

1 Einleitung

Der atomare oder molekulare Aufbau eines Stoffes bestimmt seine Eigenschaften. Dies gilt jedoch nicht nur auf solch elementarer Ebene. In der Natur finden sich eine Vielzahl sogenannter *kompositer Materialien*, deren Merkmale sich aus dem Aufbau sowie aus der Art der Grundbausteine ergeben, wie z.B. Holz, Knochen, Schnee und Sand. In vielen ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen werden diese Konzepte aus der Natur zur Herstellung künstlicher Werkstoffe aufgegriffen. Ein populäres Beispiel aus dem Maschinenbauwesen sind Verbundwerkstoffe aus Glasfaser und Kunststoff. Auf allen Gebieten erfordert der systematische Entwurf kompositer Materialien das Verständnis der Abhängigkeit des makroskopischen Verhaltens von der Mikrostruktur.

In der Hochfrequenztechnik sind vor allem die elektromagnetischen Eigenschaften von Interesse. Insbesondere periodisch aufgebaute Materialien und Strukturen geraten in jüngerer Zeit immer mehr in den Blickpunkt des wissenschaftlichen Interesses. Beispiele hierfür sind photonische Kristalle [1] und frequenzselektive Oberflächen [2]. Nicht zuletzt bestimmen Ansätze zur Synthese von Medien, deren Eigenschaften nicht aus der Natur bekannt sind [3], und deren denkbare Applikationen die gegenwärtige Literatur und Forschung auf dem Gebiet der kompositen Materialien maßgeblich. Eine umfassende Übersicht findet sich z.B. in [4]. Je nach Geometrie und Anordnung lassen sich sehr verschiedene makroskopische Eigenschaften einstellen. Die in dieser Arbeit verwendeten Grundbausteine sind kleine metallische Helices, die vor allem auf dem Gebiet der chiralen Materialien Verwendung finden (z.B. [5–7]).

Chirale Materialien

Die hervorstechende Eigenschaft chiraler (händischer) Materialien ist eine Unsymmetrie. Die Grundbausteine (von nun an auch Einschlüsse, Partikel oder Streukörper genannt) lassen sich, wie bei der menschlichen Hand, nicht mit ihrem Spiegelbild in Deckung bringen. Innerhalb des Materials bewirkt dieser Umstand unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten und Dämpfungen von links- und rechtszirkular polarisierten elektromagnetischen Wellen. Eine anfangs linear polarisierte Welle weist damit nach Transmission durch eine chirale Scheibe im Allgemeinen eine elliptische Polarisation auf. Auf makroskopischer

Ebene ist zur Beschreibung chiraler Medien ein zusätzlicher Materialparameter, der Chiralitätsparameter, erforderlich [8]. Er verkoppelt sowohl den elektrischen Fluss mit dem magnetischen Feld als auch den magnetischen Fluss mit dem elektrischen Feld.

Im optischen Bereich schon im frühen 19. Jahrhundert von Arago und Biot experimentell untersucht [9, 10], stehen chirale Materialien für Mikrowellen erst seit Anfang der 1990er Jahre vermehrt im Blickpunkt des wissenschaftlichen Interesses. Einige Pionierarbeiten auf diesem Gebiet reichen aber bis in die Anfänge des 20. Jahrhundert zurück [11]. Ein historischer Abriss findet sich in [8, Kap. 1]. Mit dem Chiralitätsparameter glaubte man zunächst, einen neuen unabhängigen Parameter zur Realisierung funktioneller Schichten im Mikrowellenbereich gefunden zu haben. Theoretische Studien zeigten aber bald, dass der Chiralitätsparameter nicht vollständig unabhängig gewählt werden kann, sondern über Nebenbedingungen (Passivität, Reziprozität etc.) mit der Permeabilität und Permittivität eines Materials verknüpft ist [12]. Gleichzeitig ist Chiralität ein schmalbandiges Phänomen [13]. Die Ausnutzung der chiralen Eigenschaft für Anwendungen ist folglich durch diese Nebenbedingungen eingeschränkt.

Im Mikrowellenbereich sind keine natürlichen chiralen Materialien bekannt. Sie müssen daher künstlich hergestellt werden. Kleine metallische Helices (oder ähnliche Strukturen mit Symmetriebruch) können dafür regellos positioniert und orientiert in ein Wirtsmaterial eingebracht werden [14, 15]. Die Bedingungen, die an ein Komposit gestellt werden, um zumindest in einiger Entfernung von einer Materialprobe als homogenes Medium zu gelten, sind damit im Allgemeinen erfüllt:

- Jeder Einschluss selbst und auch der mittlere Abstand zwischen den Partikeln ist klein gegenüber der betrachteten Wellenlänge.
- Die Probe hat eine gewisse Mindestgröße, so dass genügend Partikel mit dem anregenden Feld interagieren und die exakten Positionen und Orientierungen keine übergeordnete Rolle spielen.

Aus der angesprochenen Realisierung ergibt sich eine zusätzlich nutzbare Eigenschaft, die aus den Materialgleichungen nicht direkt ersichtlich ist und nachfolgend erläutert wird. Interessant ist vor allem der Bereich der ersten Resonanz, da die Gesamtabmessungen der Grundbausteine in der Regel klein sind gegenüber der Wellenlänge. Der auf der Oberfläche der Helix hervorgerufene Strom ist dennoch für ein starkes Streufeld verantwortlich. Längs zur Ausbreitungsrichtung auftretende Stromkomponenten sorgen für Streuung elektromagnetischer Energie quer zur anregenden elektromagnetischen Welle. Dieses Verhalten prädestiniert chirale Einschlüsse z.B. für den Einsatz in Mikrowellenabsorbern, vorwiegend

im unteren Frequenzbereich, in dem die meisten Absorber konzeptbedingt schlechte Dämpfungseigenschaften aufweisen¹ [16–18]. Abhängig von der Anordnung der Helices sind aber auch andere Applikationen denkbar. Hierauf wird im späteren Verlauf der Arbeit noch näher eingegangen. Im Folgenden werden zunächst einige Punkte angesprochen, die es bei der Modellierung zu beachten gilt.

Modellierung

Grundsätzlich gibt es für die elektromagnetische Analyse eines kompositen Materials kein Patentrezept. Die Herangehensweise ist immer von der Art der Einschlüsse, dem Frequenzbereich, der Anordnung und nicht zuletzt auch von den erwünschten Informationen abhängig. Der Entwurf periodisch aufgebauter Strukturen gestaltet sich z.B. durch die Tatsache, dass nur noch die Lösung für eine Einheitszelle gefunden werden muss, als relativ einfach. In diesem Fall können Standardmethoden für die Lösung des komplexen dreidimensionalen Feldproblems herangezogen werden (siehe z.B. [19, 20]). Die Analyse zufällig aufgebauter Strukturen wie beim chiralen Medium stellt höhere Anforderungen. Um die statistische Verteilung korrekt zu erfassen, müssen prinzipiell alle Grundbausteine, oder zumindest eine genügend große Anzahl davon, bei der Berechnung berücksichtigt werden. Abgesehen davon, dass Speicherbedarf und Rechenzeit schnell mit der Zahl der berücksichtigten Grundbausteine ansteigen, sind bei hochresonanten Einschlüssen auch Probleme der numerischen Stabilität zu erwarten. Eine Möglichkeit, solche Berechnungen zu umgehen, besteht in der Homogenisierung, also der Betrachtung eines kompositen Materials als homogenes Medium mit ortsunabhängigen Materialeigenschaften. Sind letztere bekannt, können Reflexions- und Transmissionsparameter einer Schicht analytisch berechnet werden [21, 22]. Folgende Vorgehensweisen haben sich etabliert:

Mischformeln

Klassische Methoden für die Extraktion effektiver Eigenschaften sind aus der Theorie der effektiven Medien (engl.: *Effective Medium Theory (EMT)*) bekannt [23, 24]. Konkret handelt es sich um Mischformeln, die die Eigenschaften der Grundbausteine und des Hintergrundmaterials gewichten. Die zugrundeliegende Idee bei einem verbreiteten Vertreter, dem Clausius-Mossotti-Ansatz, zeigt Bild 1.1. Die elektromagnetischen Verhältnisse innerhalb des Materials werden hierbei durch eine homogene Polarisierung um jeden Einschluss wiedergegeben. Das dadurch erzeugte lokale Feld am Ort des Einschlusses ruft ein Dipolmoment \mathbf{p} hervor, welches wiederum selbst zur Polarisierung beiträgt. Die Kopplung der Partikel untereinander ist damit auf Basis von Dipol-Interaktionen beschrieben. Zur Simulation

¹Im Frequenzbereich von etwa 10 bis 1000 MHz sind beispielsweise auch Ferritabsorber-Kacheln nutzbar.

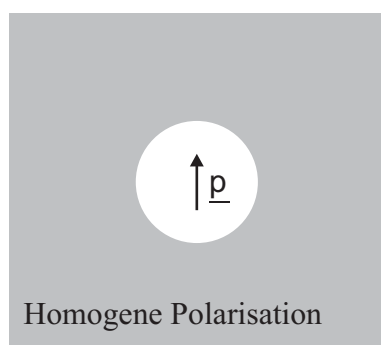


Bild 1.1: Das Clausius-Mossotti Model.

des Materials genügt in diesem Modell folglich die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen anregendem Feld und hervorgerufenem Dipolmoment: die Dipol-Polarisierbarkeiten. Sofern letztere bezüglich des Hintergrundmediums bekannt sind, lässt sich die Mischformel analytisch unter Berücksichtigung der Dichte der Einschlüsse formulieren.

Die Herleitung der Clausius-Mossotti Beziehung beruht auf verschiedenen Näherungen, die die Gültigkeit einschränken. So wird bei der Betrachtung immer ein in drei Dimensionen unendlich ausgedehntes Medium vorausgesetzt. Tatsächlich interessieren bei der technischen Realisierung häufig dünne Schichten. Bei experimentellen Arbeiten werden z.B. Randeffekte durch entsprechend große Proben und eine lokal begrenzte anregende Welle vermieden [14, 15, 25], so dass in guter Näherung zumindest die transversale Ausdehnung der Probe - bezogen auf die Ausbreitungsrichtung der Welle - als genügend groß angesehen werden kann. Im strengen Sinne führt die Beschränkung der longitudinalen Dimension dazu, dass die Mischformeln ungültig werden. Eine umfangreiche Diskussion findet sich z.B. in [26]. Aufgrund des Potentials für technische Anwendungen rückt das Problem der Homogenisierung und Modellierung dünner Schichten in jüngster Zeit vermehrt in den Vordergrund (siehe [27–30]).

Eine zweite Einschränkung betrifft die verwendeten Grundbausteine. Für einen ausgeprägten Effekt muss eine einfallende elektromagnetische Welle möglichst gut mit der Schicht wechselwirken. Typischerweise bedient man sich zu diesem Zweck, wie im Fall der chiralen Medien, resonanter Strukturen. Durch die starke Streuung kann die umgebende Polarisation in der Nähe der Resonanz nur noch in grober Näherung als homogen angenommen werden. Die Frage, ob bzw. unter welchen Einbußen an Genauigkeit ein Material mit Mischformeln homogenisiert werden kann, wird in der Literatur meist nicht oder nur sehr vage beantwortet, was nicht zuletzt auch daran liegt, dass solch eine Aussage nur sehr fallspezifisch getroffen werden kann. In [31] wird z.B. die Möglichkeit der Homogenisierung periodisch platzierter resonanter Objekte (sog. *Split-Ring*-Resonatoren und induktiv belastete kurze Drähte) im dreidimensionalen Raum für gewisse Einfallrichtungen der anregenden Welle in Frage gestellt. Andererseits haben sich Mischformeln zur Vorhersage der

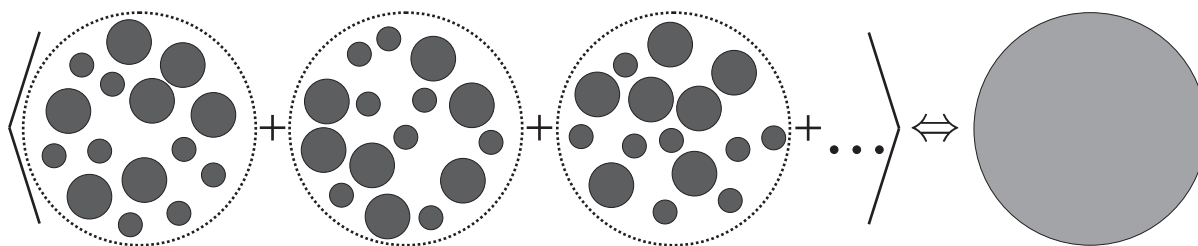


Bild 1.2: Modell zur numerischen Bestimmung effektiver Materialparameter. Hier beispielhaft im zweidimensionalen Raum mit homogenen Kreisscheiben als Einschlüssen.

Eigenschaften chiraler Medien in experimentellen Studien [6, 14, 32] und zum Entwurf eines mehrschichtigen Mikrowellenabsorbers bewährt [17]. Gleichsam werden Mischformeln häufig, wie z.B. in [33], genutzt, um das prinzipielle Verhalten eines kompositen Materials zu illustrieren.

Mittelungsansatz

Eine Klassifizierung der Anwendbarkeit der Mischformeln ist durch die komplexen Verhältnisse innerhalb des Materials nicht a priori möglich. Eine alternative Methode zur Bestimmung effektiver Eigenschaften ist der in Bild 1.2 illustrierte Mittelungsansatz [34, 35]. Die gestreuten Felder mehrerer zufällig gewählter kleiner Proben eines Materials werden hierbei mit Hilfe eines numerischen Verfahrens, also unter Einbeziehung der gegenseitigen Kopplungen, berechnet. Für eine genügend große Anzahl gewählter Proben führt die Mittelung der so erhaltenen Streufelder zum kohärenten Feld, welches eine homogene Referenzprobe gleicher Probengeometrie streuen würde. Ein Vergleich und die Anpassung der homogenen Referenzprobe liefert schließlich die gewünschten effektiven Materialparameter des kompositen Materials. Für ein chirales Material wird dieser Ansatz in [36] genutzt. Zur effektiven Berechnung der gestreuten Felder wird dabei eine Randelementmethode herangezogen, die lediglich die Diskretisierung der Metalloberflächen erfordert. Das gleiche Material wird in [37] untersucht, jedoch auf Basis der Dipolpolarisierbarkeit der chiralen Einschlüsse. In beiden Fällen ist das entsprechende Referenzvolumen eine Kugel, da sich deren gestreute Felder für den abschließenden Vergleich schnell berechnen lassen. Die aufgeführten Literaturbeispiele berücksichtigen nicht den interessanten Fall der Resonanz der Einschlüsse. Zudem lassen sich durch das kugelförmige Referenzvolumen die Eigenschaften einer Schicht, ähnlich wie im Fall der Mischformeln, nur bedingt ableiten.

Ziel und Gliederung dieser Arbeit

Die gegenseitige Kopplung in Strukturen, gebildet aus kleinen metallischen Helices, ist noch nicht vollends verstanden. Zudem ist die schichtförmige Anordnung bisher nur indirekt über die Mischformeln berücksichtigt worden.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Streuverhalten der Helices in Schichten mit einer vorgegebenen Ordnung zu untersuchen. Der Übergang von einer in zwei Dimensionen rein periodisch aufgebauten Schicht zum Fall der Regellosigkeit (chirales Material) soll fließend erfolgen, um den Raum möglicher Konstellationen systematisch abzudecken. Für ein physikalisches Verständnis der gegenseitigen Kopplungen der Grundbausteine bietet sich die Formulierung der Interaktion auf Basis von Multipolfeldern an. Hierfür muss eine geeignete Streutheorie aufgestellt werden. Der Einfluss der entsprechenden Multipolmomente soll frequenzabhängig, den Resonanzfall inbegriffen, quantifiziert werden.

Im folgenden Kapitel werden zunächst einige theoretische Grundlagen dargestellt. Diese umfassen vor allem die Darstellung einer Stromverteilung durch Multipolmomente, die Eigenschaften der entsprechenden Streufelder und die Repräsentation gegenseitiger Kopplungen mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. Eine Voraussetzung zur Beschreibung der Interaktion ist die Kenntnis der für jeden Streukörper charakteristischen Transfer-Matrix, die, wie erarbeitet wird, die Multipolpolarisierbarkeiten bzw. den Zusammenhang zwischen anregendem Feld und gestreuten Multipolfeldern darstellt.

Die Einbeziehung von Multipolmomenten beliebig hoher Ordnung in die Transfer-Matrix einer Helix wird in Kapitel drei diskutiert. Die Herleitung basiert auf der Lösung für den Strom auf der Oberfläche einer einzelnen Helix im freien Raum. Das Modell wird durch einen Vergleich mit einem frei erhältlichen Computerprogramm verifiziert. Es wird ebenfalls beleuchtet, wie gut das Streufeld einer einzelnen Helix in Abhängigkeit von der Entfernung durch Multipole einer bestimmten Ordnung approximiert wird. Untersuchungen zur Interaktion zweier Helices geben weitere Aufschlüsse zu Art und Ordnung der zu berücksichtigenden Multipole.

Das vierte Kapitel hat die Implementierung periodischer Randbedingungen zum Thema. Hier wird die Formulierung der Wechselwirkungen aus Kapitel eins angepasst. Es wird zudem gezeigt, wie ein elektrisch leitender metallischer Schirm, wie er z.B. bei Absorbern Anwendung findet, implementiert werden kann. Vergleiche mit Simulationsergebnissen aus einem kommerziell erhältlichen Programmpaket und eine erste Studie zum Streuverhalten streng periodischer Schichten runden das Kapitel ab.

Für Schichten, die nicht streng periodisch aufgebaut sind, wird ein Mittelungsansatz ähnlich dem unter „Modellierung“ angeführten Ansatz gewählt. So werden die Ergebnisse

mehrerer periodischer Schichten mit zufällig gewählten Einheitszellen gemittelt. Kapitel fünf gibt schließlich Aufschluss darüber, wie groß die Einheitszelle sein muss bzw. wie viele Helices in einer Einheitszelle platziert sein müssen, um konsistente Ergebnisse zu erhalten. Die Untersuchungen in Kapitel fünf sind zugleich Ausgangspunkt der im anschließenden Kapitel untersuchten mehrlagigen Schichten und Materialien. Hier werden Variationen der Positionen und der Orientierung der Einschlüsse untersucht. Für den Fall, dass die Anwendung effektiver Materialparameter durch eine gewisse Mindestdicke der Schicht denkbar erscheint, wird stichprobenhaft geprüft, unter welchen Umständen und mit welchen Restfehlern Mischformeln zur Charakterisierung herangezogen werden können.

Bevor die Arbeit mit einer Zusammenfassung schließt, werden in Kapitel sieben einige Messungen an ausgewählten Schichten vorgestellt, die das Modell und die enthaltene Mittelungstheorie erhärten sollen. Die Einbeziehung von Herstellungstoleranzen der Helices nimmt dabei einen wichtigen Platz ein.

2 Kugelwellenentwicklungen

Dieses Kapitel erläutert einige theoretische Grundlagen zum Verständnis der im folgenden Kapitel vorgestellten Methodik. Ein Grundbaustein der Theorie ist die Lösung der quellenfreien Feldgleichungen in Kugelkoordinaten. Darauf aufbauend wird die Verknüpfung der anregenden Quellen mit den zugehörigen Streufeldern auf Basis der Multipolmomente besprochen. Die Eigenschaften und Vorteile einer solchen Zerlegung werden illustriert. Dabei helfen mathematische Theoreme, die an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber nur prinzipiell und ohne genaue mathematische Herleitung aufgeführt werden. Sie werden jedoch im Anhang ausführlich diskutiert. Die Darstellung der Interaktion mehrerer Streukörper führt am Ende des Kapitels zum Begriff der Transfer-Matrix.

2.1 Allgemeine Lösung

Bei allen Betrachtungen dieser Arbeit wird der eingeschwungene Zustand harmonischer Zeitabhängigkeit der Art $\text{Re}\{e^{j\omega t}\}$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Zeit t zugrunde gelegt. Zeitabhängige Größen werden folglich durch komplexe Phasoren beschrieben. Die Maxwell'schen Gleichungen lauten für diesen Fall

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{J}}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = q, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0. \quad (2.4)$$

In obigen Gleichungen treten die elektrische Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ und die mit ihr über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -j\omega q \quad (2.5)$$

verknüpfte elektrische Ladungsdichte q als Quelle für die elektrische und magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ auf. Vektorielle Größen werden hierbei durch einen Unterstrich hervorgehoben. Analog bezeichnen im Verlauf der Arbeit auftretende Mehrfachunterstreichungen Tensoren entsprechender Ordnung. Die zu den elektrischen Quellen dualen magnetischen

Größen sind in den Gleichungen (2.1)-(2.4) nicht aufgeführt. Sie stellen im Prinzip Ersatzgrößen dar, auf die im Rahmen dieser Arbeit verzichtet werden kann. Ferner wird vorausgesetzt, dass keine freien Ladungen vorhanden sind, d.h. es gilt $q = 0$.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, dass in dieser Arbeit ausschließlich Streukörper betrachtet werden, die von einem isotropen, linearen und homogenen Medium wie z.B. Luft umgeben sind. Die elektromagnetischen Eigenschaften eines solchen Mediums werden durch die skalare Permittivität ε und Permeabilität μ in den Materialgleichungen

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{D}} &= \varepsilon \underline{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{B}} &= \mu \underline{\mathbf{H}} = \mu_0 \mu_r \underline{\mathbf{H}},\end{aligned}\tag{2.6}$$

also in der Verknüpfung der Feldstärken mit den entsprechenden Flussdichten $\underline{\mathbf{D}}$ und $\underline{\mathbf{B}}$, berücksichtigt. Es gilt $\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$ und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$. Anzumerken ist, dass die relative Permittivität $\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$ und die relative Permeabilität $\mu_r = \mu'_r - j\mu''_r$ im Allgemeinen frequenzabhängig sind. Dielektrische und magnetische Verluste werden durch einen negativen Imaginärteil der Materialparameter ε und μ modelliert. Ein passives Medium wird folglich durch $\varepsilon''_r \geq 0$ und $\mu''_r \geq 0$ beschrieben.

Für Punkte im Raum, die quellenfrei sind (d.h. $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{0}}$), erhält man aus den Gleichungen (2.1)-(2.6) die Wellengleichung für das elektrische und magnetische Feld [38]:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} &= 0, \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die Wellenzahl k ist gegeben durch $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Wie später noch erläutert wird, erweist sich für die in dieser Arbeit angestrebten Untersuchungen die Wahl von Kugelkoordinaten (Bild 2.1) als vorteilhaft. Mögliche Lösungen homogener Differentialgleichungen der Form aus Gleichung (2.7) in Kugelkoordinaten sind Vektorwellenfunktionen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$, für die gilt [39]:

$$\underline{\mathbf{N}}_{n,m} = \frac{1}{k} \nabla \times \underline{\mathbf{M}}_{n,m},\tag{2.8}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{n,m} = \frac{1}{k} \nabla \times \underline{\mathbf{N}}_{n,m}\tag{2.9}$$

und

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{N}}_{n,m} &= \frac{z_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\phi} \underline{\mathbf{e}}_r \\ &+ \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [rz_n(kr)] \left[e^{-jm\phi} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \underline{\mathbf{e}}_\theta - e^{-jm\phi} \frac{jm P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \underline{\mathbf{e}}_\phi \right],\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{n,m} = z_n(kr) e^{-jm\phi} \left[-\frac{jm}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \underline{\mathbf{e}}_\theta - \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \underline{\mathbf{e}}_\phi \right].\tag{2.11}$$

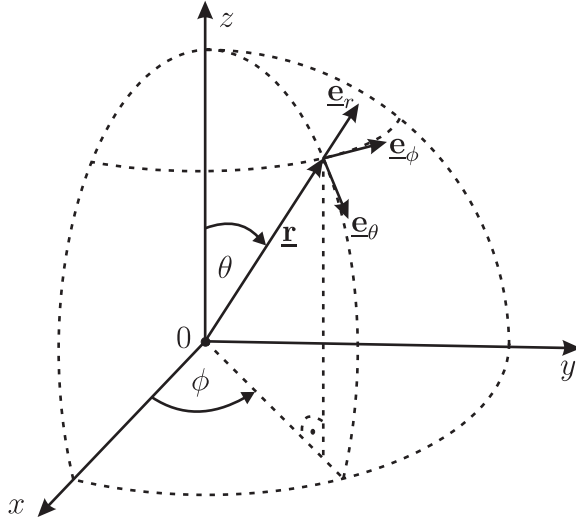


Bild 2.1: Die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) und die zugehörigen Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$.

Die Abhängigkeit der im Folgenden auch vereinfachend „Kugelwellen“ genannten Felder $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ von der θ -Koordinate wird durch die sogenannten zugeordneten Legendre-Polynome P_n^m (Definition wie in [39]) beschrieben. Für $|m| > n$ ist $P_n^m = 0$, unabhängig vom Argument. In der obigen analytischen Lösung stehen die $z_n(kr)$ stellvertretend für die Art der verwendeten sphärischen Funktion [40]. Im mathematischen Sinn erfüllen $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ die Gleichung (2.7) für jede sphärische Funktion. Soll das betrachtete Gebiet jedoch den Ursprung enthalten, so können nur mit sphärischen Besselfunktionen $j_n(kr)$ gebildete Wellenfunktionen zur Beschreibung herangezogen werden. Sie führen auf gegenläufige, gedämpfte (für k komplex) Wellen und sind im Gegensatz zu sphärischen Hankelfunktionen nicht singular im Ursprung. Für den Fall, dass Strahlungsphänomene untersucht werden, eignen sich nur sphärische Hankelfunktionen zweiter Art $h_n^{(2)}(kr)$. Die damit modellierten Wanderwellen in positiver r -Richtung verschwinden für $r \rightarrow \infty$. Zur Unterscheidung erhalten die Kugelwellen von nun an die Bezeichnung $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^J$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^J$ für $z_n(kr) = j_n(kr)$ bzw. $\underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H$ und $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H$ für $z_n(kr) = h_n^{(2)}(kr)$.

Es lässt sich zeigen, dass die Kugelwellen eine vollständige Basis des divergenzfreien Lösungsraumes der Wellengleichung (2.7) bilden. Zudem gilt: $\underline{\mathbf{M}}_{0,0} = \underline{\mathbf{N}}_{0,0} = \mathbf{0}$. Das abgestrahlte elektrische Feld außerhalb eines Gebietes, welches alle Quellen einschließt, kann folglich immer durch die Linearkombination

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\mathbf{r}) + b_{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\mathbf{r})) \quad (2.12)$$

mit den skalaren Entwicklungskoeffizienten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ dargestellt werden. Aus den

Gleichungen (2.3) und (2.9) folgt mit den gleichen Koeffizienten für das magnetische Feld:

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{jk}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{n,m} \underline{\mathbf{M}}_{n,m}^H(\mathbf{r}) + b_{n,m} \underline{\mathbf{N}}_{n,m}^H(\mathbf{r})). \quad (2.13)$$

Die sphärische Vektorwellenfunktion $\underline{\mathbf{M}}_{n,m}$ besitzt keine radiale Komponente. Zur Ausbreitungsrichtung transversal-elektrische (TE) Feldverteilungen werden folglich durch $b_{n,m} \neq 0$ und $a_{n,m} = 0$ repräsentiert. Für transversal-magnetische (TM) Felder gilt $a_{n,m} \neq 0$ und $b_{n,m} = 0$.

2.2 Quellen von Kugelwellen

In dieser Arbeit werden ausschließlich passive Strukturen betrachtet. Bei Anregung durch eine einfallende Feldverteilung fließen – zur Erfüllung der Randbedingungen – Ausgleichsströme. Das Gesamtfeld ergibt sich aus der Überlagerung des einfallenden und des abgestrahlten Feldes. Letzteres wird fortan als Streufeld bezeichnet.

Ein Weg zur Bestimmung des Streufeldes führt über das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$. Am Ort \mathbf{r} errechnet es sich aus der gewichteten Integration der elektrischen Stromdichte über alle Quell-Koordinaten \mathbf{r}' im Volumen V' [41]:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.14)$$

Für das Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ lässt sich ebenfalls eine Wellengleichung der Form aus Gleichung (2.7) herleiten, so dass es, laut den Überlegungen des vorherigen Abschnitts, ebenfalls als Kombination von Kugelwellen darstellbar ist. Angenommen das Vektorpotential liegt entwickelt nach Kugelwellen vor, lässt sich das gestreute magnetische Feld leicht aus dem Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad (2.15)$$

und Gleichung (2.9) herleiten. Das entsprechende elektrische Feld folgt durch Koeffizientenvergleich der Gleichungen (2.12) und (2.13).

Die angesprochene Entwicklung des magnetischen Vektorpotentials nach Kugelwellen ist aus Gleichung (2.14) nicht direkt ersichtlich, zumal das Integral für jeden Beobachtungspunkt \mathbf{r} neu ausgewertet werden muss. Ferner ist zu beachten, dass die Vektorwellenfunktionen $\underline{\mathbf{M}}$ und $\underline{\mathbf{N}}$ zwar eine vollständige, aber nicht die einzig mögliche Basis der Lösungen bilden. Die Auswertung des Integrals führt also nicht zwangsläufig zu einem Ausdruck

des magnetischen Vektorpotentials $\underline{\mathbf{A}}$ in Kugelwellen. Die Tatsache, dass die Abbildung $\underline{\mathbf{H}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$ nicht eindeutig ist, zeigt jedoch, dass eine Kugelwellenentwicklung von $\underline{\mathbf{A}}$ für eine Darstellung der Felder gemäß Gleichungen (2.12) und (2.13) gar nicht zwingend erforderlich ist. In jedem Fall stellt sich das Problem, wie man das berechnete Vektorpotential auftrennt, um die Koeffizienten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ zu erhalten. Abhilfe schafft eine Taylor-Reihenentwicklung der skalaren Funktion

$$g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}') = \frac{e^{-jk|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|}}{4\pi|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'|} = g(\underline{\mathbf{r}}, 0) + \nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')|_{\underline{\mathbf{r}}'=0} \cdot \underline{\mathbf{r}}' + \dots, \quad (2.16)$$

die hier nur bis zum zweiten Glied dargestellt ist. Als Entwicklungspunkt wurde hier der globale Ursprung gewählt. Prinzipiell ist er beliebig wählbar, für die folgende Betrachtung erweist sich diese Wahl jedoch als sehr nützlich. Setzt man den Ausdruck aus Gleichung (2.16) in (2.14) ein, ergibt sich nach einigen Umformungen [42, Kap. 2]:

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{r}}) = g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{0}})j\omega\underline{\mathbf{p}}^e - \frac{1}{\mu}\nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')|_{\underline{\mathbf{r}}'=0} \times \underline{\mathbf{p}}^m + \frac{1}{2}j\omega\nabla g(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}')|_{\underline{\mathbf{r}}'=0} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^e + \dots, \quad (2.17)$$

wobei in obiger Gleichung das elektrische und magnetische Dipolmoment $\underline{\mathbf{p}}^e$ bzw. $\underline{\mathbf{p}}^m$ und das elektrische Quadrupolmoment $\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e$ gemäß

$$\underline{\mathbf{p}}^e = \frac{1}{j\omega} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') dV', \quad (2.18)$$

$$\underline{\mathbf{p}}^m = \frac{\mu}{2} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{r}}' \times \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') dV', \quad (2.19)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{q}}}^e = \frac{1}{j\omega} \iiint_{V'} (\underline{\mathbf{r}}' \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') + \underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}') \underline{\mathbf{r}}') dV', \quad (2.20)$$

auftreten. Höhere Momente ergeben sich, wenn weitere Terme der Entwicklung in Gleichung (2.16) berücksichtigt werden.

Die Multipolmomente sind einzig von der Quellenverteilung abhängig. Die obige Analyse gestattet zudem die Interpretation der Multipolmomente als infinitesimal kleine und am Ursprung positionierte Punktquellen. Eine Separation des Ausdrucks für das Vektorpotential nach Ursache (Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}(\underline{\mathbf{r}}')$) und Wirkung am Beobachtungspunkt $\underline{\mathbf{r}}$ ist somit geglückt. Die aus dem Vektorpotential folgenden, gestreuten elektromagnetischen Felder können mit Hilfe von Gleichung (2.15) und getrennt nach den einzelnen Termen der Entwicklung (2.17) berechnet werden. Aus dem ersten Term folgt durch einen einfachen Vergleich, dass lediglich ein Entwicklungskoeffizient

$$a_{1,0} = \frac{k^3 p_z^e}{j4\pi\epsilon} \quad (2.21)$$