César Alonso Zuleta (Autor)

Cálculo Diferencial e Integral

César Alonso Zuleta

Cálculo Diferencial e Integral

Cuvillier Verlag Göttingen
Internationaler wissenschaftlicher Fachverlag

https://cuvillier.de/de/shop/publications/7603

CAPÍTULO 1

CÁLCULO DIFERENCIAL

1.1. Introducción

Newton y Leibniz, independientemente uno del otro, fueron los primeros en dar las ideas básicas del cálculo integral. Luego su mayor logro fue fundir en uno el cálculo integral y el cálculo diferencial.

La idea central del cálculo diferencial es la noción de derivada. Esto fue originado por un problema de geometría: el problema de hallar la tangente en un punto de una curva.

Según Fermat: en cada uno de los puntos de una curva, ella tiene una dirección definida que puede ser dada por la tangente. Él observó que en aquellos puntos en que la curva tiene un máximo o un mínimo, la tangente ha de ser horizontal. Por lo tanto, el problema de localizar estos valores se reduce al de la localización de las tangentes horizontales. Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente.

Al principio se introdujo el concepto de derivada para el estudio del problema de la tangente, pero se vio que también proporcionaba un instrumento para el cálculo de velocidades y, en general, para el estudio de la variación de una función.

<u>Problema relativo a la velocidad</u>

Sea un proyectil lanzado desde el suelo a una $v_0 = 45$ m/s, f(t) la altura en m, que alcanza el proyectil t segundos después. A causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta llegar a 0 y desde ese momento cae al suelo.
$f(t)= 45t - 5t^2$
La expresión está dada por experiencia física y el segundo elemento del miembro de la derecha es debido a la gravedad.

$f(t) = 0$ cuando $t = 0$, $t = 9$, es decir, el proyectil regresa a tierra después de 9 segundos, o sea que la fórmula es válida en un intervalo así: $0 \leq t \leq 9$

El problema a solucionar es el siguiente: determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento. Para esto introducimos el concepto de velocidad media durante un intervalo de tiempo, o sea, desde el instante t hasta el t + h, definiéndola como cociente:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

siempre que sea en el intervalo [0, 9], h puede ser positivo o negativo, pero no cero.

Para t = 2 fijo → f(2) = 45.2 - 5(2)² = 70

Para t =2 + h → f(2 + h) = 45(2 + h) - 5(2 + h)² = 70 + 25h -5h²

Por lo tanto la velocidad media en el intervalo comprendido entre
t = 2 y t = 2 + h es:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{70+25h-5h^2-70}{h} = 25-5h$$

Si h→ 0, entonces

$$\bar{v} \to 25$$

Los mismos cálculos se pueden efectuar para cualquier otro instante:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} =$$

$$= \frac{45(t+h)-5(t+h)^2-(45t-5t^2)}{h}$$

$$= 45-10t-5h$$

Si h→ 0, entonces la función tiende a 45 -10t, que define la velocidad instantánea en el momento t, es decir: v = 45 - 10t

El proceso por el cual se obtiene v(t) a partir del cociente incremental se denomina "hallar el límite cuando h tiende a cero", y se expresa así:

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

1.2. Derivada de una función

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) del eje x. Se elige un punto x en dicho intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Donde: h puede ser positivo o negativo, pero no cero, (x + h) pertenezca a (a, b)

El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a x + h.

El cociente representa la variación media de f en el intervalo que une x a x + h.

Después se hace h $\rightarrow$ 0 y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite, entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por la notación f '(x).

Definición: La derivada f'(x) está definida por la igualdad:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

con tal que el límite exista.

En general el proceso del paso al límite por el que se obtiene f '(x) a partir de f(x) abre un camino para obtener una nueva función f ' a partir de una función dada f. Este proceso se denomina derivación, y f ' es la primera derivada de f.

En el caso del movimiento rectilíneo, la primera derivada de la velocidad (segunda derivada del espacio) se llama aceleración.

Siguiendo con el ejemplo anterior:

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{\left[45 - 10(t+h\right] - \left[45 - 10t\right]}{h} = \frac{-10h}{h} = -10$$

Significa que la velocidad decrece a una razón de 10 m cada segundo.

Ejemplos de derivadas:

1.- Derivada de una función constante: f(x) = c para todo real x

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

es decir: f '(c) = 0

2.- Derivada de una función lineal: f(x) = mx + b para todo real x, si $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

o sea: f '(x) = m

3.- Derivada de una función potencial de exponente entero positivo:

$$f(x) = x^n$$

donde: n es un entero positivo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

como podemos apreciar es una diferencia de dos potencias n-ésimas.

En este caso se tiene que:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Se hace: a = x+h, b = x, después dividimos los dos miembros por h. Obtenemos:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x+h-x}{h}\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-1-k}$$

en la suma hay n términos.

Cuando $h \to 0$, entonces:

$$(x+h)^k \to x^k$$

El k-ésimo miembro, por lo tanto, tiende a:

$$x^k x^{n-1-k} = x^{n-1}$$

Es decir, la suma de los n términos tiende a:

$$nx^{n-1}$$

Es decir:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo x

4.- Derivada de la función seno:

f(x) = sen x

$$\frac{sen(x+h) - senx}{h} = f(x)$$

utilizamos la igualdad

$$seny - senx = 2sen\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2}$$

y poniendo: y = x + h, recibimos:

$$\frac{sen(x+h) - senx}{h} = \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Considerando que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$$

y, recibimos: f ' (x) = cos x

$$\lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x$$

$$\lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x$$

5.- Derivada de la función coseno:

f(x) = cos x

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = f(x)$$

Utilizamos la igualdad:

$$\cos y - \cos x = 2sen\,\frac{y-x}{2}\,sen\,\frac{y+x}{2}$$

y, poniendo: y = x + h

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\,sen\left(x + \frac{h}{2} \right)$$

Considerando que:

$$\lim_{h\to 0} -\frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -1$$

y, recibimos: f ' (x) = - sen x

$$\lim_{h\to 0} sen\left(x + \frac{h}{2}\right) = -senx$$

6.- Derivada de la función raíz n-ésima:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

$$para : x > 0$$

$$\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} = f(x)$$

Poniendo:

$$u = (x+h)^{\frac{1}{n}}, v = x^{\frac{1}{n}}$$

$$entonces :$$

$$u^{n} = x + h, v^{n} = x$$

$$reemplazando : u^{n} = v^{n+h}$$

$$despejando : h = u^{n} - v^{n}$$

Realizando los debidos reemplazos:

Si h → 0, entonces u → v, por lo tanto cada miembro del denominador tiende a v^{n-1}

En total hay n términos

$$\frac{u-v}{u^{n}-v^{n}} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$