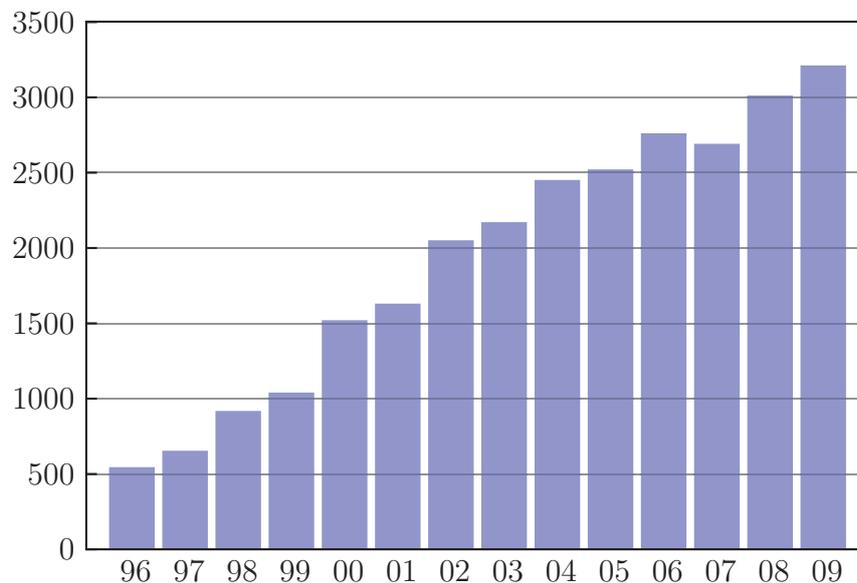


# Einleitung

Seit dem ersten experimentellen Nachweis eines Bose–Einstein–Kondensats (BEK) im Jahre 1995, der unabhängig voneinander den Gruppen um Eric A. Cornell und Carl E. Wieman in Boulder und der Gruppe um Wolfgang Ketterle am MIT gelang<sup>1</sup>, hat sich dieses Forschungsgebiet der ultrakalten Quantengase — bosonischer wie auch fermionischer Natur — sowie der Kondensate rasant entwickelt. Davon zeugen allein die seit diesen experimentellen Pionierarbeiten mehr als 25.000 [1] erschienenen wissenschaftlichen Veröffentlichungen [siehe Tabelle in Abb. 0.1]. In den ersten Jahren galt das



**Abbildung 0.1:** Jährliche Anzahl der Veröffentlichungen von 1996 bis 2009, in denen in der Kurzzusammenfassung der Begriff „Bose–Einstein condensation“ vorkommt.

Hauptinteresse der Untersuchungen den Eigenschaften der kohärenten Materiewellen und den damit einhergehenden Phänomenen. Unter anderem seien hier als Beispiele die Beobachtung von Interferenzen zweier überlappender Kondensate [4], der langreichweitigen Phasenkohärenz [8], der Nachweis quantisierter Wirbel und Wirbelgitter [2, 64, 67] sowie die Erzeugung molekularer Kondensate aus gebundenen Paaren von Fermionen [38, 51, 90] genannt. Die letzten Jahre sind maßgeblich durch zwei neue Entwicklungen geprägt: Zum einem durch die Möglichkeit, die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Atomen im kalten Gas durch Feshbachresonanzen zu variieren und zum anderen durch

<sup>1</sup>Bereits sechs Jahre später wurden diese Leistungen mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet.

Änderung der Dimensionalität der Kondensate bzw. Gaswolken mit Hilfe optischer Potentiale und im Speziellen der Erzeugung optischer Gitter durch periodische Potentiale. Beide Entwicklungen haben dazu geführt, Systeme kalter Quantengase auch im Regime starker Korrelationen zu betrachten. Die Physik stark korrelierter Systeme war zuvor experimentell beschränkt auf Systeme der Festkörper- bzw. Kernphysik. Gegenüber Festkörpersystemen haben die experimentellen Aufbauten mit kalten Quantengasen den Vorteil, dass die Wechselwirkungen leicht kontrolliert und variiert werden können und somit die verschiedenen Regime von schwacher zu starker Wechselwirkung zugänglich werden.

In dieser Arbeit wird ausgehend von einem experimentellen Aufbau, vorgeschlagen von Recati, Fedichev, Zwerger und von Delft [72], der Brückenschlag zu einem konzeptionell grundlegenden theoretischen Modell für offene Quantensysteme, dem Spin–Boson–Modell (SBM) vollzogen. Für diesen Übergang werden Ergebnisse aus verschiedenen Bereichen der Physik zusammenspielen und ineinandergreifen. Insbesondere wird auf Resultate aus dem theoretischen Modell der Luttinger Flüssigkeit zur Beschreibung niederenergetischer Anregungen eindimensionaler Systeme und des Bose–Hubbard–Modells, welches wechselwirkende Bosonen auf einem Gitter beschreibt, zurückgegriffen. In einem ersten Schritt werden die erforderlichen Transformationen durchgeführt. Hierbei wird besonderes Augenmerk darauf gelegt, in welchem Gültigkeitsbereich die Transformationen möglich sind und wo sich Limitationen ergeben.

Der in [72] skizzierte Aufbau besteht aus einem einzelnen atomaren Quantenpunkt (AQP), der in ein eindimensionales Bose–Einstein–Kondensat eingebettet ist und mit den Kondensatatomen in Wechselwirkung steht. Das Potential, welches den AQP formt, wird durch einen auf das Kondensat fokussierten Laserstrahl erzeugt. Das im Quantenpunkt (QP) befindliche Atom wechselwirkt über zwei Mechanismen mit den in der kondensierten Phase verbleibenden Atomen: Zum einen werden mit Hilfe eines Lasers Zwei–Photonen Übergänge (sog. Ramanübergänge) induziert, zum anderen erfolgen Stoßprozesse. Der beim Ramanübergang involvierte energetisch weit entfernte elektrische Zustand wird mit verstimmtten Lasern angeregt. Durch diese Verstimmung werden spontane Emissionsprozesse unterdrückt. Die Atome in der kondensierten Phase besitzen in ihrem Grundzustand zwei durch ihre Hyperfeinstruktur unterscheidbare Subniveaus  $a$  und  $b$ . Die Kondensatatome befinden sich im Zustand  $a$  und werden durch ein schwaches äußeres Fallenpotential eingefangen; das Potential des QPs hingegen ist nur sensitiv für Atome im Zustand  $b$ .

Desweiteren gilt es zu garantieren, dass der AQP nicht mehrfach besetzt wird. Dieser im Englischen *collisional blockade limit* genannte Grenzfall kann erreicht werden, indem die Abstoßungsenergie für zwei Atome im Zustand  $b$  im Potential des QPs hinreichend groß gewählt wird, sodass nur ein nicht bzw. einfach besetzter QP zur Dynamik des Gesamtsystems beiträgt und eine Mehrfachbesetzung energetisch defavorisiert wird. Es stellt sich nun als experimentell schwierig heraus, die Position des Laserfokus zeitlich ausreichend lange konstant zu halten und auch die für die Abstoßungsenergie erforderliche Steilheit der Potentialflanken zu gewährleisten, die eine mehrfache Besetzung des QPs ausschließt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Möglichkeit studiert, ein AQP–Gitter zu implementieren, welches die zuvor genannten Nachteile nicht aufweist.

---

Um dies zu erreichen, ist ein zusätzliches Laserpaar notwendig, dessen gegeneinander gerichtete Laserstrahlen ein periodisches Gitter innerhalb des Kondensats erzeugen. Dieser modifizierte Versuchsaufbau erlaubt robuste experimentelle Bedingungen und garantiert gleichzeitig die erforderliche Steilheit des Potentialverlaufs für das AQP-Gitter. Theoretisch ähnelt diese Situation dem Mott-Isolator Regime des Bose-Hubbard-Modells. Jedoch besteht ein Nachteil des AQP-Gitters darin, dass benachbarten QP eine durch Phononen induzierte Wechselwirkung widerfährt, wodurch die Energieniveaus der QP verschoben werden. Dies führt dazu, dass der Gültigkeitsbereich der Abbildung auf das SBM reduziert würde. Die Analyse der durch Phononen induzierten Wechselwirkung zeigt, dass die charakteristische Längenskala dieser Wechselwirkung von gleicher Größenordnung wie die Kohärenzlänge des Kondensats ist (engl. *healing length*). Um zu vermeiden, dass sich die Energieniveaus der AQP verschieben, ist somit eine Gitterkonstante erforderlich, die größer als die Kohärenzlänge ist. Alternativ lässt sich entweder die Wahrscheinlichkeit für einen Ramanübergang durch ein weiteres Verstimmen der verwendeten Laser verringern, wodurch die Gesamtzahl an besetzten QP im Gitter reduziert wird, oder eine lineare Rampe zum optischen Potential hinzufügen. Dadurch wird erreicht, dass ein einzelnes Minimum der periodischen Potentiallandschaft in Resonanz bleibt, während die anderen Minima sich energetisch in nichtresonante Bereiche verschieben. Neueste Entwicklungen [88] zeigen auch Fortschritte beim Versuch, gezielt einzelne Gitterplätze zu laden — eine Technik, die in der Literatur mit dem Stichwort „Einzelplatz-Adressierbarkeit“ bezeichnet wird (engl. *single-site addressability*).

In einem nächsten erweiternden Schritt wird die Möglichkeit ausgelotet, die Systemdynamik unter Hinzunahme einer externen treibenden Kraft zu studieren. Experimentell könnte dies durch ein zeitliches Variieren der Verstimmung im Ramanübergang erreicht werden. Zunächst wird geklärt, inwiefern eine solche experimentelle Erweiterung die Transformationen beeinflusst und eine Abbildung auf das getriebene SBM zulässt. Im Falle des periodisch getriebenen SBM sind in einem geeigneten Parameterbereich quantenstochastische Resonanzphänomene möglich. Unter stochastischer Resonanz (SR) versteht man die Verstärkung der Antwort eines bistabilen Systems auf ein von außen ansetzendes periodisches Signal bei einer gleichzeitig vorhandenen Rauschamplitude von optimaler Stärke. Dieser Effekt entsteht erst im Zusammenspiel von Dämpfung, Rauschen und periodischem Treiben an einem System, welches durch zwei stabile Zustände charakterisiert ist. Dieses in der klassischen Physik bereits wohlbekanntes Phänomen ist im Quantenregime experimentell noch unerforscht. Die theoretischen Betrachtungen zeigen, dass im tiefen Quantenregime qualitativ unterschiedliche und neuartige Signaturen zu erwarten sind. Die hierzu angestellten theoretischen Überlegungen knüpfen an die Arbeiten von Grifoni, Sasseti, Hänggi und Weiß [41] an und erweitern diese, um dem betrachteten experimentellen Aufbau und dessen theoretischer Beschreibung gerecht zu werden. In der vorliegenden Arbeit wird ausgehend von den experimentell möglichen Parametern des vorgeschlagenen Versuchsaufbaus ein sinnvoller Bereich bestimmt und analysiert, innerhalb dessen sich die Phänomene der quantenstochastischen Resonanz (QSR) beobachten lassen. Es zeigt sich, dass sowohl die Detektion nichtlinearer als auch linearer QSR Phänomene realistisch erscheint. Als Beispiel für nichtlineare QSR zeigt sich innerhalb des experimentell Möglichen die rauschinduzierte Unterdrückung

höherer Harmonischer. Darüberhinaus wird in dieser Arbeit das Einschwingverhalten der Systemantwort und die charakteristische Übergangszeit in den stationären Zustand berechnet. Diese ist deutlich kürzer als die Lebensdauer des Kondensats, und somit wird das experimentelle Zeitfenster nur geringfügig verkürzt. Gestützt werden die theoretischen Ergebnisse durch umfangreiche numerische Simulationen der die Systemdynamik bestimmenden Gleichungen im Parameterbereich der QSR. In den numerischen Daten lassen sich unter Berücksichtigung der experimentell kontrollierbaren Parameter eindeutig die Signaturen für sowohl lineare als auch nichtlineare QSR Phänomene auffinden. Zusammenfassend scheint der vorgeschlagene experimentelle Aufbau mit den genannten Modifikationen sowie Verbesserungen in besonderem Maße geeignet, das SBM in einem weiten Parameterbereich zu analysieren und im getriebenen Fall die Phänomene der SR im tiefen Quantenregime erstmalig experimentell zu erforschen.

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Offene Quantensysteme

Die Herangehensweise bei der Modellbildung in der Physik liegt häufig in einer Reduktion bzw. Vereinfachung und Idealisierung des betrachteten Problems. Dadurch lässt sich der wesentlich physikalische Charakter des beschriebenen Systems erschließen. Erst bei detaillierten Studien werden anfänglich gemachte vereinfachende Annahmen wieder fallen gelassen und komplexere Randbedingungen mitberücksichtigt. Oftmals besteht eine Idealisierung zum Beispiel in der Abgeschlossenheit des Systems. Abgeschlossene Systeme zeichnen sich unter anderem dadurch aus, dass bestimmte Erhaltungsgrößen existieren. So ist beispielsweise die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ohne äußere Einwirkungen zeitlich konstant.

Möchte man offene Quantensysteme beschreiben, ist es also zunächst naheliegend, das offene Quantensystem um seine Umgebung zu erweitern, sodass beide zusammen (System plus Umgebung) wieder ein konservatives Gesamtsystem bilden. Das für offene Systeme typische Phänomen der Dissipation entsteht bei dieser Beschreibung durch Energietransfer vom System auf die Umgebung. Wenn man davon ausgeht, dass die Anzahl der Freiheitsgrade der Umgebung unendlich groß ist, kehrt die vom System an die Umgebung abgegebene Energie auf einer endlichen Zeitskala nicht wieder zurück. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Poincaré'sche Wiederkehrzeit dann gegen unendlich tendiert. Ein Modell zur Beschreibung von offenen Quantensystemen, die Dissipation erfahren, ist das Caldeira–Leggett–Modell [11]. Es zeichnet sich dadurch aus, dass die Bewegungsgleichungen der interessierenden Systemfreiheitsgrade durch Ausintegrieren der Umgebungsfreiheitsgrade hergeleitet werden können. Im klassischen Grenzfall reduziert sich die Bewegungsgleichung auf die Form einer Langevin–Gleichung. Über die Influenzfunktionalmethode, die auf dem Pfadintegralzugang der Quantenmechanik beruht, lässt sich die nicht–klassische Dynamik des Systems ableiten. Die grundlegenden Eigenschaften und Aussagen dieses Modells sollen in der Folge dargelegt werden.

### 1.1.1 Klassische Langevin–Gleichung

Eine allgemeine Form der Hamiltonfunktion des Gesamtsystems kann durch

$$H = H_S + H_B + H_I \quad (1.1)$$

beschrieben werden. Hierbei stellt

$$H_S = H_S(q, p) = \frac{p^2}{2M} + V(q) \quad (1.2)$$

die Hamiltonfunktion des relevanten Systems mit generalisierter Koordinate  $q$  dar. Die Umgebung wird durch ein Bad harmonischer Oszillatoren modelliert mit

$$H_B = H_B(\{x_\alpha\}, \{p_\alpha\}) = \sum_\alpha \left( \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2 \right). \quad (1.3)$$

Die Summe erstreckt sich über alle Badoszillatoren, die jeweils durch die Masse  $m_\alpha$  und die Frequenz  $\omega_\alpha$  beschrieben werden. Die Wechselwirkung zwischen System und Bad sei linearer Art. Dann lautet die entsprechende Hamiltonfunktion

$$H_I = H_I(q, \{x_\alpha\}) = - \sum_\alpha c_\alpha q x_\alpha + \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{2m_\alpha \omega_\alpha^2} q^2. \quad (1.4)$$

Der Renormierung des Potentials wird durch den zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (1.4) entgegengewirkt, sodass das Bad ausschließlich Dissipation beschreibt. Somit hat die Hamiltonfunktion des Gesamtsystems (1.1) die Form

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(q) + \sum_\alpha \left\{ \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \left( x_\alpha - \frac{c_\alpha}{m_\alpha \omega_\alpha^2} q \right)^2 \right\}. \quad (1.5)$$

Aus den kanonischen Gleichungen können nun die klassischen Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Nach einigen Umformungen (siehe [86]) lässt sich die Bewegungsgleichung der Systemkoordinate aufstellen

$$M\ddot{q}(t) + M \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t-t') \dot{q}(t') + \frac{\partial V}{\partial q} = \xi(t). \quad (1.6)$$

Sie hat die Form einer verallgemeinerten Langevin-Gleichung mit dem Dämpfungskern

$$\gamma(t-t') = \Theta(t-t') \frac{1}{M} \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \cos[\omega_\alpha(t-t')] \quad (1.7)$$

und der stochastischen Rauschkraft

$$\xi(t) = \sum_\alpha c_\alpha \left( x_\alpha(0) \cos(\omega_\alpha t) + \frac{p_\alpha(0)}{m_\alpha \omega_\alpha} \sin(\omega_\alpha t) \right) - M\gamma(t)q(0). \quad (1.8)$$

Bei der stochastischen Rauschkraft  $\xi(t)$  handelt es sich um ein farbiges Rauschen mit verschwindendem Mittelwert. Die zugehörigen stochastischen Charakteristika sind demnach gegeben durch

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \text{und} \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = Mk_B T \gamma(t-t'). \quad (1.9)$$

Die zweite Relation, die die Zweizeiten-Korrelationsfunktion mit dem Dämpfungskern in Beziehung setzt, entspricht dem klassischen Fluktuations-Dissipations-Theorem.

Für beide Mittelwertbildungen muss jedoch eine verschobene kanonische Gleichgewichtsdichteverteilung verwendet werden [57]. Bildet man die Fouriertransformierte des Dämpfungskernes

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \gamma(t) e^{i\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -i \frac{\omega}{M} \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2 - i \epsilon \operatorname{sgn}(\omega)} \quad (1.10)$$

erkennt man, dass sich eine spektrale Dichte der Form

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}} \delta(\omega - \omega_{\alpha}) \quad (1.11)$$

eingeführt lässt. Diese kann als gerade Funktion in  $\omega$  angesehen werden. Im Grenzfall unendlich vieler Badmoden geht die Summe in Gleichung (1.11) in ein Integral über. Damit wird auch die Summe in (1.10) zu einem Integral

$$\tilde{\gamma}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -i \frac{\omega}{M} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'} \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2 - i \epsilon \operatorname{sgn}(\omega)}. \quad (1.12)$$

Um zu gewährleisten, dass sich die Pole der Ausdrücke (1.10) und (1.12) in der unteren Hälfte der komplexen Zahlenebene befinden und somit die Kausalität gesichert ist, wurde der Nenner dieser beiden Darstellungen jeweils um den Term  $i \epsilon \operatorname{sgn}(\omega)$  erweitert. Vorteil dieser Formulierung ist, dass alle das Bad beschreibenden Größen in die spektrale Dichte eingehen. Umgekehrt bedeutet dies auch, dass es völlig ausreicht, die spektrale Dichte des Bades zu kennen, was ohnehin der wahrscheinlichere Fall sein dürfte, da die Größen  $m_{\alpha}$  und  $\omega_{\alpha}$  für ein experimentell realisiertes Bad mit nahezu unendlich vielen Freiheitsgraden nur schwerlich oder gar nicht zu ermitteln sind. Der Dämpfungskern im Zeitraum und die spektrale Dichte sind über die Kosinustransformation

$$\gamma(t) = \Theta(t) \frac{1}{M} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) \quad (1.13)$$

miteinander verknüpft. Der Ausdruck

$$J(\omega) = M\omega \int_0^{\infty} dt \gamma(t) \cos(\omega t). \quad (1.14)$$

bildet die dazu entsprechende Rücktransformation.

### 1.1.1.1 Ohm'sche und frequenzabhängige Dämpfung

Unter Ohm'scher Dämpfung versteht man den Fall einer frequenzunabhängigen Dämpfungskonstanten

$$\gamma(\omega) = \gamma. \quad (1.15)$$

Dies entspricht im Zeitregime einer lokalen (gedächtnislosen) Dämpfung  $\gamma(t) = 2\gamma\delta(t)$ . Die diesbezügliche spektrale Dichte hat dann gemäß der Relation (1.14) die Gestalt

$$J(\omega) = M\gamma\omega = \eta\omega, \quad (1.16)$$