

Philipp Epple

Digitalisierung in der Strömungsmechanik

Einführung

Schon Leonardo da Vinci (Vinci 1452-Amboise 1519) hat Wasserströmungen sehr genau beobachtet und gezeichnet [5], siehe Abbildung 1. Obwohl er in den Strömungen auch kleinste Wirbelstrukturen und Turbulenzen meisterhaft beobachtet und gezeichnet hat, kannte er nicht die Naturgesetze bzw. die Erhaltungssätze, die die Strömungen beschreiben und insbesondere diese berechenbar machen.



Abbildung 1: Studie von Leonardo da Vinci über das strömende Wasser (Bild aus [6])

Für Strömungen gelten die Erhaltungssätze der klassischen Mechanik: Masse, Impuls und Energie. Diese Erhaltungssätze werden nachfolgend beschrieben und deren mathematische Formulierung erläutert. Neben den mathematischen Formulierungen auch qualitativ alle Zusammenhänge allgemein verständlich beschrieben, so dass alle Leserinnen und Lesern, ganz gleich ob mit oder ohne technischen bzw. mathematischen Hintergrund, diesen Beitrag lesen und verstehen können. Daher die Bitte an alle Leserinnen und Leser, sich beim Lesen dieses Beitrages von den mathematischen Formeln zur Digitalisierung der Strömungsmechanik ggf. nicht zu entmutigen lassen.



Massenerhaltung

Masse kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Aufgrund der Massenerhaltung ist die Masse an Fluid, die pro Zeiteinheit an einem Ende einer Rohrleitung einströmt, d. h. der Massenstrom \dot{m}_1 , gleich dem Massenstrom \dot{m}_2 der am anderen Ende wieder ausströmt, Abbildung 2.



Abbildung 2: Massenerhaltung bei Innenströmungen

Mathematisch formuliert schreibt sich die Massenerhaltung für Innenströmungen als

$$\dot{m}_1 = \rho_1 U_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 U_2 A_2 \quad (1.1)$$

wobei ρ die Dichte, U die Geschwindigkeit und A die Fläche senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit des Fluides ist. Ein Fluid ist entweder ein Gas oder eine Flüssigkeit.

Die allgemeine Beschreibung der Massenerhaltung in der Strömungsmechanik wird über eine Differentialgleichung, die sogenannte Kontinuitätsgleichung, beschrieben:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_I + \nabla \cdot \underbrace{(\rho \vec{U})}_{II} = 0 \quad (1.2)$$

Für den fachfremden Leser ist diese Gleichung zunächst sicherlich unverständlich. Da die Gleichung aber die Massenerhaltung wieder gibt, ist sie auch in relativ einfachen Worten zu beschreiben:

Term I: Zeitliche Änderung der Dichte eines Fluides in einem sehr kleinen Volumen, idealisiert oder im Grenzwert an einem Punkt

Term II: Zu- und Abfluss von Massenstrom in einem sehr kleinen Volumen, idealisiert oder im Grenzwert an einem Punkt

Die Massenerhaltung oder Kontinuitätsgleichung lässt sich anhand der Abbildung 3 beschreiben. Strömt ein (dunkles) „Fluidteilchen“ in das Volumen A, so gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- a) Es strömt ein „Teilchen“ in das Volumen A, aber keines mehr heraus, das Fluid staut sich im Volumen wie in B angedeutet, die Dichte des Fluides im Volumen nimmt zu. Das ist nur bei kompressiblen Fluiden, d. h. bei Gasen möglich.



- b) Für ein inkompressibles Fluid, d. h. wenn die Dichte konstant ist, muss, wenn ein „Teilchen“ in das Volumen A einströmt, ein anderes dafür das Volumen verlassen, z. B. in y-Richtung (Fall C) oder in x-Richtung (Fall D).

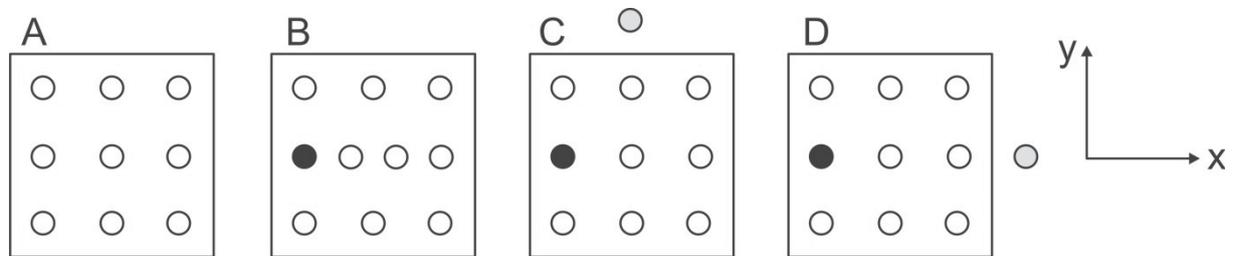


Abbildung 3: Kontinuitätsgleichung

Das ist grundsätzlich alles, was die Gleichung (1.2) beschreibt, allerdings natürlich sehr vereinfacht dargestellt. In Wirklichkeit ist die Strömung dreidimensional und das Fluid kann in allen Richtungen ein- und ausströmen.

Für Strömungen ohne Dichteänderung, die so genannten inkompressiblen Strömungen, lässt sich die Gleichung (1.2) vereinfachen:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.3)$$

Impulsgleichung

Die Impulserhaltung wird über die drei Newtonsche Gesetze genauer beschrieben: 1. Wirken keine Kräfte auf das Fluid, oder allgemein auf einen Körper, so ändert sich sein Impuls bzw. Bewegungszustand nicht, das Fluid ist im Gleichgewicht. 2. Die Änderung des Impulses oder des Bewegungszustandes eines Fluides ist gleich der Summe aller an dem Fluidelement angreifenden Kräfte. Das ist die Grundgleichung der Mechanik. 3. Kräfte wirken immer paarweise, übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus (Actio oder Aktion), so wirkt eine gleich große aber entgegengerichtete von Körper B auf Körper A (Reactio oder Reaktion). Das ist das Reaktionsprinzip.

Eine Impulsänderung kann nur durch eine Kraft oder eine Summe von Kräften hervorgerufen werden. Aus dieser Erkenntnis, d. h. dem 2. Newtonschen Gesetz, ergibt sich die Grundgleichung der Strömungsmechanik, die so genannte Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_I + \underbrace{(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}}_{II} \right] = \underbrace{-\nabla p}_{III} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{U}}_{IV} + \underbrace{\rho \vec{g}}_V \quad (1.4)$$



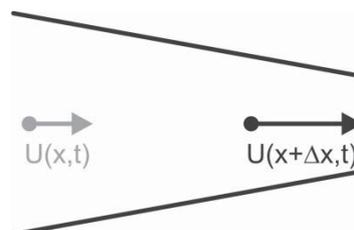
Diese Gleichung ist natürlich für den fachfremden Leser – auf den ersten Blick – vollkommen undurchschaubar, allein schon der vielen rätselhaften Symbolen wegen. Diese Gleichung lässt sich aber in einfachen Worten allgemein verständlich erklären, da sie nichts weiter als das 2. Newtonsche Gesetz für Fluide darstellt. Auf der linken Seite steht die Änderung des Impulses und auf der rechten Seite die Summe aller angreifenden Kräfte. Bei Fluiden setzt sich die Beschleunigung bzw. die Änderung des Impulses auf der linken Seite allerdings aus zwei Termen zusammen.

Linke Seite: Änderung des Impulses

Term I: Kraft aufgrund der lokalen Beschleunigung. Entspricht einer Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit an einer und derselben Stelle. Dieser Term entspricht der Definition von Kraft, die viele auch aus der Schule oder aus dem Studium aus der Mechanik schon kennen, nämlich Masse mal Beschleunigung. Bei Fluiden setzt sich die Kraft bzw. die Änderung des Impulses allerdings auch noch aus einem zweiten Term zusammen.

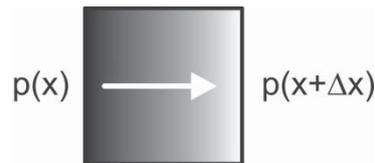


Term II: Kraft aufgrund der konvektiven Beschleunigung. Entspricht der Änderung der Geschwindigkeit an einem und denselben Zeitpunkt, wenn man unterschiedliche Punkte im Fluid betrachtet. Wird manchmal auch als advective Beschleunigung bezeichnet.



Rechte Seite: Summe aller angreifenden Kräfte

Term III: Dieser Term stellt dir Druckkräfte dar, die immer aus einer Druckdifferenz entstehen. Ist die Druckkraft $p(x)$ links größer als die Druckkraft $p(x+Dx)$, so entsteht eine Druckkraft nach rechts. Die Druckkraft zeigt immer in die Richtung, in der der Druck abnimmt, daher hat der Term III auch ein Minuszeichen.



Term IV: Viskose Normal- und Scherkräfte. Der griechische Buchstabe μ (spricht sich „Mü“) steht für die Viskosität oder Zähigkeit des Fluides und ist eine temperaturabhängige Stoffeigenschaft. Wenn man sich z. B. Honig auf die Hände schmiert und nun die Hände zunächst zusammenlegt, dann spürt man, wenn man die Hände wieder trennen möchte, dass die Hände etwas an einander haften, weil hier eine viskose Normalkraft wirkt. Reibt man die mit Honig bestrichenen Hände aneinander, so spürt man ebenso eine Widerstandskraft, die viskose Scher- oder Schubkraft. Der Term IV drückt eben diese Kräfte in mathematischer Form aus. Es werden hier so genannte Newtonsche Fluide angenommen, d. h. Fluide bei denen die Viskosität eine reine Stoffeigenschaft und nicht abhängig vom Spannungszustand selbst ist. Ist letzteres der Fall, dann spricht man von rheologischen oder nicht Newtonschen Fluiden, wie es z. B. viele Lebensmittel sind, und dieser Term sieht dann etwas anders aus. Für das Thema Digitalisierung spielt das aber keine Rolle, sodass wir in dieser Betrachtung ohne Verlust an Allgemeinheit von Newtonschen Fluiden ausgehen werden.

Term V: Dieser Term stellt allgemein betrachtet die Volumenkräfte dar. Druckkräfte und viskose Kräfte, d. h. die Terme III und IV sind so genannte Oberflächenkräfte, weil hier jeweils ein Kontakt mit der Oberfläche des Fluidteilchens erforderlich ist, um diese Kräfte zu übertragen. Volumenkräfte hingegen erfolgen berührungslos. Die bekannteste Volumenkraft ist die Erdanziehungskraft. Der Mond wird sozusagen von der Erde festgehalten, obwohl es keinerlei Verbindungs- oder Zugseil zwischen Erde und Mond gibt, die Erdbeschleunigung wirkt berührungslos. So ist es auch bei Fluiden, die Erdbeschleunigung oder Schwerkraft zieht das Fluidteilchen in Richtung Erdmittelpunkt bzw. einfach gesagt nach unten. Neben der Erdanziehungskraft kann es bei Fluiden allerdings auch noch weitere Volumenkräfte geben, wie z. B. Elektromagnetische Kräfte, Zentrifugalkräfte und die Coriolis-Kraft. Elektromagnetische Kräfte entstehen z. B. bei einem elektrisch geladenen Fluid in einem elektromagnetischen Feld, wie es z. B. in einem Plasma in einem Tokamak der Fall ist. Die Zentrifugal- und Corioliskraft entstehen in rotierenden Systemen, wie z. B. die Strömungen in Turbomaschinen, d. h. in Pumpen, Ventilatoren, Turbinen usw.



Die Impulsgleichung (1.4) für Fluide wird immer pro Masseneinheit geschrieben, daher ist der Multiplikator auf der linken Seite nicht die Masse m sondern die Dichte $\rho = m/V$, d. h. die Masse pro Volumeneinheit.

Energieerhaltung

Die Energie einer Strömung kann verschiedene Formen annehmen. In einer Strömung kann Energie in Form von Druck, man denke beispielsweise an einen Druckspeicher, kinetischer Energie, potentieller Energie und innerer Energie gespeichert werden. Die kinetische Energie ist die Bewegungsenergie des Fluides, d. h. die Energie aufgrund der Geschwindigkeit, die potentielle Energie ist die Lageenergie oder die Energie aufgrund der Höhe und die innere Energie ist die durch die Temperatur im Fluid gespeicherte Wärme. Die Summe dieser Energieformen lässt sich nur verändern, wenn Wärme in das Fluid einströmt oder es verlässt oder Arbeit vom oder auf das Fluid verrichtet wird. Die Energieerhaltung wird vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben. Auf eine Darstellung der mathematischen Formulierung der Energieerhaltung soll hier verzichtet und auf die einschlägige Literatur verwiesen werden, [3] und [7], da diese zum Thema Digitalisierung nichts Wesentliches beiträgt und den Rahmen dieses Beitrages sprengen würde. Außerdem ist die Energieerhaltung nur für kompressible Strömungen bzw. Strömungen mit Wärmeübertragung relevant. Bei inkompressiblen Strömungen leitet sich die Energieerhaltung von der Impulsgleichung ab und stellt somit keine unabhängige Gleichung dar [8]. Die Digitalisierung in der Strömungsmechanik soll daher hier anhand von inkompressiblen Strömungen dargestellt werden. Die Berechnung von kompressiblen Strömungen ist vom Prinzip gleich, aber eben noch aufwendiger.

Partielle Differentialgleichungen der Strömungsmechanik

Schreibt man die Kontinuitätsgleichung (1.2) und die Impulsgleichung für inkompressible Fluide (1.4) in kartesischen Koordinaten aus, so sehen diese Gleichungen noch komplizierter aus:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y \quad (1.7)$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_z \quad (1.8)$$

Gleichung (1.5) stellt die Massenerhaltung oder Kontinuitätsgleichung dar und Gleichungen (1.6), (1.7) und (1.8) die Impulserhaltung jeweils in die x-, y- und z-Richtung. Diese unter Navier-Stokessche-Gleichungen bekannten partiellen Differentialgleichungen bilden die Grundlage der gesamten Strömungsmechanik. Gemeinsam mit der Kontinuitätsgleichung bilden sie ein Gleichungssystem mit vier partiellen Differentialgleichungen und vier Unbekannten, den Druck p und die Geschwindigkeitskomponenten u , v und w . Theoretisch lässt sich dieses Gleichungssystem somit lösen. Allerdings ist es bis heute nur möglich, diese Gleichungen für wenige Einzelfälle exakt zu lösen. Dies liegt vor allem an der Nichtlinearität dieser Gleichungen. Nichtlinearität bedeutet, dass wenn zwei Lösungen dieser Gleichungen bekannt sind, die Summe dieser Lösungen keine Lösung mehr ist. Erschwerend hinzu kommt noch das Phänomen der Turbulenz.

Turbulenz

Turbulenz ist nicht mit einer einzigen Eigenschaft zu beschreiben, es sind vielmehr mehrere Eigenschaften, die gemeinsam auftreten müssen, damit die Strömung als turbulent betrachtet werden kann:

- Unordnung oder chaotisches Verhalten, wie z. B. die kleinen Oberflächenwellen an einem See bei schwachem Wind.
- Hoher Mischungsgrad, wie z. B. wenn Milch im Tee noch mit einem Löffel gerührt wird
- Viele Wirbelstrukturen und -skalen, von großen Wirbeln bis hinzu ganz kleinen Wirbeln

Auf der Wasseroberfläche eines Sees oder Kanals ist keine der kleinen Wellen wie die andere, siehe den vorderen Bereich in Abbildung 4. Hier herrscht somit eine große Unordnung bzw. ein chaotisches Verhalten, diese Strömung ist aber nicht turbulent. Oberflächenwellen haben nämlich ein sehr geringes Mischungsvermögen, sie bewegen sich auf und ab aber sie vermischen sich kaum, siehe Abbildung 5. Hinter dem Schiffspropeller in Abbildung 4 hingegen, herrscht eine turbulente Strömung, da hier durch die Rotation des Propellers eine große Unordnung, ein hoher Mischungsgrad sowie viele Wirbelstrukturen und -skalen vorhanden sind.



Abbildung 4: Laminare Strömung mit chaotischem Wellenbild vor dem Schiff und turbulente Strömung am Heck aufgrund des Propellerantriebes (Amstel, Amsterdam)

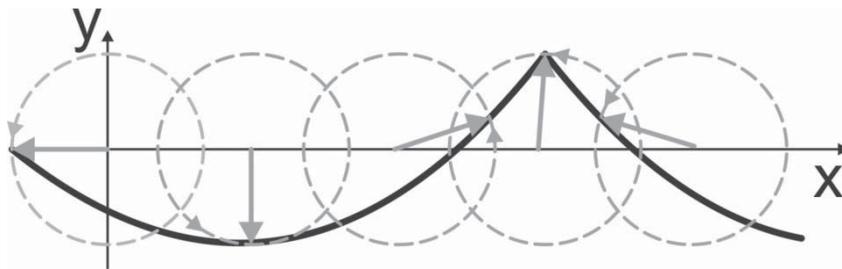


Abbildung 5: Stehende Wellen haben ein chaotisches Verhalten, vermischen sich aber kaum

In Abbildung 6 ist ein Brunnen mit Überlauf zu sehen. Die Strömung am Überlauf sowie am fallenden Wasserfilm ist laminar, beim Auftreffen des Wasserfilmes auf das Unterwasser wird das Wasser verwirbelt und vermischt und es entstehen chaotische oder unregelmäßige kleine und große Wirbelstrukturen: hier ist die Strömung turbulent. Dasselbe gilt im Übrigen auch für die Zeichnung von Leonardo Da Vinci in Abbildung 1.



Abbildung 6: Strömung am Brunnen – laminar am Brunnenüberlauf und turbulent am unteren Auftreffpunkt des laminaren Wasserfilms (Brunnen im Garten des Palais Het Loo, Appeldorn, NL)

In Abbildung 7 ist ein instabiler Freistrahler zu sehen. Die klaren Wirbelstrukturen links sind laminare Wirbel. Anders als oft angenommen, sind Wirbelstrukturen sehr oft laminar und nicht turbulent. Insbesondere gestochen scharfe Wirbelstrukturen sind in der Regel laminar. Rechts wird die Strömung turbulent, die laminaren Wirbel zerfallen regelrecht aufgrund der Turbulenz.

Turbulenz ist ein sehr komplexes Thema und es geht in diesem Beitrag nicht darum, diese genau zu beschreiben, sondern vielmehr nur darum, einen Eindruck seiner Komplexität und Schönheit zu vermitteln. Einen guten weiterführenden allgemein verständlichen Eindruck zum Thema Turbulenz vermittelt Ecke [9]. Des Weiteren gibt es über das Thema Turbulenz unzählige exzellente Fachbücher, [5] und [15], um nur zwei Beispiele zu nennen.

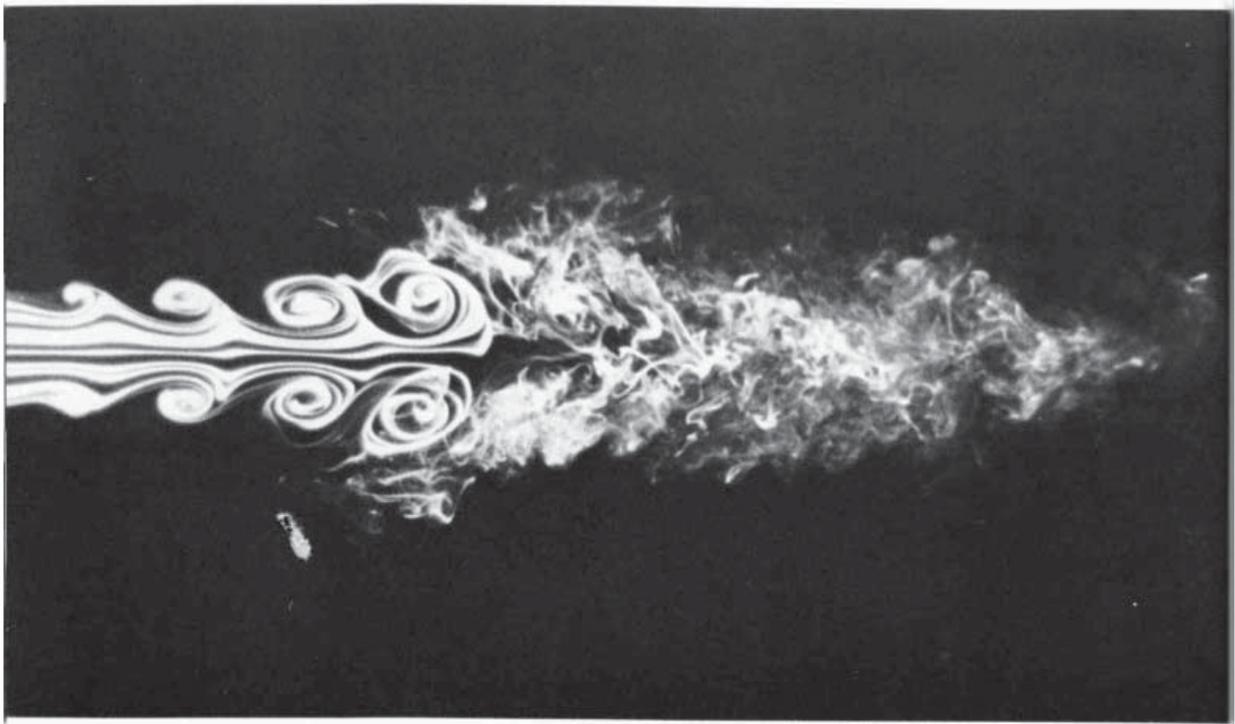


Abbildung 7: Instabilität eines Freistrahles bei einer Reynoldszahl von 10.000 – Laminare Wirbel werden plötzlich turbulent (Bild aus van Dyke [43])

Die mathematische Beschreibung der Turbulenz ist mit sehr großem Aufwand verbunden. Osborne Reynolds (1842-1912, britischer Physiker) hat die Geschwindigkeiten und den Druck einer turbulenten Strömung als Summe eines zeitlichen Mittelwertes und einer Schwankungsgeschwindigkeit geschrieben:

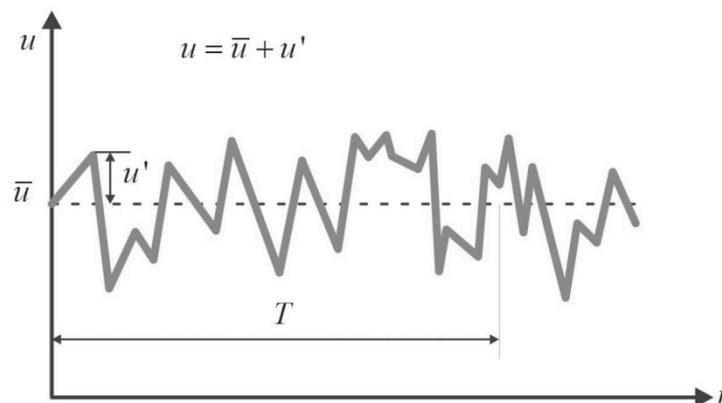


Abbildung 8: Zeitsignal turbulenter Strömungen