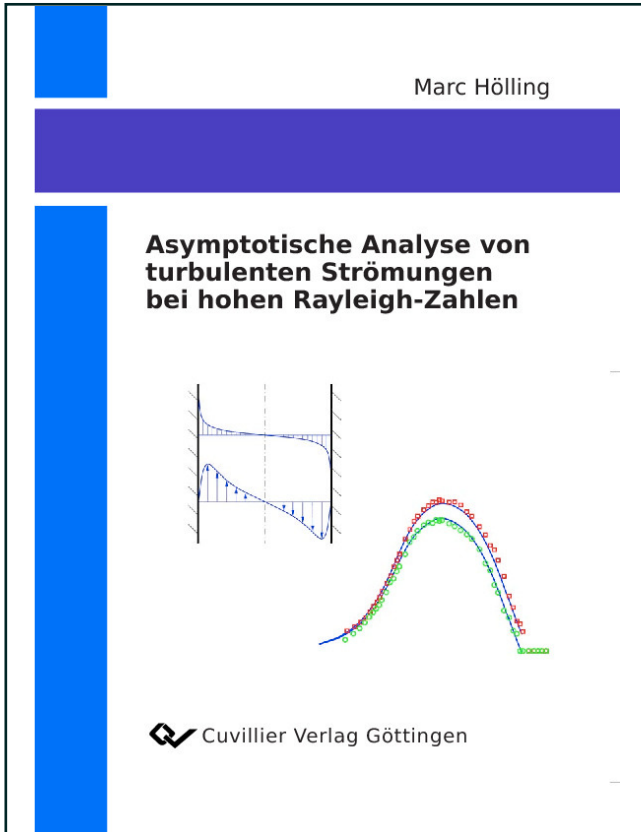




Marc Hölling (Autor)

Asymptotische Analyse von turbulenten Strömungen bei hohen Rayleigh-Zahlen



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/2052>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

Kapitel 1

Einleitung

Die natürliche Konvektion ist eine Strömungsform, die sowohl in der Natur vorkommt, z.B. bei Strömungen in der Atmosphäre oder bei Meeresströmungen, als auch in technischen Anwendungen, z.B. bei der Klimatisierung von Räumen oder bei der Kühlung elektronischer Bauteile. Sie tritt auf, wenn in einem Fluid, das sich in einem Schwerfeld befindet, Dichteunterschiede vorliegen. Es wirken dann Auftriebskräfte, die zu einer Strömung führen. Die Dichteunterschiede im Fluid werden in den meisten Fällen durch das Temperaturfeld vorgegeben, welches somit die Ursache für die Strömung darstellt. Das Geschwindigkeitsfeld ist also unmittelbar an das Temperaturfeld gekoppelt und kann nicht mehr unabhängig (vom Temperaturfeld) bestimmt werden. Die beschreibenden Gleichungssysteme werden aufwendiger und die numerische Simulation gestaltet sich schwieriger als im Falle der erzwungenen Konvektion.

In der vorliegenden Arbeit wird die *turbulente* natürliche Konvektion untersucht, also für den Fall großer Werte der Grashof- bzw. Rayleigh-Zahl. Es wird hierbei zwischen natürlicher Konvektion an vertikalen Wänden und Rayleigh-Bénard Konvektion, bei der sich das Fluid zwischen zwei horizontalen Platten unterschiedlicher Temperatur befindet, unterschieden. Dies ist notwendig, da für den Fall der vertikalen Wand die Erdbeschleunigung parallel zur Wand wirkt und somit die Strömungsrichtung (parallel zur Wand) für das Fluid vorgegeben ist. Für die Rayleigh-Bénard Konvektion steht der Erdbeschleunigungsvektor senkrecht auf den begrenzenden Wänden und es gibt keine bevorzugte Strömungsrichtung.

Für beide Fälle der natürlichen Konvektion gibt es bisher in der Literatur keine Theorie, mit der die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe zufriedenstellend beschrieben werden können. Deshalb soll in dieser Arbeit die turbulente natürliche Konvektion mit Hilfe der Asymptotik untersucht werden, die sich für die erzwungene Konvektion bewährt hat, siehe z.B. Gersten & Herwig (1992) und Schlichting & Gersten (2000). Ziel ist es, für die natürliche Konvektion theoretisch begründete Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile anzugeben, die in Wandnähe universell gültig sind. Hiermit ist es möglich, z.B. Nußelt-Beziehungen für den Wärmeübergang aufzustellen oder die universellen Profile als sog. Wandfunktionen in CFD-Codes zu implementieren.

Bei der asymptotischen Analyse der natürlichen Konvektion wird die Strömung für sehr hohe Rayleigh-Zahlen ($Ra \rightarrow \infty$) untersucht. Es kann eine Zwei-Schichten-Struktur der Strömung identifiziert werden, die aus einer Wand- und einer Außen- bzw. Kernschicht

besteht. Durch ein sog. *Anpassen der Gradienten* zwischen diesen beiden Schichten können universelle Profile ermittelt werden, die für $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind. Allerdings kann dieser Grenzfall in der Realität nicht erreicht werden, da in Experimenten oder Simulationen nur endliche Rayleigh-Zahlen realisiert werden können. Die Profile, die für $Ra \rightarrow \infty$ gültig sind, stellen jedoch sehr gute Näherungen für endliche, aber hohe Rayleigh-Zahlen dar. Die Übereinstimmung nimmt aufgrund der gewählten Vorgehensweise für steigende Rayleigh-Zahlen zu. Somit können die Ergebnisse, die für den theoretischen Grenzfall unendlicher Rayleigh-Zahlen erhalten wurden, auch für konkrete Probleme bei endlichen Werten benutzt werden.

Kapitel 2 gibt eine Wiederholung einiger Grundlagen der Strömungsmechanik an, wie z.B. Grundgleichungen und Boussinesq-Approximation. Anschließend wird aufgezeigt, wie man mit Hilfe der Asymptotik das bekannte *logarithmische Wandgesetz* herleiten kann, das als (Geschwindigkeits-) Wandfunktion in allen CFD-Codes benutzt wird.

In Kapitel 3 wird die turbulente natürliche Konvektion mit Hilfe der Asymptotik analysiert. Die erhaltenen Profile werden anschließend mit Messdaten aus der Literatur verglichen. In Kapitel 4 werden die neuen universellen Profile als Wandfunktionen in einen CFD-Code implementiert, so dass die natürliche Konvektion auch auf groben Gittern berechnet werden kann. Mit den neuen Wandfunktionen ist es nicht mehr notwendig, die viskose Unterschicht mit extrem feinen Gittern in Wandnähe aufzulösen, wie es mit kommerziellen CFD-Codes zur Zeit üblich ist.

Die Rayleigh-Bénard Konvektion wird in Kapitel 5 untersucht. Hierbei wird vom Idealfall der Rayleigh-Bénard Konvektion mit unendlich ausgedehnten Platten ausgegangen, bei dem das Fluid „zufällig“ strömt und keine zeitgemittelten Geschwindigkeiten auftreten. Es muss also nur die Energiegleichung analysiert werden, aus der ein universelles Temperaturprofil hervorgeht. Dies kann in eine Nußelt-Rayleigh Korrelation für den Wärmeübergang bei der Rayleigh-Bénard Konvektion umgeschrieben werden, für den es in der Literatur eine Vielzahl an Studien zum Vergleich gibt.

Kapitel 6 bietet einen Ausblick, wie die gefundenen Ergebnisse zur Beschreibung gemischter Konvektion benutzt werden könnten.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel soll eine kurze Wiederholung wichtiger strömungsmechanischer Grundlagen sein. Eine ausführlichere Darstellung findet man z.B. in Gersten & Herwig (1992), Herwig (2002), Schlichting & Gersten (2000) und Herwig (2004).

Im Folgenden werden die Grundgleichungen zur Beschreibung von zweidimensionalen Strömungen angegeben (Abschnitt 2.1) und die Boussinesq-Approximation vorgestellt, mit der die Impulsgleichungen für die natürliche Konvektion vereinfacht werden können (Abschnitt 2.2). Anschließend wird in den Abschnitten 2.3 und 2.4 gezeigt, wie man mit Hilfe von asymptotischen Überlegungen das *logarithmische Wandgesetz* und das zugehörige Temperaturprofil für die erzwungene Konvektion herleiten kann. Dies soll die Ähnlichkeit der Herleitung der Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile für den Fall der natürlichen Konvektion an vertikalen Wänden in Kapitel 3 verdeutlichen.

2.1 Bilanzgleichungen

Zur allgemeinen Beschreibung turbulenter Strömungen mit Wärmeübergang wird häufig eine Zeitmittelung vorgenommen. Das Strömungsfeld¹ $\hat{u}^*(t^*)$ wird in einen mittleren Anteil u^* und einen zeitlich schwankenden Anteil $u^{*'}(t^*)$ aufgespalten:

$$\hat{u}^*(t^*) = u^* + u^{*'}(t^*) \quad \text{mit} \quad u^* \equiv \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} \hat{u}^*(t^*) dt^* \quad (2.1)$$

Analoges gilt für das Temperaturfeld $\hat{T}^*(t^*)$:

$$\hat{T}^*(t^*) = T^* + T^{*'}(t^*) \quad \text{mit} \quad T^* \equiv \frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} \hat{T}^*(t^*) dt^* \quad (2.2)$$

¹Hier sei beispielhaft die x -Komponente der Geschwindigkeit betrachtet. Die Zeitmittelung gilt analog für die y -Komponente $\hat{v}^*(t^*) = v^* + v^{*'}(t^*)$.

Zeitliche Mittelwerte von Schwankungsgrößen, z.B. der Reynolds-Spannung $-\overline{u^{*'}v^{*'}}$, sind definiert als

$$-\overline{u^{*'}v^{*'}} \equiv -\frac{1}{\Delta t^*} \int_{t_0^*}^{t_0^* + \Delta t^*} u^{*'}(t^*) \cdot v^{*'}(t^*) dt^* \quad (2.3)$$

Desweiteren wird die substantielle Ableitung $D.../Dt^*$ benutzt, für die im ebenen Fall gilt

$$\frac{D...}{Dt^*} \equiv \frac{\partial...}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial...}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial...}{\partial y^*}. \quad (2.4)$$

Zur Bestimmung der zeitgemittelten Größen stehen die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes Gleichungen und die Energiegleichung zur Verfügung. Da in den anschließenden Kapiteln nur ebene Strömungsfälle vorkommen, werden die Gleichungen hier in zweidimensionaler Form angegeben. Für die dreidimensionalen Gleichungen und eine allgemeine Herleitung der Gleichungen sei z.B. auf Herwig (2002) verwiesen.

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (2.5)$$

Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{Du^*}{Dt^*} &= \rho^* g_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ &\quad - \rho^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}{}^2}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{u^{*'}v^{*'}}}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{Dv^*}{Dt^*} &= \rho^* g_y^* - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \\ &\quad - \rho^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}v^{*'}}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{v^{*'}{}^2}}{\partial y^*} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Thermische Energiegleichung (Temperaturform):

$$\rho^* c_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) - \rho^* c_p^* \left[\frac{\partial \overline{u^{*'}T^{*'}}}{\partial x^*} + \frac{\partial \overline{v^{*'}T^{*'}}}{\partial y^*} \right] + \Phi^* \quad (2.8)$$

Hierbei ist Φ^* die Dissipation (siehe z.B. Herwig (2002)), die im folgenden vernachlässigt werden kann.

In den Gleichungen (2.5)-(2.8) treten die turbulenten Zusatzterme ($-\overline{u^{*'}v^{*'}}$ und $-\overline{v^{*'}T^{*'}}$) auf, die zur Berechnung eines konkreten Problems durch eine geeignete Turbulenzmodellierung bestimmt werden müssen (*Schließungsproblem*).

2.2 Boussinesq-Approximation

Die in den folgenden Kapiteln zu untersuchende natürliche Konvektion wird durch Dichteunterschiede im Fluid hervorgerufen. Sie kommt somit durch den Einfluss veränderlicher Stoffwerte zustande (Dichte $\rho^* \neq \text{const}$ aufgrund von $T^* \neq \text{const}$). Wird die Dichte in allen Termen von Gleichung (2.6) als konstant angenommen, so wirken keine Auftriebskräfte und das Fluid bleibt in Ruhe. Der Einfluss der Dichteänderungen muss also in der Impulsbilanz erfasst werden.

Treten im Fluid nur kleine Temperaturänderungen (und somit nur kleine Dichteunterschiede) auf, so kann die *Boussinesq-Approximation* zur Beschreibung der Strömung benutzt werden. Die Vorgehensweise sei anhand einer beheizten Wand nach Abbildung 2.1 aufgezeigt, an der sich eine Grenzschicht ausbildet.

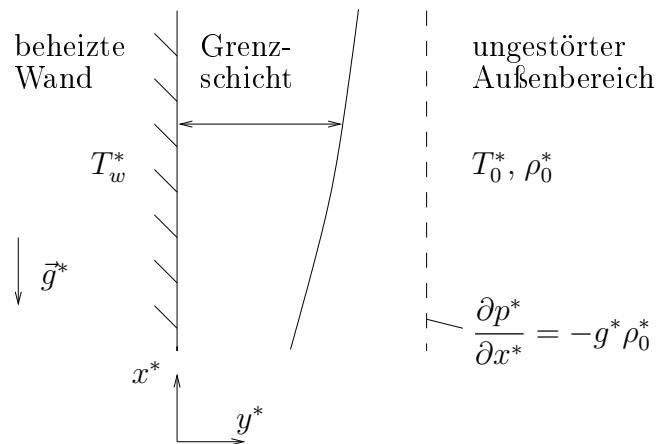


Abbildung 2.1: Ausbildung einer Grenzschicht an einer beheizten vertikalen Platte (natürliche Konvektion).

Es wird hier die für Grenzschichten übliche Annahme getroffen, dass Gradienten senkrecht zur Wand sehr viel größer sind als entlang der Wand ($\partial \dots / \partial y^* \gg \partial \dots / \partial x^*$). Unter Vernachlässigung der Reynolds-Spannungen und mit $g_x^* = -g^*$ kann die x -Impulsbilanz (2.6) innerhalb der Grenzschicht geschrieben werden als

$$\rho^* \frac{Du^*}{Dt^*} = -\rho^* g^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right). \quad (2.9)$$

Zunächst soll der Druckgradient $\partial p^* / \partial x^*$ betrachtet werden. Es kann allgemein für Grenzschichten gezeigt werden, dass sich die y -Impulsgleichung (innerhalb der Grenzschicht) zu $\partial p^* / \partial y^* = 0$ vereinfacht, d.h., dass der Druck in der Grenzschicht durch die Außenschicht aufgeprägt wird. So gilt z.B. entlang der gestrichelten Linie in Abbildung 2.1

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -g^* \rho_0^*. \quad (2.10)$$

In der (ruhenden) Außenschicht nimmt der Druck also linear mit der Höhe ab. Somit gilt:

$$-\rho^* g^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -g^* (\rho^* - \rho_0^*) \quad (2.11)$$

Der Einfluss veränderlicher Stoffwerte soll durch Taylorreihenentwicklungen bis zum linearen Term berücksichtigt werden:

$$\rho^*(T^*) = \rho_0^* + \left. \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*} \cdot (T^* - T_0^*) = \rho_0^* \left(1 + \underbrace{\frac{T_0^*}{\rho_0^*} \left. \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}}_{\equiv K_\rho} \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \quad (2.12)$$

$$\mu^*(T^*) = \mu_0^* + \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*} \cdot (T^* - T_0^*) = \mu_0^* \left(1 + \underbrace{\frac{T_0^*}{\mu_0^*} \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}}_{\equiv K_\mu} \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \quad (2.13)$$

Hierbei wurden die dimensionslosen Parameter K_ρ und K_μ für die Dichte bzw. die Viskosität eingeführt, um variable Stoffwerte zu berücksichtigen. Der Parameter K_ρ kann alternativ mit Hilfe des thermischen Ausdehnungskoeffizienten β^* ausgedrückt werden

$$K_\rho = -\beta^* T_0^* \quad \text{mit} \quad \beta^* \equiv -\left. \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right|_{T_0^*}. \quad (2.14)$$

Der Term $-g^*(\rho^* - \rho_0^*)$ aus Gleichung (2.11) kann also geschrieben werden als

$$-g^*(\rho^* - \rho_0^*) = -\rho_0^* g^* K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} = \rho_0^* g^* \beta^* (T^* - T_0^*). \quad (2.15)$$

Die Impulsbilanz für variable Stoffwerte lautet damit:

$$\begin{aligned} \rho_0^* \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{Du^*}{Dt^*} &= \rho_0^* g^* \beta^* (T^* - T_0^*) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu_0^* \left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Gleichung (2.16) kann nun in eine entdimensionierte Form gebracht werden. Dabei wird die gleiche Entdimensionierung wie später in Kapitel 3 benutzt. Es soll hier lediglich das Ergebnis angegeben werden, zu Details der Entdimensionierung siehe Anhang A:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}^2} \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) \frac{DU^\times}{Dt^\times} &= \underbrace{\Theta_0^\times - \Theta^\times}_{\text{Auftriebsterm}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^\times} \left(\left[1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right] \frac{\partial U^\times}{\partial y^\times} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Im Auftriebsterm tritt der Parameter K_ρ bzw. der thermische Ausdehnungskoeffizient β^* aufgrund der gewählten Entdimensionierung nicht mehr explizit auf.

Sind nun die Temperaturunterschiede im Fluid klein gegenüber der Bezugstemperatur, also $(T^* - T_0^*)/T_0^* \rightarrow 0$, so gilt

$$\lim_{\frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \rightarrow 0} \left(1 + K_\rho \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \rightarrow 0} \left(1 + K_\mu \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \right) = 1 \quad (2.18)$$

und die dimensionslose Impulsbilanz lautet

$$\frac{1}{\text{Pr}^2} \frac{DU^\times}{Dt^\times} = \underbrace{\Theta_0^\times - \Theta^\times}_{\text{Auftriebsterm}} + \left[\frac{\partial^2 U^\times}{\partial y^{\times 2}} \right]. \quad (2.19)$$

Zur besseren Anschauung sei zusätzlich die dimensionsbehaftete Form der Impulsbilanz bei natürlicher Konvektion unter Verwendung der Boussinesq-Approximation angegeben

$$\frac{Du^*}{Dt^*} = \underbrace{g^* \beta^* (T^* - T_0^*)}_{\text{Auftriebsterm}} + \nu_0^* \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right]. \quad (2.20)$$

Aus asymptotischer Sicht haben die Einflüsse variabler Stoffwerte unterschiedliche Größenordnungen. Im Auftriebsterm ist der Einfluss von führender Ordnung und muss deshalb berücksichtigt werden (nur so kommt überhaupt eine Strömung zustande). In den anderen Termen sind die Einflüsse von höherer Ordnung und können deshalb gegenüber demjenigen der führenden Ordnung vernachlässigt werden. Gleichzeitig ist erkennbar, wie eine Erfassung auch von Einflüssen höherer Ordnung systematisch möglich ist, indem entsprechende Terme Berücksichtigung finden.

2.3 Logarithmisches Wandgesetz der erzwungenen Konvektion

Es soll eine kurze Herleitung des *logarithmischen Wandgesetzes* für die erzwungene Konvektion angegeben werden. Dies soll für die nachfolgenden Kapitel verdeutlichen, dass man die natürliche Konvektion mit analogem Vorgehen analysieren kann und so universelle Profile erhält.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung des logarithmischen Wandgesetzes ist eine ebene turbulente Couette-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten, bei der sich eine Platte mit der Relativgeschwindigkeit u_r^* bewegt, siehe Abbildung 2.2. Die Strömung kann mit Hilfe der Reynolds-Zahl Re charakterisiert werden, für die gilt

$$\text{Re} \equiv \frac{u_r^* h^*}{\nu^*}. \quad (2.21)$$

Da es sich bei unendlich ausgedehnten Platten um eine eindimensionale Strömung handelt, vereinfacht sich die x -Impulsbilanz und man findet, dass die Schubspannung τ^* , die sich zusammensetzt aus einem molekularem Anteil τ_{mol}^* und einem turbulenten Anteil τ_t^* , über der Kanalhöhe h^* konstant ist

$$\frac{\tau^*}{\rho^*} = \frac{\tau_{mol}^*}{\rho^*} + \frac{\tau_t^*}{\rho^*} = \frac{\tau_w^*}{\rho^*} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \overline{u^* v^*} = \nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w. \quad (2.22)$$

Somit ist die Wandschubspannung eine im ganzen Strömungsgebiet charakteristische Größe. Sie wird benutzt, um eine Bezugsgeschwindigkeit, die sog. *Wandschubspannungsgeschwindigkeit* u_τ^* , zu definieren

$$u_\tau^* \equiv \sqrt{\nu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w} = \sqrt{\frac{\tau_w^*}{\rho^*}}. \quad (2.23)$$

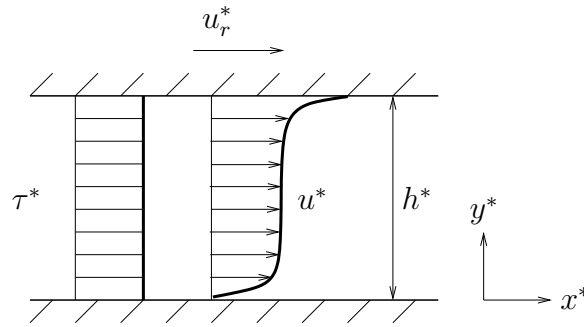


Abbildung 2.2: Ausschnitt aus einer ebenen turbulenten Couette-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten mit Relativgeschwindigkeit u_r^* . Dargestellt sind die Verteilung der Schubspannung τ^* über den Querschnitt ($\tau^* = \text{const}$) und das zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofil u^* .

Im Allgemeinen kann die mittlere Strömungsgeschwindigkeit u^* nun als Funktion des Wandabstandes y^* , der Kanalhöhe h^* , der Viskosität ν^* und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_r^* ausgedrückt werden

$$u^* = f(y^*, h^*, \nu^*, u_r^*) \quad (2.24)$$

oder alternativ auch mit dem Geschwindigkeitsgradienten an der Wand

$$u^* = f\left(y^*, h^*, u_r^*, \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_w\right). \quad (2.25)$$

Da es sich um eine turbulente Strömung handelt, weist das Strömungsfeld eine Zwei-Schichten-Struktur auf, siehe Abbildung 2.3. Es gibt eine **Wandschicht**, in der sowohl die molekulare als auch die turbulente Schubspannung (τ_{mol}^* und τ_t^*) von Bedeutung sind, und eine vollturbulente **Außenschicht**, in der nur die turbulente Schubspannung τ_t^* berücksichtigt werden muss. Diese beiden Schichten besitzen keine klare Abgrenzung, sondern es gibt eine Überlappungsschicht, in der sowohl die Wandschicht als auch die Außenschicht eine gültige Beschreibung darstellen.

2.3.1 Wandschicht

Im asymptotischen Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ weist die Strömung eine Singularität an der Wand auf, da die Dicke der Wandschicht δ_e^* gegen Null strebt

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\delta_e^*}{h^*} = 0. \quad (2.26)$$

Der Index e soll im folgenden benutzt werden, um anzudeuten, dass es sich um eine Größe bei erzwungener Konvektion handelt. Nach Gleichung (2.26) kann der Plattenabstand h^* in der Wandschicht also keine Einflussgröße sein und die Geschwindigkeit kann ausgedrückt werden durch:

$$u^* = f\left(y^*, u_r^*, \left.\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right|_w\right) \quad (2.27)$$

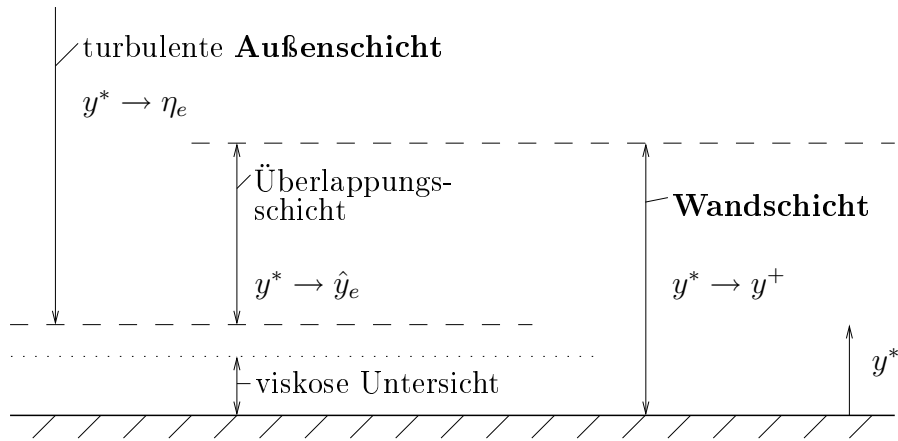


Abbildung 2.3: Zwei-Schichten-Struktur einer turbulenten Couetteströmung.

Um eine Beschreibung des Wandabstandes in der Wandschicht zu finden, die für $Re \rightarrow \infty$ nicht entartet, ist ein Maß für die Dicke der Wandschicht notwendig. Ein sinnvolles Maß hierfür ist der Abstand, bei dem die Wandschubspannungsgeschwindigkeit bei linearem Geschwindigkeitsverlauf erreicht wird

$$\delta_e^* \equiv \frac{u_\tau^*}{\partial u^*/\partial y^*|_w} = \frac{\nu^*}{u_\tau^*}. \quad (2.28)$$

Hiermit kann ein entdimensionierter Wandabstand $y^+ \equiv y^*/\delta_e^*$ eingeführt werden, für den gilt

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{y^*}{\delta_e^*} = O(1) \quad \text{für} \quad y^* \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Somit kann für die Wandschicht eine dimensionslose Beschreibung mit $u^+ \equiv u^*/u_\tau^*$ angegeben werden:

$$u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*} = f\left(\frac{y^*}{\delta_e^*}\right) = f\left(\frac{y^* u_\tau^*}{\nu^*}\right) = f(y^+) \quad (2.30)$$

2.3.2 Außenschicht

Da die Außenschicht vollturbulent ist, sind Wandgrößen ohne Einfluss. Somit ist der Geschwindigkeitsgradient an der Wand keine Einflussgröße und der funktionale Zusammenhang lautet

$$u^* = f(y^*, h^*, u_\tau^*) \quad (2.31)$$

oder in dimensionsloser Form mit $\eta_e \equiv y^*/h^*$

$$u^+ = \frac{u^*}{u_\tau^*} = f\left(\frac{y^*}{h^*}\right) = f(\eta_e). \quad (2.32)$$

In beiden Schichten kann die Geschwindigkeit u^* mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ^* entdimensioniert werden, da sie im gesamten Strömungsgebiet gültig ist und das Geschwindigkeitsprofil keine Singularität aufweist.