

Kapitel 2

Modellierung elastischer Masse-Feder-Ketten (MPS)

2.1 Modellierung der elastischen Doppelkette

Die einfachste Erweiterung der einfachen Längsschwingerkette bezüglich der Dimension stellt die im Anschluss behandelte diskrete Struktur der „elastischen Doppelkette“ dar. Wie die einfache Schwingerkette besteht diese aus an Knoten befindlichen Massenpunkten – welche die Eigenschaft haben, kinetische Energie zu speichern – und ideal-elastischen Längselementen, die in der Lage sind potentielle Energie zu speichern. Elastische Bindungen werden dabei nur zwischen nächst-benachbarten Knoten berücksichtigt (lokale Wechselwirkung). In der Molekulardynamik ist die Rede vom ausschließlichen Vorhandensein von Zentralkräften mit bekanntem Wechselwirkungspotential. In Abgrenzung zur Molekulardynamik, bei der vorrangig vom unendlichen beziehungsweise halb-unendlichen Raum der Materie ausgegangen wird, fokussiert diese Arbeit eher räumlich begrenzte Strukturen mit beispielsweise kräftefreien Rändern .

Es wird von einer **unverzweigten**, im Diskreten **homogenen** Struktur ausgegangen, d.h. von einer aus gleichartigen Elementen aufgebauten Struktur. Vorerst findet eine Beschränkung auf **ebene Probleme** statt. Der Übergang auf räumliche Fragestellungen ist möglich, trägt jedoch nicht zum besseren Verständnis bei. Diesbezügliche Erweiterungen sind in der abstrakteren Betrachtungsweise des nachfolgenden Kapitels enthalten. Die ebene Problematik führt zu einer ausgezeichneten Richtung – der Normalen(-richtung) dieser Ebene. Bei Zugrundelegen kartesischer Achsen möge diese mit der 2-Achse übereinstimmen. Die hervorgehobene Längsrichtung wird mit der 1-Achse identifiziert, so dass senkrecht zu beiden die verbleibende 3-Achse festliegt. Der Einfachheit halber wird die sich längs erstreckende **Struktur** als in der Bezugslage **gerade und unverwunden** angenommen. Somit bleiben geometrische Beziehungen überschaubar; auch hier sind Abstraktionen denkbar.

Die elastische Doppelkette wird hier nach **Theorie 1. Ordnung** behandelt, das heißt die **Bewegungsgleichungen** werden **in der Bezugslage** aufgestellt, diese kann unbelastet oder vorgespannt sein. Außerdem werden **geometrisch-kinematische Beziehungen** in der Umgebung der Bezugslage **linearisiert** und die verwendeten **Material-Struktur-Gleichungen** sind **linear** beziehungsweise werden ebenfalls in der Bezugslage **linearisiert**. Als Voraussetzung dafür müssen die auftretenden Belastungen hinreichend klein beziehungsweise die Steifigkeiten hinreichend groß sein, so dass die Verschiebungen aus der Bezugslage klein sind im Vergleich zu den Systemabmessungen. Desweiteren wird von **zeit-invarianten** (passiven) Systemen ausgegangen, das heißt die Geschichte der Struktur wird nicht berücksichtigt. Der Gültigkeitsbereich der zuvor genannten Einschränkungen bleibt in den speziellen Anwendungen zu verifizieren.

2.1.1 Modell eines einzelnen Kettenelementes

Eine Möglichkeit die räumlich getrennten Massen und Steifigkeiten des konservativen diskreten Modells in einem sich rechteckförmig erstreckenden Element anzuordnen, zeigt Abbildung 2.1. Diese symmetrische Aufteilung der kinetischen und potentiellen Energieträger im Element kann durch vier Materialkenngrößen – drei konzentrierte Steifigkeiten (längs k_l , quer k_q , diagonal k_d) und die konzentrierte Masse m – sowie zwei Geometrie-kenngrößen, zum Beispiel die ungedehnte Elementlänge ℓ und die ungedehnte Elementhöhe h beziehungsweise die Diagonale $d := \sqrt{\ell^2 + h^2}$ eines Elements, beschrieben werden. In der Elektrotechnik können durch die sogenannte Π - oder die T -Schaltung symmetrische Element generiert werden. Zu Zwecken der Normierung werden die Steifigkeiten aller Federn des MPS-Elements auf die Längssteifigkeit k_l bezogen

$$\tilde{k}_l := \frac{k_l}{k_l} \equiv 1, \quad \tilde{k}_q := \frac{k_q}{k_l}, \quad \tilde{k}_d := \frac{k_d}{k_l} \quad (2.1)$$

und anstelle der absoluten Längenangaben des Elementes werden auf die Diagonale normierte Längen eingeführt:

$$\lambda := \cos \alpha_1 := \frac{\ell}{d}, \quad (2.2-1)$$

$$\mu := \cos \alpha_2 := \sin \alpha_1 := \frac{h}{d} \quad (2.2-2)$$

mit der Nebenbedingung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Als elementbezogene charakteristische Kreisfrequenz zeichnet sich

$$\omega_c := \sqrt{\frac{k_l}{m}} \quad (2.3)$$

aus.

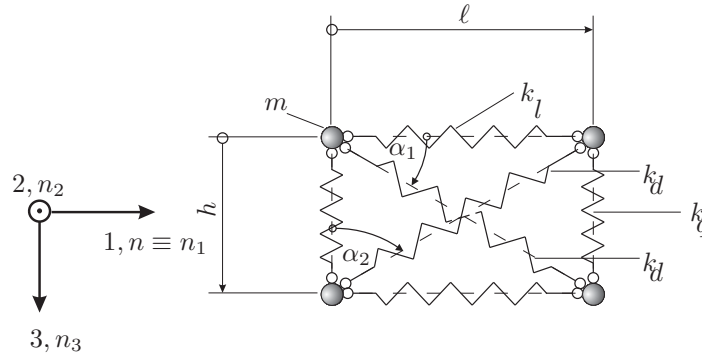


Abbildung 2.1: Rechteckförmiges Element der Doppelkette (symmetrische Anordnung)

Die kartesischen Koordinaten $\{x, z\}$ im ebenen und $\{x, y, z\}$ im räumlichen Fall stellen dem Problem angepasste Koordinaten dar. Zur Adressierung der abzählbaren Gitterpunkte oder diskreten Massenpunkte werden diskrete konvektive (=mitgeführte) Koordinaten $\{n \equiv n_1, n_3\}$ bzw. $\{n \equiv n_1, n_2, n_3\}$ verwendet, wobei steigende n -Werte in positive 1-Richtung und entsprechend wachsende n_2 - bzw. n_3 -Werte in positiver 2- bzw. 3-Richtung gezählt werden. Einem ebenen freien Element¹ werden acht kontravariant notierte Freiheitsgrade $q := \{q^i\}^T = \{q^1, q^2 \dots q^8\}^T$, hier die kartesischen Knotenverschiebungen $\mathbf{v}_E := \{u^1, w^1, u^2, w^2 \dots u^4, w^4\}^T$ wie sie Abbildung 2.2 zeigt, eingeräumt. Horizontale Verschiebungen werden mit u bezeichnet. Die Verschiebungen w in Querrichtung werden bewusst nach außen weisend positiv gezählt, um nachfolgende Symmetrieeigenschaften einheitlich formulieren zu können. Auf die Einführung von möglichen inneren Freiheiten, wie zum Beispiel durch Zusammenfügen von vier gleichschenkelig dreieckigen Elementen zu einem rechteckförmigen Element mit einem weiteren mittig angeordneten Massenpunkt, wird verzichtet. Äußere Lasten können ausschließlich in

¹frei bedeutet dabei im Inertialsystem ungebunden sowie frei von irgendwelchen Feldwirkungen

Form von Einzelkräften an den Knoten eingeleitet werden. Im kontinuierlichen Modell eventuell vorhandene Bereichslasten müssten bei der Diskretisierung auf äquivalente Ersatzknotengrößen abgebildet werden.

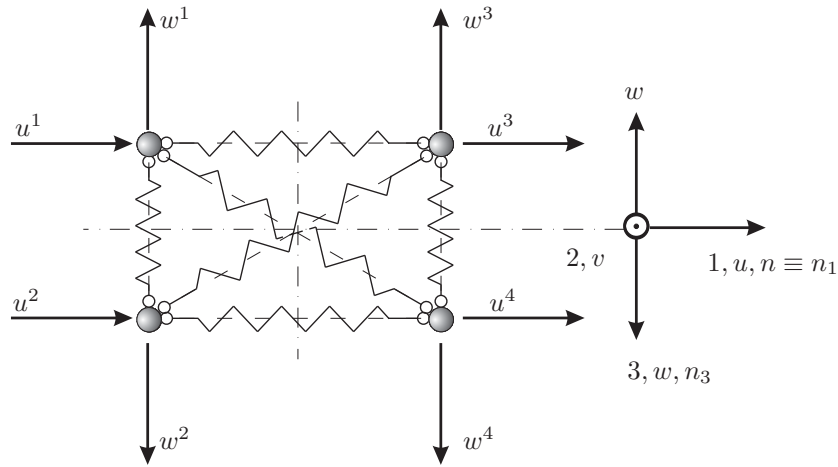


Abbildung 2.2: Acht Freiheitsgrade \mathbf{v}_E am Element

Die linear beziehungsweise linearisierten Material-Struktur-Gleichungen der elastischen Federn lauten koordinateninvariant

$$F = k \Delta \ell, \tag{2.4}$$

dabei werden Zugkräfte F in der Bezugslage am elastischen Medium sowie Längen $\Delta \ell$ positiv gezählt. Infolge der angenommenen geometrischen Linearität lassen sich die skalaren Längenänderungen $\Delta \ell$ durch Projektionen auf die Bezugslage bestimmen. Die gerichtete Verbindungsstrecke der Anschlusspunkte einer Längsfeder sei in der Bezugslage mit ℓ_0 und deren Verschiebungen seien (links) mit \mathbf{v}_l und (rechts) mit \mathbf{v}_r bezeichnet. Die Längenänderung einer Feder, wie sie Abbildung 2.3 zeigt, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \Delta \ell &:= \Delta \ell \cdot \mathbf{b}_0 & \text{mit } \mathbf{b}_0 &:= \ell_0 / |\ell_0| \\ & & \text{und } \Delta \ell &:= \ell - \ell_0 \equiv \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_l. \end{aligned} \tag{2.4-1}$$

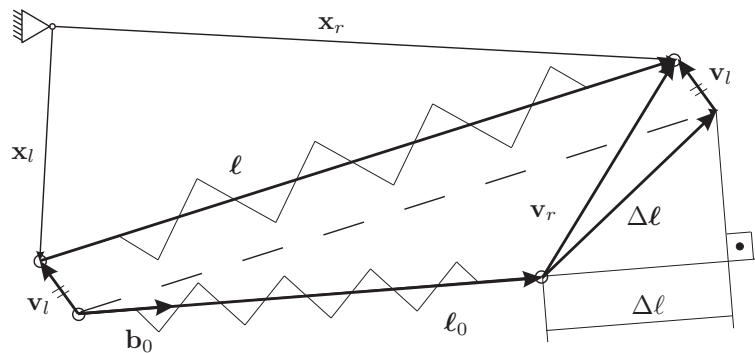


Abbildung 2.3: Zur geometrischen Linearität - Längenänderung

Die in den generalisierten Geschwindigkeiten quadratische kinetische (Ergänzungs-)Energie $T_E = T_E(q, \dot{q})$ einer Zelle, aus der durch Differenzieren die im Allgemeinen reelle, positiv definite, sym-

metrische Element-Massenmatrix $\mathbf{M}_E := (M_{E|ij}) = \mathbf{M}_E^T$ bestimmbar ist, lautet

$$T_E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} dm \mathbf{v}^2 =: \frac{1}{2} M_{E|ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (2.5-1)$$

$$= \frac{m}{2} \left[(\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 + \dots + (\dot{u}^4)^2 + (\dot{w}^1)^2 + (\dot{w}^2)^2 + \dots + (\dot{w}^4)^2 \right] \quad (2.5-2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_E = (\partial_i^t \partial_j^t T_E) = (\partial_j^t \partial_i^t T_E) = m \mathbf{I} > 0 \quad (2.5-3)$$

mit \mathbf{I} – Einheitsmatrix und Abkürzung $\partial_i^t(\bullet) := \partial(\bullet)/\partial q^i$.

Durch Differenzieren der potentiellen Element-Energie $W_E = \mathcal{W}_E(q)$ – hier in Form rein elastischer Energie

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_E(q) = \frac{k_l}{2} \left\{ (u^3 - u^1)^2 + (u^4 - u^2)^2 + \tilde{k}_q \left[(w^2 + w^1)^2 + (w^4 + w^3)^2 \right] \right. \\ \left. + \tilde{k}_d \left[(u^3 - u^2) \lambda + (w^2 + w^3) \mu \right]^2 + \tilde{k}_d \left[(u^4 - u^1) \lambda + (w^4 + w^1) \mu \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.6-1)$$

kann die reelle, symmetrische Element-Stifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{0,E} := (K_{0,E|ij}) := (\partial_i \partial_j \mathcal{W}_E) = (\partial_j \partial_i \mathcal{W}_E) = \mathbf{K}_{0,E}^T$ in quasikartesischer Darstellung erzeugt werden²

$$\mathbf{K}_{0,E} = k_l \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 \tilde{k}_d & -\lambda \mu \tilde{k}_d & 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda^2 \tilde{k}_d & -\lambda \mu \tilde{k}_d \\ -\lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d + \tilde{k}_q & 0 & \tilde{k}_q & 0 & 0 & \lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d \\ 0 & 0 & 1 + \lambda^2 \tilde{k}_d & -\lambda \mu \tilde{k}_d & -\lambda^2 \tilde{k}_d & -\lambda \mu \tilde{k}_d & -1 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_q & -\lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d + \tilde{k}_q & \lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda^2 \tilde{k}_d & \lambda \mu \tilde{k}_d & 1 + \lambda^2 \tilde{k}_d & \lambda \mu \tilde{k}_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d & \lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d + \tilde{k}_q & 0 & \tilde{k}_q \\ -\lambda^2 \tilde{k}_d & \lambda \mu \tilde{k}_d & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda^2 \tilde{k}_d & \lambda \mu \tilde{k}_d \\ -\lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d & 0 & 0 & 0 & \tilde{k}_q & \lambda \mu \tilde{k}_d & \mu^2 \tilde{k}_d + \tilde{k}_q \end{pmatrix} \quad (2.6-2)$$

$$=: \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0,AA} & \mathbf{K}_{0,AB} \\ \mathbf{K}_{0,BA} & \mathbf{K}_{0,BB} \end{pmatrix}. \quad (2.6-3)$$

Das gewählte diskrete Element stimmt im Prinzip mit dem grundlegenden Baustein überein, den A.P. HRENNIKOFF in seinen Arbeiten 1940 [21] und 1941 [22] vorgeschlagen hat. Die Idee der ‘‘HRENNIKOFF-Zelle’’ wurde sowohl für statische Untersuchungen, u.a. von S. SPIERIG 1963 [41] und S.S. TEZCAN 1967 [43], genutzt, wie auch anschließend zur Bestimmung modaler Größen in der Arbeit von B. DIRR und H. WALLER 1974 [11] eingesetzt. Die aus einzelnen Zellen nach dem Baukastenprinzip zusammengesetzte sich längs erstreckende Struktur, wie sie Abbildung 2.4 zeigt, entspricht einem Gitterrost mit – durch die ideal-gelenkigen Ankopplungen – biegeschlaffen Verbindungsknoten. Bei der diskreten Doppelkette sind alle konzentrierten Massen außen gelegen, das heißt am Rand bzw. an einer Ecke, und diese unterscheiden sich um den Faktor 2. Ebenso wie die Massen überlagern sich die Steifigkeiten der quer angeordneten Federn im Innern der Struktur. Die diskrete Adressierung der Knotenverschiebungen erfolgt in Längsrichtung in Einer-Schritten, $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, und wird in Querrichtung bei der Doppelkette in Zweier-Schritten symmetrisch angeordnet gewählt, $n_3 \in \{-1, 1\}$. Für die Betrachtung von Eigenschwingungsproblemen sowie der Ausbreitung von harmonisch erregten Wellen werden die Bewegungsgleichungen der elastischen Doppelkette an einem beliebigen Schnitt $n = konst.$ untersucht

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{v}}_n + \mathbf{K}_{0|n-1} \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{K}_{0|n} \mathbf{v}_n + \mathbf{K}_{0|n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{f}_n \quad (2.7)$$

mit der $[4 \times 4]$ –Massen-Matrix

$$\mathbf{M}_n := 2m \mathbf{I}, \quad (2.7-1)$$

²mit der Abkürzung $\partial_i(\bullet) := \partial(\bullet)/\partial q^i$

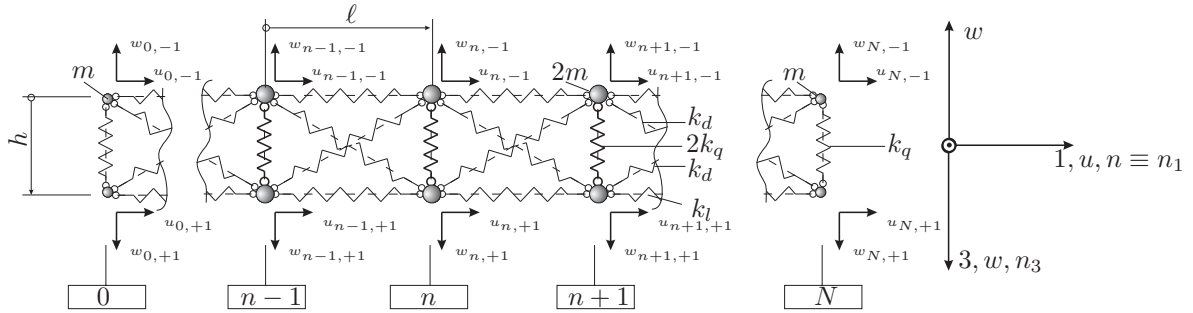


Abbildung 2.4: Modell der elastische Doppelkette

den statischen $[4 \times 4]$ -Steifigkeits-Matrizen nach Gleichung (2.6-3)

$$\mathbf{K}_{0|n-1} := \mathbf{K}_{0,BA}, \quad (2.7-2)$$

$$\mathbf{K}_{0|n+1} := \mathbf{K}_{0,AB} \quad \text{und} \quad (2.7-3)$$

$$\mathbf{K}_{0|n} := \mathbf{K}_{0,AA} + \mathbf{K}_{0,BB}, \quad (2.7-4)$$

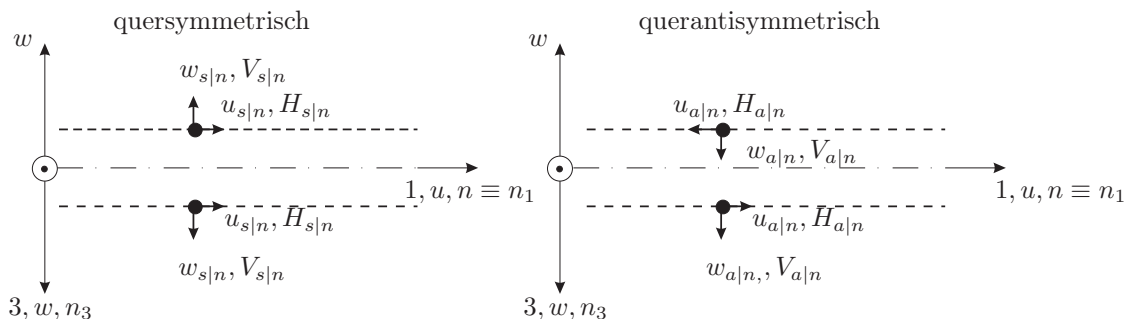
sowie den 4-Tupeln

$$\mathbf{v}_{n+m} := \{u_{n+m,-1}, w_{n+m,-1}, u_{n+m,+1}, w_{n+m,+1}\}^T \quad (\text{Verschiebungsspalte}), \quad (2.7-5)$$

wobei $u_{n,n_3} := u(n, n_3)$, $w_{n,n_3} := w(n, n_3)$ und

$$\mathbf{f}_n := \{H_{n,-1}, V_{n,-1}, H_{n,+1}, V_{n,+1}\}^T \quad (\text{Lastspalte}). \quad (2.7-6)$$

Der positive Zählsinn der Horizontalkräfte H und Vertikalkräfte V sei gleichsinnig orientiert, wie die zugehörigen Verschiebungen. Infolge der Homogenität der Struktur und somit Quersymmetrie³ zerfällt das Problem in disjunkte Teile und es ist möglich, die Symmetrien zur Reduktion von Gleichungen zu nutzen. Die Verschiebungen \mathbf{v}_n (bzw. Lasten \mathbf{f}_n) werden dazu in ihre quersymmetrischen $\mathbf{v}_{s|n}$ (bzw. $\mathbf{f}_{s|n}$) und -antisymmetrischen Anteile $\mathbf{v}_{a|n}$ (bzw. $\mathbf{f}_{a|n}$) zerlegt, vgl. Abbildung 2.5

Abbildung 2.5: Quersymmetrische und -antisymmetrische Verschiebungszustände am Schnitt n

³Symmetrie bzgl. der 1-Achse

$$\mathbf{v}_{s|n} := \{u_{s|n}, w_{s|n}, u_{s|n}, w_{s|n}\}^T, \quad \forall n \quad (2.8-1)$$

$$\mathbf{v}_{a|n} := \{-u_{a|n}, -w_{a|n}, u_{a|n}, w_{a|n}\}^T, \quad \forall n \quad (2.8-2)$$

$$\text{wobei} \quad u_{s|n} := \frac{1}{2}(u_{n,+1} + u_{n,-1}), \quad (2.8-3)$$

$$u_{a|n} := \frac{1}{2}(u_{n,+1} - u_{n,-1}), \quad (2.8-4)$$

$$w_{s|n} := \frac{1}{2}(w_{n,+1} + w_{n,-1}), \quad (2.8-5)$$

$$w_{a|n} := \frac{1}{2}(w_{n,+1} - w_{n,-1}), \quad (2.8-6)$$

$$\implies \mathbf{v}_{n+m} = \mathbf{v}_{s|n+m} + \mathbf{v}_{a|n+m}, \quad (2.8-7)$$

entsprechend gilt:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{s|n} + \mathbf{f}_{a|n}. \quad (2.8-8)$$

Die Berücksichtigung der Symmetrien, Gleichungen (2.8), in der Bewegungsgleichung (2.7) liefert bei Quer-Symmetrie:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{u}_{s|n} &= k_l \left[\left(1 + \tilde{k}_d \lambda^2\right) (u_{s|n-1} + u_{s|n+1} - 2u_{s|n}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k}_d \lambda \mu (w_{s|n+1} - w_{s|n-1}) \right] + H_{s|n} \end{aligned} \quad (2.9-1)$$

$$\begin{aligned} 2m\ddot{w}_{s|n} &= k_l \left[-\tilde{k}_q (4w_{s|n}) - \tilde{k}_d \mu^2 (w_{s|n-1} + w_{s|n+1} + 2w_{s|n}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k}_d \lambda \mu (u_{s|n-1} - u_{s|n+1}) \right] + V_{s|n} \end{aligned} \quad (2.9-2)$$

und bei Quer-Antisymmetrie:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{u}_{a|n} &= k_l \left[(u_{a|n-1} + u_{a|n+1} - 2u_{a|n}) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{k}_d \lambda^2 (u_{a|n-1} + u_{a|n+1} + 2u_{a|n}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k}_d \lambda \mu (w_{a|n-1} - w_{a|n+1}) \right] + H_{a|n} \end{aligned} \quad (2.9-3)$$

$$\begin{aligned} 2m\ddot{w}_{a|n} &= k_l \left[\tilde{k}_d \mu^2 (w_{a|n-1} + w_{a|n+1} - 2w_{a|n}) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{k}_d \lambda \mu (u_{a|n-1} - u_{a|n+1}) \right] + V_{a|n}. \end{aligned} \quad (2.9-4)$$

2.1.2 Anpassung der Elementparameter des diskreten Modells

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, bei der Diskretisierung eines Kontinuums die Anpassung des diskontinuierlichen Modells vorzunehmen. Mit gegen Unendlich wachsender Elementzahl, soll das diskrete gegen das kontinuierliche Modell konvergieren. Zwei grundlegende Ansätze zur Anpassung werden am Objekt elastische Doppelkette vorgestellt.

2.1.2.1 Anpassung durch Übergang zum 1D-Kontinuum (Balken mit Querdehnung)

Als Grenzfall der einfachen Schwingerkette ergibt sich ein längsbeanspruchter linear-elastischer Dehnstab, der Übergang der geraden ebenen elastischen Doppelkette führt auf ein querdehnbares längsgerichtetes linear-elastisches Kontinuum. Das diskrete System bestehe aus $N+1$ Knoten-(Quer-)Schnitten

n in Längsrichtung und N jeweils rechts an den Knoten, d.h. in positiver 1-Richtung anschließenden Elementen mit gleichem Index n . Den Knoten bzw. Elementen sind physikalische Größen r_n zugeordnet, z.B. Knotenvariablen $u_{s|n}$, $w_{s|n}$, $u_{a|n}$, $w_{a|n}$, $H_{s|n}$, $H_{a|n}$, $V_{s|n}$, $V_{a|n}$, bzw. Elementparameter m_n , $k_{l|n}$, $k_{q|n}$, $k_{d|n}$, ℓ_n , h_n . Beim Grenzübergang zum Kontinuum wird eine Folge von Ketten gleicher Elementlänge $\ell_n \equiv \ell$, $\forall n$ betrachtet, bei der zugleich die Elementzahl N gegen Unendlich und alle Elementlängen gegen Null gehen. An die Stelle des Index n als Adresse für den Querschnitt tritt die reelle Koordinate x in einer Bezugslage. Mit der Annahme, dass alle Elemente die gleiche ungedehnte Elementlänge ℓ haben, gilt für die Knotenkoordinaten der rekursive Zusammenhang

$$x_{n+1} = x_n + \ell. \quad (2.10-1)$$

Dem Satz der r_n wird (durch geeignete Interpolationen) eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $r(x)$ mit den Stützwerten

$$r(x_n) = r_n \quad (2.10-2)$$

und den Ableitungen

$$\left. \frac{d^k r(x)}{dx^k} \right|_{x=x_n} =: r_n^{(k)} \quad (2.10-3)$$

zugeordnet. Die Funktion $r(x)$ lässt sich in der Umgebung von x_n nach TAYLOR in eine Potenzreihe entwickeln:

$$r(x_n + h) = r_n + h r'_n + \frac{h^2}{2} r''_n + \dots \quad (2.10-4)$$

Hieraus ergibt sich r_n mit $h = 0$, r_{n-1} mit $h = -\ell$, r_{n+1} mit $h = \ell$ und r_{n+i} mit $h = i\ell$.

Die so gefundenen Beziehungen werden in die Element- und Knotengleichungen eingesetzt, dann wird durch die niedrigste auftretende Potenz von ℓ geteilt und schließlich wird der Grenzübergang $\ell \rightarrow 0$ durchgeführt. Dabei wird die Annahme verwendet, dass für die (nicht identisch verschwindenden) Summanden niedrigster Ordnung die Grenzwerte existieren.

Der zuvor geschilderte Grenzübergang kann einzeln an den Grundgleichungen – Knotenbewegungsgleichungen, Materialstrukturgleichungen, geometrisch-kinematischen Beziehungen – vorgenommen werden und im Anschluss zur resultierenden Bewegungsgleichung des Kontinuums zusammengesetzt werden. Es ist ebenfalls möglich die diskreten resultierenden Bewegungsgleichungen (2.9) direkt in “kontinuierliche” Gleichungen zu überführen. Die Reihenentwicklungen von in der Form signifikanten Summen von Knotenverschiebungen der Gleichungen (2.9) ergeben dabei:

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n &= u_n - \ell u'_n + \frac{1}{2}\ell^2 u''_n - + \dots \\ &\quad + u_n + \ell u'_n + \frac{1}{2}\ell^2 u''_n + \dots \\ &\quad - 2u_n \\ &= \ell^2 u''_n + \mathcal{O}(\ell^4) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (2.11-1)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_{n-1} &= u_n + \ell u'_n + \frac{1}{2}\ell^2 u''_n + \dots \\ &\quad - \left(u_n - \ell u'_n + \frac{1}{2}\ell^2 u''_n - + \dots \right) \\ &= 2\ell u'_n + \mathcal{O}(\ell^3). \end{aligned} \quad (2.11-2)$$

Die Berücksichtigung dieser Beziehungen ergibt im quersymmetrischen Fall aus den Gleichungen (2.9-1)