



Kapitel 1

Einleitung

1.1 Erforderliches Wissen

Dieser Aufsatz setzt zum Verständnis gute Kenntnisse über Quantorenlogik, insbesondere der typographischen Zahlentheorie „*Theoria Numerorum Typographica*“ (TNT) voraus.

1.2 Intention

In meinem Physik-Studium befasste ich mich lange Zeit mit dem Problem $\Delta \frac{1}{r} = \text{grad div } \frac{1}{r} = 0$ und suchte die Ursache des offensichtlichen Widerspruches in Verbindung mit der physikalischen Interpretation der Quellenstärke der elektrischen Feldstärke $\varrho = \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \varepsilon_0 \text{div} \left(-\text{grad } \frac{e}{r} \right)$ als Ladungsdichtevertelung einer sogenannten Punktladung mit dem elektrostatischen Potential $\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Irgendwann entstand bei mir die Frage, ob denn Differentialableitungsoperatoren überhaupt auf Abbildungen mit Polstellen angewendet werden dürfen. Es kam bei mir also die Frage auf: Kann die Anwendung eines Differentialoperators auf eine Abbildung mit nicht differenzierbaren Stellen zu einem logischen Widerspruch führen?

Dabei stellte ich fest, dass bereits in der Mathematik immer dann Probleme mit der Differentialrechnung auftauchen können, wenn Abbildungen nicht differenzierbare Stellen haben.

Eine berühmte Übungsaufgabe war die Taylorreihenentwicklung der Abbildung $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ mit der stetigen Fortsetzung $f(0) = 0$ im Nullpunkt. Durch die stetige Fortsetzung scheint zwar die Abbildung f auch im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar zu sein, aber sie ändert Nichts an der nicht differenzierbaren Polstelle im Nullpunkt der inneren Abbildung $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Diese Probleme schienen bei Funktionen, die über die gesamte Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich an jedem Punkt beliebig oft differenzierbar waren, nicht aufzutreten. Im Zusammenhang mit meinem physikalischen Weltbild, in dem es in der Natur keine Knicke, Sprünge und keine Polstellen gibt, und meiner Arbeit an meiner derzeit noch nicht abgeschlossenen physikalischen Theorie, war es für mich wichtig, erst einmal die passenden mathematischen Grundlagen dafür zu finden.



Bei den weiteren Überlegungen stieß ich bereits in der Mathematik und in der Vektoranalysis immer wieder auf formale Detailprobleme, wie z.B. die fehlende Unterscheidung zwischen Zeilenvektoren und Spaltenvektoren, fehlende Quantorenlogik in physikalischen und mathematischen Formeln, Unklarheit über den Wirkungsbereich des Nabla-Operators und Unstimmigkeiten beim Formalismus der Kugelkoordinaten.

Als ich noch vor meiner Abiturzeit am Hannover-Kolleg das Buch „*Gödel, Escher, Bach*“ von Douglas R. Hofstadter las, war ich von der Philosophie des TNT-Systems („*Theoria Numerorum Typographica*“, der typographischen Zahlentheorie), begeistert. Vielen Dank an dieser Stelle an meinen Bruder Bernd, der sich zuerst ein Exemplar beschaffte und mich dadurch animierte, mir ebenfalls ein Exemplar zuzulegen.

Die mit dem TNT-System verbundene Aussagenlogik halte ich für philosophisch sehr wertvoll. Das TNT-System ist aber für praktische Beweise nicht anwendbar. Im Laufe meiner früheren Tätigkeit als Hobbyprogrammierer entwickelte ich die Fähigkeit, neue eigene Strukturen zu entwickeln und aufeinander aufzubauen. Dadurch entstand bei mir auch die Fähigkeit, aus den Systemen bisheriger Formalismen gedanklich herauszuspringen und einen eigenen Formalismus mit teilweise ungewöhnlichen Ideen zu entwickeln.

Dieser neue Formalismus steht ganz im Geiste des TNT-Systems, und ich hoffe, dass dieser widerspruchsfrei ist. Er ist schreibtechnisch ein wenig komplizierter als die herkömmliche Mathematik. Dieser Formalismus, den ich selbst als SP-TNT-System bezeichne, soll eine Grundlage für waserdicke Beweise in der Mathematik und der Theoretischen Physik sein und mir selbst bei meiner weiteren Arbeit an meiner physikalischen Theorie dienen.

Natürlich kann ich es nicht leisten, die gesamte Mathematik neu zu formulieren. Ich nehme mir aber die Freiheit, gewisse Definitionen aus denjenigen Bereichen der Mathematik im Detail neu zu formulieren, die mir für die Theoretische Physik wichtig erscheinen. In diesem Aufsatz setze ich also gewisse Vorgaben aus der Mathematik voraus, an denen mein SP-TNT-System anknüpft.

Dies ist der erste Teil meiner mathematisch-physikalischen Theorie, der sich mit der Konstruktion eines mathematischen und aussagenlogischen Axiomensystems befasst.

Nach Abschluss dieses ersten Teils sollen noch weitere Teile zu einer naturnahen Funktionenanalysis, zur Vektoranalysis, zum SI-Einheitensystem und zur Theoretischen Elektrodynamik folgen.

1.3 Versionsnummer dieses Aufsatzes

Die Versionsnummer dieses Aufsatzes hat die Struktur $m.n$ mit den natürlichen Zahlen m und n , wobei sich bei jeder neuen Version die Nummer m nur dann um 1 erhöht, wenn ich nach der ersten Veröffentlichung Änderungen im Axiomensystem vorgenommen habe. Eine neue Unterversion $m.(n + 1)$ bedeutet lediglich, dass es Änderungen oder Ergänzungen in der Beweisführung unter dem selben Axiomensystem gegeben hat.



1.4 Mathematik und die natürliche Sprache

Im Zuge der Entwicklung dieses Formalismusses stieß ich immer wieder auf die Frage, ob bei der Formulierung der mathematischen Axiome ganz auf Worte einer natürlichen Sprache verzichtet werden kann. Dies scheint aber nicht der Fall zu sein. Es scheint zwar möglich zu sein, axiomatische Systeme ganz ohne Worte zu entwickeln. Die Bedeutung und der Sinn ergeben sich aber erst in der Formulierung in Worten einer natürlich gesprochenen Sprache, wie die verwendeten Symbole gedeutet werden sollen. Die Widerspruchsfreiheit eines axiomatischen Systems kann auch von der Deutung der verwendeten Symbole abhängen. Ohne eine solche Erläuterung wäre ein axiomatisches System bedeutungslos und sinnlos. Warum ist das so?

Als die Menschen anfangen, sich über Worte zu verständigen, fing die Begriffsbildung und das Denken über die Welt und über sich selbst an. Später entwickelten Philosophen über das gesprochene und geschriebene Wort das logische Denken, und erst danach entwickelten Mathematiker darauf aufbauend die mathematischen Formalismen. Am Anfang war also das Wort.

Göttingen, 10. September 2026, Stefan Pudritzki





Kapitel 2

Quantorenlogik

2.1 Farbige Formeln

Die grundsätzliche Struktur des originären TNT-Systems sind Axiome und abgeleitete Sätze, sowie Phantasien, die durch jeweils eine Voraussetzung entstehen. Die unterschiedlichen Gültigkeitsbereiche der Formeln werden farblich gekennzeichnet:

Erläuterung	cmyk	rgb
Axiom, globale Voraussetzung, Definition	$\langle 1.000, 0.350, 0.000, 0.000 \rangle$	$\langle 0.000, 0.500, 1.000 \rangle$
allgemeingültiger abgeleiteter Satz	$\langle 1.000, 0.000, 1.000, 0.200 \rangle$	$\langle 0.000, 0.667, 0.000 \rangle$
Voraussetzungen und Sätze innerhalb einer Phantasie	$\langle 0.200, 0.800, 0.000, 0.000 \rangle$	$\langle 0.800, 0.000, 0.800 \rangle$
zitierte oder verworfene konventionelle Formel	$\langle 0.000, 1.000, 1.000, 0.200 \rangle$	$\langle 0.800, 0.000, 0.000 \rangle$
Erläuterung, kein abgeleiteter Satz, Metadiskussion	$\langle 0.000, 0.000, 0.000, 1.000 \rangle$	$\langle 0.000, 0.000, 0.000 \rangle$

Die Farbwerte sind so gewählt, dass in beiden Versionen dieses Aufsatzes, sowohl bei schwarzem als auch bei weißem Hintergrund, die farbigen Formeln gut lesbar sind.

In den Schwarz-Weiß-Versionen dieses Aufsatzes werden fast alle Formeln in der aktuellen Textfarbe dargestellt. Lediglich die zitierten oder verworfenen Formeln werden in Grau dargestellt.

Die Verwendung der farblichen Kennzeichnung ist nicht zwingend notwendig.



2.2 Zeichenvorrat

2.2.1 Quantifizierbare Variablen

Als Symbolvorrat für universelle quantifizierbare Variablen dienen fast alle lateinischen und griechischen Buchstaben:

$$\overline{\mathbb{V}}_{\text{Set}} = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \vartheta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \xi, \pi, \rho, \varrho, \sigma, \varsigma, \tau, \upsilon, \phi, \varphi, \chi, \psi, \omega, \Gamma, \Theta, \Lambda, \Xi, \Upsilon, \Phi, \Psi, \Omega \} \quad (2.1)$$

Wegen der Verwechslungsgefahr zum Ziffernsymbol 0 werden der kleine lateinische Buchstabe o und der große lateinische Buchstabe O nicht verwendet. Ebenso entfällt der kleine griechische Buchstabe ν , da die Ähnlichkeit zum kleinen lateinischen Buchstaben v viel zu groß ist. Wegen der großen Ähnlichkeit zum Ziffernsymbol 1 entfallen auch die Verwendung des lateinischen Großbuchstabens I und des lateinischen Kleinbuchstabens i , der aber in der Schreibschriftform ℓ verwendet werden kann. Zudem entfallen auch die kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{E}, \mathcal{I}, \mathcal{O}$ wegen Verwechslungsgefahr zu dem griechischen Buchstaben ε und den Zahlensymbolen 1 und 0. Das griechische Symbol ϖ wird ebenfalls verworfen, da es der Symbolkombination ω mit oberliegendem Querstrich, also $\bar{\omega}$, viel zu ähnlich ist:

$$\nexists \{ \varpi, \nu, I, i, \mathcal{E}, o, O \}_{\overline{\text{Set}}} \quad \text{verworfenne Symbole}$$

Die griechischen Großbuchstaben Δ, Π, Σ dienen als Operatorsymbole und sind hier nicht als Variablen aufgelistet.

Die undekorierten Buchstabensymbole ohne Zusatzsymbole haben zunächst keine Bedeutung. Sie sind keiner sonstigen Menge zugeordnet. Erst in der Voraussetzung einer Phantasie oder in definierenden Axiomen mit Zusatzsymbolen erhalten die Symbole eine Bedeutung. Die Menge $\overline{\mathbb{V}}$ in Definition (2.1) ist die Menge aller möglichen undekorierten Aussagenvariablen. Deshalb fiel die Wahl der Mengenbezeichnung auf einen Mengensymbolbuchstaben, das dem Anfangsbuchstaben des englischen Wortes „void“, das als Adjektiv etwas Üngültiges oder Unverbindliches und als Substantiv etwas Leeres oder das Nichts beschreibt, entspricht.



2.2.2 Nicht quantifizierbare Symbole

Desweiteren wird eine Menge nicht quantifizierbarer Symbole definiert, in dem die undekorierten Buchstaben einen oben liegenden waagerechten Strich bekommen. Außerdem werden alle kalligraphischen Buchstaben außer $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ sowie weitere Sonderzeichen mit in diese Liste der nicht quantifizierbaren Symbole aufgenommen:

$$\boxed{\text{V0Set-Def}} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{V}}_0 = & \{ \\ & \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{h}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}, \overline{l}, \overline{m}, \overline{n}, \overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \\ & \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K}, \overline{L}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}, \overline{T}, \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \\ & \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{\zeta}, \overline{\eta}, \overline{\theta}, \overline{\iota}, \overline{\kappa}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\xi}, \overline{\pi}, \overline{\rho}, \overline{\sigma}, \overline{\tau}, \overline{\upsilon}, \overline{\phi}, \overline{\varphi}, \overline{\chi}, \overline{\psi}, \overline{\omega}, \\ & \overline{\Gamma}, \overline{\Theta}, \overline{\Lambda}, \overline{\Xi}, \overline{\Upsilon}, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, \overline{\Omega}, \\ & \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{K}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mathcal{N}}, \overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}, \overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{Y}}, \overline{\mathcal{Z}}, \\ & \%, \emptyset, \infty \\ & \overline{\text{J}}_{\text{Set}} \end{aligned}$$

Diese Symbole sind gegen jeden Quantor immun. So haben z.B. die Quantifizierungen $\forall x$: und $\exists x$: keinen Einfluss auf das Symbol $\overline{x}$. Quantifizierungen der Form $\forall \overline{x}$: und $\exists \overline{x}$: sind nicht zulässig. Eine solche aussagenlogische Konstante ist auch vor Spezialisierungen geschützt. So hat z.B. die Spezialisierung von x keinen Einfluss auf das zusammengesetzte Symbol $\overline{x}$, da dieses eine aussagenlogische Konstante ist.

Alle kursiv geschriebenen Buchstaben des verwendeten Zeichensatzes werden vorzugsweise für Variablenbezeichnungen verwendet, während aufrecht geschriebene Buchstaben vorzugsweise für Buchstaben in Funktionsnamen und Formelnamen verwendet werden sollten. Die arithmetische und die logische Bedeutung bleiben aber in beiden Schreibweisen des verwendeten Zeichensatzes dieselbe.



Einige spezielle Operatorsymbole und Funktionsnamen und die in ihnen enthaltenen Buchstaben sind nicht quantifizierbar:

V1Set-Def

(2.3)

$\overline{\mathbb{V}}_1 =$

{

$\Delta, \Pi, \Sigma, \partial, \int, \nabla,$

$\operatorname{arcosh}, \operatorname{arsinh}, \operatorname{arcoth}, \operatorname{artanh}, \cos, \operatorname{ceil}, \cosh, \operatorname{dom}, \exp, \operatorname{floor}, \inf, \lim,$

$\ln, \max, \min, \operatorname{mod}, \operatorname{rng}, \operatorname{round}, \operatorname{sgn}, \sin, \sinh, \sup, \tan, \tanh$

$\}_{\operatorname{Set}}$

Für zukünftige Erweiterungen kann eine Zeichenkette abc zu einer logisch konstanten Zeichenkette werden, in dem sie als Element der Menge $\overline{\mathbb{V}}_1$ erklärt wird, z.B. $abc \in \overline{\mathbb{V}}_1$ als ein ergänzendes Axiom. Damit wären dann alle Buchstaben innerhalb dieser Zeichenkette gegenüber den Quantoren immun. Damit bietet sich auch die Möglichkeit, Variablen mit längeren symbolischen Namen als Index zu erzeugen, z.B. $x_{abc} \in \mathbb{X}$.

Wenn die Zeichenkette abc nicht explizit als Element der nicht quantifizierbaren Symbole $\overline{\mathbb{V}}_1$ erklärt wird und ein solcher längerer Variablenindex verwendet werden soll, dann muss der gesamte Index einen oben liegenden waagerechten Strich erhalten, z.B. $x_{\overline{abc}}$. Im SP-TNT-System soll dies die bevorzugte Methode sein, um die Liste der nicht quantifizierbaren Zeichenketten möglichst kurz zu halten.

2.2.3 Text in logischen Formeln

Alle Buchstaben und Buchstabenkombinationen in Textzeichenketten, die in Anführungszeichen gesetzt sind, sind nicht quantifizierbar. Damit ist eine Schnittstelle zu einer natürlich gesprochenen Sprache möglich, um Definitionen unter Verwendung von Text zu verwenden, falls keine andere Möglichkeit in Aussicht steht oder einem Autor noch zu kompliziert erscheint, einen Text mit ausschließlich mathematischen und logischen Symbolen zu formulieren, z.B.:

$\forall x: x$ „hat an jeder Stelle einer offenen Formel den selben Wert“



2.2.4 Mengensymbole

Die Liste der Mengensymbole wird durch einen Zeichensatz mit doppelten Strichen dargestellt:

$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K}, \overline{L}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{O}, \overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}, \overline{T}, \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$

Auch die Mengensymbole sind quantifizierbare Variablen. Bereits vordefinierte Mengensymbole aus der Mathematik und weitere selbstdefinierte Mengensymbole in dieser Theorie erhalten wie in der Menge der Logikkonstanten in Definition (2.2) einen oben liegenden Strich:

$\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{I}}, \overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{Z}}$ nicht quantifizierbare Mengensymbole mit
Mengensymbolen aus der Mathematik

$\overline{\mathbb{H}}, \overline{\mathbb{L}}, \overline{\mathbb{M}}, \overline{\mathbb{S}}, \overline{\mathbb{U}}, \overline{\mathbb{V}}$ nicht quantifizierbare eigene Mengensymbole

Die Schreibweisen für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ seien aus der Mathematik übernommen und werden in diesem Axiomensystem mit einem oben liegenden Strich gekennzeichnet, um sie gegenüber den Quantoren zu blocken.

2.2.5 Mengenelemente

Zunächst werden die Symbole $\in$ und $\notin$ definiert, wobei der Doppelpfeil $\iff$ die logische Äquivalenz und die Tilde $\sim$ die logische Verneinung bedeuten:

(2.4)

$$(0) \quad \forall a: \forall \mathbb{X}: \langle a \in \mathbb{X} \iff a \text{ „ist ein Element der Menge“ } \mathbb{X} \rangle$$

$$(1) \quad \forall a: \forall \mathbb{X}: \langle a \notin \mathbb{X} \iff \sim a \in \mathbb{X} \rangle$$



2.3 Klammern

Im SP–TNT werden die verschiedenen Klammertypen nach der folgenden Tabelle verwendet:

Klammernpaar	Bezeichnung	Verwendung
()	rundes Klammernpaar	arithmetische Terme
{ }	geschweiftes Klammernpaar	Wirkungsbereichsbegrenzung für Operatoren
$\{ \}_{\text{Set}}$	Mengenklammernpaar	ungeordnete Liste von Mengenelementen
$\langle \rangle$	spitzes Klammernpaar	Parameterlisten, geordnete Tupel
$\langle \rangle$	spitzes Klammernpaar	zusammengesetzte logische Formeln

Die doppelte Bedeutung der spitzen Klammern ist eindeutig unterscheidbar, da Parameterlisten mit mehreren Elementen Kommata zur Trennung der einzelnen Elemente enthalten. Falls ein spitzes Klammernpaar eine arithmetische Variable oder Konstante enthält, ist es ein 1–Tupel. Logische Variablen werden in dem noch folgenden Abschnitt über offene Formeln ab S. 18 eingeführt. Buchstaben, die offene Formeln darstellen, werden durch Zusatzsymbole gekennzeichnet. Ein einzelne logische Variable in spitzen Klammern ist anhand der Zusatzsymbole erkennbar. Die spitzen Klammern stellen dann eine logische Formel dar.

2.4 Tupel und Parameterlisten

Im SP–TNT–System werden Parameter einer Funktion in spitze Klammern gesetzt:

$$f\langle x \rangle \quad \text{Funktion } f \text{ mit Parameter } x$$

Ein geordnetes Tupel wird ebenfalls in spitzen Klammern geschrieben, damit keine Verwechslungsgefahr zu Zeilenvektoren mit speziellen Komponenten besteht:

$$\langle a_{(1)}, \dots, a_{(n)} \rangle \quad \text{geordnetes Tupel}$$

$$f\langle a_{(1)}, \dots, a_{(n)} \rangle \quad \begin{array}{l} \text{geordnetes Tupel als Parameterliste einer} \\ \text{Funktion } f \end{array}$$

Damit besteht ein Unterschied der Notation einer aus z.B. drei Parametern bestehenden Parameterliste $\langle a, b, c \rangle$ zur Notation eines dreikomponentigen Zeilenvektors (a, b, c) .



2.5 Formeln

2.5.1 Atome

Ein Atom ist eine Zeichenkette, die eine Gleichung oder Ungleichung oder eine andere arithmetische Relation darstellt und Variablen oder nur Konstanten enthält:

AtomsExamples-Meta

(2.5)

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(2) $a < b$

(3) $3 + 4 \leq 7$

Ein Atom ist die kleinstmögliche Form einer Formel.