Markus Grunwald (Autor)

Beiträge zur zentralaffinen Flächentheorie im vierdimensionalen Raum

Markus Grunwald

Beiträge zur zentralaffinen Flächentheorie im vierdimensionalen Raum

Cuvillier Verlag Göttingen

https://cuvillier.de/de/shop/publications/3631

Einleitung

Die äquizentralaffine Geometrie bietet eine Möglichkeit, m-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^{m+2}$ differentialgeometrisch zu behandeln. Die so entstehenden Größen (wie z. B. die Hauptkrümmungen) sind invariant unter einer Bewegung der Fläche mittels einer Transformation aus der speziellen linearen Gruppe $SL\,(m+2,\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}^{m+2}$. Dazu konstruiert man zunächst, neben der allen zentralaffinen Theorien eigenen Flächennormalen x (als Flächenimmersion), eine zweite invariante Flächennormale n, die sogenannte Lopšic-Normale. Ein wichtiges Merkmal der äquizentralaffinen Geometrie ist es, daß die klassische äquiaffine Blaschke/Berwald-Hyperflächentheorie in ihr als Spezialfall enthalten ist.

Eine interessante Flächenklasse, die im Euklidischen zuerst von T. Levi-Cività ([Levi37]) und B. Segre ([Segre38]) näher untersucht wurde, ist die Klasse der isoparametrischen Flächen, das sind Flächen mit konstanten Hauptkrümmungen. Die zweidimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^3$ sind bezüglich der äquiaffinen Geometrie bereits in [Vrancken90] vollständig bestimmt worden. Dabei zeigt sich, daß, analog zum euklidischen Fall, bei zwei unterschiedlichen Hauptkrümmungen stets eine Hauptkrümmung verschwinden muß. Somit stellt sich die Frage, ob dies auch weiterhin in der (im obigen Sinne allgemeineren) zentralaffinen Theorie der Flächen mit Kodimension 2 gilt. Da der allgemeine Fall sehr schwierig ist, werden wir in dieser Arbeit nur den zweidimensionalen Fall näher betrachten.

Eine Unterklasse der isoparametrischen Flächen, die verdeutlicht wie umfangreich diese im allgemeinen sind, bilden die homogenen Flächen. Dies sind diejenigen Flächen, die als Bahn einer Lieschen Untergruppe der speziellen (bzw. allgemeinen) linearen Gruppe auftreten. Seit dem Beginn einer Klassifikation der äquiaffinen homogenen Flächen im $\mathbb{R}^3$ in [Guggen63] sind die homogenen Flächen seit einigen Jahren intensiv untersucht worden. Eine vollständige Klassifikation der zweidimensionalen homogenen Flächen im $\mathbb{R}^3$ findet sich in [NomSas94] (äquiaffine Geometrie) und [LiuWang94] (zentralaffine Geometrie). Die Resultate der zuletzt genannten Arbeit konnten in [Nieder99] verschärft werden (inklusive einer zusätzlichen Fläche, die zuvor nicht aufgetaucht ist). Vrancken hat in [Vrancken94] die ausgearteten äquiaffinen Flächen im $\mathbb{R}^3$ angegeben. Eine Verallgemeinerung der äquiaffinen Geometrie auf die echt affine Geometrie ohne Einschränkung der Metrik findet sich in [DouKomRa96].

Bei den weiteren Untersuchungen hat man sich zunächst auf die zweidimensionalen homogenen Flächen im $\mathbb{R}^4$ beschränkt. Hier gibt es für die äquizentralaffine Geometrie eine Vielzahl von Resultaten (vgl. z. B. [Liu96a], [Liu96b], [Liu97] sowie [Liu98] und [Liu99]), die jedoch alle die Flachheit oder das Verschwinden der Pickschen Invariante voraussetzen. Beruhend auf liealgebraischen Überlegungen hat Walter in [Walter98] schließlich alle regulären äquizentralaffinen homogenen Flächen bestimmt und klassifiziert. In der äquiaffinen Geometrie gab es zunächst nur Resultate für flache homogene Flächen ([Wang95], [Wang97]). Walter hat in [Walter00a] sowie [Walter00b] den regulären sowie den parabolischen Fall (dort ohne Regelflächen) komplett klassifiziert.

Für dreidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^4$ bezüglich der äquiaffinen Geometrie haben Dillen und Vrancken in [DillVra93a] die homogenen lokal strikt konvexen Hyperflächen klassifiziert. Weitere Beiträge hierzu (unter zusätzlichen Forderungen an die Weingarten-Abbildung oder lokaler Symmetrie) finden sich z. B. in [SchVra94] oder [MagVra95]. In [EastEz00] findet sich eine Behandlung der homogenen Hyperflächen im $\mathbb{R}^4$ deren erzeugende Gruppe mindestens vierdimensional ist. Erst vor kurzem gelang Wermann die vollständige Bestimmung aller regulären äquiaffin-homogenen Hyperflächen des $\mathbb{R}^4$ mit erzeugenden Gruppen der Dimension 3 einschließlich weitgehender Trennungseigenschaften ([Wermann98], [Wermann01]). Für die analoge zentralaffine Fragestellung sind keine Resultate bekannt.

Dimensionsunabhängige Resultate existieren für homogene Hyperflächen bei Zusatzforderungen an die Weingarten-Abbildung (vergleiche hierzu [DillVra93b] sowie [DillVra94]).

In der vorliegenden Arbeit werden im ersten Kapitel zunächst die Grundlagen der äquizentralaffinen Differentialgeometrie vorgestellt, sowie eine Verallgemeinerung auf den eigentlichen zentralaffinen Fall (d. h. einer Geometrie, deren Größen sich unter Transformationen aus der allgemeinen linearen Gruppe $GL\,(m+2,\mathbb{R})$ nicht ändern) angegeben.

In Kapitel 2 werden wir eine Klassifikation der zweidimensionalen isoparametrischen äquizentralaffinen Flächen mit zwei verschiedenen Hauptkrümmungen im $\mathbb{R}^4$ angeben. Der Hyperflächenfall im $\mathbb{R}^3$ wurde bereits in [Vrancken90] gelöst. Wir interessieren uns dabei nur für diejenigen Flächen, deren zweite Flächennormale n eine Weingartengleichung der Art $dn = dx \circ L$ erfüllen, für ein geeignetes Endomorphismenfeld L. Ist dies nicht erfüllt, so zeigt sich, daß die sich ergebende Klasse von isoparametrischen Flächen groß ist (im Hinblick auf die angenommenen Hauptkrümmungen). Der Umfang wird auch an den später betrachteten homogenen Flächen weiter deutlich. Zum Abschluß des 2. Kapitels werden wir zeigen, daß für gewisse isoparametrische Flächen die sich in Dimension 2 zeigende Eigenschaft, eine Schiebfläche zu sein, auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann.

Kapitel 3 ist der zentralen Frage dieser Arbeit gewidmet, nämlich der Bestimmung und Klassifikation der regulären Flächen des vierdimensionalen Raumes, die homogen bzgl. der allgemeinen linearen Gruppe sind. Die entsprechende Klassifikation bzgl. der speziellen linearen Gruppe wurde mit einer neuen Methode in [Walter98] gefunden. Wir folgen hier den Anregungen am Ende von [Walter98], die darauf hinzielen, die SL-Klassifikation soweit als möglich für die GL-Klassifikation nutzbar zu machen. Allerdings müssen im GL-Fall auch höherdimensionale Erzeugendengruppen einbezogen werden. Für eine derartige Klassifikation bietet es sich an, das in [Walter98] vorgeschlagene liegruppentheoretische Verfahren entsprechend einzusetzen. Hauptergebnis in dieser Hinsicht ist Satz 3.2.28.

Die klassische Methode homogene Flächen zu bestimmen, liegt in einer konsequenten Ausnutzung der Ableitungs- und Integrabilitätsgleichungen. Dieses Verfahren eignet sich im allgemeinen jedoch nur, wenn man bereits einige der differentialgeometrischen Invarianten der Fläche kennt (z. B. das Verschwinden der Pickschen Invariante oder die Flachheit der Fläche, wie dies auch in den o. g. Arbeiten verwendet wurde). An den Fall einer homogenen Fläche, die von einer mindestens dreidimensionalen Lie-Gruppe erzeugt wird, ist dies jedoch besonders angepaßt, da für diese alle skalaren Invarianten verschwinden (also speziell a priori bekannt sind). Diese homogenen Flächen werden am Ende des dritten Kapitels auch explizit bestimmt (vergleiche Satz 3.3.1).

Eine Methode, die sich besonders zur Unterscheidung zweier homogener Flächen im obigen Sinne eignet, ist die Anwendung der Berührgruppen, deren Definition letztlich auf Ideen von [Cartan51] zurückgeht. Trotzdem läßt sich durch alleinige Anwendung dieser Technik die Eindeutigkeitsfrage noch nicht vollständig klären. Übrig bleibt dann eine genauere Untersuchung der Ableitungsgleichungen, wozu wir unter anderem auch das Gröbner Paket aus dem Computeralgebrasystem MAPLE benutzen werden.

Im letzten Kapitel werden wir uns zunächst allgemein mit parabolischen Flächen beschäftigen und für diese die Berührgruppen bis zur Ordnung 3 berechnen, sowie für Flächen mit wendepunktfreien Nullinien eine mit der Fläche invariant verknüpfte Basis angeben. Bezüglich dieser Basis sind die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen homogener Flächen (zumindest für den SL-Fall) konstant, und man kann dies ausnutzen, um Informationen über die erzeugenden Lie-Algebren zu erhalten (zu diesem Vorgehen vgl. auch [Walter00a]). Dies werden wir zur Klassifikation der homogenen parabolischen Nichtregelflächen heranziehen. Die Ergebnisse hierzu finden sich in den Sätzen 4.2.2 und 4.2.5.

Anschließend klassifizieren wir die verbleibenden homogenen Regelflächen (vgl. Satz 4.3.5). Die zugrunde liegende Idee ist hierbei, zunächst eine Erzeugende der Lie-Algebra zu finden, so daß die Bahn des Initialpunktes bezüglich der so generierten Einparametergruppe eine Gerade durch den Initialpunkt parametrisiert.

Am Ende der Arbeit werden die Ergebnisse des SL-Falles in Satz 4.4.2 auf den allgemeinen GL-Fall verallgemeinert. Die parabolischen Flächen zeigen dabei eindrucksvoll, wie wichtig eine trennende Klassifikation ist.

Der Anhang enthält einen Algorithmus zur Berechnung der Berührgruppe einer zentralaffinen Fläche, sowie einen Algorithmus um die Selbstähnlichkeitsgruppe einer Lie-Algebra (die bei der Erzeugung der zu betrachtenden Lie-Algebren eine wichtige Rolle spielen wird) zu bestimmen.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Walter für die gute Betreuung und die zahlreichen anregenden Diskussionen danken.