Kapitel I: *Die natürlichen Zahlen.*

Betrachte als gottgegeben eine Gesamtheit wohlunterschiedener Dinge, welche die **natürlichen Zahlen** heißen, und zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl n_+ (der **Sukzessor von n**) derart, dass es eine natürliche Zahl 0 gibt, für welche gilt: Jede Abfolge natürlicher Zahlen n, n´, n´´, n´´´, … derart, dass ein Glied genau dann letztes Glied der Abfolge ist, wenn es *nicht* Sukzessor genau einer natürlichen Zahl ist, und jedes nicht letzte Glied g der Sukzessor des g unmittelbar nachfolgenden Glieds ist, bricht ab mit letztem Glied 0.

Vorab einige Bezeichnungen: Die folgenden Kurzschreibweisen sind üblich:
Lese „=, ≠" als: gleich, ungleich. *Generell* zeige bei einem eine zweistellige Beziehung zwischen natürlichen Zahlen wiedergebenden Schriftzeichen das durchgestrichene Schriftzeichen das Nicht-Bestehen (die Verneinung) der Beziehung an. *Lese* zudem „:=" als: *per definitionem* gleich. Beim spiegelverkehrten Zeichen „=:" sind die Rollen von linker (definierter) Seite und rechter (definierender) Seite zu vertauschen.
Wir benutzen in Analogie zu „=, :=, =:" die Schriftzeichen „⇔, :⇔, ⇔:" als Kürzel für „genau dann, wenn| stehe für| sei zu lesen als". *Lese* „⇐, ⇒" als „folgt aus, impliziert".

0 ist die einzige natürliche Zahl, welche nicht Sukzessor einer natürlichen Zahl ist oder Sukzessor von mehr als einer natürlichen Zahl ist; *nenne* 0 die **nulle** natürliche Zahl oder die **Null**. Jede nicht nulle natürliche Zahl n ist der Sukzessor genau einer natürlichen Zahl n_-; *nenne* n_- den **Prädezessor von n**.
Es bricht für jede natürliche Zahl n die (eindeutig bestimmte) Abfolge natürlicher Zahlen mit erstem Glied n und derart, dass ein Glied genau dann letztes Glied ist, wenn es null ist, und jedes nicht letzte (und mithin nicht nulle) Glied der Sukzessor des ihm unmittelbar nachfolgenden Glieds ist (dieses also als Prädezessor aufweist), ab mit letztem Glied 0. *Nenne* n, n_-, n_{--}, n_{---}, …, 0 den ***Abstieg von n***; seine Glieder sind paarweise ungleich, weil ein mehr als einmal auftretendes Glied stets erneut aufträte, 0 also nie erreicht würde, was ja nicht sein darf. Schreibt man den Abstieg von n in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man den ***Aufstieg von n***: 0, 0_+, 0_{++}, …, n.
In der endlosen Abfolge 0, 0_+, 0_{++}, 0_{+++}, 0_{++++}, 0_{+++++}, … tritt jede natürliche Zahl auf. Die Glieder dieser Abfolge sind paarweise ungleich, *denn:* Nehme an, dies sei nicht der Fall. Nun existiert (genau) eine natürliche Zahl n dergestalt, dass sich diese (die ***kanonische Abfolge der natürlichen Zahlen*** genannte) Abfolge schreiben lässt als 0, 0_+, 0_{++}, 0_{+++}, …, n, n_+, n_{++}, n_{+++}, n_{++++}, …, dabei 0, 0_+, 0_{++}, 0_{+++}, … n der Aufstieg von n ist (0, 0_+, 0_{++}, 0_{+++}, …, n also paarweise ungleich sind) und n_+ eines seiner Glieder ist. Wäre $n_+=0$, so (würde sich der Aufstieg von n endlos wiederholen und) wäre n die einzige natürliche Zahl mit Sukzessor 0, was ausgeschlossen ist. Wäre $n_+\neq0$, so wäre n das im Aufstieg von n unmittelbar vor n_+ auftretende Glied; n wäre dann also ein nicht letztes Glied des Aufstiegs von n und würde somit, weil zugleich letztes Glied des Aufstiegs von n, im Aufstieg von n mehr als einmal vorkommen, was nicht sein kann. Die Annahme ist demnach widersprüchlich. Unsere Behauptung ergibt sich nun ***indirekt*** (*will sagen:* aufgrund der Tatsache, dass die Verneinung einer Aussage sicher dann wahr ist, wenn die Aussage selbst zu einem Widerspruch führt).
Zudem ist jetzt auch klar, dass es *keine* natürliche Zahl mit Sukzessor 0 gibt.

Ist i eine natürliche Zahl, so heißt eine natürliche Zahl $j \neq i$ ein **Vorgänger** oder ein **Nachfolger von i**, je nachdem ob in der kanonischen Abfolge der natürlichen Zahlen j *vor i* oder *nach i* auftritt (mithin ist ein Vorgänger von i ein zu i ungleiches Glied des Abstiegs von i); *sage* im ersten Fall: **j ist kleiner (als) i**, *schreibe:* $j<i$; *sage* im zweiten Fall: **j ist größer (als) i**, *schreibe:* $j>i$. Ist $j<i$ oder $j=i$, so *schreibe:* $j \leq i$, *sage:* **j ist kleiner-gleich i**; ist $j>i$ oder $j=i$, so *schreibe:* $j \geq i$, und *sage:* **j ist größer-gleich i**. Es ist $i \leq j$ genau dann, wenn i Glied des Abstiegs von j ist.
Für natürliche Zahlen i, j, k gilt: $0 \leq i$. $i \leq i$. $i \leq j$ oder $j \leq i$. $i<i_+$, und es gibt keine natürliche Zahl n mit $i<n$ und $n<i_+$. Ist $i \leq j$ und $j \leq i$, so folgt: $i=j$. Ist $i \leq j$ und $j \leq k$, so folgt: $i \leq k$.

Die natürlichen Zahlen i entsprechen den nicht nullen natürlichen Zahlen j eins-zu-eins vermöge der Korrespondenz: $j_- = i \leftrightarrow j = i_+$. Mit $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 6 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 8 \leftrightarrow 9$ nenne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 die **Eins**, die **Zwei**, die **Drei**, die **Vier**, die **Fünf**, die **Sechs**, die **Sieben**, die **Acht** und die **Neun**.

Die auf dem durch die kanonische Abfolge der natürlichen Zahlen bedingten Fakt, dass eine Aussage über natürliche Zahlen für jede natürliche Zahl gilt (***Induktionsschluss***), wenn sie für 0 überprüft worden ist (***Induktionsanfang***) und man gezeigt hat, dass sie immer dann, wenn sie für eine natürliche Zahl n (oder, allgemeiner, für jede natürliche Zahl $n' \leq n$) gültig ist (***Induktionsvoraussetzung***), auch für n_+ besteht (***Induktionsschritt***), beruhende Beweismethode heißt die ***vollständige Induktion***. Bei der ***vollständigen Rekursion*** trifft man eine die natürlichen Zahlen betreffende Definition für 0 (***Rekursionsanfang***) und n_+, dabei beim ***Rekursionsschritt*** „$n \rightarrow n_+$“ von der ***Rekursionsvoraussetzung*** ausgegangen wird, dass für die natürliche Zahl n (oder, allgemeiner, für jede natürliche Zahl $n' \leq n$) die Definition bereits erfolgt ist.

Definiere ***rekursiv auf b*** [durch vollständige Rekursion] zu natürlichen Zahlen a, b die **Summe** a+b **von a und b** wie folgt: $a+0 \coloneqq a$, $a+b_+ \coloneqq (a+b)_+$. Insbesondere gilt: $a+1=a+0_+=(a+0)_+=a_+$. [***Zur Einsparung von Klammern*** sei generell vereinbart, dass ***Verwandlungen*** (etwa $a \mapsto a_+$, $a \mapsto a_-$) „stärker binden“ als ***Verquickungen*** (wie z. B. $a, b \mapsto a+b$) – so ist etwa oben „$a+b_+$“ zu lesen als: $a+(b_+)$, *nicht* als: $(a+b)_+$.]

Seien a, b, c natürliche Zahlen. Es gilt: $(a+b)+0=a+b=a+(b+0)$. Gilt: $(a+b)+c=a+(b+c)$, so folgt: $(a+b)+(c+1)=((a+b)+c)+1=(a+(b+c))+1=a+((b+c)+1))=a+(b+(c+1))$. *Somit* ist ***induktiv*** [via vollständiger Induktion] nachgewiesen, dass gilt: $\underline{(a+b)+c=a+(b+c)}$. $1+0=1=0_+=0+1$. Gilt: $1+a=a+1$, so folgt: $1+(a+1)=(1+a)+1=(a+1)+1$. Via vollständiger Induktion ist nun gezeigt: $1+a=a+1$. $0+0=0$. Gilt: $0+a=a$, so ist $0+(a+1)=(0+a)+1=a+1$. Induktiv ist somit gezeigt: $0+a=a(=a+b)$. Gilt: $a+b=b+a$, so folgt: $a+(b+1)=(a+b)+1=(b+a)+1= b+(a+1)=b+(1+a)=(b+1)+a$. Induktiv kann man nun schließen: $\underline{a+b=b+a}$.
Zeige induktiv auf c: $\underline{a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c}$: (Der *Induktionsanfang* „$c=0$“)$\Leftarrow(a+0=a, b+0=b)$.
Zum Induktionsschritt: Besteht die *Induktionsvoraussetzung* „$a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$“, so gilt offenbar auch: $a \leq b \Leftrightarrow (a+c)+1 \leq (b+c)+1$, wegen $(a+c)+1=a+(c+1)$, $(b+c)+1=b+(c+1)$ gilt dann also: $a \leq b \Leftrightarrow a+(c+1) \leq b+(c+1)$. Der *Induktionsschluss* ist die Behauptung !
Via vollständiger Induktion auf b sieht man leicht: $a \geq b \Leftrightarrow$(es gibt eine natürliche Zahl d mit $b+d=a$). Ist $a \geq b$, so ist d mit $b+d=a$ aufgrund des eben erzielten Ergebnisses eindeutig bestimmt, und heiße die **Differenz von a und b**, *in Zeichen:* $a-b$.

Für natürliche Zahlen a, b, c mit a, b ≤c gilt c−a=b genau dann, wenn c−b=a (beide Aussagen sind gleichbedeutend zu: c=a+b). Offenbar gilt: a≤a+b mit (a+b)−b=a, und falls a≥b: a−b≤a mit a−(a−b)=b. 0≤a mit a−0=a. a≤a mit a−a=0. Ist a≠0, so ist $a-1=a_-$.

Wir erklären zu natürlichen Zahlen a, b das **Produkt** a·b **von a und b** rekursiv auf b: a·0 ≔ 0, a·(b+1) ≔ (a·b)+a. Speziell gilt: a·1=a·(0+1)=(a·0)+a=0+a=a, also: a·1=a.
Vereinbare zur Einsparung von Klammern, dass · „stärker bindet" als + und −.

Seien a, b, c natürliche Zahlen. 0·0=0. Ist 0·a=0, so gilt: 0·(a+1)=0·a+0=0+0=0, und man erhält induktiv: 0·a=0. c·(a+b)=c·a+c·b, (a+b)·c=a·c+b·c wie folgt: c·(a+0)=c·a= c·a+0=c·a+c·0. Gilt: c·(a+b)=c·a+c·b, so folgt: c·(a+(b+1))=c·((a+b)+1)=c·(a+b)+c·1= c·(a+b)+c=(c·a+c·b)+c=c·a+(c·b+c)=c·a+c·(b+1). (a+b)·0=0=0+0=(a·0)+(b·0). Gilt: (a+b)·c=a·c+b·c, so: (a+b)·(c+1))=(a+b)·c+(a+b)=(a·c+b·c)+(a+b)=(a·c+a)+(b·c+b)= a·(c+1)+b·(c+1). Die zwei Behauptungen erhält man jetzt induktiv auf b bzw. auf c. 1·0=0. Gilt 1·a=a, so folgt: 1·(a+1)=1·a+1=a+1. Induktiv ist somit bewiesen: 1·a=a. (a·b)·c=a·(b·c), *denn:* (a·b)·0=0=0·0=(a·0)·(b·0). Gilt: (a·b)·c=a·(b·c), so erhält man: (a·b)·(c+1)=(a·b)·c+a·b=a·(b·c)+a·b=a·(b·c+b)=a·(b·(c+1)); die Behauptung ergibt sich jetzt induktiv. a·b=b·a erhält man induktiv wie folgt: a·0=0=0·a. Gilt: a·b=b·a, so folgt: a·(b+1)=a·b+a=b·a+a=b·a+1·a=(b+1)·a. a≤b⇒[a·c≤b·c mit b·c−a·c=(b−a)·c], *denn:* Der Fall „c=0" besteht wegen a·0=0, b·0=b. Besteht die Behauptung für c, so: a·(c+1)+(b−a)·(c+1)=a·c+a+(b−a)·c+(b−a)=(a+(b−a))·c+a+(b−a)=b·c+b=b·(c+1), also gilt: b·(c+1)≥a·(c+1), b·(c+1)−a·(c+1)=(b−a)·(c+1). Induktiv folgt die Behauptung. Induktiv auf b erhält man ohne Mühe: (a≠0 und b≠0)⇒a·b≠0.
Sei c≠0. Ist a<b, so gilt mit b−a≠0: (b−a)·c≠0, also: b·c−a·c≠0, und folglich: a·c≠b·c. Weil ebenso gilt: a>b⇒a·c≠b·c, erhalten wir also: a≠b⇒a·c≠b·c, sprich: a·c=b·c⇒a=b.

Definiere für natürliche Zahlen a, b die **b-te Potenz** a^b **von a** rekursiv auf b wie folgt: $a^0 \coloneqq 1$, $a^{b+1} \coloneqq a^b\cdot a$. Für natürliche Zahlen a, b, c gilt: $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$, $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$, $a^c\cdot b^c=(a\cdot b)^c$. $a^1=a$, $1^c=1$, und falls c≠0: $0^c=0$. $2+2=2\cdot 2=2^2=4$. Falls b≥2, c≥3, oder falls b≥3, c≥2, gilt: $b+c<b\cdot c<b^c$. Vollständige Induktion nach c liefert die nicht trivialen Aussagen.

Für natürliche Zahlen u, v mit u≥2 gilt (*1.* erhält man induktiv auf v, *2.*, *3.* sind klar):

1. Es gibt genau eine natürliche Zahl l derart, dass für i<l gilt: Es gibt eindeutig bestimmte natürliche Zahlen a, b, c mit $u^{l-i}\cdot a+u^{l-(i+1)}\cdot b+c=v$, a=0⇔i=0, b<u, $c<u^{l-(i+1)}$. Mit $l \eqqcolon \text{Ȼ}_u v$, $a \eqqcolon \text{ȕ}_i v$, $b \eqqcolon \text{ü}_i v$, $c \eqqcolon \text{ű}_i v$ gilt: $a\neq 0\Rightarrow(\text{Ȼ}_u\text{ȕ}_i v=\text{Ȼ}_u v$, $\text{ü}_j\text{ȕ}_i v=\text{ü}_j v$ für j<i, $\text{Ȼ}_u\text{ȕ}_i v=0$ für $i\leq j<\text{Ȼ}_u v)$. $\text{Ȼ}_u\text{ű}_i v\leq\text{Ȼ}_u v-(i+1)$, $\text{ü}_j\text{ű}_i v=\text{ü}_{j+(i+1)}v$ für $j<\text{Ȼ}_u\text{ű}_i v$. $\text{ȼ}_u v$ sei das kleinste $c\leq\text{Ȼ}_u v$ mit $\text{ü}_i v=u-1$ für $c\leq i<\text{Ȼ}_u v$. $\text{ȼ}_u v=0$ genau dann, wenn v+1 eine Potenz von u ist; es gilt dann: $\text{Ȼ}_u(v+1)=\text{Ȼ}_u v+1$ mit $\text{ü}_0(v+1)=1$, $\text{ü}_i(v+1)=0$ für $1\leq i<\text{Ȼ}_u v$. Ist $\text{ȼ}_u v\neq 0$, so hat man: $\text{Ȼ}_u(v+1)=\text{Ȼ}_u v$, $\text{ü}_{\text{ȼ}_u v}(v+1)=\text{ü}_{\text{ȼ}_u v}+1$, für $i<\text{ȼ}_u v$ gilt: $\text{ü}_i(v+1)=\text{ü}_i v$, und für $\text{ȼ}_u v<i<\text{Ȼ}_u v$ gilt: $\text{ü}_i(v+1)=0$.
   $\text{ȕ}_i v$ heißt der **i-te u-adische Vorspann**, $\text{ü}_i v$ die **i-te u-adische Ziffer** und $\text{ű}_i v$ der **i-te u-adische Nachspann von v**. *Nenne* $\text{Ȼ}_u v$ die **u-adische Länge** und $\text{ȼ}_u v$ die **u-adische Vorlänge von v**.
2. $v=0\Leftrightarrow\text{Ȼ}_u v=0$, $1\leq v<u\Leftrightarrow\text{Ȼ}_u v=1$. $v\neq 0\Rightarrow[(\text{ȕ}_0 v=0$ und$)$ $\text{ü}_0 v\geq 1$, $u^{\text{Ȼ}_u v-1}\leq v<u^{\text{Ȼ}_u v}]$.
3. Ist $v=u^k$ eine Potenz von u, so gilt: $\text{Ȼ}_u v=k+1$, $\text{ȼ}_u v=0$; $\text{ü}_0 v=1$, für $1\leq i\leq k$ ist $\text{ü}_i v=0$; $\text{Ȼ}_u(v-1)=\text{ȼ}_u(v-1)=k$, für i<k gilt: $\text{ü}_i(v-1)=u-1$.

Ist $n \geq 1$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ natürliche Zahlen mit $a_i \leq 9$ für $1 \leq i \leq n$, dabei $a_1 \neq 0$, so stehe der Schriftausdruck $a_1 \cdots a_n$ für die (nicht nulle) natürliche Zahl a mit **dekadischer** (9+1-adischer) Länge n und i-ter dekadischer Ziffer a_{i+1} für $i<n$. Diese ***arabische Darstellung von a*** wird standardmäßig verwendet. *Per definitionem* verstehen wir unter der ***arabischen Darstellung der Null*** das Schriftzeichen 0.

Definiere zur natürlichen Zahl a die **Positionszahl** pz(a) **von a**, und zur **Position** i **von a** [*sprich:* zu $1 \leq i \leq pz(a)$] die **i-te Komponente** $pz_i a$ **von a** oder **Komponente von a in der Position i** rekursiv so: $pz(0) \coloneqq 0$. Sei a eine nicht nulle natürliche Zahl, die Definitionen seien für $a' < a$ bereits erfolgt. Ist $a=2^{\not{C}_2 a-1}$, so sei $pz(a) \coloneqq 1$ und sei $pz_1 a \coloneqq \not{C}_2 a-1$; andernfalls sei $pz(a) \coloneqq pz(a-2^{\not{C}_2 a-1})+1$, sei für $1 \leq i \leq pz(a-2^{\not{C}_2 a-1})$ $pz_i a \coloneqq pz_i(a-2^{\not{C}_2 a-1})$, sei $pz_{pz(a-2^{\not{C}_2 a-1})+1} a \coloneqq (\not{C}_2 a-\not{C}_2(a-2^{\not{C}_2 a-1}))-1$. Induktiv erhält man: $pz(a) \leq a$, jede Komponente von a ist kleiner als a. Es existiert zu natürlichen Zahlen $n, a_1, \ldots, a_n$ genau eine natürliche Zahl a mit $pz(a)=n$ und $pz_i a=a_i$ für $1 \leq i \leq n$; *setze:* $a \eqqcolon [a_1, \ldots, a_n]$. Gilt für $1 \leq i<j \leq n$: $a_i \neq a_j$, so nennen wir a **komponenteneindeutig**.

Für natürliche Zahlen a, b sei $a \smile b$ die natürliche Zahl k mit $pz(k)=pz(a)+pz(b)$ und $pz_i k=pz_i a$ für $1 \leq i \leq pz(a)$, $pz_{pz(a)+j} k=pz_j b$ für $1 \leq j \leq pz(b)$; *nenne* $k=a \smile b$ die **Komposition von a und b**.
Für natürliche Zahlen a, b, c gilt: $(a \smile b) \smile c=a \smile (b \smile c)$, bei der Komposition natürlicher Zahlen kann man also die schließenden Klammern der die Ausführungsreihenfolge regelnden Klammernpaare solange nach rechts verschieben, bis alle schließenden Klammern am Schluss stehen, oder, was dasselbe besagt, bis es keine unmittelbar aufeinanderfolgenden öffnenden Klammern mehr gibt. Die Klammersetzung für $\smile$ hat also keinen Einfluss auf das Endergebnis und kann deshalb entfallen. *Allgemein* nehme bei Verzicht auf Klammersetzung die Bindungsstärke *nach rechts hin zu*.

Für spätere Zwecke (in Kapitel IV benötigt) definieren wir zur natürlichen Zahl i die **Adverbien der Komplexität i** rekursiv: 0=[ ] (entbehrlich, *siehe unten*), 1=[0] sind die einzigen Adverbien der Komplexität 0. Ist i eine natürliche Zahl und sind für $i' \leq n$ die Adverbien der Komplexität i' bereits definiert, so seien die Adverbien der Komplexität i+1 gerade alle natürlichen Zahlen der Gestalt [0, a, b] oder [1, a, b] oder [0, b, a] oder [1, b, a] oder [0, a] oder [1, a] mit einem Adverb a der Komplexität i und einem Adverb b einer Komplexität $\leq i$. Induktiv erhält man für jede natürliche Zahl n: Besitzt ein Adverb a eine Komplexität $k \leq n$, so ist k die einzige Komplexität von a. Also besitzt jedes Adverb a genau eine Komplexität kx(a). *Wir definieren* die **Werte** eines Adverbs a rekursiv auf die Komplexität: Einziger Wert von 0 ist 0. Die Werte von 1 sind gerade alle natürlichen Zahlen der Gestalt [i, i+1], dabei i die natürlichen Zahlen durchläuft. Die Werte eines Adverbs [0, a] sind gerade alle natürlichen Zahlen u derart, dass es eine natürliche Zahl n gibt mit „$u \smile [n]$ ist Wert von a", die Werte eines Adverbs [1, a] gerade alle natürlichen Zahlen der Gestalt $[n] \smile i \smile [n]$ mit einem Wert i von a und einer natürlichen Zahl n, die Werte eines Adverbs [0, a, b] gerade alle Werte von a mit „a ist nicht Wert von b", und die Werte eines Adverbs [1, a, b] gerade alle natürlichen Zahlen der Gestalt $i \smile j$ mit einem Wert i von a und einem Wert j von b. *Lese* „**wertgleich**" als: dieselben Werte aufweisend.
Zur Anmerkung „entbehrlich" bei der Definition der Adverbien der Komplexität 0 beachte die Wertgleichheit von 0 und [0, [0, 1]] (beide haben als einzigen Wert 0).

Ein **Verb** sei ein Adverb v mit: Es existiert kein zu v wertgleicher Vorgänger von v. Jedes Adverb ist wertgleich zu genau einem Verb. Sind v, w Verben, so sei v\w das zu [0, v, w] wertgleiche Verb, v×w das zu [1, v, w] wertgleiche Verb, vº das zu [0, v] wertgleiche Verb, ⸰v das zu [1, v] wertgleiche Verb. *Nenne* v\w das **Dedukt** und v×w das **Kreuzprodukt von v und w**, vº den **Rumpf** und ⸰v die **Einfassung von v**.

Kapitel II: *Die Karten.*

Eine **Karte** bestehe aus einer Gesamtheit natürlicher Zahlen (die **Ortschaften** der Karte), einer Ortschaft ʡ (der **Peanoanker** der Karte), einer Verquickung, welche je zwei Ortschaften f, g das unter den Ortschaften bezogene **Dedukt** f\g **von f und g** zuweist, sowie einer zweiten je zwei Ortschaften f, g das sich ebenfalls unter den Ortschaften beziehende **Kreuzprodukt** f×g **von f und g** zuweisenden Verquickung, dabei die Karte die in diesem Kapitel aufgeführten Eigenschaften K1 bis K12 hat.

Dass wir auf bereits in Kapitel I benutzte Bezeichnungen zurückgreifen, ist hierbei unproblematisch, geht doch in der Regel aus dem Kontext hervor, was gemeint ist.

Ein **Ort** sei eine Ortschaft u mit: u\u≠u, für jede Ortschaft f ist u\f=u\u oder u\f=u. Ein **Standort** der Ortschaft f sei ein Ort u mit u\f=u\u; *schreibe* dann: u∈f, und *sage:* **f enthält u**, **u ist aus f**. Eine Ortschaft i heißt **simpel**, wenn für Ortschaften f, g mit f×g=i gilt: (f=i und g≠i) oder (f≠i und g=i).

K1: Für Orte u, v ist u×v ein Ort.
K2: Es existiert ein Ort Ł derart, dass für jeden Ort u gilt: u×Ł=Ł×u=u.
K3: Für Orte u, v, w gilt: (u×v)×w=u×(v×w).
K4: Sind u, v Orte, sind i, j simple Orte und gilt: u×i=v×j, so folgt: u=v, i=j.
K5: Eine Ortschaft wird durch ihre Standorte eindeutig festgelegt.
K6: Für Ortschaften f, g enthält f\g einen Ort u genau dann, wenn u∈f und u∉g.
K7: Das Kreuzprodukt f×g von Ortschaften f, g enthält einen Ort u genau dann, wenn u=v×w mit einem Standort v von f und einem Standort w von g.
K8: Zu jeder Ortschaft f existiert eine Ortschaft, welche einen Ort u genau dann enthält, wenn es einen simplen Ort i gibt mit u×i∈f.
K9: Zu jeder Ortschaft f gibt es eine Ortschaft, welche gerade alle Orte der Gestalt i×(u×i) mit einem Standort u von f und einem simplen Ort i enthält.

In K2 ist Ł eindeutig bestimmt, gilt doch für einen Konkurrenten Ļ von Ļ: Ļ=Ļ×Ł=Ł. Ł ist wegen Ł×Ł=Ł nicht simpel. *Wegen K1, K5, K7* lässt sich K3 verallgemeinern zu **K3´:** Für Ortschaften i, j, k ist (i×j)×k=i×(j×k). Die in K8, K9 angegebenen Ortschaften sind wegen K5 durch f eindeutig festgelegt; *bezeichne* sie mit fº und ⸰f, *in Worten:* der **Rumpf** und die **Einfassung von f**. *Nenne* die Standorte von fº die **Vororte von f**. *K6 liefert:* Für Ortschaften f, g ist f\(f\g) =: f∩g (der **Durchschnitt von f und g**) die (laut K5 eindeutig bestimmte) Ortschaft ***aller*** (mit als Standorte gerade alle) Orte, welche aus f *und* aus g sind. Eine **Teilortschaft von f** sei eine ihre Standorte aus f beziehende Ortschaft f´; *schreibe* dann: f⊇f´, f´⊆f, *sage:* **f inkludiert f´**, **f umfasst f´**. Gilt f⊇f´ *und* f≠f´, so *schreibe:* f⊃f´, f´⊂f, *sage:* die Inklusion von f´ in f ist **echt**, f´ ist eine **echte** Teilortschaft von f. Gibt es keine Ortschaft g mit f⊂g, so sei f **terminal**.

Die **leere** Ortschaft Ł\Ł ≕ ∅ hat wegen K6 keine Standorte und wird deshalb von jeder Ortschaft umfasst. ∅º=⸰∅=∅. Wegen K7 gilt für jede Ortschaft f: f×∅=∅×f=∅. Wegen ∅\∅=∅=∅×∅ ist ∅ weder ein Ort noch simpel.

Sei i ein Ort. i\i=∅≠i, also gilt: i∈i; weiter gilt für jeden in i enthaltenen Ort j: j⊇i, ***denn:*** Annahme: Es existiert ein Ort j mit j∈i, j⊉i. Wegen K5, j∈i, j∈j ist jetzt i\j eine nicht leere echte Teilortschaft von i, also sind i\∅=i, i\i=∅, i\j paarweise ungleich, im Widerspruch zur Definition der Orte. Hiermit ist die Behauptung indirekt bewiesen. Mit j⊇i gilt wegen i∈i: i∈j, woraus, ebenso wie man j⊇i aus j∈i erhält, folgt: i⊇j, d. h. wegen j⊇i und K5: i=j. Also ist i bereits der einzige Standort von i, und gilt für jede Ortschaft f: i\f=∅ falls i∈f, i\f=i falls i∉f. Da wegen K5 und des eben Gezeigten eine Ortschaft mit nur einem Standort mit diesem übereinstimmt, haben wir in Summe also gezeigt: Jeder Ort hat sich selbst als einzigen Standort. Die Orte sind gerade alle einstandortigen Ortschaften. Ein Ort u ist genau dann in einer Ortschaft f enthalten (u∈f), wenn u von f umfasst wird (u⊆f). Wegen K5, K7 und weil Ł nur sich selbst enthält, lässt sich K2 verallgemeinern zu **K2´:** Für jede Ortschaft f gilt: f×Ł=Ł×f=f (*vgl.* f×∅=∅×f=∅). ∅, Ł seien die **digitalen** Ortschaften. Haben Ortschaften f, g keinen gemeinsamen Standort, gilt also: f∩g=∅, so nennen wir f, g (zueinander) **disjunkt**.

Der **Identifikator** Î ≔ ⸰Ł enthält gerade alle Orte der Gestalt i×i mit einem simplen Ort i (wegen K1 sind dies bereits alle *Ortschaften* dieser Gestalt). Die Standorte von ℕ ≔ Îº sind gerade alle simplen Orte. Eine **Kommune** oder **kommunale** Ortschaft sei eine Teilortschaft von ℕ. *Nenne* die Teilortschaften einer Kommune K (weil zu den Kommunen gehörig) auch die **Teilkommunen von K**. Die Teilortschaften von ℕ×ℕ seien die **binären**, die Teilortschaften von ℕ×ℕ×ℕ die **ternären** Ortschaften. *Nenne* für β⊆ℕ×ℕ und K⊆ℕ β1K ≔ (β∩(ℕ×ℕ))º⊆ℕ den **Vorbereich von K in β**; er enthält einen simplen Ort i genau dann, wenn es ein k∈K gibt mit i×k∈β.

Ein **Transformator** sei eine binäre Ortschaft τ mit: Zu i∈ℕ existiert genau ein j∈ℕ mit i×j∈τ; *setze:* j ≕ τi. Î ist ein Transformator, für n∈ℕ gilt: În=n.

K10: ʢ ist ein Transformator.

K1 bis K10 lassen folgende Trivialvarianten zu: *Die digitalen Ortschaften Ł, ∅ sind die einzigen Ortschaften*; hier gilt: ℕ=Î=ʢ=∅. *ℕ ist die einzige nicht digitale Ortschaft*; hier ist ℕ=⸰ℕ=Łº ein simpler Ort, und wir haben: ℕ×ℕ=Î=ʢ=⸰Ł=Ł.

K11: Es gibt ein ◊∈ℕ mit: Jede Abfolge simpler Orte i, i´, i´´, i´´´, … solcherart, dass ein Glied g genau dann letztes Glied der Abfolge ist, wenn es *nicht* genau ein g´∈ℕ gibt mit ʢg´=g, und dass für jedes nicht letzte Glied g gilt: g=ʢf, wobei f das unmittelbar auf g folgende Glied sei, bricht ab mit letztem Glied ◊.

Die Situation ist dieselbe wie in Kapitel I, wobei hier die natürlichen Zahlen durch die simplen Orte ersetzt werden, ◊ die Rolle von 0 spielt, und die Zuordnung s↦ʢs an die Stelle der Zuordnung n↦n_+ tritt. Es folgt: ◊ ist der einzige simple Ort mit in ʢ leerem Vorbereich, zu s∈ℕ\◊ existiert genau ein r∈ℕ mit ʢr=s (nämlich r=ʢ1s), jeder simple Ort kommt in der endlosen Abfolge ◊, ʢ◊, ʢʢ◊, ʢʢʢ◊, ʢʢʢʢ◊, … genau einmal vor.

Es entsprechen die natürlichen Zahlen n den simplen Orten i auf genau eine Weise eins-zu-eins derart, dass die nulle natürliche Zahl 0 dem simplen Ort ◊ entspricht, und dass mit n↔i gilt: n_+↔ʢi. Mit n↔i heißt i ≕ pro(n) die **profane Entsprechung von n**, und heißt n ≕ sak(i) die **sakrale Entsprechung von i**.
Vermöge dieser Entsprechung lassen sich die in Kapitel I eingeführten Bezeichnungen und erhaltenen Ergebnisse auf die simplen Orte übertragen; „natürliche Zahl“ wird so zu einem Synonym von „simpler Ort“, 0 zu einer Alternativbezeichnung von ◊, und für i∈ℕ werden i_+, i+1 und im Fall „i≠◊“ i_-, i−1 zu Alternativbezeichnungen von ʢi resp. von ʢ1i. Fehldeutungen räumt i. A. der Kontext aus, man kann auf eine explizite Präzisierung also meist verzichten. Wo nötig, klären die Beiwörter „**profan, sakral**“.
Die Ortschaften o entsprechen den profanen natürlichen Zahlen (simplen Orten) i auf genau eine Weise eins-zu-eins derart, dass mit o↔i, o´↔i´ gilt: o ist genau dann *sakral* kleiner o´, wenn i *profan* kleiner i´ ist. Mit o↔i sei i ≕ ƚo die **Laufzahl von o**.

Eine Abschwächung der vollständigen Induktion ist die ***kommunale Induktion:***
Eine Kommune N enthält bereits dann jede natürliche Zahl, wenn 0∈N und für n∈ℕ mit n∈N (oder, verschärft: für n∈ℕ mit „n´∈N für alle n´≤n“) gilt: n+1∈N.
Sie liefert zu ∅≠K⊆ℕ die Existenz eines [eindeutig bestimmten, gilt doch für i, j ∈ℕ: (i≤j und j≤i)⇒i=j] m∈K mit m≤k für k∈K. *Hierzu:* Gäbe es m nicht, so gälte: 0∈ℕ\K, und gälte für n∈ℕ\K mit „n´∈ℕ\K für alle n´∈ℕ mit n´≤n“: n+1∈ℕ\K; aufgrund der kommunalen Induktion gälte dann also: ℕ\K=ℕ, sprich: K=∅, im Widerspruch zur Voraussetzung auf K. m ≕ $\min_{\le}$K sei das **Minimum von K bzgl. ≤**. Gibt es ein n∈K mit k≤n für k∈K, so ist auch n eindeutig bestimmt, und heiße das **Maximum** $\max_{\le}$K **von K bzgl. ≤**. Induktiv erhält man, dass für n∈ℕ jede Kommune K mit „k≤n für k∈K“ **endlich** ist, *will sagen:* leer ist oder ein Maximum hat. n∈ℕ ist endlich mit Minimum und Maximum n, und die Kommune ń aller i∈ℕ mit i≤n ist (bildbar und) endlich mit Minimum 0, Maximum n. ℕ\ń ist **unendlich** (nicht endlich) mit Minimum n+1. Für n∈ℕ\0 ist ń\n nicht leer und endlich mit Minimum 0, Maximum n−1. Sei ǹ ≔ ń\0. Jede Teilkommune einer endlichen Kommune ist endlich.

Neben $\emptyset^{\text{º}}$=∅ gilt auch: $Ł^{\text{º}}$=∅, *denn:* Nehme an: $Ł^{\text{º}}$≠∅, sprich: Es gibt einen Ort u und ein a∈ℕ mit u×a∈Ł, also mit u×a=Ł. Nun gilt für b ≔ $\min_{\le}$(ℕ\a): b=Ł×b, aber auch: b=b×Ł=b×(u×a)=(b×u)×a. Also gilt: Ł×b=(b×u)×a, was wegen b≠a im Widerspruch zu K4 steht. Hiermit ist die Behauptung indirekt nachgewiesen.

Wir definieren rekursiv zu jeder Ortschaft f für i∈ℕ die **i-te Kreuzpotenz** $\times^{i}$f **von f** wie folgt: $\times^{0}$f ≔ Ł, $\times^{i+1}$f ≔ $\times^{i}$f×f. *Hiermit* gilt: $\times^{1}$f=f, $\times^{i}$Ł=Ł, und gilt falls i≠0: $\times^{i}$∅=∅.
Für m, n ∈ℕ erhält man induktiv auf n ohne Mühe: $\times^{m}$f×$\times^{n}$f=$\times^{m+n}$f, $\times^{n}\times^{m}$f=$\times^{m\cdot n}$f.

Die Ortschaften $\times^{n}$ℕ, n∈ℕ, sind paarweise disjunkt und haben, mit Ausnahme von Ł, mehr als einen Standort, *denn:* $\times^{1}$ℕ=ℕ hat mehr als einen Standort und ist disjunkt zu $\times^{0}$ℕ=Ł. Sei n≥1, $\times^{0}$ℕ, …, $\times^{n}$ℕ seien paarweise disjunkt, es habe $\times^{n}$ℕ mehr als einen Standort. Nun gilt für u∈$\times^{n}$ℕ, wie man unter Heranziehung von K8 und „$Ł^{\text{º}}$=∅“ leicht einsieht: Für a∈ℕ ist u×a in $\times^{n+1}$ℕ aber in keinem $\times^{n´}$ℕ, n´≤n, enthalten. Also sind für n´≤n $\times^{n+1}$ℕ, $\times^{n´}$ℕ disjunkt. K4 liefert für ungleiche u, v ∈$\times^{n}$ℕ: u×a≠v×a, mit $\times^{n}$ℕ hat somit auch $\times^{n+1}$ℕ mehr als einen Standort. Vollständige Induktion auf n liefert jetzt die beiden Behauptungen. *Nenne* $\times^{n}$ℕ für n∈ℕ einen **Raum**, *genauer:* den **n-Raum**.

Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \geq j$, $f \subseteq \times^i\mathbb{N}$ und $f' \subseteq \times^j\mathbb{N}$ heißt $f \downharpoonleft f' \coloneqq f \cap (f' \times \times^{i-j}\mathbb{N})$ die **Voreinschränkung von f auf f′**, und heißt $f \downharpoonright f' \coloneqq f \cap (\times^{i-j}\mathbb{N} \times f')$ die **Nacheinschränkung von f auf f′**.
Für ($n \in \mathbb{N}$ und) $f, g \subseteq \times^n\mathbb{N}$ enthält $f \cup g \coloneqq \times^n\mathbb{N} \setminus ((\times^n\mathbb{N} \setminus f) \cap (\times^n\mathbb{N} \setminus g))$ gerade alle $a \in \times^n\mathbb{N}$ mit $a \in f$ *oder* $a \in g$, und $(f \setminus g) \cup (g \setminus f) = (f \cup g) \setminus (f \cap g) \eqqcolon f \Delta g$ gerade alle $a \in \times^n\mathbb{N}$ mit $a \in f$ *oder aber* $a \in g$. *Nenne* $f \cup g$ die **Vereinigung** und $f \Delta g$ die **symmetrische Differenz von f und g**. Wir haben: $f \Delta \emptyset = f$, $f \Delta f = \emptyset$. $f \Delta g = g \Delta f$. Ist $h \subseteq \times^n\mathbb{N}$, so gilt: $(f \Delta g) \Delta h = f \Delta (g \Delta h)$, $h \cap (f \Delta g) = (h \cap f) \Delta (h \cap g)$, $h \times (f \circ g) = (h \times f) \circ (h \times g)$, $(f \circ g) \times h = (f \times h) \circ (g \times h)$ – dabei stehe $\circ$ für $\setminus$, $\cap$, $\cup$ oder Δ. Offenbar sind für endliche $A, B \subseteq \mathbb{N}$ auch $A \cup B$, $A \Delta B$ endlich.

Eine Ortschaft f mit $f \subseteq \times^n\mathbb{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sei **gemein** oder eine **Gemeinde**; n sei dann eine **Dimension von f**, und f heiße **n-dimensional**. Gleichbedeutend zu „digital, kommunal, binär, ternär" sind: nulldimensional, eindimensional, zweidimensional, dreidimensional. Eine nicht leere Gemeinde (*kurz:* **Tupel**) t hat nur eine Dimension $\dim(t)$. Gemeinden heißen **äquidimensional**, wenn sie eine Dimension gemeinsam haben. Äquidimensional zur Gemeinde f ist jede **Teilgemeinde von f** (*sprich:* von f umfasste und somit gemeine Ortschaft), also speziell $\emptyset$ sowie jeder Standort von f. $\dim(r) = n \leftrightarrow r = \times^n\mathbb{N}$ vermittelt eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen den natürlichen Zahlen n und den Räumen r (die ***kanonische Korrespondenz***); 0 entspricht dabei dem Nullraum Ł und 1 dem Einsraum $\mathbb{N}$, und mit $n \leftrightarrow r$, $n' \leftrightarrow r'$ gilt: $n + n' \leftrightarrow r \times r'$.

K12: Jeder Ort ist gemein.

Wegen K12 ist jeder Ort, weil nicht leer, ein Tupel. Ist jede Ortschaft gemein (was eine Verschärfung von K12 bedeutet), so nennen wir die Karte selbst **gemein**; die Räume machen dann gerade alle terminalen Ortschaften aus.
Gestützt auf K4 und K12 erhält man induktiv auf die Dimension für jeden Ort u die Existenz zu $1 \leq i \leq \dim(u)$ von $a \in \times^{i-1}\mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $r \in \times^{\dim(u)-i}\mathbb{N}$ mit $a \times s \times r = u$, dabei sind a, s, r durch u und i eindeutig bestimmt; sei $s \eqqcolon gl_i u$. Unter Beachtung von K4 erhält man induktiv auf d: Für Orte u, v mit $\dim(u) = \dim(v) \eqqcolon d$ und $gl_i u = gl_i v$ für $i \in \grave{d}$ gilt: $u = v$.
Für ($n, m \in \mathbb{N}$ und) $f \subseteq \times^n\mathbb{N}$ ist $\times^m f$ $n \cdot m$-dimensional; $u \in \times^{n \cdot m}\mathbb{N}$ ist dann und nur dann aus $\times^m f$, wenn für $1 \leq i \leq n$ und $j < m$ gilt: $gl_{j \cdot n+1} u \times \cdots \times gl_{(j+1) \cdot n} u \in f$.

Sei t ein Tupel. Nun gibt es zu $1 \leq i \leq \dim(t)$ genau dann Tupel u, v mit $\dim(u) = i$ und $u \times v = t$, wenn für $a, b \in t$ gilt: $gl_1 a \times \cdots \times gl_i a \times gl_{i+1} b \times \cdots \times gl_{\dim(t)} b \in t$; es sind dann u, v durch i eindeutig bestimmt, und u ist genau dann simpel, wenn i kleinstmöglich ist. Man erhält induktiv auf die Dimension jetzt leicht, dass sich ein Tupel t auf genau eine Weise schreiben lässt als $t_1 \times \cdots \times t_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und simplen Tupeln $t_1, \ldots, t_n$ (*lese* $t_1 \times \cdots \times t_n$ für $n=0$ als: Ł). $n \eqqcolon |t|$ heißt die **Stellenzahl** (und t sei **n-stellig**), $1 \leq i \leq n$ sei eine **Stelle** und $t_i \eqqcolon gl_i t$ das **i-te Glied von t**, auch das **Glied von t an der Stelle i**. *Nenne* t **gliedeindeutig**, wenn für $1 \leq i < j \leq |t|$ gilt: $gl_i t \neq gl_j t$. $|t| \leq \dim(t)$, dabei besteht Gleichheit sicher dann, wenn t ein Ort oder Raum ist; im zweiten Fall gilt für $1 \leq i \leq |t|$: $gl_i t = \mathbb{N}$. Ein einstelliges Tupel sei auch ein **Simpel**, ein zweistelliges Tupel ein **Paar**, ein dreistelliges Tupel ein **Tripel**. Die Simpel sind gerade alle simplen Tupel, wie auch gerade alle nicht als Kreuzprodukt $i \times j$ von analogen Tupeln i, j schreibbaren analogen Tupel – dabei wir eine Ortschaft **analog** nennen, wenn sie Ł nicht enthält. Zu den Simpeln gehören z. B.: Î, ʢ, die nicht leeren Kommunen, und für jedes Tupel t die Gemeinden 8t, $\times^{\dim(t)+2}\mathbb{N} \setminus$8t (mithin speziell der **Distinktor** $\hat{J} \coloneqq \times^2\mathbb{N} \setminus$Î simpel ist).

Für Simpel $R_1, \dots, R_n$ (n∈ℕ) sei $(R_1, \dots, R_n) \coloneqq R_1\times\cdots\times R_n$; mithin gilt: ( )=Ł, gilt für jedes Simpel S: (S)=S, für jedes Tupel t: $t=(\mathrm{gl}_1 t, \dots, \mathrm{gl}_{|t|} t)$. Sind s, t Tupel, so gilt: |s×t|=|s|+|t|, für 1≤i≤|s| ist $\mathrm{gl}_i(s\times t)=\mathrm{gl}_i s$, und für 1≤j≤|t| ist $\mathrm{gl}_{|s|+j}(s\times t)=\mathrm{gl}_j t$. Hieraus erhält man die *Kürzungsregel für ×:* Für Tupel s, t, i, j mit i×s×j=i×t×j gilt: s=t. Wegen K7 besteht die *Umkehrung von K1:* Sind f, g Ortschaften und ist f×g ein Ort, so sind auch f, g Orte.

Ein **Anfang** des Tupels t sei ein Tupel i mit i×j=t für ein geeignetes Tupel j; j heißt dann ein **Rest von t**. Wegen t=t×Ł=Ł×t sind Ł, t Anfänge *und* Reste von t. Ein Tupel s derart, dass es Tupel i, j gibt mit i×s×j=t, sei ein **Teil von t**. Die Glieder von t sind gerade alle simplen Teile von t. Jeder Anfang und jeder Rest von t ist ein Teil von t. Die Anfänge der Reste von t, wie auch die Reste der Anfänge von t, sind gerade alle Teile von t. Anstelle von „ungleich t“ sagen wir hier auch: **echt**.

Setze für **stellengleiche** (*will sagen:* mit gleicher Stellenzahl) Orte $r_1, \dots, r_n$ (n∈ℕ): $\{r_1, \dots, r_n\} \coloneqq r_1\cup\cdots\cup r_n$; speziell gilt: { }=∅, und für jeden Ort o: {o}=o. Es sind die so darstellbaren *Kommunen* gerade alle endlichen Kommunen.

Mit (0, 0) =: ∞ sei $0\cdot\infty \coloneqq \infty\cdot 0 \coloneqq 0^\infty \coloneqq 0$; $\infty^0 \coloneqq 1^\infty \coloneqq 1$. Ist i∈ℕ oder i=∞, so gelte: i≤∞; i+∞ ≔ ∞+i ≔ ∞; falls i≠0: $i\cdot\infty \coloneqq \infty\cdot i \coloneqq \infty^i \coloneqq \infty$; falls i≥2: $i^\infty \coloneqq \infty$.

Kapitel III: *Die Kartensprache.*

Eine **Abbildung** sei eine analoge Ortschaft ι derart, dass es zu a∈ιº lediglich ein b∈ℕ gibt mit a×b∈ι; *nenne* b =: ιa das **Bild von a** und a ein **Urbild von b bzgl. ι**. Enthält die Kommune K jede natürliche Zahl, welche Bild eines Vororts von ι ist, so *schreibe:* ι: ιº→K; ist ι **bildeindeutig** (*sprich:* ist ιi≠ιj für i, j ∈ιº mit i≠j), auch: ι: ιº↣K; ist jeder Standort von K das Bild eines a∈ιº, auch: ι: ιº↠K; falls ι: ιº↣K *und* ι: ιº↠K, auch: ι: ιº↔K. Ist ι und mithin ιº gemein, so heißt eine Dimension n von ιº ein **Rang von ι**, und heißt ι **n-rangig**. Es ist ∅: ∅↣K, jedes n∈ℕ ist ein Rang von ∅. Ist ι und mithin ιº nicht leer, so ist dim(ιº)−1 =: rg(ι) der einzige Rang von ι. Die nicht leeren gemeinen Abbildungen mit Rang 0 sind die natürlichen Zahlen, dabei gilt für n∈ℕ: n: Ł↔n. ι: f→K| ι: f↣K| ι: f↠K| ι: f↔K sei eine Abbildung **von f nach K| in K| auf K| inauf K**. Ist r∈f mit a=ιr, so schreibe: ι: f→K mit r↦a. Wir haben: Î: ℕ↔ℕ mit n↦n, ʕ: ℕ↔ℕ\0. ι: f→K sei **konstant**, wenn für i, j ∈f gilt: ιi=ιj. Ist ι gemein und konstant, so sind mit ι auch die analogen Reste von ι gemeine konstante Abbildungen. ∅ und jede natürliche Zahl ist konstant. Jede weitere gemeine konstante Abbildung ist komplex, und jede nicht konstante Abbildung ist simpel. Eine (gemeine) Abbildung mit einem Raum als Rumpf heißt ein **Operator**. Es sind die konstanten Operatoren gerade alle Gemeinden der Gestalt $\times^i$ℕ×j mit i, j ∈ℕ, die Transformatoren gerade alle einrangigen und die natürlichen Zahlen gerade alle nullrangigen Operatoren.
Ist f: fº→K eine n-rangige Abbildung, so heißt f↿g: g→K für g⊆fº die **Einschränkung von f auf g**, und heißt f eine **Erweiterung von f↿g auf fº**.

Ein **Text** sei ein Tupel t mit: ℕ ist kein Rest von t; ist S ein Simpel und ist ℕ×S ein Teil von t, so gilt: S=ℕ oder S∈ℕ. Speziell ist jeder **Buchstabe** (*darunter verstehe* die Operatoren im Verein mit den zu ℕ ungleichen Simpeln) ein Text. Man macht sich klar, dass sich jeder Text t auf genau eine Weise schreibt als $t=t_1\times\cdots\times t_n$ mit n∈ℕ und

Buchstaben $t_1, \dots, t_n$; es sei $n =: \Vert t \Vert$ die **Länge** und $1 \le i \le n$ eine **Textstelle von t**, und $t_i =: \mathrm{let}_i t$ sei die **i-te Letter von t** oder die **Letter von t an der Textstelle i**. Es ist $\Vert t \Vert \le |t|$, mit Gleichheit genau dann, wenn kein nicht nullrangiger konstanter Operator zu den Lettern von t gehört (was etwa bei den Orten der Fall ist). *In der Regel werden wir bei der Kreuzproduktbildung von Texten die Kreuzproduktzeichen unterschlagen*. Sind a, b, c Texte, so nenne a einen **Anfangstext** (falls zu den Buchstaben gehörig, auch: die **Initiale**), b einen **Teiltext** und c einen **Resttext** (falls zu den Buchstaben gehörig, auch: die **Ultima**) **von abc**.

Beziehe zu $\tau \in \mathbb{N}$ unter den analogen Texten die **Terme mit Tiefe τ** rekursiv so:
Die natürlichen Zahlen im Verein mit den **Variablen** oder **Unbestimmten** (*darunter verstehe* die Kommunen der Gestalt $\mathbb{N} \backslash n$, $n \in \mathbb{N}$) sind gerade alle Terme mit Tiefe 0.
Für $\tau \in \mathbb{N}$ sind die Terme mit Tiefe $\tau+1$ gerade alle Texte der Gestalt $ot_1 \cdots t_{rg(o)}$ mit einem nicht nullrangigen Operator o sowie Termen $t_1, \dots, t_{rg(o)}$, welche allesamt eine Tiefe kleiner-gleich τ haben, dabei mindestens ein Term die Tiefe τ hat.
Ein Term T ist entweder simpel oder komplex, je nachdem ob 0 Tiefe von T ist oder ob 0 nicht Tiefe von t ist. Jede Letter eines Terms ist ein Operator oder eine Variable.

Ist T ein Term mit einer Tiefe kleiner-gleich τ, so ist ein echter Anfang von T selbst *kein* Term, und ist ein Text, welcher T als echten Anfang hat, selbst *kein* Term, ***denn:*** Zeige die Behauptung via vollständiger Induktion auf τ: Der Induktionsanfang „$\tau=0$“ besteht, da 0 genau dann Tiefe von T ist, wenn T eine Variable oder eine natürliche Zahl ist, und jeder 0 nicht als Tiefe aufweisende Term komplex ist und als erstes Glied weder eine natürliche Zahl noch eine Variable hat. Sei $\tau \in \mathbb{N}$, die Behauptung gelte für jeden Term mit einer Tiefe $\le \tau$. Zum Induktionsschritt ist zu zeigen, dass sie auch gilt falls $\tau+1$ Tiefe von T ist, falls also $T = ot_1 \cdots t_{rg(o)}$ mit einem Operator $o \notin \mathbb{N}$ und Termen $t_1, \dots, t_{rg(o)}$, welche allesamt eine Tiefe $\le \tau$ haben, mindestens einer die Tiefe τ. Befände sich unter den echten Anfängen von T oder den Texten, für welche T ein echter Anfang ist, ein Term S, so wäre $S = os_1 \cdots s_{rg(o)}$ mit Termen $s_1, \dots, s_{rg(o)}$. Für das Maximum μ der Kommune aller $1 \le i \le rg(o)$ mit $s_i = t_i$ gälte: $\mu < rg(o)$, $s_{\mu+1}$ ist ein echter Anfang von $t_{\mu+1}$ oder umgekehrt. Dies schließt die Induktionsvoraussetzung aus, da $t_{\mu+1}$ eine Tiefe kleiner-gleich τ hat. Also (Induktionsschluss) besteht die Behauptung.

Induktiv auf die Tiefe sieht man jetzt leicht, dass für $\tau \in \mathbb{N}$ gilt: Die Terme mit Tiefe τ haben τ als einzige Tiefe. Also ist die Tiefe eines Terms T eindeutig bestimmt; sie werde mit ƫT bezeichnet. Die Terme der Tiefe 0 sind gerade alle simplen Terme, also die natürlichen Zahlen und die Variablen. Ist ein Term T keine Variable), so ist $T = ot_1 \cdots t_{rg(o)}$ mit einem Operator o und Termen $t_1, \dots, t_{rg(o)}$, dabei ist o und ist jedes t_i, $1 \le i \le rg(o)$, eindeutig bestimmt; $\hbar T \coloneqq rg(o)$ sei die **Höhe**, $1 \le i \le \hbar T$ eine **Faktorstelle von T**, $t_i =: \mathrm{fk}_i T$ der **Faktor von T an der Faktorstelle i**, auch: **i-ter Faktor von T**. Ist T komplex, so ist ƫT Sukzessor der größten natürlichen Zahl, welche Tiefe eines Faktors von T ist. T sei **unifaktoriell| bifaktoriell| trifaktoriell**, wenn $\hbar T = 1 | 2 | 3$.

Ein zu den Teiltexten von T gehöriger Term sei ein **Teilterm von T**. Die Faktoren der Teilterme von T im Verein mit T sind gerade alle Teilterme von T. *Nenne* für jede Variable x $\hbar x \coloneqq 0$ die **Höhe von x**. Offenbar gilt für jeden Term T: $\Vert T \Vert > \max_{\le}\{ƫT, \hbar T\}$.