

## 2 Klassische Ramsey-Zahlen

Die klassischen Ramsey-Zahlen  $r(K_n)$  sind ein Spezialfall der im Folgenden definierten Zahlen  $R(x_1, \dots, x_s; z)$ . Es gilt nämlich  $r(K_n) = R(n, n; 2)$ .

**Definition:** Die Zahl  $R(x_1, \dots, x_s; z)$  ist die kleinste Zahl  $r$ , so dass für jede Einteilung aller  $z$ -Tupel einer  $r$ -elementigen Menge in  $s$  Klassen gilt: Für ein  $i$  gibt es  $x_i$  der  $r$  Elemente, deren  $z$ -Tupel alle in der Klasse  $i$  liegen.

Der folgende Satz wurde von Frank Plumpton Ramsey (22.2.1903–19.1.1930) gezeigt [26]. Für  $z = 1$  enthält er das Schubfachprinzip, und es gilt  $R(x_1, \dots, x_s; 1) = x_1 + \dots + x_s - s + 1$ .

**Satz 2.1** Die Zahlen  $R(x_1, \dots, x_s; z)$  existieren für alle  $s, x_1, \dots, x_s$  und  $z$ .

Diese Zahlen wurden beim folgenden geometrischen Problem von Paul Erdős (26.3.1913–20.9.1996) und George Szekeres (29.5.1911–28.8.2005) [14] unabhängig von Ramsey entdeckt. Das Problem, die im Folgenden definierten Werte von  $f(k)$  zu bestimmen, ist auch als Esther-Klein-Problem oder Happy-End-Problem bekannt (Esther Klein (20.2.1910–28.8.2005) und George Szekeres haben 1937 geheiratet).

**Definition:** Die Zahl  $f(k)$  ist die kleinste Zahl  $n$ , so dass in jeder Anordnung von  $n$  Punkten in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, ein konvexes  $k$ -Eck vorkommt.

Die Zahlen  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$  und  $f(3) = 3$  sind trivial.

**Satz 2.2**  $f(4) = 5$ .

**Beweis:** Da es unter vier Punkten, deren konvexe Hülle ein Dreieck ist, keine vier Punkte gibt, die ein konvexes Viereck aufspannen, gilt  $f(4) \geq 5$ .

Ist die konvexe Hülle von fünf Punkten ein Vier- oder Fünfeck, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist die konvexe Hülle ein Dreieck, in dem die beiden anderen Punkte liegen. Da die Verbindungsgerade der beiden inneren Punkte durch keinen weiteren Punkt verläuft, liegen zwei der äußeren Punkte auf der gleichen Seite dieser Geraden. Diese beiden äußeren Punkte spannen zusammen mit den beiden inneren Punkten ein konvexes Viereck auf. Also gilt  $f(4) \leq 5$  und damit der Satz.  $\square$

**Satz 2.3** Die Zahl  $f(k)$  existiert für alle  $k$ .

**Beweis:** Teilt man die Viertupel einer  $n$ -elementigen Punktmenge,  $n = R(k, 5; 4)$ , in konvexe und nichtkonvexe auf, so gibt es  $k$  Punkte, deren Viertupel alle konvex sind oder fünf Punkte, deren Viertupel alle nicht konvex sind. Der zweite Fall ist ein Widerspruch zu  $f(4) = 5$ , und im ersten Fall bilden die  $k$  Punkte ein konvexes  $k$ -Eck. Gäbe es nämlich einen Punkt, der im Inneren der konvexen Hülle liegt, so läge er auch im Inneren eines Dreiecks, das durch drei der  $k$  Punkte aufgespannt wird. Diese vier Punkte würden dann aber kein konvexes Viereck bilden.  $\square$

Die Existenz der klassischen Ramsey-Zahlen  $r(G, H)$  für alle Graphen  $G$  und  $H$  lässt sich jedoch auch einfach ohne den Satz von Ramsey zeigen. Wegen der Monotonie reicht es, die Existenz von  $r(K_m, K_n)$  für alle  $m$  und  $n$  zu zeigen. Für  $G \subseteq K_m$  und  $H \subseteq K_n$  gilt nämlich  $r(G, H) \leq r(K_m, K_n)$ .

**Satz 2.4**  $r(K_m, K_n) \leq r(K_{m-1}, K_n) + r(K_m, K_{n-1})$ .

**Beweis:** Man betrachte eine Zweifärbung der Kanten des vollständigen Graphen  $K_k$  mit  $k = r(K_{m-1}, K_n) + r(K_m, K_{n-1})$  in den Farben grün und rot. Unter den  $k - 1$  Kanten, die von einem festen Knoten  $v$  ausgehen, gibt es nach dem Schubfachprinzip  $a = r(K_{m-1}, K_n)$  grüne oder  $b = r(K_m, K_{n-1})$  rote Kanten. Im ersten Fall enthält der  $K_a$ , der von den Endknoten der grünen Kanten ohne  $v$  induziert wird, einen roten  $K_n$  oder einen grünen  $K_{m-1}$ , der mit den zu  $v$  inzidenten Kanten einen grünen  $K_m$  ergibt. Im zweiten Fall verläuft der Beweis analog.  $\square$

**Korollar 2.1**  $r(K_m, K_n) \leq \binom{m+n-2}{n-1}$ .

**Beweis:** Die Ramsey-Zahlen  $r(K_1, K_n) = r(K_m, K_1) = 1 = \binom{1+n-2}{n-1} = \binom{m+1-2}{1-1}$  sind trivial. Wegen  $\binom{m+n-2}{n-1} = \binom{m-1+n-2}{n-1} + \binom{m+n-1-2}{n-1-1}$  und Satz 2.4 gilt das Korollar auch für  $m, n \geq 2$ .  $\square$

Der folgende Satz enthält eine untere Schranke für die Ramsey-Zahlen.

**Satz 2.5** [13] *Es gilt  $r(K_n, K_n) > 2^{n/2}$  für alle  $n \geq 3$ .*

Die Ramsey-Zahlen  $r(K_1, K_n) = 1$  und  $r(K_2, K_n) = n$  sind trivial. Für die Ramsey-Zahlen  $r(K_m, K_n)$ ,  $3 \leq m \leq n$ , sind jedoch nur die Werte in Tabelle 1 exakt bekannt.

	$n = 3$	4	5	6	7	8	9
$m = 3$	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25				

Tabelle 1: Bekannte Ramsey-Zahlen  $r(K_m, K_n)$ ,  $3 \leq m \leq n$ .

Einen Überblick über die klassischen Ramsey-Zahlen für kleine Graphen und eine ausführliche Literaturliste enthält [25].

Verwandte Probleme ergeben sich aus den folgenden Definitionen der Schur-Zahlen  $S(k)$  (Issai Schur, 10.1.1875–10.1.1941) und der Van-der-Waerden-Zahlen  $W(k, s)$  (Bartel Leendert van der Waerden, 2.2.1903–12.1.1996).

**Definition:** Die Schur-Zahl  $S(k)$  ist die kleinste Zahl  $n$ , bei der es in jeder Färbung der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  mit  $k$  Farben eine Lösung der Gleichung  $x + y = z$  gibt, in der  $x, y$  und  $z$  die gleiche Farbe haben.

**Definition:** Die Zahl  $W(k, s)$  ist die kleinste Zahl  $n$ , bei der es in jeder Färbung der Zahlen  $1, \dots, n$  mit  $k$  Farben eine einfarbige arithmetische Progression mit  $s$  Gliedern  $(a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d)$  gibt.

**Satz 2.6** [27, 29] *Die Zahlen  $S(k)$  und  $W(k, s)$  existieren für alle  $k$  und  $s$ .*

Schur-Zahlen wurden auch für andere Gleichungen und Gleichungssysteme (Rado-Zahlen (Richard Rado, 28.4.1906–23.12.1989)) betrachtet [22, 24]. Eine Kombination von Ramsey- und Schur-Zahlen wird in [3, 18] behandelt.

Einen Überblick über die Entwicklung der Ramsey-Theorie und weitere Varianten bietet [16].

### 3 Schachbrett-Graphen

Die Knotenmenge des Schachbrett-Graphen  $B_n^\square$  besteht aus den  $(n + 1)^2$  Ecken der Felder des  $n \times n$ -Schachbrettes. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie zwei benachbarten Ecken eines Feldes entsprechen. Die Schachbrett-Ramsey-Zahl  $r^\square(G, H)$  ist dann die kleinste Zahl  $n$ , bei der in jeder Zweifärbung der Kanten des Gastgebergraphen  $B_n^\square$  mit den Farben grün und rot ein grüner Teilgraph  $G$  oder ein roter Teilgraph  $H$  enthalten ist.

Für Fragen nach der Existenz von  $r^\square(G, H)$  reicht es, zusammenhängende Graphen  $G$  und  $H$  zu betrachten, die jeweils mindestens zwei Kanten enthalten.

**Satz 3.1** *Existiert  $r^\square(G, H)$ , dann ist einer der Graphen  $G$  und  $H$  der Graph  $P_3$  und der andere ein Teilbaum des Graphen  $L$  (Abbildung 1) oder einer der Graphen der  $P_4$  und der andere ein Teilbaum von  $Z$  (Abbildung 2).*

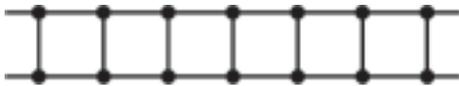


Abbildung 1: Der Graph  $L$ .



Abbildung 2: Der Graph  $Z$ .

**Beweis:** Die Ramsey-Zahl  $r^\square(C_k, P_3)$  existiert nicht für ungerade Werte von  $k$ , da die Schachbrett-Graphen keine ungeraden Kreise enthalten. Ist  $k = 2a + 2$ , so können Färbungen wie in Abbildung 3 (dicke Kanten sind grün, dünne sind rot) benutzt werden, um die Nichtexistenz zu zeigen. In den Spalten, die aus den waage-

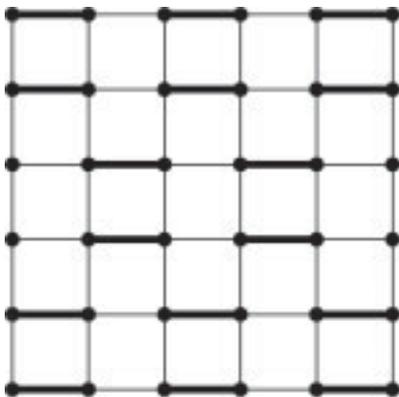


Abbildung 3:  $r^\square(C_{2a+2}, P_3) = \infty$ .

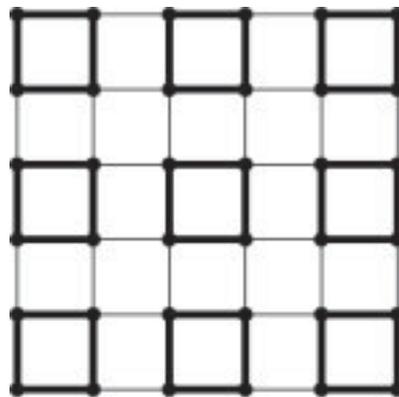


Abbildung 4:  $r^\square(G, H) = \infty$  für  $G, H \not\subseteq C_4$ .

rechten Kanten gebildet werden, haben jeweils  $a$  aufeinanderfolgende Kanten die gleiche Farbe. Jeder rote Kreis, der grüne Kanten umschließt, enthält mindestens  $2a + 4$  Kanten, und alle anderen roten Kreise haben höchstens  $2a$  Kanten. Es existieren also keine roten  $C_k$  und keine grünen  $P_3$ , und  $r^\square(G, H)$  existiert damit nur für Bäume  $G$  und  $H$ .

Die Färbung in Abbildung 4, bei der die roten und grünen Komponenten jeweils Kreise der Länge 4 sind, zeigt, dass es für die Existenz von  $r^\square(G, H)$  notwendig ist, dass einer der Graphen ein Teilgraph (und damit ein Teilbaum) des  $C_4$  ist.

### 3 SCHACHBRETT-GRAPHEN

Die roten Komponenten der Färbung in Abbildung 5 sind Teilgraphen des Graphen  $L$ . Ist  $H$  also kein Teilgraph von  $L$ , so existiert  $r^\square(P_3, H)$  nicht.

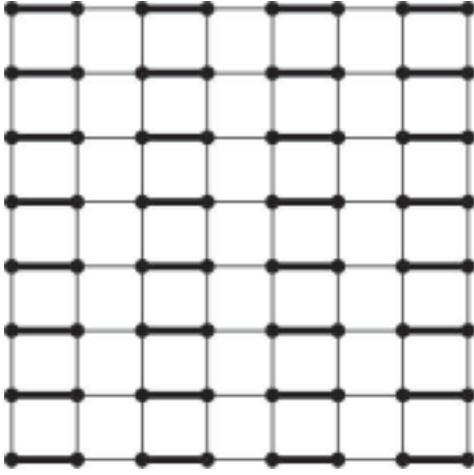


Abbildung 5:  $r^\square(P_3, H) = \infty$  für  $H \not\subseteq L$ .

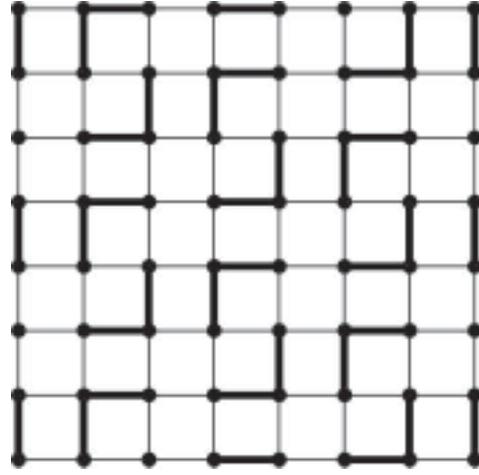


Abbildung 6:  $r^\square(P_4, H) = \infty$  für  $H \not\subseteq Z$ .

Die roten Komponenten der Färbung in Abbildung 6 sind Teilgraphen des Graphen  $Z$ . Ist  $H$  also kein Teilgraph von  $Z$ , so existiert  $r^\square(P_4, H)$  nicht.

Zusammen folgt die Aussage des Satzes.  $\square$

Der nächste Satz sichert die Existenz und gibt die exakten Werte für  $r^\square(P_3, P_k)$ .

#### Satz 3.2

$$r^\square(P_3, P_k) = \begin{cases} 2 & \text{für } k = 3, 4, 5, \\ 3 & \text{für } k = 6, \\ \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1 & \text{für } k \geq 7. \end{cases}$$

**Beweis:** Es reicht, die behaupteten Werte als untere Schranken für  $k = 3, 6$  und  $k = 2i + 1, i \geq 4$ , und als obere Schranken für  $k = 5$  und  $k = 2i + 2, i \geq 3$ , nachzuweisen.

Die unteren Schranken für  $k = 3$  und  $6$  folgen aus den Färbungen in den Abbildungen 7 und 8.



Abbildung 7:  $r^\square(P_3, P_3) \geq 2$ .



Abbildung 8:  $r^\square(P_3, P_6) \geq 3$ .

Die Färbungen der  $B_{i-1}^\square, i \geq 4$ , wie in Abbildung 5 für  $i = 8$  enthalten weder einen grünen  $P_3$  noch einen roten  $P_{2i+1}$ . Deshalb gilt  $r^\square(P_3, P_{2i+1}) > i$ .

Für die obere Schranke im Fall  $k = 5$  betrachtet man eine Zweifärbung des  $B_2^\square$  ohne einen grünen  $P_3$ . Dann bilden die beiden waagerechten oder die beiden senkrechten Kanten im Inneren des  $B_2^\square$  einen roten  $P_3$ , der an beiden Enden um je eine weitere rote Kante zu einem roten  $P_5$  verlängert werden kann.

Für den Fall  $k = 2i + 2$ ,  $i \geq 3$ , wird bewiesen, dass in jeder Zweifärbung des  $B_i^\square$  ohne grünen  $P_3$  ein roter  $P_{2i+2}$  enthalten ist. Dabei wird unterschieden, ob der rote Teilgraph zusammenhängend ist oder nicht.

Wenn der rote Teilgraph zusammenhängend ist, dann gibt es einen roten Weg von der unteren linken zur oberen rechten Ecke des  $B_i^\square$ , der dann mindestens  $2i$  Kanten hat. Hat einer dieser Wege mehr als  $2i$  Kanten, gibt es einen roten  $P_{2i+2}$ . Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, dass alle diese Wege genau  $2i$  Kanten haben, deren Kanten dann nur nach rechts oder nach oben durchlaufen werden. Aus Gründen der Symmetrie kann angenommen werden, dass die erste Kante nach oben durchlaufen wird. Nun wird die unterste rote Kante in der linken Spalte horizontaler Kanten betrachtet. Gehört diese Kante nicht zum Weg, so gibt es einen Weg mit  $2i + 1$  Kanten, der beim zweiten Knoten in der untersten Reihe beginnt (Abbildung 9). Andernfalls gibt es einen Weg mit  $2i + 1$  Kanten, der beim vierten

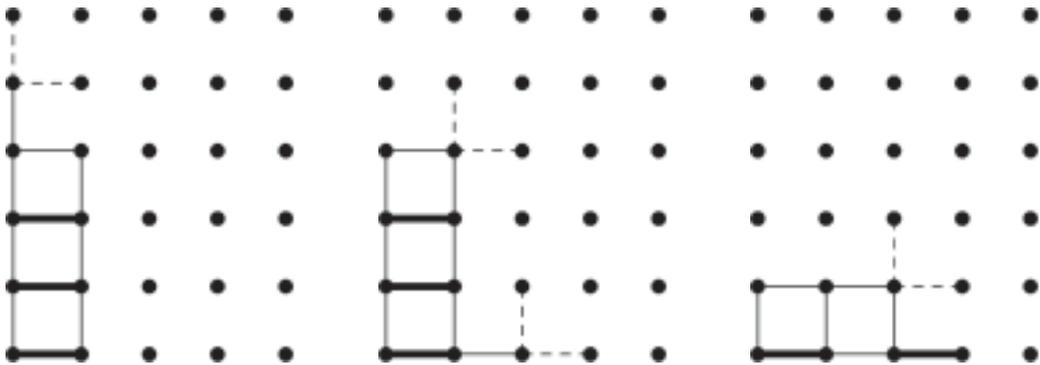


Abbildung 9:  $P_{2i+2}$ .

Abbildung 10:  $P_{2i+2}$ .

Abbildung 11:  $P_{2i+2}$ .

Knoten in der untersten oder beim dritten Knoten in der zweituntersten Reihe beginnt (Abbildung 10). Dies ist allerdings nicht möglich, wenn der Originalweg den dritten Knoten in der zweituntersten Reihe benutzt und die dritte horizontale Kante in der untersten Reihe grün ist. Allerdings ergibt sich dann ein Weg der gewünschten Länge wie in Abbildung 11.

Wenn der rote Teilgraph nicht zusammenhängend ist, kann aus Symmetriegründen angenommen werden, dass alle waagerechten Kanten einer Spalte grün sind, da mit jeder grünen Kante, die zwei rote Komponenten voneinander trennt, auch die beiden parallelen Nachbarkanten grün sind (siehe Abbildung 12).

Für eine dieser Spalten aus trennenden grünen Kanten wird der ‘breitere’ der beiden entstehenden Teile des  $B_i^\square$ , etwa der rechte, betrachtet, der dann eine Breite von mindestens  $\lceil (i - 1)/2 \rceil$  Kanten hat. Am linken Rand dieses Teils befindet sich ein roter  $P_{i+3}$  aus  $i$  senkrechten und je einer waagerechten Kante an jedem Ende. An den beiden Enden kann dieser Weg durch nach rechts und oben bzw. nach rechts und unten verlaufende Kanten verlängert werden. Falls die senkrechten Kanten in jedem Knoten bevorzugt werden, kann sich der Weg zu einem Kreis mit

