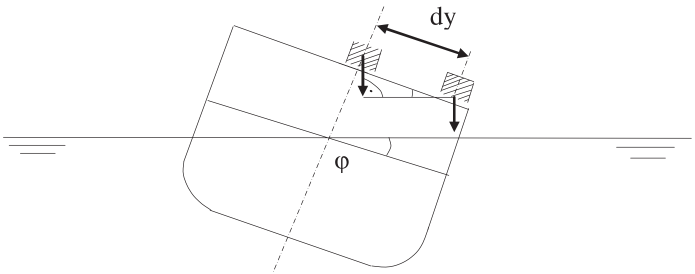
Beispiel 2: Eine an Deck stehend Masse m_H wird um den Weg dy zur Seite verschoben

$$\left.\begin{array}{l} M_{Kr} = m_H \cdot dy \cdot \cos\varphi \\ \\ M_{aufr} = \rho \cdot \nabla \cdot GM \cdot \sin\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{m_H \cdot dy}{\rho \cdot \nabla \cdot GM}$$

Diese Gleichung zeigt den einfachen Zusammenhang zwischen Krängungswinkel φ, Verschiebemoment „$m_H \cdot dy$“ und Anfangsstabilität GM. Wenn zwei der drei Größen bekannt sind, kann die dritte berechnet werden.

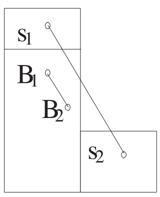
Beispiel Krängungsversuch:
$m_H \cdot dy$ und φ werden gemessen

$$KG = KM - GM = KM - \frac{m_H \cdot dy}{\rho \cdot \nabla \cdot \tan\varphi}$$



1.9. Die Guldinsche Regel

„Der Schwerpunkt eines Körpers (Masse, Volumen, Fläche) verschiebt sich bei der Verlagerung von Einzelkomponenten um eine solche Strecke, dass das Gesamt-Verschiebemoment gleich der Summe der Einzel-Verschiebemomente ist.
Die Verschiebewege sind parallel.“



$$A_{ges} \cdot B_1B_2 = \sum a \cdot s_1s_2$$

$$B_1B_2 \parallel s_1s_2$$

1.10. Berechnung des Abstandes Kiel- Metazentrum „KM“

Voraussetzungen

- $\varphi < 5°$ — die folgenden Überlegungen gelten nur für kleine Winkel, so dass $\varphi = \tan\varphi = \sin\varphi$ ist
- Spantscheibe der Länge dx — eines Schwimmkörper der Länge dx habe einen konstantem Querschnitt. Dadurch wird das räumliche Problem zu einem Flächenproblem reduziert.

Herleitung

1. Schritt

   Die Höhe des Metazentrums über dem Kiel setzt sich aus 2 Teilstücken zusammen: KM = KB + BM. KB ist die Höhe des Auftriebsschwerpunktes und liegt zwischen T/2 (Ponton) und 2/3T (V-Spant).

2. Schritt

   Aus der Zeichnung geht hervor, dass die Unbekannte B_0B_φ durch eine Formel ersetzt werden kann: $B_0B_\varphi = B_0M \cdot \sin\varphi$. Die Strecke B_0B_φ ist die seitliche Auswanderung des Auftriebsvektors in Folge der ein- und austauchenden Keilstücke.

3. Schritt

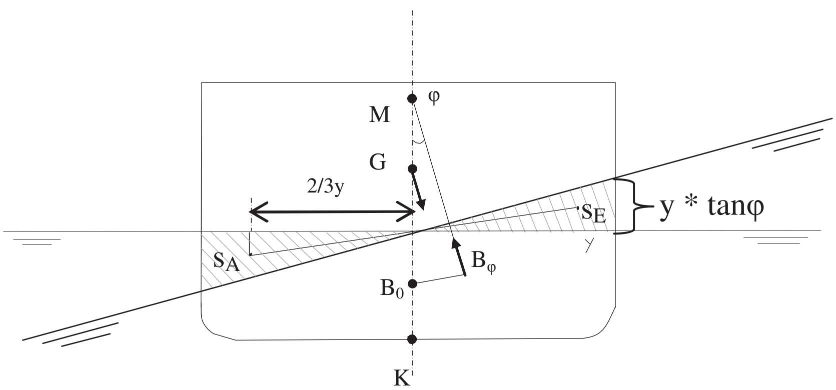
   Das Volumen des eintauchenden Keilstückes der Länge dx beträgt
   $\nabla_E = y \cdot y \cdot \tan\varphi \cdot 0{,}5 \cdot dx$.
   Der Schwerpunkt liegt bei $S_E = 2/3 \cdot y / \cos(\frac{\varphi}{3}) \approx 2/3 \cdot y$ mit $\cos(\frac{5°}{3}) = 0{,}9996$
   Das austauchende Keilstück hat dasselbe Volumen, aber eine entgegen gesetzte Schwerpunktlage $\nabla\varphi = \nabla_0 + \nabla_E - \nabla_A = \nabla_0 \rightarrow \nabla_A = \nabla_E \rightarrow S_A = -S_E$

4. Schritt

   Berechnung der Auswanderung des Volumen-Schwerpunktes ($B_0B\varphi$) nach der Guldinschen Regel.

   Mit $\nabla_A = \nabla_E$ und $S_A = S_E = 2/3 \cdot y$ und $\overline{S_AS_E} = 2 \cdot S_E = 2 \cdot (2y/3)$ gilt:

   ⇨ Guldinsche Regel: $\nabla_{ges} \cdot B_0B\varphi = \nabla_E \cdot \overline{s_A s_E}$ $\Rightarrow B_0B_\varphi = \frac{\nabla_E \cdot 2 \cdot s_E}{\nabla_{ges}}$



5. Schritt

Das Trägheitsmoment der WL-Fläche wird als Rechengröße eingeführt. Für die rechteckige WL-Fläche der Länge = dx und der Breite = 2y gilt

$$I_T = \frac{dx \cdot (2y)^3}{12} = \frac{2}{3} dx \cdot y^3$$

6. Schritt (Zusammenfassung)

$$B_0 B_\varphi \overset{(4)}{=} \frac{\nabla_E \cdot 2 \cdot s_E}{\nabla_{ges}} \overset{(3)}{=} \frac{y^2 \cdot \tan\varphi \cdot dx \cdot \frac{2}{3} y}{\nabla_{ges}} \overset{(5)}{=} \frac{I_T \cdot \tan\varphi}{\nabla_{ges}}$$

$$BM \overset{(2)}{=} \frac{B_0 B\varphi}{\sin\varphi} = \frac{I_T}{\nabla} \cdot \frac{\tan\varphi}{\sin\varphi} = \frac{I_T}{\nabla}$$

$$\boxed{KM = KB + \frac{I_T}{\nabla}}$$

<u>Schlussüberlegung:</u>

Man kann sich vorstellen, dass das verformte Schiff in einzelne Spantscheiben der Länge dx zerlegt werden kann, die jeweils einen konstanten Querschnitt haben.
Jede Spantscheibe trägt zur Verdrängung und zum WL-Flächenträgheitsmoment mit einem Anteil [$d\nabla$, dI_T] bei. Für das gesamte Schiff gilt dann:

$$BM = \frac{\int_0^L dI_T}{\int_0^L d\nabla} = \frac{I_T}{\nabla}$$