CAPÍTULO 1

LOS NÚMEROS REALES

1.1. Números Naturales

Dentro de las introducciones generales comunes existe un sinnúmero de métodos para introducirlos, en el presente compendio vamos a considerar dos de aquellos casos que frecuentemente son los más utilizados.

El Primero de ellos (que a la vez es el más lógico y que sigue el proceso natural del desarrollo de las matemáticas a través de la historia, pero si tomamos en cuenta su grado de dificultad podemos decir que es el más difícil debido a una serie de teoremas a demostrar) parte de los números positivos enteros utilizándolos como base para construir un sistema mucho más amplio llamado el conjunto de los números racionales positivos (cocientes de enteros positivos) p/q donde: $q \neq 0$

Los números racionales positivos se utilizan a su vez como base para construir los números irracionales positivos (tal es el caso de la $\sqrt{2}$, π que tienen la particularidad de no ser finitos tampoco periódicos).

Como paso final hacemos la introducción de los números negativos y el cero.

Dentro de este proceso, el paso desde los números racionales a los números irracionales es lo más complicado. No se introdujeron métodos satisfactorios de su construcción sino hasta el siglo XIX. Durante ese proceso se dieron tres grandes teorías creadas por Weierstrass, Cantor y Dekind. Sin embargo es el matemático italiano G. Peano quien dio el punto de partida para la construcción total de los números enteros positivos con la introducción de cinco axiomas, y un enunciado que son los siguientes:

I) Los números naturales (**N**) son infinitamente muchos, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ..\}$
II) Axiomas:
1) Existencia: $\exists\ 1 \in \mathbf{N}$
2) $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ n'$ (el siguiente de n) y es el único.
3) $\nexists\ n \in \mathbf{N}, n' = 1$
4) Si $n' = m' \rightarrow n = m$
5) Inducción Completa. Se comprueba la afirmación hecha, en este caso llamándola A(n) para n=1. Luego se prueba que si la afirmación es cierta para un entero particular k, también es verdadera para el entero que lo sigue. De esto, podemos sacar la conclusión de que es válida para todos los enteros positivos.

Como se había señalado anteriormente este es el método constructivo que significa que los números reales sean definidos mediante un proceso constructivo, considerando que las propiedades tomadas como axiomas tendrán que demostrarse como teoremas.

Durante este estudio no se tomará en cuenta este proceso, sino el siguiente y a la vez denominado segundo.

El Segundo sistema inicia el proceso en un punto bastante avanzado, considerando los números reales como conceptos primitivos que satisfacen un cierto número de propiedades tomadas como axiomas. Estos axiomas son 10. Todas las propiedades de los números reales están dentro de estos axiomas o que se pueden deducir de ellos.
Como punto de partida, resumimos las propiedades básicas de los números reales con la finalidad de la fundamentación sólida de las siguientes ideas, principios.

Las letras a, b, c, d,...., x, y, z van a representar números reales cualesquiera mientras no se diga lo contrario.

Los axiomas se agrupan en tres grupos llamados de la siguiente manera:
Axiomas de Cuerpo (6), Axiomas de Orden (3) y Axioma del Extremo Superior (el axioma del supremo).
El número en paréntesis significa cuántos de ellos hay en cada grupo.

1. Axiomas de Cuerpo

Cuando se hace este tipo de introducción se supone la existencia de dos operaciones, a saber: la adición y la multiplicación, tales que para cada x e y de números reales se puede formar:
La suma $x + y$ que da como resultado otro número real, e igualmente,
La multiplicación $x.y$ que también es otro número real.

La suma $x + y$, además el producto $x.y$ están unívocamente formados por x e y.

Axioma 1. Propiedad Conmutativa:

a) $x + y = y + x$
b) $x.y = y.x$

Axioma 2. Propiedad Asociativa:

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$
b) $x.(y.z) = (x.y).z$

Axioma 3. Propiedad Distributiva:

$x.(y + z) = x.y + x.z$

La multiplicación es distributiva desde el punto de vista de la adición.

Axioma 4. Existencia de elementos neutros: existen dos números distintos, que son el 0 y el 1, tales que para cada número real se tiene:

a) $0 + x = x + 0 = x$
b) $1 . x = x . 1 \quad = x$

Axioma 5. Existencia de negativos: Para cada número real x existe un número real y tal que

$x + y = y + x = 0$

y es llamado como el opuesto de x

Axioma 6. Existencia del recíproco: Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que

$x.y = y.x = 1$

y es llamado como el recíproco de x.

Con estas propiedades básicas ya podemos definir la resta y la división.

Teorema 1. Ley de simplificación de la suma:

Si $a + b = a + c \rightarrow b = c \quad a, b \in \mathbf{R}$

Demostración:

dado	$a + b = a + c$
Por el A.5	$y + a = 0$
	$y + (a + b) = y + (a + c)$
Por el A.2	$(y + a) + b = (y + a) + c$
	$0 + b = 0 + c$
Por el A.4	$0 + = b$ y $0 + c = c \rightarrow b = c$

Esto demuestra que existe un solo número real que tiene la propiedad del 0 en el A.4

Teorema 2. Posibilidad de la sustracción: dados $a, b \in \mathbf{R}$ existe uno y sólo un x tal que $a + x = b$, entonces este x se denomina por $b – a$.

Caso particular: $0 – a = - a$

Demostración:
Dados $a, b \in \mathbf{R}$, se escoge y de tal manera que $a + y = 0$, y sea $x = y + b$,
Entonces: $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$

Es decir, existe por lo menos un x tal que a + b = b, sin embargo por el T.1 hay a lo sumo uno. Por lo tanto hay sólo uno y sólo un x que cumple estas condiciones.

Teorema 3. $b - a = b + (-a)$

<u>Demostración</u>:
Sea $x = b - a$ y sea $y = b + (-a)$. Se trata de probar que $x = y$
Por definición de $b - a$,
$x + a = b$, $y + a = [b + (-a)] + a =$
$b + [(-a) + a] = b + 0 = b$

Por tanto, $x + a = y + a$, y por T.1, $x = y$

Teorema 4. $-(-a) = a$

<u>Demostración</u>:
Se tiene que $a + (-a) = 0$ por definición de $-a$. Pero el significado de esta igualdad dice que a es el opuesto de (- a), en otras palabras, $a = -(-a)$ como se afirma en el teorema.

Teorema 5. $a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Teorema 6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Teorema 7. Ley de simplificación para la multiplicación:
Si $a \cdot b = a \cdot c$, y $a \neq 0 \rightarrow b = c$

Caso particular: demuestra que el número 1 del A.4 es único.

Teorema 8. Posibilidad de la división: dados $a, b \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $a \cdot x = b$
El x se designa por $x = b/a$ y se denomina cociente de b y a.

Caso particular: $1/a$ se escribe también como a^{-1} y se lo conoce como recíproco de a.

Teorema 9. Si $a \neq 0 \rightarrow b/a = b \cdot a^{-1}$

Teorema 10. Si $a \neq 0 \rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$
Teorema 11. Si $a \cdot b = 0 \rightarrow$ o $a = 0$, o $b = 0$

Teorema 12. $(-a)\, b = -(a \cdot b)$
$(-a)(-b) = a \cdot b$

Teorema 13.

$(a / b) + (c / d) = (a.d + b.c) / b.d$

si a, b, c, d $\in$ **R**, y $b \neq 0$, $d \neq 0$

Teorema 14. $(a / b)(c / d) = a.c / b.d$
si a, b, c, d $\in$ **R**, y $b \neq 0$, $d \neq 0$

Teorema 15. $(a / b) / (c / d) = a.d / b.c$
si a, b, c, d $\in$ **R**, y $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

2. Axiomas de Orden

El grupo de axiomas siguientes se refiere a un concepto por el que se establece una ordenación entre los números reales. De acuerdo a esta ordenación se puede determinar si un número real es mayor o menor que otro. Habiendo conocido el concepto de número positivo, ya podremos definir los conceptos de mayor que y menor que.

Supongamos que existe un $\mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}$ llamado conjunto de números positivos, que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

Axioma 7. Si x e y pertenecen a $\mathbf{R}^+$, lo mismo ocurre a $x + y$, $x.y$

Axioma 8. Para todo real $x \neq 0$,
ó $x \in \mathbf{R}^+$ ó, $-x \in \mathbf{R}^+$, pero no ambos.

Axioma 9. $0 \notin \mathbf{R}^+$

Con la idea del número positivo ya se puede definir la desigualdad.
$x < y$ significa que $y - x$ es positivo
$y > x$ significa que $x < y$
$x \leq y$ significa que o $x < y$, o $x = y$
$y \geq x$ significa que $x \leq y$

Por lo tanto se tiene que $x > 0$ si y sólo si x es positivo.
Si $x < 0$ se dice que x es negativo.
Si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo.

Partiendo de estos axiomas se pueden deducir las reglas del cálculo con desigualdades.

Teorema 16. Propiedad de tricotomía:
$\forall$ a, b $\in$ **R** se verifica una y sólo una de las tres relaciones siguientes: $a < b$, $b < a$, $a = b$