2 Materialien mit negativem Brechungsindex

Im folgenden Abschnitt werden die physikalischen Grundlagen von homogenen dielektrischen Medien mit einem negativen Brechungsindex vorgestellt und diskutiert. Zunächst werden die, an ein passives Material zu stellenden Voraussetzungen besprochen, die erfüllt sein müssen, damit ein negativer Brechungsindex auftreten kann. Bei der weitergehenden Untersuchung des Phänomens der negativen Brechung wird sich zeigen, dass die damit verbundenen Effekte ein hohes Potential zur Entwicklung neuartiger Komponenten besitzen. Zum Abschluss wird eine kurze historische Einordnung verschiedener Arbeiten zu diesem Thema gegeben. Bei der Zusammenstellung der Ergebnisse in diesem Kapitel spielten die Quellen [Mil05], [Cal06] sowie [Ram05] eine entscheidende Rolle.

Vorab soll darauf hingewiesen werden, dass es im Bereich der komplexen Darstellung der elektrischen und magnetischen Felder einen Unterschied in der Schreibweise zwischen den Ingenieurswissenschaften und den Naturwissenschaften gibt. Im Exponenten der komplexen Exponentialfunktion wird von beiden Gruppierungen ein unterschiedliches Vorzeichen verwendet. Diese Diskrepanz wirkt sich auch auf die Imaginärteile der komplexen Parameter und die im Verlauf des Kapitels gestellten Forderungen an diese aus. Alle im Rahmen dieser Arbeit angegebenen Formeln sind in der Konvention der Ingenieurswissenschaft geschrieben. Um auf die, auch in vielen der Quellen verwendete naturwissenschaftliche Darstellung umzurechnen, muss lediglich die Substitution $\mathrm{j} = -\mathrm{i}$ durchgeführt werden.

2.1 Identifizierung negativ brechender Medien

In diesem Unterabschnitt wird beschrieben, wie die Materialparameter beschaffen sein müssen, damit ein Dielektrikum einen negativen Brechungsindex aufweist. Dazu wird zunächst für reelle Parameter eine Haupteigenschaft von Medien mit negativem Brechungsindex hergeleitet, die als Grundlage der allgemeinen Definition negativ brechender Medien benutzt wird. In einer anschließenden verallgemeinernden Studie für komplexe Materialparameter werden allgemein gültige Voraussetzungen an die komplexen Größen $\underline{\varepsilon}_\mathrm{r}$ und $\underline{\mu}_\mathrm{r}$ formuliert, die für eine physikalisch sinnvolle Wahl eines negativen Brechungsindex in passiven Medien erfüllt sein müssen.

2.1.1 Reelle Materialparameter

Die Pionierarbeit im Bereich der negativ brechenden Medien lieferte der russische Physiker Viktor Veselago bereits im Jahre 1968 [Ves68]. In seiner Arbeit stellte er sich die

fundamentale Frage, wie sich ein Medium, bei dem sowohl die Permittivität als auch die Permeabilität durch negative Werte gegeben sind, aus elektrodynamischer Sicht verhalten würde. Das Hauptergebnis dieser Studie ist die Möglichkeit einer Beschreibung dieser Materialien über einen negativen Brechungsindex. Dieser Sachverhalt wird jetzt ausgehend von den bekannten Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{g} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.1.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.1.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.1.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \tag{2.1.4}$$

sowie den zugehörigen Materialgleichungen,

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}, \tag{2.1.5}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}, \tag{2.1.6}$$

hergeleitet. Für die folgenden Betrachtungen lassen sich einige Annahmen treffen. Beim zu untersuchenden Material handelt es sich um ein homogenes, verlustfreies, isotropes Dielektrikum, was sowohl eine verschwindende Leitfähigkeit ($\kappa = 0$), als auch eine Ladungsfreiheit ($\rho = 0$) impliziert. Für die Maxwellschen Gleichungen bedeutet dies, dass sowohl der Leitungsstrom $\vec{g}$, als auch die Divergenz der dielektrischen Verschiebung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, verschwindet. Des Weiteren werden zunächst alle Verluste vernachlässigt, was bedeutet, dass alle Materialparameter sowie der Brechungsindex rein reell sind. Mit den getroffenen Randbedingungen vereinfachen sich die Gleichungen (2.1.1) und (2.1.4) zu:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.1.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \tag{2.1.8}$$

Nach einer erneuten Anwendung des Rotationsoperators $\vec{\nabla}\times$ auf Gleichung (2.1.2) sowie einer Vertauschung der zeitlichen und räumlichen Ableitungen kann der Ausdruck $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ mit Hilfe der ersten Maxwell'schen Gleichung (2.1.7) ersetzt werden. Nach der Anwendung des

Graßmannschen Entwicklungssatzes erhält man die Wellengleichung für das elektrische Feld in einem homogenen, verlustfreien Dielektrikum [Leu05]:

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\mu_\mathrm{r}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\,. \tag{2.1.9}$$

In einer analogen Vorgehensweise lässt sich auch eine Differentialgleichung für das magnetische Feld herleiten:

$$\Delta\vec{H} = \mu_0\mu_\mathrm{r}\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\,. \tag{2.1.10}$$

Die Lösung der Differentialgleichungen (2.1.9) und (2.1.10) führt zu ebenen, harmonischen Wellen. Die entsprechenden Felder können als

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\} = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0\cdot\exp[\mathrm{j}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})]\}\,, \tag{2.1.11}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underline{\vec{H}}(\vec{r},t)\} = \mathrm{Re}\{\vec{H}_0\cdot\exp[\mathrm{j}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})]\}\,, \tag{2.1.12}$$

angegeben werden. Der Vektor $\vec{k}$ wird als Wellenvektor bezeichnet und gibt die Richtung der Phasengeschwindigkeit der Welle an. Für den Betrag des Wellenvektors gilt die Beziehung

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\cdot\vec{e}_a = n\cdot\frac{\omega}{c_0}\cdot\vec{e}_a\,, \tag{2.1.13}$$

mit

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{n}\,, \tag{2.1.14}$$

wobei c der Phasengeschwindigkeit im Dielektrikum mit dem Brechungsindex n entspricht und $\vec{e}_a$ den Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung darstellt. Dabei wird der Brechungsindex definiert als:

$$n^2 = \mu_r\varepsilon_r \quad\Leftrightarrow\quad n = \pm\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,. \tag{2.1.15}$$

Aus Gleichung (2.1.15) ist zu erkennen, dass es rein mathematisch immer zwei mögliche Lösungen für n gibt. Die Wahl des Vorzeichens muss durch weitergehende physikalische Überlegungen begründet werden. Dazu werden die komplexen Felder aus Gleichung (2.1.11) und (2.1.12) wieder in die ersten beiden Maxwellschen Gleichungen eingesetzt. Dabei wird ausgenutzt, dass für die zu berücksichtigenden Felder eine einfache Beziehung zwischen dem Nabla-Operator und dem Ausbreitungsvektor besteht [Leh90]:

$$\vec{\nabla} = -\mathrm{j}\vec{k}\,. \tag{2.1.16}$$

Dieser Zusammenhang folgt direkt aus der Exponentialdarstellung der Felder, bei der eine Ableitung nach einer der Ortskoordinaten einer Multiplikation mit der entsprechenden Komponente des Wellenvektors gleichkommt. Werden unter Beachtung der Beziehung (2.1.16) jetzt die komplexen Felder in (2.1.2) und (2.1.7) eingesetzt, entstehen zwei Gleichungen, in denen die Materialparameter nur noch einzeln auftreten. Nach dem Kürzen des gemeinsamen Faktors $-\mathrm{j}\cdot\exp[\mathrm{j}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]$ ergibt sich [Leu05]:

$$\vec{k}\times\vec{H}_0 = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\vec{E}_0\,, \tag{2.1.17}$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\mu_0\mu_\mathrm{r}\vec{H}_0\,. \tag{2.1.18}$$

Aus den beiden Gleichungen (2.1.17) und (2.1.18) lässt sich jetzt sehr einfach ablesen, dass bei positiven Werten für ε_r und μ_r die Vektoren $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ und $\vec{k}$ ein Rechtsschraubensystem bilden. In diesem Fall liegt der Wellenvektor parallel zur mittleren Energieflussrichtung der Welle, die durch den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor

$$\vec{S}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^*\right\} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_0\times\vec{H}_0\right) \tag{2.1.19}$$

festgelegt ist. Drehen sich allerdings die Vorzeichen von ε_r und μ_r um, spannen die Vektoren $\vec{E}_0$ und $\vec{H}_0$ mit dem Wellenvektor ein Linksschraubensystem auf, weshalb solche Materialien auch als linkshändig (LH) bezeichnet werden. Dabei ist ein entscheidender Punkt, dass die Richtung des Poynting-Vektors unabhängig von der Wahl der Vorzeichen von ε_r und μ_r ist, da diese Parameter in Gleichung (2.1.19) nicht vorkommen. In einem Medium, bei dem sowohl die Permittivität als auch die Permeabilität negativ sind, breitet sich also die Phase in umgekehrter Richtung zum Energiefluss aus. Dieses Ergebnis liefert die Grundlage der Definition eines negativen Brechungsindex, da bei einer negativen Phasengeschwindigkeit der nach Gleichung (2.1.13) definierte Wellenvektor ebenfalls ein negatives Vorzeichen besitzen muss. Mit einem Blick auf die Definition des Wellenvektors und der Konvention, dass die Ausbreitungsrichtung der Welle immer der Richtung des Energieflusses entspricht, bleibt nur noch eine Größe übrig, mit der sich das Vorzeichen von $\vec{k}$ verändern lässt: Der Brechungsindex n. Die beiden anderen in (2.1.13) vorkommenden Größen, die Kreisfrequenz ω und die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0, sind immer positiv. Es zeigt sich also, dass die

Wellenausbreitung in Medien mit simultanen negativen Werten für ε_r und μ_r über einen negativen Brechungsindex physikalisch sinnvoll beschrieben werden kann.

Somit ist ein Medium mit negativem Brechungsindex recht einfach zu charakterisieren als ein Material, in dem die Phasen- und die mittlere Energiegeschwindigkeit antiparallel gerichtet sind. In einigen Literaturstellen, wie z.B. in [Cal06], wird die Definition über die Gruppengeschwindigkeit anstatt der Richtung des Energieflusses gemacht. Diese Festlegung birgt jedoch einige Risiken, da es zwar meistens, aber keinesfalls immer der Fall ist, dass Gruppen- und Energiegeschwindigkeit gleichgerichtet sind. Es gibt sowohl Berichte über eine negative Gruppengeschwindigkeit bei positivem Brechungsindex [Grt70], als auch über Materialien, in denen beide, Gruppen- und Phasengeschwindigkeit, dem Energiefluss entgegengesetzt verlaufen [Dol06b]. In diesen konkreten Beispielen würde in beiden Fällen das Vorzeichen des Brechungsindex falsch definiert werden. Bei rein reellen Materialparametern kommt dies der Bedingung nach gleichzeitig negativer Permittivität und Permeabilität gleich. Im nächsten Kapitel schließt sich eine Diskussion über den Einfluss komplexer Materialparameter an, in dem abschließend zwei einfache Beziehungen angegeben werden, die von den Materialparametern zu erfüllen sind, um eine negative Phasengeschwindigkeit zu realisieren.

2.1.2 Verallgemeinerung für komplexe Materialparameter

In diesem Abschnitt werden ganz allgemein komplexe Parameter zur Beschreibung eines linearen, homogenen, passiven Mediums zugelassen. Das bedeutet, dass sowohl $\underline{\varepsilon}_\mathrm{r} = \varepsilon_\mathrm{re} - \mathrm{j}\varepsilon_\mathrm{i}$ und $\underline{\mu}_\mathrm{r} = \mu_\mathrm{re} - \mathrm{j}\mu_\mathrm{i}$, als auch der Brechungsindex $\underline{n} = n_\mathrm{re} - \mathrm{j}n_\mathrm{i}$ durch komplexe Zahlen beschrieben werden. Es geht vor allem darum, eine eindeutige Beziehung herzuleiten, in der die Materialparameter zueinander stehen müssen, um einen negativen Realteil des Brechungsindex zu erhalten. Bei der Rechnung mit komplexen Parametern gibt es zwei sehr wichtige Einschränkung, die in passiven Medien immer beide erfüllt werden müssen. Diese physikalischen Randbedingungen werden mit Hilfe des mittleren Energieflusses nach Gleichung (2.1.19) abgeleitet. Die zu untersuchende Welle ist über ihr elektrisches Feld vollständig charakterisiert. Für das komplexe elektrische Feld aus Gleichung (2.1.11) kann mit der zweiten Maxwell'schen Gleichung (2.1.2) das zugehörige Magnetfeld

$$\underline{\vec{H}}\left(\vec{r},t\right) = \frac{\underline{n}}{\mu_0 \underline{\mu}_\mathrm{r}} \frac{1}{c_0} \vec{e}_a \times \underline{\vec{E}}\left(\vec{r},t\right) \qquad \textbf{(2.1.20)}$$

berechnet werden. Mit den beiden komplexen Feldamplituden ergibt sich der mittlere Energiefluss in Abhängigkeit des Ortes zu:

$$\vec{S}_{\mathrm{m}}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{n}}{\underline{\mu}_{\mathrm{r}}}\right\}\cdot\vec{e}_a\cdot\left|\vec{E}_0\right|^2\exp\left(-2\frac{\omega}{c_0}n_{\mathrm{i}}\cdot\vec{e}_a\cdot\vec{r}\right). \qquad \textbf{(2.1.21)}$$

Der Imaginärteil des Brechungsindex beschreibt eine Dämpfung bzw. Verstärkung der mittleren Energieflussdichte entlang der Ausbreitungsrichtung der Welle, was direkt aus der Exponentialfunktion in (2.1.21) abzulesen ist. In einem passiven Medium darf eine Wellenformation entlang der Ausbreitungsrichtung nicht anwachsen, was zu der Forderung $n_{\mathrm{i}} \geq 0$ führt. Die zweite Bedingung wird an die Richtung des mittleren Energieflusses gestellt. Dieser muss überall von der Quelle der Strahlung weg gerichtet sein. Diese Forderung beinhaltet ebenfalls, dass bei einem Übergang von einem Medium in ein anderes die Normalkomponente des mittleren Energieflusses unverändert bleibt. Unter der Berücksichtigung dieser beiden fundamentalen Einschränkungen können nun zwei, für komplexe Parameter zu erfüllende Ungleichungen hergeleitet werden, die für die Wahl eines negativen n_{re} erfüllt werden müssen. Die Bestimmung des Brechungsindex nach Gleichung (2.1.15) wird somit eindeutig, da immer nur eine der beiden möglichen komplexen Wurzeln diese Bedingungen erfüllen kann.

Der Ausgangspunkt der Betrachtung liegt bei einem linearen isotropen Dielektrikum mit der komplexen Permittivität $\underline{\varepsilon}_{\mathrm{r}} = \varepsilon_{\mathrm{re}} - \mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{i}}$ und der komplexen Permeabilität $\underline{\mu}_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{re}} - \mathrm{j}\mu_{\mathrm{i}}$. Bei einem ebenfalls komplexen Brechungsindex $\underline{n} = n_{\mathrm{re}} - \mathrm{j}n_{\mathrm{i}}$ lässt sich Gleichung (2.1.15) umschreiben:

$$n_{\mathrm{re}}^2 - n_{\mathrm{i}}^2 - 2\mathrm{j}\,n_{\mathrm{re}}n_{\mathrm{i}} = \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}} - \mathrm{j}(\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{re}} + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{i}}). \qquad \textbf{(2.1.22)}$$

Für die weitere Herleitung muss eine Einschränkung getroffen werden. Es wird vorausgesetzt, dass der Realteil des Brechungsindex ungleich Null ist. Da es um Bedingungen für ein negatives Vorzeichen des Brechungsindex geht, hat diese Einschränkung auf die Ergebnisse keinen Einfluss, ist allerdings erforderlich, damit die kommenden Umformungen ihre Gültigkeit bewahren. Aus Gleichung (2.1.22) kann durch separate Betrachtung von Real- und Imaginärteil eine biquadratische Gleichung zur Berechnung von n_{re} gewonnen werden [Dep04]:

$$n_{\mathrm{re}}^4 - (\mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}})n_{\mathrm{re}}^2 - \frac{1}{4}(\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{re}} + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{i}}) = 0. \qquad \textbf{(2.1.23)}$$

Damit berechnen sich die möglichen Lösungen für n_{re}^2 zu:

$$n_{\mathrm{re}}^2 = \frac{1}{2}\left[(\mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}}) \pm \left((\mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}})^2 + (\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{i}})^2\right)^{1/2}\right]. \tag{2.1.24}$$

Die Lösung für den Realteil des Brechungsindex ergibt sich durch das erneute Bilden der Quadratwurzel. Dabei muss beachtet werden, dass für n_{re} lediglich reelle Werte entstehen dürfen, was bedeutet, dass nur positive Lösungen von Gleichung (2.1.24) zulässig sind. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Wahl des positiven Vorzeichens in (2.1.24), da der Wurzelterm immer größer als der erste Summand ist. Somit können nur bei einer Addition der Wurzel positive Werte entstehen. Nach einigen Vereinfachungen ergibt sich damit die eindeutige Lösung

$$n_{\mathrm{re}}^2 = \frac{|\underline{\mu}_{\mathrm{r}}||\underline{\varepsilon}_{\mathrm{r}}| + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}}}{2} > 0\,, \tag{2.1.25}$$

womit sich der Realteil des Brechungsindex zu

$$n_{\mathrm{re}} = \pm\left(\frac{|\underline{\mu}_{\mathrm{r}}||\underline{\varepsilon}_{\mathrm{r}}| + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}}}{2}\right)^{1/2} \tag{2.1.26}$$

ergibt. Die Forderung nach einer negativen Phasengeschwindigkeit schreibt die Wahl der negativen Wurzel in (2.1.26) vor. Damit kann der zugehörige Parameter n_{i} ebenfalls eindeutig bestimmt werden [Dep04]:

$$n_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{re}} + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{i}})}{\left(|\underline{\mu}_{\mathrm{r}}||\underline{\varepsilon}_{\mathrm{r}}| + \mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{re}} - \mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{i}}\right)^{1/2}} \tag{2.1.27}$$

Anhand der beiden oben genannten Bedingungen an ein passives Material muss jetzt überprüft werden, für welche Parameterkonstellationen die Wahl des negativen Vorzeichens beim Realteil des Brechungsindex physikalisch sinnvoll ist. Dazu muss als erstes die Forderung nach einem positiven n_{i} erfüllt werden. Die Parameter dürfen also nur in der Form gewählt werden, dass aus Gleichung (2.1.27) ein positiver Wert folgt. Der Nenner in (2.1.27) ist immer positiv, was sich direkt aus der Beziehung (2.1.25) ergibt, womit sich die Bedingung

$$\mu_{\mathrm{re}}\varepsilon_{\mathrm{i}} + \varepsilon_{\mathrm{re}}\mu_{\mathrm{i}} \leq 0 \tag{2.1.28}$$

formulieren lässt. Zur Erfüllung der zweiten Forderung nach einem von der Quelle weg gerichteten mittleren Energiefluss, muss