Einleitung

Dieses Buch präsentiert einen Teil der Ergebnisse, die das an der Universität Wuppertal in der Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik angesiedelte Forschungsprojekt „Dualität als Archetypus mathematischen Denkens“[1] erbracht hat. Die Leitfrage dieses Projekts war die nach Wesen, Wichtigkeit und Leistung von Dualität in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik und nach ihrer Geschichte. Das vorliegende Werk beschäftigt überwiegend mit der frühen Geschichte der Dualität mit einem Schwerpunkt im 19. Jh., wobei drei mathematische Gebiete im Vordergrund stehen: die Polyedertheorie (Abschnitt 1.1 und Kapitel 4), die sphärische Geometrie (Abschnitte 1.2 und 1.3) und die projektive Geometrie (Kapitel 2 und 3). Historisch gesehen ist die Dualität der Platonischen Körper die älteste Form von Dualität, die explizit betrachtet und später dann (bei Kepler) auch benannt wurde. Sie findet sich bereits im XV. Buch von Euklids Elementen und reicht damit weit in die Antike zurück – wenn auch nicht auf Euklid selbst, denn das XV. Buch ist bekanntlich nicht sein Werk. Dennoch wurde es traditionell mit den „Elementen“ des Euklid überliefert und konnte so wirksam werden. Mit der Untersuchung halbregulärer, etwa der Archimedischen Polyeder, und anderweitiger Körper stellte sich auch die Frage nach deren Dualisierbarkeit. Dies wiederum führte zu neuen Konzepten derselben bis hin zur kombinatorischen Auffassung (prominent bei Steinitz Anfang des 20. Jhs.), die geometrische Schwierigkeiten beseitigte und zur Entdeckung neuer Körper (u. a. durch Catalan) führte. In der zweiten Hälfte des 19. Jh. nahm die Morphologie der Polyeder einen massiven Aufschwung (Hess, Brückner, Wiener) und damit verbunden der Versuch, Klassen von Polyedern (etwa gleicheckige, gleichflächige) zu definieren und zu untersuchen. Schließlich werfen wir einen Blick auf die Geschichte der regulären Polytope des vierdimensionalen Raums, bei der schon in ihren Anfängen (um 1880 herum) der Dualitätsaspekt eine wichtige Rolle spielte.

Eine weitere Wurzel der Dualität lässt sich in der sphärischen Geometrie unter Einschluss der sphärischen Trigonometrie ausgemachen. Hier trat die Dualität vor allem in Gestalt des Polardreiecks auf, das wiederum von großem Nutzen für die Herleitung von neuen Formeln (etwa Winkelcosinussatz) aus bekannten (hier der Seitenconsinussatz) war. In der ersten Hälfte des 19. Jhs. setzten Versuche ein, diese Dualität vertieft zu verstehen. Dabei spielte die gerade entdeckte Dualität der projektiven Geometrie eine prominente Rolle, indem sie Vergleiche nahelegte und das Phänomen Dualität wichtig erscheinen ließ (letztlich stammt ja der Begriff „Pol“ aus der sphärischen Geometrie, von dem wiederum die „Polare“ und damit die „Polarreziprozität“ abgeleitet wurden).

[1] Gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), Projektleitung: R. Krömer, K. Volkert (beide Wuppertal).

In der frühen Geschichte der projektiven Dualität gibt es zwei beherrschende Namen: Poncelet und Gergonne. Um deren historischen Hintergründe besser verstehen zu können, ist ein Blick auf Monge und seine Schule wichtig. Insbesondere geht es hierbei um das berühmte Theorem von Brianchon, das so oft – wenn auch eher zu Unrecht – als frühes Beispiel für die projektive Dualität angeführt wird. Ein weiterer nur wenig bekannter Pionier der projektiven Dualität war Bobillier, dem in unserem Buch ein eigener Abschnitt gewidmet ist. Die Dualität wurde zu einem Markenzeichen der neuen Geometrie, versinnlicht in Gergonne's ungemein erfolgreicher Erfindung der Zwei-Spalten-Schreibweise. Gergonne's recht allgemeiner Vorstellung von Dualität stand Poncelet's konstruktiver Ansatz gegenüber; im letzteren spielten die Kegelschnitte eine zentrale Rolle. Die heftigen Kämpfe zwischen den beiden Genannten trugen das Ihre dazu bei, die Frage nach der Dualität populär zu machen. Im an die Begründer anschließenden Ausbau der projektiven Geometrie lassen sich zwei wichtige Entwicklungsstränge unterscheiden: die nach Einführung von Koordinaten (Möbius, Plücker) rasch aufblühende analytische Richtung und die eher traditionelle synthetische Richtung. Erstere lieferte eine griffige, oft herangezogene Antwort auf die Frage „Worauf beruht Dualität?“: Diese gründet auf der Möglichkeit, Formeln in zweierlei Weise zu lesen – etwa in der Ebene in Punkt- oder in Linienkoordinaten. Während in Frankreich der Konflikt zwischen „Analytikern“ und „Synthetikern“ heftig wurde, waren im deutschen Sprachraum die Proponenten beider Lager versöhnlicher. Als wichtige Vertreter der analytischen Richtung werden hier neben den bereits genannten Begründern Möbius und Plücker vor allem Hesse und Clebsch betrachtet. Die synthetische Richtung wiederum hatte in Steiner und von Staudt wichtige Vorkämpfer, wobei bei letzterem das Bestreben nach einer autonomen Begründung der projektiven Geometrie – Stichwort: Problem der Kontinuität – wichtig wurde. Von Staudt lieferte darüber hinaus eine abstrakte Sichtweise auf Dualität, indem er diese als Abbildung auffasste und den Kollineationen die Korrelationen oder Reziprozitäten gegenüberstellte. Spätere Autoren wie Cremona, Reye und Hankel versuchten – nicht zuletzt bedingt durch didaktische Erwägungen – eine Art Synthese zwischen analytischer und synthetischer Richtung zu finden. Fiedler, ein heute fast vergessener Protagonist der Synthese von darstellender und projektiver, von analytischer und synthetischer Geometrie gab eine originelle Interpretation der Dualität im Kontext der darstellenden Geometrie; er ging auch der Frage nach „In welchen Geometrien gibt es überhaupt Dualität und warum ist das so?“. Eine interessante Verwendung der projektiven Geometrie bot schließlich die graphische Statik (Kapitel 6), die vor allem von Culmann und Cremona entwickelt wurde und die eine Zeitlang breite Aufmerksamkeit erregte. Hier kommt der englische Sprachraum (v. a. Maxwell) in den Blick, der sonst eher peripher in unseren Betrachtungen ist.

Gegen Ende des 19. Jhs. nahm die Axiomatik einen enormen Aufschwung, der einen vorläufigen Höhepunkt in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (1899) finden sollte. Dabei spielte immer auch die Frage nach den Axiomen der projektiven Geometrie eine Rolle – schon bei Pasch (1882), dann vor allem bei italienischen Mathematikern wie Pieri, Fano und Peano. Einen gewissen Abschluss bildete hier die von Veblen und Young publizierte Axiomatik der projektiven Geometrie, die natürlich auch eine Antwort auf die Frage nach der Dualität bereithielt.

Schließlich geben wir noch einen Ausblick auf eine für die projektive Dualität wichtige Entwicklung des 20. Jhs. (Kapitel 5), nämlich die Interpretation der projektiven Geometrie im Rahmen der Theorie endlich-dimensionaler Vektorräume (Bôcher, Schreier-Sperner, Baer) und darauf aufbauend in der Verbandstheorie (Birkhoff, Menger). Hier ergaben sich im Rahmen einer Algebraisierung neue Möglichkeiten, Dualität zu begründen (etwa über Dualräume mit Hilfe von Funktionalen).

Das vorliegende Buch hat insgesamt fünf Autoren, was seinen heterogenen bis in die verwendete Sprache hineinreichenden Charakter erklärt. Wir haben uns bemüht, Kohärenz herzustellen, waren aber nicht bestrebt, konsequent alle Doppelungen auszuschalten. Das Buch hat somit den Charakter eines Arbeitsberichtes; es behauptet nicht, eine allumfassende definitive Antwort zu liefern. Aber es versucht, das ungeheuer vielfältige Material darzubieten und zu strukturieren; partielle Antworten werden gegeben und viele Gesichtspunkte eingebracht. Damit hoffen wir, einen Beitrag zu leisten zur Klärung der Frage „Was ist Dualität und welches ist ihr Nutzen?“. Der eigenständige Charakter der Teile des Buches kommt auch darin zum Ausdruck, dass wir Einzelbibliographien geben; Zitate werden in Originalsprache in Endnoten geliefert.

Unser Bericht ist Resultat von mehrjährigen, intensiven Diskussionen in der eigentlichen Projektgruppe (bestehend aus Alessa Binder, Frank Etwein, Emmylou Haffner, Aurélien Jarry, Ralf Krömer, Jean-Daniel Voelke und Klaus Volkert) und in der Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte an der Bergischen Universität Wuppertal (u.a. sind hier Markus Osenberg, Nicola Oswald, Stefan Oltmanns und Erhard Scholz zu nennen); ein Workshop am CIRM in Luminy gab uns 2019 die Gelegenheit, unsere Ansätze einem größeren Kreis von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern vorzustellen. Wir danken besonders E. Scholz (Wuppertal) für seinen Beitrag über die graphische Statik (Kapitel 6) und Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) für die Übersicht zum Auftreten der Dualität in Gergonne’s *Annales* (Abschnitt 2.2 Anlage); den beiden Genannten gilt auch unser Dank für viele hilfreiche Diskussionen.

Es ist beabsichtigt, einen weiteren Band zum Thema „Dualität“ zu veröffentlichen, der dann Beiträge zu Gebieten enthalten wird, die weitgehend dem 20. Jh. angehören und die hier nicht bearbeitet wurden, wie etwa Funktionalanalysis, algebraische Topologie, Kategorientheorie und algebraische Geometrie.

Schließlich möchten wir noch Sara Confalonieri, Sebastian Kitz, Nicola Oswald und Robert Wengel (alle Wuppertal) für vielfältige Unterstützung danken. Die große Mühe, unsere Manuskripte in ein präsentables Buch zu verwandeln, hat Pascal Stumpf (Würzburg) mit großem Engagement und viel Sachkunde, übernommen. Ihm gilt unser ganz besonderer Dank.

Verfasser der einzelnen Kapitel bzw. Abschnitte:

Frank Etwein (Wuppertal): 1.1, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 4.1, 4.2, 4.3.

Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach): Anlage zu 2.2.

Erhard Scholz (Wuppertal): 6.

Jean-Daniel Voelke (Lausanne): 1.2.3, 1.3, 2.2, 2.3, 2.4, 3.2.1, 3.2.3.

Klaus Volkert (Wuppertal): 1.2.1, 1.2.2, 2.1, 3.1, 3.2.7, 3.2.8, 4.4, 4.5, 5.

Hinweis: Die Originaltexte der übersetzten Zitate finden sich jeweils am Kapitelende. Sie werden mit römischen Zahlzeichen zitiert.

1. Vorgeschichte

Dieses erste Kapitel stellt zwei Kontexte dar, in denen Phänomen der Dualität auftraten, noch bevor dieses Thema eigenständig gehandelt wurde. Es geht dabei zum einen um die Theorie der Polyeder, in der schon früh – nämlich im fünfzehnten Buch der „Elemente“ des Euklid – die Dualität von Platonischen Körpern untersucht wurde. Im Zuge der Betrachtung allgemeinerer, nur noch teilweise regulärer Polyeder – allen voran die Archimedischen – stellte sich auch für diese Frage nach deren Dualkörpern. Insbesondere zeigt sich bereits hier, dass das klassische Dualitätskonzept erweitert werden muss, da sonst nicht immer ein Dualkörper existiert.

Die zweite Disziplin, in der schon früh Dualität erkannt wurde, war die sphärische Geometrie. Hier ergibt sich diese aus der Zuordnung von Punkten zu Großkreisen, also von Polen und Polaren und umgekehrt. Das so genannte Polardreieck fand schon früh Verwendung, um aus bekannten Formeln neue herzuleiten. Auf die lange, bis in die Antike zurückreichende Geschichte dieses Dreieck gehen Abschnitte 1.2.3 ausführlich ein. Die Abschnitte 1.2.1 und 1.2.2 behandeln weitere Aspekte der sphärischen Geometrie, insbesondere auch einige interessante Entwicklungen in der ersten Hälfte des 19. Jhs. (etwa bei Chr. Gudermann), in denen sich die Entwicklung des Dualitätskonzepts der projektiven Geometrie bemerkbar machen. Schließlich schildert 1.3 Überlegungen am Anfang des 19. Jhs., welche auf die dann bald auftretende Polarreziprozität der projektiven Geometrie hinwirkten, insbesondere die Arbeiten von Brianchon. Der nach ihm benannte Satz wird oft zusammen mit dem Satz von Pascal als erstes paar von dualen Sätzen bezeichnet, eine Behauptung, die historisch gesehen nicht ganz korrekt ist.

1.1. Polyedertheorie

Die Frage nach der Dualität in der Polyedertheorie ist eng verknüpft mit der Theorie der Polyeder allgemein und wird von dieser gleichsam eingerahmt.

Ein geschichtlicher Überblick über die Entwicklung der Polyeder findet sich z. B. bei Malkevitch[1], dargeboten anhand von 25 Meilensteinen. Dieser Überblick soll in der folgenden Arbeit zur groben Orientierung dienen und an den für die Dualität bedeutsamen Stellen entsprechend vertieft werden.

Als besonders ergiebige Quelle für mathematik-historische Informationen hat sich, neben den Büchern von Coxeter, Senechal u. a., vor allem die neuere Arbeit von Cromwell („Polyhedra“) aus dem Jahr 1997 und das frühe, umfassende Werk „Vielecke und Vielflache“ von M. Brückner aus dem Jahr 1900 erwiesen.[2]

[1] (Malkevitch 2013, pp. 53–63).
[2] Zu Brückner vgl. 4.1.5.

Die nachfolgenden Erörterungen sind chronologisch geordnet und erstrecken sich vom Altertum bis zum Ende des 18. Jhs.; die anschließenden Entwicklungen des 19. und 20. Jhs. werden später behandelt (vgl. Kap. 4).

1.1.1. Die Antike

Die platonischen Körper

Die Geschichte der Polyeder zeigt, dass besonders die Beschäftigung mit den regelmäßigen Körpern einen starken Reiz auf die Menschen ausgeübt hat. Als regelmäßig bzw. regulär soll an dieser Stelle ein Polyeder bezeichnet werden, wenn es aus regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt ist und seine Flächen und Ecken jeweils deckungsgleich (kongruent[3]) sind. Ein Vieleck (Polygon) heißt regelmäßig, wenn seine Seiten und Ecken kongruent sind.

Wer sich als erster mit regulären Polyedern beschäftigt hat oder diese kannte, lässt sich historisch nicht mehr genau feststellen. Coxeter[4] vergleicht diese Frage mit der nach der Erfindung bzw. Nutzung des Feuers und hält den Versuch der Beantwortung für ähnlich aussichtslos.[5]

Ein nachweisliches Vorkommen der regulären Körpern gibt es in der Philosophie Platons, in seinem Dialog Timaios, was zur Bezeichnung als „platonische Körper“ (auch „kosmische Körper“) geführt hat; des Weiteren vermutlich bei den frühen Pythagoreern[6] (der mutmaßlichen Quelle Platons). Aus den platonischen Dialogen stammt auch die eher mystische Verbindung der Kosmischen Körper Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder mit den vier Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser, sowie des Dodekaeders mit dem gesamten Universum, die sich sehr viel später bei Kepler wiederfindet (vgl. 1.1.2).

Eine Form von Dualität, d. h. ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Körpern bzw. eine Zuordnung zu Pärchen, ist hier noch nicht zu finden. Die Assoziation der platonischen Körper mit Platon hat sicherlich wesentlich dazu beigetragen, das vorhandene Wissen zu bewahren und zur Zeit der Renaissance wiederzuentdecken.[7]

[3] Modern würde man von Flächen- bzw. Eckentransitivität sprechen.
[4] (Coxeter 1963, p. 13).
[5] Ein archäologischer Fund in der Nähe von Padua in Norditalien zeigt beispielsweise einen dodekaederförmigen Gegenstand, vermutlich ein Spielzeug oder Amulett, aus der Zeit der Etrusker vor mindestens 2.500 Jahren.
[6] Die Frage, welche der fünf regulären Polyeder zuerst entdeckt wurden, ist in der Literatur umstritten. Anzunehmen ist, dass die einfacheren Körper Tetraeder (Pyramide) und Hexaeder (Würfel) naheliegenderweise zuerst entdeckt wurden; ggf. auch noch das in der Natur in Form des Minerals Pyrit vorkommende Dodekaeder. Der Gestalt nach waren den Pythagoräern möglicherweise bereits alle fünf Körper bekannt (mit „Kenntnis“ kann hier aber auch, im Sinne der griechischen Mathematik, die Konstruierbarkeit gemeint sein) (vgl. hierzu u. a. Waterhouse, 1972).
[7] Vgl. (Malkevitch 2013, pp. 54–55).

Euklids „Elemente“

Eine mathematische Behandlung der platonischen Körper fand zuerst bei Theaitetos und in den stereometrischen Büchern XIII bis XV der Elemente Euklids[8] statt. In Buch XI der Elemente legt Euklid die raumgeometrischen Grundlagen für seine weiteren Überlegungen und bestimmt in Buch XII Verhältnisse der Volumina von Prismen und Pyramiden. Im XIII. Buch geht es anfangs um die stetige Teilung einer Strecke (heute: goldener Schnitt) und um Sätze über das reguläre Fünfeck (Pentagon).

Im weiteren Verlauf des XIII. Buches widmet sich Euklid der Aufgabe, die heute als platonische Körper bezeichneten Polyeder in einer Kugel zu konstruieren. Abbildung 1 zeigt das Ergebnis exemplarisch für das Tetraeder (Satz XIII.13). Links ist die Lage des Tetraeders in der Kugel als Schnittbild angedeutet, rechts als räumliche Darstellung. K ist hierbei die Spitze des Tetraeders, E, F und G sind die weiteren Ecken. Der Kugeldurchmesser KL verläuft durch die Mitte H der Grundfläche des Tetraeders.

Polyeder werden bei Euklid stillschweigend als konvex vorausgesetzt, d. h. sie besitzen, einfach ausgedrückt, keine einspringenden Ecken.[9] Euklid zeigt neben der Konstruierbarkeit der regelmäßigen Polyeder auch die Existenz einer Umkugel zu jedem der fünf Körper und bestimmt deren Durchmesser im Verhältnis zur jeweiligen Kantenlänge. Das XIII. Buch schließt ab mit einem Vergleich der Kantenlängen der regelmäßigen Polyeder, wenn man sie in ein und dieselbe Kugel einbeschreibt. In einem Zusatz schließen die eigentlichen, von Euklid verfassten Elemente mit dem fundamentalen Beweis ab, dass es nur genau fünf reguläre Körper geben kann.

Buch XIV[10] enth ält einige Sätze über die Verhältnisse der Kanten, Oberflächen und Volumina der platonischen Körper, so z. B., dass die Volumina des Dodekaeders und Ikosaeders im selben Verhältnis stehen wie ihre Oberflächen.

---

[8] Die Bücher XIV und XV wurden nicht von Euklid selbst verfasst, sondern von verschiedenen späteren Autoren ergänzt (vgl. unten); je nach Sichtweise enden die „eigentlichen“ Elemente bzw. die Elemente des Euklid also bereits mit Buch XIII. Heutige Euklid-Ausgaben umfassen daher nur die ersten 13 Bücher.

[9] Diese eher anschauliche Beschreibung entspricht im Prinzip dem modernen Konvexitätsbegriff: Ein Körper ist konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte seiner Oberfläche vollständig in seinem Innern oder seiner Oberfläche liegt. Die Konvexität ergibt sich bei Euklid oft aus der Tatsache, dass die Körper einer Kugel einbeschrieben werden.

[10] Zugeschrieben wird dieses Buch Hypsikles von Alexandria, zwischen 200 und 100 v. Chr.

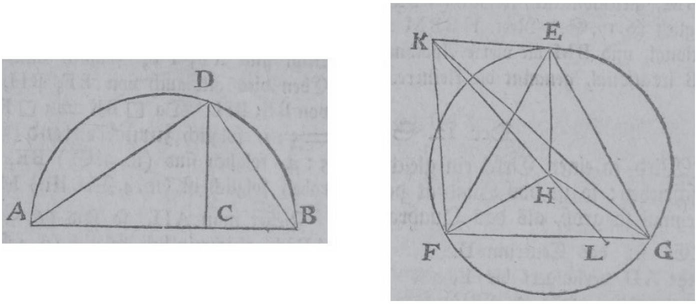

Abbildung 1. Tetraeder in der Kugel.[11]

Das wesentlich später verfasste Buch XV[12] besteht aus sieben Problemata (Aufgaben). Hauptsächlich geht es darum, regelmäßige Vielflache einander einzubeschreiben, was dieses Buch aus Sicht der Dualität interessant macht.[13] So wird in den ersten beiden Sätzen, XV.1 und XV.2, das Tetraeder dem Hexaeder und das Oktaeder wiederum dem Tetraeder einbeschrieben. In XV.3 und XV.4 folgt die Konstruktion des Oktaeders im Hexaeder (und umgekehrt). Abschließend wird das Dodekaeder dem Ikosaeder einbeschrieben (XV.5). In Abbildung 2 sind die ersten drei Fälle zu sehen.

Damit sind allerdings nicht alle denkbaren Möglichkeiten ausgeschöpft: So wurden beispielsweise weder Tetraeder noch Ikosaeder dem Dodekaeder einbeschrieben und der Tetraeder auch nicht sich selbst. Grundsätzlich scheint die dem XV. Buch zugrunde liegende Idee diejenige gewesen zu sein, zwei verschiedene platonische Körper so in eine räumliche Beziehung zu bringen, dass die Ecken des einbeschriebenen Körpers auf der Oberfläche des vorgegebenen Körpers liegen, d. h. mit dessen Ecken, Kanten oder Seitenflächen inzidieren. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten bzw. Varianten, wobei die Ecken des einen Körpers eine besondere Bedeutung für die Bestandteile des anderen besitzen; typischerweise sind sie Mittelpunkte. So stimmen die Ecken des einbeschriebenen Tetraeders mit einigen der Ecken des Hexaeders überein (Variante 1), die Ecken des Oktaeders liegen dagegen auf den Kantenmitten des Tetraeders (Variante 2), während die Ecken des Oktaeders und des Dodekaeders mit den Mittelpunkten der Flächen des Hexaeders bzw. des Ikosaeders koinzidieren (und umgekehrt) (Variante 3). Nur die letzte, dritte Variante führt zu dem, was heute als Dualisierung bezeichnet wird und damit zu einem eindeutig bestimmten dualen Körper (Oktaeder zum Hexaeder, Ikosaeder zum Dodekaeder und Tetraeder zu sich selbst). Im Unterschied zu den ers-

[11] (Lorenz 1781, p. 334).
[12] Wahrscheinlich stammt es von Damaskios (5. Jh. n. Chr.).
[13] Die Dualität zeigt sich bei Euklid ansatzweise auch im Buch IV, wo z. B. aus dem, einem Kreis einbeschriebenen regulären Fünfeck ein ihm umbeschriebenes gewonnen wird, indem in den Eckpunkten des ersteren Tangenten gezogen werden. Das umbeschriebene Fünfeck ist somit das Polarreziproke zum einbeschriebenen in Bezug auf den Kreis (als Kegelschnitt).

ten beiden Möglichkeiten, einen Körper in einen anderen einzubeschreiben, führt ein zweifaches „Dualisieren“ (bis auf Ähnlichkeit) wieder zum Ausgangskörper zurück und zeigt damit den involutorischen Charakter dieses Vorgangs. Das scheint aber für den Autor von Buch XV der Elemente noch keine Rolle gespielt zu haben. Dennoch wird die Kombination Hexaeder-Oktaeder hierbei implizit, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen, als zusammengehöriges (duales) Pärchen identifiziert, indem sie gegenseitig einander einbeschrieben werden; ein Vorgang, der sich theoretisch mit immer kleineren bzw. größeren Körpern unbegrenzt fortsetzen ließe.

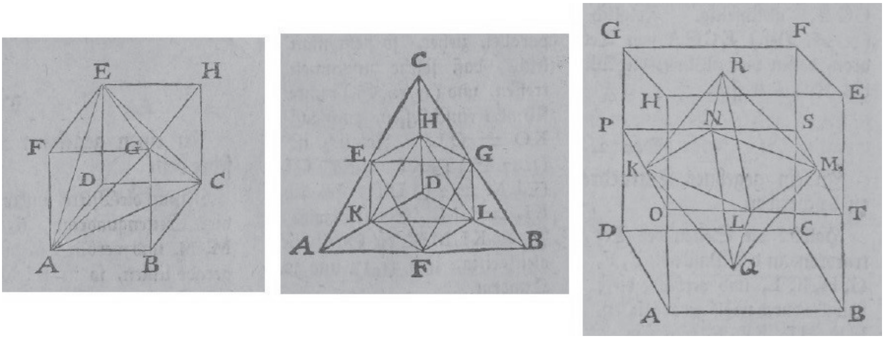

Abbildung 2. Platonische Körper einander einbeschrieben.[14]

Den zweiten Fall, den einbeschriebenen Körpers durch Verbinden der Kantenmitten des vorgegebenen Körpers zu erhalten, sieht Coxeter[15] als Vorwegnahme des Ergebnisses, das man erhält, wenn man zwei duale reguläre Polyeder so anordnet, dass sich ihre Kanten in der Mitte senkrecht schneiden. Als räumliche Schnittmenge bzw. Kern erhält man dann einen neuen Körper. Im Falle des Tetraeders, den man auf diese Weise mit seinem Dualkörper, einem weiteren Tetraeder, verbindet, ergibt sich ein reguläres Oktaeder, das in diesem Kontext auch häufig als Tetratetraeder bezeichnet wird. Bei der Verbindung aus Hexaeder und Oktaeder gelangt man zum Kuboktaeder, bei Dodekaeder und Ikosaeder zum Ikosidodekaeder. Es gibt insgesamt nur diese drei Möglichkeiten, wobei die beiden letzteren auf archimedische Polyeder (vgl. unten) führen und (modern) als quasi-regulär[16] bezeichnet werden.

Auch die Bedeutung der drei mit einem regulären Polyeder verbundenen Kugeln (In-, An- und Umkugel) tritt, abgesehen von der exakten Bestimmung der Umkugeln in Buch XIII, noch nicht deutlich hervor. Damit ist gemeint, dass sich zu einem regulären Polye-

[14] (Lorenz 1781, pp. 359–360).
[15] (Coxeter 1963, p. 30).
[16] Die Charakterisierung als quasi-regulär deutet an, dass diese Körper beinahe regulär sind und sich damit innerhalb der Gruppe der halbregulären Körper noch einmal abheben; ihre Bezeichnungen setzen sich aus denen der erzeugenden Körper zusammen, wobei der Begriff Kubus synonym zu Hexaeder gebraucht wird.

der stets alle drei Kugeln bestimmen lassen, die Inkugel durch die Flächenmittelpunkte, die Ankugel (auch Kantenkugel) durch die Kantenmittelpunkte und die Umkugel durch die Ecken des Körpers. Die Existenz dieser drei Kugeln ist äquivalent zur Regularität des Körpers und bietet eine einfache Möglichkeit, diese zu definieren.[17] Die oben geschilderte Variante 1 entspricht dem Einbeschreiben in die Umkugel, Variante 2 dem Einbeschreiben in die Kantenkugel und nur der Fall 3 führt zum dualen Vorgang des Einbeschreibens in die Inkugel des Ausgangskörpers (analog und dual dazu wäre das Umbeschreiben um die Umkugel). Buch XV schließt ab mit der Angabe der Anzahl der Kanten und Ecken der platonischen Körper und der Bestimmung der Neigung ihrer Seitenflächen.

Insgesamt lässt sich konstatieren, dass in den stereometrischen Büchern der „Elemente“ duale Beziehungen noch nicht direkt aufgedeckt und explizit thematisiert wurden, also von einer Theorie der Dualität in jener Zeit noch nicht die Rede sein kann. Es fanden aber wichtige Vorarbeiten statt, indem nach Verhältnismäßigkeiten und Zusammenhängen gesucht und die Körper einander und auch in eine Umkugel einbeschrieben wurden. Darüber hinaus erfolgte eine gewisse Systematisierung der Objekte durch Bestimmung der Anzahl Ecken und Kanten zu den vorab bekannten Flächenanzahlen.

Die archimedischen Körper

Der nächste große Fortschritt in der Polyedertheorie, der auch für die Dualität bedeutsam ist, war die Entdeckung, Untersuchung und vollständigen Auflistung der halb- bzw. semiregulären Polyeder durch Archimedes, die in Folge dessen auch als „archimedische Körper“[18] bezeichnet werden.

Ein konvexes Polyeder wird als semiregulär bezeichnet, wenn man, kurz gesprochen, mehrere Arten von regelmäßigen n-Ecken als Seitenflächen zulässt. In Abgrenzung zu den regulären platonischen Körpern besitzt ein semireguläres Polyeder demnach mindestens zwei verschiedene Arten solcher Flächen, während die Ecken weiterhin gleich bzw. kongruent bleiben sollen. Die (lokale) Bedingung der Kongruenz der Ecken wurde wesentlich später durch die stärkere (globale) Forderung nach der Transitivität der Ecken ersetzt. Dies bedeutet, dass jede Ecke des Körpers mit jeder anderen durch eine Symmetrieoperation des Polyeders zur Deckung gebracht werden kann.

[17] Vgl. (Coxeter 2013, p. 41).
[18] Namensgeber war aber erst Kepler, der die Entdeckung Archimedes zuordnete.