



Torsten Fabel (Autor)

Ein Ingenieurmodell für den rißfortschritt in hochleistungsgefrästen (HPC) Panels



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/1259>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

1 Einleitung und Zielsetzung

Seit der Entwicklung des Luftverkehrs und dem Einsatz immer größerer Luftfahrzeuge zum Transport von Personen und Fracht hat sich an der prinzipiellen Bauweise der Flugzeuge nichts geändert. Die einzelnen Bauteile sind überwiegend durch Niete miteinander verbunden. Mit dem Einsatz strahlgetriebener Flugzeuge mit Beginn der 50er Jahre und der größeren Flughöhe ergab sich, die Rumpfröhre mit Innendruck zu belasten.

Ein entscheidendes Ereignis, nämlich der Absturz zweier *Comet*-Flugzeuge innerhalb kurzer Zeit, führte dazu, daß man sich mit dem Problem der Ermüdung beschäftigen mußte. Daraus resultierten neue Zulassungsvorschriften und die Notwendigkeit, sich schon bei der Auslegung künftiger Flugzeuge mit dem *Damage-Tolerance-Verhalten* auseinanderzusetzen.

Man erkannte sehr schnell, daß das Betriebsfestigkeitsverhalten von Strukturen sehr stark von der Ribinitiation und dem Ribfortschritt bei schwingender Belastung abhängt und somit einen großen Einfluß auf die Lebensdauer eines Bauteils ausübt. Zum anderen ist die Betrachtung der Restfestigkeit sehr wichtig, um eine Aussage über die Sicherheit eines geschädigten Bauteils treffen zu können. Einhergehend kann man mit diesen Untersuchungen Aussagen dahingehend machen, ab wann eine Bauteilschädigung zu instabilem Ribwachstum führt, welches im Totalversagen der Struktur mündet.

Die herkömmliche, seit Jahrzehnten erprobte und bewährte differentielle Bauweise, d. h. verschiedene Teilstrukturen werden mittels mechanischer Befestigungselemente zu einem komplexen Bauteil zusammengesetzt, wirkte sich weitgehend positiv auf einen Schaden und damit auf das *Damage-Tolerance-Verhalten* aus. Auf der anderen Seite war es notwendig, Mindestwandstärken festzulegen, um eine tragfähige Verbindung zwischen den Bauteilen zu gewährleisten. Dies führt dazu, daß die Wandstärke alleine durch das Fügeverfahren und nicht aus Festigkeitsgründen bestimmt wird, so daß es zu einer ungenügenden Materialausnutzung und damit zu unnötig schweren Bauteilen kommt. Ein weiterer Grund, weshalb man differentielle Strukturen nutzte, war, daß mit den ersten Zerspannungsmaschinen nur relativ einfache, wenig komplexe Bauteile gefertigt werden konnten und die zu fertigenden minimalen Wandstärken von der Bauteilgeometrie abhingen.

Heute können eine Vielzahl von Strukturen im Flugzeugbau durch den Einsatz neuer, hochleistungsfähiger Fräsmaschinen als komplexe, integrale Strukturen hergestellt werden, bei dem z. B. das **High Performance Cutting (HPC)** als Fertigungsverfahren eingesetzt wird. Die Leistungsfähigkeit dieser Maschinen geht so weit, daß selbst Nietnachbildungen gefräßt werden können.

Die Verwendung integraler Strukturen läßt ein großes Einsparpotential hinsichtlich der Flugzeugmasse erahnen, wenn man bedenkt, daß beispielsweise für einen einzigen Airbus mehr als zwei Millionen Niete unterschiedlichster Typen benötigt werden [38]. Nimmt man einmal an, daß jeder Niet durchschnittlich 1,5 g wiegt, so beträgt alleine die Masse der Niete ca. drei Tonnen. Wenn man hypothetisch diese Masse um fünf Prozent reduzieren könnte und das Vergrößerungsgesetz berück-

sichtigt, ist es nicht verwunderlich, daß nicht nur Kosten für die Teilefertigung reduziert, sondern auch Masse eingespart werden kann, die das Luftfahrzeug noch ökonomischer machen. Jedoch gilt der Einsatz integraler Strukturen im Flugzeugbau hinsichtlich verschiedener Aspekte als problematisch, da sich unter anderem die Charakteristik der Rißausbreitung von der herkömmlichen Bauart unterscheidet.

Für eine Vielzahl von Rißkonfigurationen ist der Korrekturfaktor β bekannt, auch gibt es Lösungen, um versteifte Strukturen zu analysieren. Diese beziehen sich jedoch auf genietete Versteifungen, bei denen die Exzentrizität infolge der einseitig befestigten Versteifungselemente vernachlässigt wird. Dieses Vorgehen ist in Kapitel 3 ausführlich dargestellt. Für integral versteifte Strukturen ist das Rißfortschritts- und Restfestigkeitsverhalten aus Experimenten bekannt, mit ingenieurtechnischen Möglichkeiten, ohne Verwendung der Methoden der Finiten Elemente (FEM), ist dieses jedoch nicht vorherzusagen.

In dieser Arbeit soll nun eine Möglichkeit aufgezeigt werden, mit der die Spannungsintensitätsfaktoren (SIF) integraler Strukturen unter Berücksichtigung von Exzentrizitäten berechnet werden können. Mit Hilfe dieser SIF'en kann dann unter Verwendung der bekannten Rißfortschrittsgesetze der Rißfortschritt berechnet werden, um so eine Aussage über das Rißwachstum und die Restfestigkeit zu erhalten. Diese Aussagen sollen helfen, Integralstrukturen hinsichtlich ihres *Damage-Tolerance-Verhaltens* schon während des Flugzeugentwurfes besser zu beurteilen, um nicht erst durch die Ergebnisse teurer und langwieriger Bauteilversuche diesem Problem begegnen zu können.

2 Stand der Forschung

2.1 Lineare Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie kurz dargestellt. Auf eine Herleitung der Gleichungen an dieser Stelle soll verzichtet werden, da sie in einschlägiger Literatur, wie z.B. in Timoshenko [37] und Kossira [19], nachgeschlagen werden können. Weiterhin wird die Volumenkraft \underline{X} vernachlässigt und es werden die Verhältnisse im 2-D-Fall aufgezeigt. Zum besseren Verständnis werden noch einmal die Voraussetzungen und Annahmen dargestellt, auf denen die Theorie beruht.

Die lineare Elastizitätstheorie beruht auf zwei Voraussetzungen:

- Die Verschiebungskomponenten u , v , w sind klein gegenüber allen Abmessungen des betrachteten Körpers.
- Die Ableitungen der Verschiebungen nach den Koordinaten x , y , z sind sehr viel kleiner als 1, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \ll 1; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \ll 1$$

Mit diesen Bedingungen ergeben sich weiter folgende zulässige Annahmen:

- Das körperfeste Koordinatensystem gilt auch unter Last als unverändert.
- Belastungs- und Verformungsgrößen dürfen nach dem Superpositionsprinzip aufgespalten oder überlagert werden.
- Randbedingungen und Gleichgewichtsbedingungen können am unverformten Körper angesetzt bzw. aufgestellt werden.

2.1.1 Grundgleichungen

In der linearen Elastizitätstheorie existieren drei miteinander verbundene Gleichungsgruppen, die sich wie folgt gliedern:

- Gleichgewichtsbedingung
- Kinematische Beziehungen (Verzerrungs-Verschiebungsbedingung)
- Stoffgesetz

Für die Indizierung der Spannungen und Verzerrungen in diesem Kapitel soll folgende Konvention gelten:

- Der erste Index bezeichnet die Ebene.
- Der zweite Index kennzeichnet die Richtung der Spannungskomponente.

Gleichgewichtsbedingung

Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich aus dem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Volumenelement mit den Kantenlängen dx , dy , dz . Da nur der 2-D-Fall betrachtet werden soll, die x-y-Ebene, wird die dritte Dimension als konstante Dicke dz angenommen, die sich aus den Gleichungen herauskürzt.

Unter Vernachlässigung der Volumenkräfte ergibt sich das Kräftegleichgewicht in x-Richtung zu:

$$\sum F_x = 0 = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2-1)$$

Analog dazu ergibt sich für die y-Richtung:

$$\sum F_y = 0 = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (2-2)$$

Aus dem Momentengleichgewicht und unter der Annahme eines infinitesimal kleinen Elements ergibt sich somit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-3)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich unter Verwendung eines Spannungsvektors folgender Ausdruck

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{D^T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-4)$$

bzw.

$$0 = \underline{\underline{D^T}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2-5)$$

Dabei wird $\underline{\underline{D^T}}$ als Operatormatrix bezeichnet.

Differentialgleichungen der Kinematik (Verzerrungs-Verschiebungsbedingung)

Der Begriff der Verzerrung wird allgemein genutzt, wenn man von Dehnungen und Gleitungen spricht. Die zuvor dargestellten Spannungen rufen Verschiebungen und Verzerrungen hervor. Unter Vernachlässigung nichtlinearer Terme ergibt sich für die x-Richtung

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2-6)$$

und für die y-Richtung

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-7)$$

Für die Schubverzerrung ergibt sich

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-8)$$

In Matrixschreibweise können die Beziehungen unter Verwendung von Verzerrungs- und Verschiebungsvektoren wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\underline{u}} \quad (2-9)$$

bzw.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{u} \quad (2-10)$$

Aus den Gleichungen (2-9) und (2-10) ergibt sich, daß mehr Verzerrungskomponenten als Verschiebungskomponenten vorhanden sind. Um eine eindeutige Beziehung für die Verschiebungen zu erhalten, muß eine weitere Beziehung geschaffen werden, die man Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbedingung nennt. Für den hier betrachteten 2-D-Fall (x-y-Ebene) bleibt folgende Verträglichkeitsbeziehung erhalten:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (2-11)$$

Dieser ist durch eine ebene Dehnung mit $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ gekennzeichnet.

Stoffgesetz

Den einfachsten Zusammenhang findet man im 1-D-Fall und ist allgemein als *Hookesches Gesetz* in der Technischen Mechanik bekannt und lautet:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2-12)$$

Entsprechendes muß auch im mehrdimensionalen Zustand gelten. Aus diesem lassen sich besondere Stoffgesetze herleiten, von denen der *ebene Spannungszustand* der wohl wichtigste ist. Auch hier gelten die dargestellten Zusammenhänge wieder für die x-y-Ebene.

Ebener Spannungszustand (ESZ)

Der ESZ ist als Sonderfall zu verstehen, bei dem die Abmessung in z-Richtung (Dickenrichtung) sehr viel kleiner ist als die Abmessungen in den anderen Richtungen. Daher kann angenommen werden, dass folgende Spannungskomponenten zu Null werden:

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2-13)$$

Für den ebenen Spannungszustand ergibt sich in Matrixschreibweise folgendes System:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (2-14)$$

Die inverse Beziehung lautet dann

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E^{-1}=F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-15)$$

Das Gegenteil des *ebenen Spannungszustandes* ist der *ebene Dehnungszustand*, der im folgenden kurz dargestellt ist.

Ebener Dehnungs- bzw. Verzerrungszustand (EVZ)

Der EVZ ist ein Sonderfall, bei dem die folgenden Dehnungen/Verzerrungen zu Null angenommen werden können:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (2-16)$$

Dies ist dann der Fall, wenn es sich um dicke Bauteile handelt, bei denen angenommen werden darf, daß eine Dehnungsbehinderung quer zur Ebene auftritt. In Matrixschreibweise läßt sich dann folgendes schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E^{-1}=F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \quad (2-17)$$

Die inverse Beziehung lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \quad (2-18)$$

2.1.2 Lösungsmethoden

Eine geschlossene Lösung, die alle Gleichungsgruppen vollständig berücksichtigt, ist selten. Für ebene, zweidimensionale Probleme, auch *Scheibenproblem* genannt, ist speziell die Methode der Spannungsfunktionen sehr vorteilhaft. Es gibt mehrere Arten von Spannungsfunktionen (z. B. die *Airysche Spannungsfunktion*); hier soll im folgenden die komplexe Spannungsfunktion dargestellt werden, zum einen die allgemeine Funktion von *Kolosov* und *Muschelischwili*, zum anderen die spezielle, komplexe Spannungsfunktion nach *Westergaard*.

Komplexe Spannungsfunktion von Kolosov und Muschelischwili

Dieses Lösungsverfahren stellt nach Hahn [15] das wichtigste dar, um ebene Elastizitätsprobleme bei kompliziert berandeten Körpern zu lösen. Die Entwicklung stammt von *Kolosov* aus dem Jahre 1909 und wurde von *Muschelischwili* weiter ausgebaut und auf eine Vielzahl elastizitätstheoretischer Probleme angewendet, [21]. Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten werden dabei als Funktion der komplexen Variablen

$$z = x + iy = r e^{i\varphi} \quad (2-19)$$

bzw. der konjugiert komplexen Variablen

$$\bar{z} = x - iy = r e^{-i\varphi} \quad (2-20)$$

aufgefaßt. Es läßt sich zeigen, daß Lösungen der Grundgleichungen des ESZ und EVZ aus nur zwei komplexen Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ konstruiert werden können. Der Zusammenhang von Spannung und Verschiebung mit ihren kartesischen Komponenten ist durch die *Kolosovsche Formeln* gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)] \\ 2G(u + iv) &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \right\} \quad (2-21a)$$

mit

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ \left(\frac{3 - \nu}{1 + \nu} \right) & \text{ESZ} \end{cases} \quad (2-21b)$$

Komplexe Spannungsfunktion von Westergaard

Die komplexe Spannungsfunktion von *Westergaard* stellt einen Spezialfall der allgemeinen Lösung von *Kolosov* und *Muschelischwili* dar, die aus einer einzigen komplexen Spannungsfunktion Ψ besteht. Für diese gelten mehrere Einschränkungen. Insbesondere muß der betrachtete RiB auf der Achse $y = 0$ liegen und das Problem muß symmetrisch zur x-Achse sein.

Diese spezielle Funktion Ψ lautet dann:

$$\Psi = \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (2-22)$$

Dabei hat die Funktion Z folgenden Aufbau:

$$Z(z) = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z \quad (2-23)$$

mit der komplexen Variablen

$$z = x + iy$$

Die Funktion $Z(z)$ ist eine analytische Funktion der komplexen Variablen z und es muß gelten

$$\frac{d \bar{Z}}{d z} = \bar{Z} \quad \frac{d \bar{Z}}{d z} = Z \quad \frac{d Z}{d z} = Z' \quad (2-24a), (2-24b), (2-24c)$$

Weiterhin muß sie den *Cauchy-Riemannsches*-Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial y} = \operatorname{Re} \frac{dZ}{dz} \\ \frac{\partial \operatorname{Im} Z}{\partial x} &= -\frac{\partial \operatorname{Re} Z}{\partial y} = \operatorname{Im} \frac{dZ}{dz} \end{aligned} \quad (2-25)$$

Dann ergeben sich für die Spannungen folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z' \end{aligned} \quad (2-26)$$

Die Gleichungen (2-26) sind allgemeine Lösungen und liefern für jede Funktion $Z(z)$ die Spannungen. Mit diesen Gleichungen können nun verschiedene Spezialfälle berechnet werden.