

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Motivation und Thema der Arbeit

In den heutigen, modernen Kraftfahrzeugen kommen bereits viele unterschiedliche geregelte Vertikaldynamiksysteme zum Einsatz [163], die das Fahrverhalten hinsichtlich des Fahrkomforts gegenüber einem passiven Fahrwerksystem verbessern. Hierzu gehören Komponenten wie Verstelldämpfer, Luftfederung und eine aktive Wankstabilisierung. Aktuelle Ansätze verwenden darüber hinaus eine Kopplung von bestehenden aktiven Vertikal- und Preview-Systemen (vorausschauende Systeme), welche auf Grundlage von kamera- und laserbasierten Daten prädiktive Streckeninformationen generieren [33, 52, 133, 143, 145, 155]. Alle diese Regelsysteme verfolgen i.d.R. das Ziel der situationsabhängigen Komfort- bzw. Fahrdynamikoptimierung und beschränken sich dabei auf das durch Sensoren erfassbare Fahrzeugumfeld.

Für die Bereitstellung der verschiedenen geregelten Vertikaldynamiksysteme und Umfelderkennung beherbergt ein modernes Fahrzeug eine Vielzahl von integrierten elektronischen Steuergeräten [154]. Diese Steuergeräte umfassen hochentwickelte Sensoren und Mikrocontroller, welche in der Lage sind, die verschiedenen steuerungs- und regelungstechnischen Aufgaben in Echtzeit zu erfüllen, um so das Fahrerlebnis und die Fahrsicherheit in allen Situationen zu gewährleisten. Die steigenden Anforderungen der vernetzten Fahrzeugsysteme sorgen jedoch für den Einsatz komplexerer Steuergeräte und Sensoren, um so die wachsende Menge an Rechenoperationen in immer kürzerer Zeit zu ermöglichen.

In naher Zukunft werden jedoch die nicht prädiktiven aktiven und semi-aktiven vertikalen Regeleinheiten in ihren Eigenschaften ausgereift sein. D.h. die Komforteigenschaften können mit den aktuellen Systemkomponenten nicht mehr entscheidend verbessert werden, da diese bzgl. der Dynamik der Aktoren und der vorhandenen Fahrzeugsensorik und Steuergeräte ausgereizt sind. Auch die zurzeit verwendeten vorausschauenden Systeme sind in ihrer Funktionalität eingeschränkt. Aufgrund von wechselnden Umgebungsbedingungen und begrenztem Erfassungsbereich von Sensoren, wie z.B. Kamera oder Laser, sowie der hohen Anzahl an komplexen Ver-

arbeitungsschritten neigen diese zu Fehlentscheidungen, da sie in ihrer prädiktiven Sichtweise eingeschränkt sind.

In diesem Zusammenhang wächst das Interesse am Einsatz von Cloud Computing in Automobilanwendungen zunehmend [10, 47, 62, 82, 92–94, 102, 144, 168]. Der schnelle Zugriff auf verteilte Informationen und Ressourcen zur Datenverarbeitung kann rechen- und datenintensive Fahrzeuganwendungen ermöglichen, in dem komplexe Rechenoperationen in die Cloud ausgelagert werden, während die eingebetteten Fahrzeugprozessoren für die zeitkritischen Anwendungen weiterhin unverzichtbar bleiben. Auf diese Weise kann Cloud Computing bzw. Schwarmdatenverarbeitung zur intelligenten Nutzung aktueller Steuerungs- und Regelungsfunktionen im Fahrzeug genutzt werden, um so die vorhandenen Systeme zu erweitern und neue Anwendungen im Fahrzeug zu ermöglichen.

Derzeit beruhen die meisten umgesetzten cloudbasierten Anwendungen in Serienfahrzeugen auf der Bereitstellung von Dienstleistungen, wie es der Kunde bereits von den großen Internetkonzernen wie Google, Amazon und Facebook gewohnt ist. Durch eine gezielte Kunden- und Marktanalyse werden die Vorlieben explizit gefiltert und eine entsprechende Angebotsvielfalt unterbreitet und das Produktportfolio gezielt ausgebaut. In dieser Arbeit soll hingegen das Potenzial eines cloudbasierten Fahrwerksystems untersucht werden. In Gegensatz zu den bekannten Cloud-Diensten wird das Fahrzeug und dessen Umfeld betrachtet und durch Schwarmintelligenz mit der Umwelt vernetzt, um so die Systemgrenzen aktueller Fahrwerksysteme zu überwinden und das Fahrerlebnis der Fahrzeuginsassen zu steigern.

## 1.2 Umfang der Arbeit

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die konkrete Umsetzung einer vorausschauenden adaptiven (=präadaptiven) Fahrwerksregelung im Automobilbereich mit dem Schwerpunkt der Schwarmdatengenerierung und -verarbeitung von Streckendaten zur Fahrbahnprädiktion im Fahrzeug. Hierzu wird ein serientaugliches cloudbasiertes präadaptives Regelungskonzept entwickelt, welches die vorhandenen aktiven und semi-aktiven Fahrwerkregelssysteme mit den generierten prädiktiven Streckendaten, auch Backend-Daten genannt, kombiniert. Aufgabe ist es, vorhandene Vertikaldynamiksysteme in allen Fahrzeugen bzw. einer ausgewählten Fahrzeugflotte durch vorausschauende Streckeninformationen, welche durch ein globales Serversystem über eine Fahrzeug-Backend-Schnittstelle zur Verfügung gestellt werden, zu unterstützen, sodass diese im Vorfeld von Ereignissen entsprechende Maßnahmen einleiten können. Auf diese Weise lassen sich die Komforteigenschaften und die Fahrsicherheit der Fahrzeuge gezielt verbessern. Die Optimierung der Fahrwerksysteme erfolgt dabei durch präadaptive Parametrierung des Regelgesetzes, sodass sich bestehende konventionelle Regelungskonzepte mit und ohne Vorausschau unkompliziert erweitern lassen. Neben diesen funktionalen Anforderungen erfüllt das Konzept auch die weiteren Randbedingungen eines Serieneinsatzes, sodass insbeson-

dere auf bestehende Fahrwerksensorik, welche auch in Serienfahrzeugen zum Einsatz kommen, und auf eine ressourcensparende Datenübertragung zurückgegriffen wird.

Für die Umsetzung dieses cloudbasierten präadaptiven Regelungskonzepts müssen zudem verschiedene Vorarbeiten geleistet werden. Vor diesem Hintergrund werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit neben der Konzeptentwicklung auch verschiedene Beiträge auf dem Gebiet der Fahrbahnunebenheits- und Fahrzeugmodellierung geleistet. Zudem erfolgt die Herleitung und Analyse verschiedener signal- und modellbasierter Straßenbeobachterentwürfe, welche in dem vorgestellten Konzept die Grundlage der Datengenerierung bilden. Um darzulegen, welche Fahrbahnunebenheiten einen Einfluss auf das Fahrzeugschwingverhalten haben, wird darüber hinaus die Fahrbahn-Fahrzeug-Interaktion intensiv analysiert und die Parametrierung der beschriebenen adaptiven und semi-aktiven Fahrwerksysteme optimiert, sodass die signifikanten Fahrbahn- und Systemparameter identifiziert werden können.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

**Kapitel 2:** Die Eigenschaften der Fahrbahn stehen im Fokus der Untersuchungen. Dabei werden aufbauend auf einer Einteilung der Straße in transiente, regellose und periodische Anteile die einzelnen Bestandteile diskutiert und passende Beschreibungsformen präsentiert. Im zweiten Teil steht die Modellierung der Fahrbahn im Vordergrund. Es werden für die einzelnen Straßenbestandteile verschiedene Methoden und Verfahren vorgestellt, um künstliche Straßenprofile generieren zu können. Ein Gesamtmodell der Fahrbahn resultiert anschließend durch Superposition der Ausgangssignale der Einzelmodelle.

**Kapitel 3:** Die grundlegenden Eigenschaften von adaptiven, aktiven und semi-aktiven Fahrwerksystemen werden vorgestellt. Neben einer allgemeinen Betrachtung der Systeme bildet die Modellierung von einfachen (Viertelfahrzeug) bis hin zu komplexen (Gesamtfahrzeug) Fahrzeugmodellen die Grundlage für den weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit. Zudem werden auf Basis eines linearen Viertelfahrzeugmodells, die wesentlichen Regelungskonzepte der Fahrwerksysteme dargelegt.

**Kapitel 4:** Ausgehend von den hergeleiteten Fahrzeugmodellen im Kapitel 3 erfolgt ein Entwurf von unterschiedlichen signal- und modellbasierten Straßenbeobachtern. Dabei werden zunächst die wesentlichen Eigenschaften eines Störgrößenbeobachters inkl. eines erweiterten Streckenmodells und einem Kalman-Filter aufgezeigt. Nach dem Straßenbeobachterentwurf erfolgt eine genauere Analyse der Konzepte. Neben der Betrachtung im Frequenz- und Weg-/Zeitbereich wird eine Sensitivitätsanalyse der Modellparameter mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Eine Statistische Versuchsplanung (DoE) gibt anschließend Aufschluss über die signifikanten Modellparameter, sodass am Ende robustheitserhöhende Maßnahmen für die Beobachtungskonzepte abgeleitet werden können.

**Kapitel 5:** Die Interaktion zwischen Fahrbahn und Fahrzeug wird untersucht, wobei der Einfluss von Fahrbahnebenenheiten und transienten Einzelhindernissen im Fahrbahnverlauf auf das Fahrzeugschwingverhalten separat analysiert wird. Nach der Herleitung von unterschiedlichen Bewertungskriterien für den Fahrkomfort und Fahrsicherheit bzw. nach der Definition einer Kostenfunktion erfolgt die Bewertung und Optimierung eines adaptiven und semi-aktiven Fahrwerksystems auf Basis eines linearen Viertelfahrzeugmodells mit Verstelldämpfer. Zudem werden die Optimierungsergebnisse mit einem entsprechenden adaptiven und semi-aktiven Referenzsystem verglichen und allgemeine präadaptive vertikale Regelstrategien bzw. Fahrstrategien hergeleitet.

**Kapitel 6:** Die gewonnenen Erkenntnisse im vorherigen Kapitel 5 bilden die Grundlage für die Konzeptentwicklung eines cloudbasierten präadaptiven Reglerentwurfs. Im Gegensatz zu den aus der Literatur bekannten cloudbasierten Funktionen erfolgt die Optimierung der Fahrwerksysteme durch präadaptive Parametrierung des Regelgesetzes. Hierdurch können bestehende konventionelle Regelungskonzepte mit und ohne Vorausschau unkompliziert erweitert werden. In diesem Zusammenhang wird anschließend ein echtzeitfähiges Verfahren zur Detektion von Einzelhindernissen im Fahrbahnverlauf sowie eine Klassifizierung des Straßenzustands vorgestellt und anhand realer und simulativer Messdaten analysiert. Am Ende erfolgt eine weitere Untersuchung, welche das Potenzial einer vernetzten, cloudbasierten Fahrwerksfunktion gegenüber dem konventionellen Fahrwerkssystem ohne Vorausschau bei der Überfahrt eines realen Einzelhindernisses mit einem seriennahen Fahrzeug bestätigt.

**Kapitel 7:** Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf zukünftige Weiterentwicklungen vernetzter, cloudbasierter Fahrwerksfunktionen bilden den Abschluss der vorliegenden Arbeit.

# Kapitel 2

## Fahrbahnunebenheiten

### 2.1 Eigenschaften der Fahrbahn

Zur Beschreibung des vertikalen Fahrbahnverlaufs und einer anschließenden Modellierung ist es zweckmäßig, die Gesamtheit der Fahrbahneigenschaften aufzuteilen. Dabei lassen sich die Unebenheiten grundsätzlich in deterministische und stochastische Anteile unterscheiden. Eine weitere Einteilung kann wie folgt getroffen werden:

- A Einzelhindernisse, die als nicht zyklische, transiente Fahrbahnregung aufgefasst werden,
- B regellose bzw. stochastische Fahrbahnunebenheiten, mit einem unregelmäßigen, zufälligen Höhenprofilverlauf und
- C periodische Fahrbahnunebenheiten, welche einen deterministischen, wiederkehrenden Fahrbahncharakter mit sich führen.

In den nachfolgenden Abschnitten wird auf die einzelnen Fahrbahnelemente A – C, welche einen Beitrag zur Straßenmodellierung leisten, im Detail eingegangen.

#### 2.1.1 Einzelhindernisse

Einzelhindernisse stellen eine erste Form der Fahrbahnunebenheit dar. Diese treten beim Überfahren einer Straße in unregelmäßigen Abständen auf und können als kurzzeitige transiente Änderung des Fahrbahnverlaufs aufgefasst werden, welche zu einer impuls- oder sprungförmigen Fahrzeuganregung führen. Dabei besitzt die Form des Hindernisses einen maßgeblichen Einfluss auf das Fahrzeugschwingverhalten sowie die Auswirkungen auf die Fahrzeuginsassen. Je nach Anstieg der steigenden und fallenden Flanke sowie die Hindernislänge und -höhe können sowohl der Fahrzeugaufbau (komfortrelevant) als auch die Räder (sicherheitsrelevant) zum Schwingen angeregt werden.

Im Fahrversuch wird die Überfahrt von Einzelhindernissen, besonders bei ebener Straße, verstärkt von den Fahrzeuginsassen wahrgenommen. Die Ursache liegt an der impulsförmigen Fahrzeuganregung und dem hervorgerufenen Schwingverhalten des Fahrzeugs, welches gegenüber dem normalen Straßenverlauf deutlich differenziert ist. Vor diesem Hintergrund werden die beschriebenen Anregungen und die Auswirkungen auf die Insassen bei der Komfortbewertung von Fahrzeugen gesondert klassifiziert, siehe bspw. [32, 69, 105, 150, 169].

Aufgrund der geringeren Auslegung von Grunddämpfung und -federsteifigkeit eines aktiven im Vergleich zu einem passiven Fahrwerk werden bei der Entwicklung von vertikalen Fahrdynamikregelsystemen zudem dominante Einzelhindernisse separat getestet. Treten bspw. bei der Überfahrt einer sehr ebenen Straße unerwartet hohe Hindernisse auf, so können diese bei einer adaptiven komfortrelevanten Regelstrategie dazu führen, dass ein z.T. sicherheitskritischer Zug- bzw. Druckanschlag im Fahrwerk resultiert oder der Bodenfreigang bzw. Bauteilschutz verletzt wird.

Das Ziel ist daher im Folgenden, Einzelhindernisse, die einen maßgeblichen Einfluss auf das Fahrzeugschwingverhalten (Eigenfrequenzbereiche) bzw. auf die Aufbau- und Radbewegung haben, zu beschreiben. Dabei soll in einer ersten Näherung ausschließlich die Grundform des Einzelhindernisses (ideales Hindernis) modelliert werden. Ein reales Hindernis ergibt sich im späteren Verlauf durch die Überlagerung eines rauen (stochastischen) Straßenanteils.

Die mathematische Sichtweise lässt hierbei verschiedene Möglichkeiten der Definition eines Einzelhindernis zu. Nach [84, 105, 169] lassen sich Unebenheiten vereinfacht durch eine abschnittsweise definierte  $(1 - \cos)$ -Funktion bzw. Cosinus-Schwelle und  $\frac{1}{4}\sin$ -Funktion für Kanten darstellen. Diese Ansätze haben den Nachteil, dass sie nur einen stark begrenzten Raum für Anpassungen zulassen. So können vor allem trapezförmige Hindernisse nicht generiert werden, sodass für diese einfache Hindernisform eine weitere unabhängige, abschnittsweise definierte Funktion hergeleitet werden müsste. Ein erstes Ziel soll daher im Folgenden sein, eine einfach parametrierbare stückweise Funktion abzuleiten, welche neben den bereits bekannten  $(1 - \cos)$ -Funktion bzw. Cosinus-Schwelle und  $\frac{1}{4}\sin$ -Funktion [84, 105, 169] auch trapezförmige Hindernisse beinhaltet. Darüber hinaus gilt es die relevanten Methoden aufzuzeigen, welche es ermöglichen, beliebige bzw. willkürliche Hindernisformen zu generieren und den Profilverlauf zu bewerten. Hierfür sollen die allgemeinen Verfahren der Polynom- und Spline-Interpolation gegenübergestellt werden.

### Abschnittsweise definierte Funktion

Wie bereits [84, 105, 169] gezeigt haben, lassen sich Einzelhindernisse vereinfacht durch eine abschnittsweise definierte  $(1 - \cos)$ -Funktion bzw. Cosinus-Schwelle und  $\frac{1}{4}\sin$ -Funktion für Kanten darstellen, siehe Tab. 2.1. Ausgehend von der, aus der Fourier-Analyse bekannten, Tukey-Fensterfunktion [17], lassen sich diese stückweise definierten Funktionen in eine allgemeine Form überführen, um so die verschiedenen Grundtypen von Hindernissen anhand einer einzigen Funktion zu beschreiben.

Für die Darstellung einer positiven bzw. negativen Schwelle lässt sich in Analogie zur Tukey-Fensterfunktion die folgende Gleichung mit dem Formparameter  $\alpha$  definieren

$$z_h(x) = \left. \begin{cases} 0 & , x < 0 \vee x > L \\ \frac{\hat{z}_h}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) & , 0 \leq \frac{x}{L} < \frac{\alpha}{2} \\ \hat{z}_h & , \frac{\alpha}{2} \leq \frac{x}{L} < 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\hat{z}_h}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} \cdot \left(\frac{x}{L} - 1 + \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) & , 1 - \frac{\alpha}{2} \leq \frac{x}{L} \leq 1 \end{cases} \right\} \quad (2.1)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad L > 0$$

wobei  $\hat{z}_h$  die maximale Hindernishöhe und  $L$  die Hindernislänge repräsentieren. Der Formfaktor bzw. die Welligkeit  $\alpha$  beschreibt das Verhältnis zwischen Anstiegsphase und Gesamthindernislänge  $L$ , siehe Tab. 2.1. Auf diese Weise ist die Möglichkeit gegeben, neben dem Sonderfall  $\alpha = 1$  die bereits genannte  $(1-\cos)$ -Funktion bzw. Cosinus-Schwelle darzustellen oder ein Hindernis mit einer Plateaulänge  $L_p = (1 - \alpha) \cdot L$  zu definieren, siehe Tab. 2.1.

Für die Beschreibung einer positiven bzw. negativen Kante vereinfacht sich (2.1) mit  $\alpha = 1$  und drei statt vier Abschnitten wie folgt:

$$z_h(x) = \left. \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{\hat{z}_h}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right)\right) & , 0 \leq x < L \\ \hat{z}_h & , L \leq x \end{cases} \right\} \quad (2.2)$$

$$L > 0$$

Diese hat den Vorteil gegenüber der  $1/4$  sin-Kantenfunktion, dass das Einlaufverhalten ebenfalls stetig differenzierbar ist, siehe Tab. 2.1.

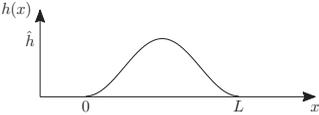
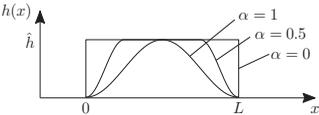
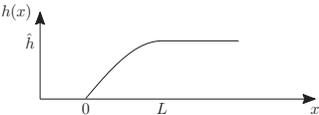
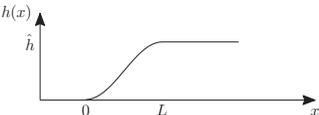
Mit Hilfe der neu definierten Funktionen nach (2.1) und (2.2) lassen sich somit neben der Cosinus-Schwelle und  $1/4$ -Sinus-Kante, siehe Tab. 2.1, weitere Grundtypen, wie bspw. trapezförmige oder rechteckige/impulsförmige Hindernisse, beschreiben. Für komplexere Hindernisformen bedarf es jedoch anderer Methoden, wie bspw. Interpolationspolynome oder Interpolations-Splines, da die abschnittsweise definierten Funktionen an Komplexität deutlich zunehmen würden und weitere Parameter für die Beschreibung notwendig wären. Beide Methoden sollen im weiteren Verlauf zunächst kurz vorgestellt werden. Anschließend erfolgt ein Vergleich der Verfahren anhand eines zufällig gewählten willkürlichen Einzelhindernisses.

### Interpolationspolynom

Die Polynominterpolation beschreibt ein mathematisches Verfahren zur Ermittlung eines Polynomes  $n$ -ten Grades

$$p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad , \quad a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, n \quad (2.3a)$$

Tabelle 2.1: Vergleich der charakteristischen Einzelhindernisse nach [84, 105, 169] mit den Unebenheitsfunktionen nach (2.1) und (2.2)

Unebenheitsfunktion	Profilverlauf
(1 - cos)-Funktion	
Schwelle nach (2.1)	
1/4 sin-Funktion	
Kante nach (2.2)	

welches  $(n + 1)$  diskrete, paarweise verschiedene Stützstellen  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  für  $x_i \in \mathbb{R}$  und den dazugehörigen beliebigen Stützwerten  $y_0, \dots, y_n$  für  $y_i \in \mathbb{R}$  durch die Interpolationsbedingung

$$p(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.3b)$$

eindeutig definiert. Den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Interpolationspolynom vom Höchstgrad  $n$  kann zum einen anhand der Lagrange-Interpolation [124, 137] oder zum anderen anhand der Vandermondesche Determinante [42, 121] nachgewiesen werden. Für die Berechnung des Polynomes nach (2.3) gibt es verschiedene numerische Lösungsverfahren. Die Lagrange-Interpolation repräsentiert dabei die anschaulichste Möglichkeit der Darstellung. Diese generiert mit der zuvor definierten Stützstellenbedingung  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  immer eine eindeutige Lösung des Polynomes. Jedoch ist der numerische Aufwand hoch, weil für  $(n + 1)$  Wertepaare  $n$  sogenannte Lagrange-Polynome

$$L_i(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \quad (2.4)$$

ermittelt werden, die wiederum erneut  $(n + 1)$  Multiplikationen beinhalten. Das gesuchte Polynom ergibt sich dann aus dem Produkt der einzelnen Lagrange-Polynome:

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (2.5)$$

Somit resultiert für den numerischen Aufwand  $n(n + 1)$  Multiplikationen. Hinzu kommt, dass für jede neue Stützstelle und dem dazugehörigen Stützwert die Lagrange-Polynome neu berechnet werden müssen. Vor diesem Hintergrund stellt die Lagrange-Interpolation zwar ein theoretisches aber weniger praktikables Verfahren dar.

Im Vergleich dazu wird bei der Newton-Interpolation, aufgrund der rekursiven Berechnung der Polynomkoeffizienten und der Summe von Linearfaktoren, nur  $n$  Multiplikationen benötigt. Ausgehend von der zu (2.3a) äquivalenten Darstellung des Polynomes  $n$ -ten Grades

$$p(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{i=1}^k (x - x_{i-1}) \quad , \quad a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, n \quad (2.6)$$

werden die Koeffizienten  $a_j$  für  $j = 0, 1, \dots, n$  sukzessive durch Einsetzen der Wertepaare  $(x_i, y_i)$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  berechnet

$$\left. \begin{aligned} p(x_0) = \dots = y_0 &\Rightarrow a_0 = y_0 \\ p(x_1) = \dots = y_1 &\Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - x_0}{x_1 - x_0} =: [x_1 x_0] \\ p(x_2) = \dots = y_2 &\Rightarrow a_2 = \frac{[x_2 x_1] - [x_1 x_0]}{x_2 - x_0} =: [x_2 x_1 x_0] \\ p(x_n) = \dots = y_n &\Rightarrow a_n = \frac{[x_n \dots x_2 x_1] - [x_{n-1} \dots x_1 x_0]}{x_n - x_0} =: [x_n \dots x_1 x_0] \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

wobei  $[x_k \dots x_0]$  für  $k = 1, 2, \dots, n$  als  $k$ -te dividierte Differenz definiert wird. Somit resultiert bei jedem weiteren Wertepaar  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  nur eine weitere Multiplikation, was den numerischen Aufwand im Vergleich zur Lagrange-Interpolation gering hält. Alternativ stellt die Hermite-Interpolation ein weiteres Verfahren für die Polynominterpolation dar. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Berechnungsverfahren werden bei dieser Methode zusätzlich zu den Funktionswerten auch die Ableitungswerte verschiedener Ordnung interpoliert. Dadurch kann der geschätzte Interpolationsfehler<sup>1</sup> und das mögliche Schwingverhalten reduziert werden.

Einzelheiten zu den unterschiedlichen Interpolationspolynomverfahren und dessen Anwendungen können bei Bedarf [42, 121, 124, 137, 141] entnommen werden.

<sup>1</sup>Die Abschätzung des Interpolationsfehler für das Interpolationspolynom  $p(x)$  erfolgt i.d.R. an den Stützstellen  $x \in \mathbb{R}^{\neq x_i} (x_0, x_n)$  für  $i = 0, 1, \dots, n$  und unter Kenntnisnahme der  $k$ -ten Ableitung der Funktionswerte  $y_i^{(k)}$  an den Stützstellen  $x_i$ .

## Interpolations-Spline

Während die Polynominterpolation darauf beruht,  $(n+1)$  Wertpaare durch ein einziges Polynom  $p(\cdot)$  vom Höchstgrad  $n$  zu verbinden, wird bei der Spline-Interpolation die Spline-Funktion  $s(\cdot)$ , kurz Spline genannt, aus  $n \geq 2$  Polynomen niedrigen Grades  $p$  zusammengesetzt, sodass ein mindestens einmal stetig differenzierbarer Spline im Intervall  $[x_0, x_n]$  entsteht. Die Spline-Funktion bildet somit eine Kombination aus Polynominterpolation und abschnittsweise definierte Funktion. Dabei beschreibt jedes Segment  $s_i(x)$  ein Teilintervall  $[x_i, x_{i+1}]$  mit  $x_i < x_{i+1}$  für  $i = 0, 1, \dots, n-1$  der Gesamtfunktion  $s(x)$

$$s(x) := \begin{cases} s_0(x) & , x_0 \leq x \leq x_1 & x \in \mathbb{R}[x_0, x_{n+1}] \\ s_1(x) & , x_1 \leq x \leq x_2 & x_i < x_{i+1} \\ \vdots & & i = 0, 1, \dots, n \\ s_{n-1}(x) & , x_{n-1} \leq x \leq x_n & n \geq 2 \end{cases} \quad (2.8a)$$

mit den jeweiligen Segment  $s_i(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} s_i(x) &:= a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_i) + a_{i,2}(x - x_i)^2 + \dots + a_{i,p}(x - x_i)^p \\ x &\in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ a_{i,k} &\in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (2.8b)$$

Zusätzlich werden an den Segmentübergängen  $x_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , auch Knoten genannt, Bedingungen gestellt, um einen möglichst „glatte“ Kurvenverlauf zu generieren:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) && \text{(Stetigkeit)} \\ \text{(b)} \quad & s_i^{(k)}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(x_{i+1}) && \text{(glatte Funktion)} \\ \text{(c)} \quad & s_{0|n-1}^{(k)}(x_{0|n}) = y_{0|n-1}^{(k)} && \text{(Randbedingungen)} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-2 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, p-1$$

Die verschiedenen Spline-Verfahren unterscheiden sich dabei durch den jeweiligen Polynomgrad der einzelnen Segmente, den Differenzierbarkeitsgrad der Spline-Funktion und weiteren Nebenbedingungen.

Im Weiteren Verlauf wird sich auf (natürlich) kubische Splines mit  $p = 3$  fokussiert. Für  $(n+1)$  Wertpaare ergibt sich dann nach (2.8)  $m := n(p+1) = 4n$  unbekannte Koeffizienten  $a_{i,k}$ , die es mit Hilfe der Interpolationsbedingung und den Bedingungen nach (2.9) in einem Gleichungssystem zu ermitteln gilt. Mit den  $(n+1)$  gegebenen Stützpunkten  $(x_i, y_i)$  ergeben sich automatisch gleichermaßen viele Interpolationsbedingungen  $s(x_i) = y_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n$ , mit denen sich  $(n+1)$  Koeffizienten