Die Gravitation zwischen nichtpunktförmigen Massen

Eine Gravitationskraft ist eine Kraft zwischen genau zwei Massen. Sie wird mit Hilfe der Newtonschen Gravitationsgleichung

$$G = \gamma \cdot \frac{m_0 \cdot m_1}{a^2} \tag{1}$$

$$\text{mit } \gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \; \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$Gravitationskonstante$$

berechnet. Dabei wird für a die Distanz der Schwerpunkte der Massen verwendet. Das heißt, es wird angenommen, daß für die Berechnung der Gravitation die Massen von m_0 und m_1 (Abb. 1) in den Schwerpunkten vereint und nicht in einem Raumgebiet *V* verteilt seien. Diese Annahme gilt jedoch nur dann mit hinreichender Genauigkeit, wenn die Abmessungen der Massen klein gegen ihre Distanz a sind. Bei Verringerung der Distanz wird dies jedoch ungenau. Es müssen für die Berechnung der Gravitation die Kräfte einzelner Massenelemente dm_0 und dm_1 summiert werden, deren Gravitationskräfte wegen der verschiedenen Distanzen nicht mehr als gleich angesehen werden können. Die Massenelemente mit kleinerer Distanz werden größere Gravitationskräfte bedingen, die mit größerer Distanz kleinere. Die summierte Gravitation aller Massenelemente beider Massen ergibt dann die Gesamtgravitation beider Massen. Für die Berechnung der Gesamtgravitation wird folglich in jeder der Massen ein fiktiver Punkt *G* als Vereinigungspunkt der gesamten Masse entstehen (Abb. 1), der nicht mit dem Schwerpunkt *S* der Masse identisch ist. Der Punkt heiße *Gravitationspunkt der nichtpunktförmigen Masse*. Es entsteht eine Deviation des Gravitationspunktes vom Schwerpunkt. Die Distanz dieser Punkte *G* beider Massen, a_g, ist dann als Distanz der Massen in die Newtonsche Gravitationsgleichung (1) einzusetzen. Das Ziel der nachfolgenden Berechnung besteht in der Ermittlung der Deviation $d = a - a_g$ des Punktes *G.* Als Methode zur Berechnung der Deviation soll ein Faktor *f* ermittelt werden (Deviationsfaktor), dessen Produkt mit a die äquivalente Distanz a_g ergibt, mit der aus Gleichung (1) die Gravitationskraft berechnet werden kann:

$$a \cdot f = a_g$$

Die Deviation ergibt sich daraus zu

$$d = a - a_g = a \cdot (1 - f) \tag{2}$$

Für die Berechnung werden folgende vereinfachte Bedingungen angenommen:

- Beide Massen m_0 und m_1 seien homogen mit konstanter Massendichte δ.
- Die Abmessung der Masse m_0 sei gegen die Distanz a vernachlässigbar klein, so daß sie als Punktmasse behandelt werden kann.
- Die Masse m_1 habe die Form einer Kugel mit dem Radius *r*.

Die Kugel mit der Masse m_1 wird entlang der x-Koordinate in senkrecht zur x-Richtung stehende Kreisscheiben der Dicke *dx* geschnitten, deren Querschnittsfläche *s* durch die Kugeloberfläche begrenzt ist. Bei der Bestimmung der Gravitation zwischen m_0 und den Masseelementen dm_s auf einer Kreisscheibe entstehen wegen des Winkels zwischen der *x*-Richtung und der Richtung $m_0 - dm_s$ Kraftkomponenten in der *y*-Richtung. Diese Komponenten kompensieren sich jedoch, weil zu jeder *y*-Komponente der Gravitation $m_0 - dm_s$ eine gleichgroße Komponente in der Gegenrichtung vorhanden ist. Somit kann man die Masse der Scheibe betrachten, als sei sie im Mittelpunkt der Scheibe vereint.

Es ist anzumerken, daß dies eine Näherung ist. Exakt betrachtet müßten für diese Verfahrensweise nicht ebene Scheiben, sondern Kugelschalen verwendet werden, die mit der

Gravity between non-point masses

A gravitational force is a force between exactly two masses. It is calculated using Newton's gravitational equation

$$G = \gamma \cdot \frac{m_0 \cdot m_1}{a^2} \qquad (1)$$

$$\text{with } \gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$Gravitational\ constant$$

For a in this equation is used the distance of the centers of mass in both masses. This means that for the calculation of gravity it is assumed that the masses of m_0 and m_1 (Fig. 1) are concentrated in the centers of mass and are not distributed in a spatial area V. However, this assumption only applies with sufficient accuracy if the dimensions of the masses are small compared to their distance a. If the distance is reduced, however, this becomes inaccurate. For the calculation of gravity, the forces of particular mass elements dm_0 and dm_1 must be summed up, the gravitational forces of which cannot be regarded as the same due to the different distances. The mass elements with a smaller distance will require larger gravitational forces, those with a larger distance smaller ones. The summed gravity of all mass elements of both masses then gives the total gravity of both masses. For the calculation of the total gravity, a fictitious point G will be created in each of the masses as the concentration point of the total mass (Fig. 1), which is not identical to the center of mass S of the masses. The point should be called the *gravitational point of the non-point mass*. There is a deviation of the gravitational point from the center of mass. The distance of these points G of both masses, a_g, is then to be inserted as the distance of the masses in Newton's gravitational equation (1). The aim of the following calculation is to determine the deviation $d = a - a_g$ of the point G. As the method for calculating the deviation, a factor f is to be determined (deviation factor), whose product with a gives the equivalent distance a_g with that the gravitational force by the equation (1) can be calculated:

$$a \cdot f = a_g$$

The deviation results from this as

$$d = a - a_g = a \cdot (1 - f) \qquad (2)$$

The following simplified conditions are assumed for the calculation:

- Both masses m_0 and m_1 are homogeneous with constant mass density δ.
- The dimension of the mass m_0 is negligibly small compared to the distance a, so that it can be treated as a point mass.
- The mass m_1 has the shape of a sphere with the radius r.

The sphere with the mass m_1 is cut along the x-coordinate in circular disks of thickness dx perpendicular to the x-direction, the cross-sectional area s of which is limited by the sphere surface. When determining the gravitation between m_0 and the mass elements dm_s on a circular disc, force components in the y-direction arise due to the angle between the x- direction and the direction m_0 - dm_s. However, these components compensate each other because there is an equally large component in the opposite direction for each y-component of gravitation m_0 - dm_s. The mass of the disk can thus be viewed as if it were concentrated in the center of the disk.

It should be noted that this is an approximation. Exactly considered, for this procedure not flat disks should be used, but spherical shells, which are drawn with the distance size x in the spherical volume. This approach would result in a considerably greater computing effort than in the approximation. An alternative approach is the formation of the sum of all gravitational forces dm_s within a disc, which are calculated according to (1) with the hypotenuses of the