

Kapitel 1

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Verfahren zusammengetragen, die sich zur Analyse quasioptischer Komponenten sowie deren Kombination zu Systemen eignen. Als Komponenten dienen hierbei Aperturstrahler, Phasenelemente, Spiegel und Gitter. Ferner wird das Problem der Synthese quasioptischer Strahlformer behandelt, deren Gegenstand es ist, geforderte Eigenschaften einzelner quasioptischer Komponenten oder Systeme zu verwirklichen. Zur Lösung dieses Problems wird ein Syntheseverfahren vorgestellt und u. a. auf ein versetzt angeordnetes Doppelspiegelsystem angewendet.

Motivation

Bereits seit Jahrzehnten wird an der Erzeugung elektromagnetischer Wellen mit hohem Leistungsgehalt im Millimeter- und Submillimeterwellenbereich geforscht. Dabei dienen in diesem Frequenzbereich häufig Röhren und Halbleiterbauelemente als Quellen.

Das Funktionsprinzip der Röhren beruht im wesentlichen darauf, daß ein Elektronenstrahl mit elektromagnetischen Feldern in Wechselwirkung tritt und dadurch die kinetische Energie des Strahles in elektromagnetische umgesetzt wird. Als typische Vertreter der Röhrentechnik seien hier die Wanderfeldröhre, das Klystron und das Gyrotron genannt, mit denen sich der interessierende Frequenzbereich bzgl. der Leistungserzeugung praktisch vollständig abdecken läßt, und das mit höchsten Ausgangsleistungen. Allerdings wird dieser Vorteil i. allg. durch die röhrentypischen Nachteile, wie der aufwendigen Betriebsumgebung mit hohen Spannungen, der Baugröße, der mechanischen Anfälligkeit, den hohen Fertigungskosten und der geringen Lebensdauer erkauft.

Im Vergleich hierzu weisen Halbleiterbauelemente die Vorteile auf, daß sie im Rahmen einer Massenproduktion äußerst kostengünstig herzustellen sind, daß sie leicht sind und ein geringes Volumen einnehmen, und daß sie kostengünstig in einer einfachen Umgebung mit nahezu unbegrenzter Lebensdauer betrieben werden können. Zur Erzeugung von Millimeterwellen

werden dazu mit Halbleiterbauelementen, ob als Zweipol, wie z. B. die Gunn- oder Lawinen-Laufzeit-Diode, oder auch Dreipol, wie bspw. der MESFET¹ oder HEMT², Oszillatoren aufgebaut. In diesen Oszillatoren werden die Halbleiterbauelemente äußerlich so beschaltet, daß sie einen negativen Widerstand aufweisen und somit als aktives Element eine Schwingung unterstützen. Jedoch ist auch bekannt, daß die erreichbare Ausgangsleistung der Halbleiterbauelemente sehr klein ist und weit unter der von Röhren bleibt. Darüber hinaus nimmt die Leistung der Halbleiterbauelemente ab dem Millimeterwellenbereich mindestens umgekehrt zur zweiten Potenz der Frequenz ab.

Trotzdem ist es möglich, von den aufgeführten Vorteilen der Halbleiterbauelemente zu profitieren, indem die Leistungen einzelner Quellen dieser Elemente möglichst effizient aufaddiert werden. Dieser Vorgang wird als Leistungsaddition bezeichnet. Dabei werden gewöhnlicherweise die resonanten von den nicht-resonanten Verfahren zur Leistungsaddition unterschieden. Bei einem resonanten Leistungsaddierer wird ein Resonator verwendet, in dem mehrere Quellen in einem Abstand der halben Wellenlänge angeordnet werden und im richtigen Takt ihre Energie einer der Eigenschwingungen des Resonators zuführen, während sich bspw. durch Verwendung eines aus Richtkopplern bestehenden Verzweigungsnetzwerkes nicht-resonante Leistungsaddierer aufbauen lassen. In beiden Fällen wachsen die in den Metallwänden entstehenden ohmschen Verluste bei einer zunehmenden Anzahl der Quellen sowie mit steigender Frequenz stark an, so daß diese klassischen Leistungsaddierer für Frequenzen oberhalb von 100 GHz ungeeignet sind.

Andererseits ist bekannt, daß die Freiraumausbreitung elektromagnetischer Wellen praktisch verlustlos erfolgt. Die ohmschen Verluste können daher vermieden werden, wenn die erzeugten Wellen zur Leistungsaddition im Freiraum *quasioptisch*³ geführt werden. Der Vorgang der Leistungsaddition und der Wellenführung im Freiraum wird im folgenden daher zusammenfassend als quasioptische Leistungsaddition bezeichnet.

Um eine quasioptische Leistungsaddition mehrerer Halbleiterquellen umzusetzen, entsteht deshalb die Notwendigkeit, die hierzu erforderlichen Komponenten auch auslegen zu können. Bei diesen Komponenten kann es sich bspw. um einzelne Spiegel oder Gitter handeln oder aber auch um deren kombinierte Anordnung zu einem quasioptischen System. Darüber hinaus besteht ein großes Interesse an dem allgemeinen Fall, in dem solch ein System auch als beliebiger quasioptischer Strahlformer ausgelegt werden kann.

¹Metal Semiconductor Field Effect Transistor

²High Electron Mobility Transistor

³ Entsprechend [Gol98] soll in dieser Arbeit unter der *Quasioptik* die Lehre von der Ausbreitung von Strahlen verstanden werden, die genügend kollimiert sind, aber, gemessen in Wellenlängen, nur eine geringe Ausdehnung transversal zur Ausbreitungsrichtung aufweisen. Die Quasioptik deckt somit gewissermaßen den Bereich zwischen der Geometrischen Optik und der Lehre von der Beugung ab.

Vorarbeiten und Ziel der Arbeit

Bei einer quasioptischen Leistungsaddition im Millimeter- und Submillimeterwellenbereich wird die Auslegung der Komponenten noch durch das Problem des Elementabstandes erschwert. Die Halbleiterquellen regen jeweils Antennen an und strahlen über jene ihre Leistung in den Freiraum ab. Regen die Quellen die Antennen mit der richtigen Amplitude und der richtigen Phase an und werden darüber hinaus die Antennen richtig ausgelegt und ausgerichtet in einem Gruppenstrahler angeordnet, so läßt sich eine sehr effiziente quasioptische Leistungsaddition im Freiraum vornehmen. Der zu erzielende Wirkungsgrad hängt entscheidend vom Abstand L benachbarter Antennen ab. Für $L > \lambda/2$, wobei λ die Wellenlänge bezeichne, entstehen unerwünschte Gitterkeulen, die zu nicht hinnehmbaren geringen Wirkungsgraden führen, während sich Wirkungsgrade von nahezu 100% erzielen lassen für den Fall, daß $L \leq \lambda/2$ gilt. Im letzteren Fall hat dies aber wiederum zur Folge, daß der Abstand L der Antennen die Skalierbarkeit zu höheren Betriebsfrequenzen stark beeinträchtigt. Denn für die Abfuhr der Wärme der einzelnen Quellen ist es notwendig, ausreichend Fläche für Wärmesenken zur Verfügung zu stellen.

In [Sha98] wurde der Grundstein durch ein nicht-resonantes Verfahren gelegt, mit dem sich das angesprochene Problem des Elementabstandes L lösen läßt. Das dort vorgestellte Verfahren basiert im wesentlichen darauf, daß die von einem unendlich ausgedehnten, periodischen Gruppenstrahler ausgesendeten Felder mit einem im Nahfeld plazierten, dielektrischen Phasengitter so korrigiert werden, daß die gesamte Leistung in einer ebenen Welle geführt wird. Darüber hinaus wurde in [Sha98] auch gezeigt, daß sich dieses Verfahren mit dem der Holographie zugrunde liegenden Prinzip erklären läßt. Zudem wurde schließlich anhand eines Demonstrators in Parallelplattentechnik dieses Verfahren experimentell verifiziert.

In [Höf02] wurde das Verfahren aus [Sha98] weitergehend untersucht und dessen Bezug zum Talbot-Effekt herausgearbeitet. Als Ergebnis wurden in [Höf02] Skalierungsregeln gefunden, die einen näherungsweise wellenlängenunabhängigen Entwurf von Leistungsaddierern erlauben, die aus einem periodischen Gruppenstrahler und einem Phasengitter bestehen. In einem praktischen Aufbau aber hat der Leistungsaddierer nur eine endliche Ausdehnung, so daß auch nur eine räumlich begrenzte, ebene Welle ausgangsseitig entsteht, die es in einer Auskoppelschaltung weiterzuverarbeiten gilt. Dabei ist man daran interessiert, daß solch eine Auskoppelschaltung diese Welle begrenzter Ausdehnung in einen Gaußstrahl oder vielleicht in eine Grundwelle, die sich zum Einkoppeln in einen Hohlleiter eignet, umwandelt. In [Höf02] wurden u. a. für eine Zeile mit fünf Quellen, d. h. einem 1×5 -Leistungsaddierer, zwei Auskoppelschaltungen, bestehend aus zwei speziellen Transmissionslinsen und zwei zueinander versetzten Spiegeln, aufgebaut. Die gewünschte Leistungsaddition, einschließlich der Auskopplung, wird also insgesamt durch eine quasioptische Gesamtschaltung erreicht, die aus drei Komponenten besteht: Einem Gitter sowie zwei Linsen bzw. zwei Spiegeln. Zur Bestimmung der

Oberflächen der Linsen und Spiegel wurde ein neues Verfahren angewendet, das auf der aus der Optik bekannten Geometrischen Transformation [Bry74] beruht, und im Falle der Spiegel mit einer anschließenden Optimierung von 26 Parametern kombiniert wird. Die beiden Entwürfe wurden bei 150 GHz aufgebaut und mit Hilfe eines vektoriellen Feldmeßsystems verifiziert.

Die in [Sha98] und [Höf02] vorgestellten Verfahren zur quasioptischen Leistungsaddition werden in dieser Arbeit um ein neues ergänzt. Faßt man die quasioptische Leistungsaddition als einen Spezialfall der quasioptischen Strahlformung auf, so lautet das Ziel dieser Arbeit wie folgt: *Es gilt, ein effizientes und zugleich flexibles Syntheseverfahren zur quasioptischen Strahlformung zu entwickeln, das im Bereich der Millimeter- und Submillimeterwellen anwendbar ist.* Es wird sich zeigen, daß sich das entwickelte Verfahren allgemein anwenden läßt. Zusätzlich erlaubt es, eine Komponente, der oben angesprochenen drei, einzusparen.

Mit Synthese soll in dieser Arbeit der Entwurf quasioptischer Strahlformer, und im speziellen der Vorgang der Lösungsfindung des sich dahinter verbergenden inversen Problems, bezeichnet werden. Demzufolge wird das zugehörige direkte Problem als Analyse bezeichnet, das es zwingend zu beherrschen gilt. Denn in dem weit überwiegenden Teil der auftretenden inversen Probleme werden diese als Optimierungsprobleme umformuliert, in denen das direkte Problem häufig zu lösen ist. Auch die in dieser Arbeit gestellten Syntheseaufgaben lassen sich nicht durch direkte Verfahren lösen, weshalb sie als Optimierungsprobleme umformuliert werden. Dabei wird ein Gradientenverfahren angewendet, das sich für die betrachteten Syntheseaufgaben mit bis zu 259 200 zu bestimmenden Variablen als effektiv und äußerst effizient bewährt hat.

Inhalt der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen. In den ersten beiden Kapiteln werden die Grundlagen der Wellenausbreitung sowie Analyseverfahren zusammengetragen, um eine Vielzahl typischer quasioptischer Schaltungen bzw. Systeme berechnen zu können. Solch ein System besteht i. allg. aus einer geometrischen Anordnung aktiver und passiver Komponenten, die miteinander in Wechselwirkung treten. Mathematisch gesehen ist hierzu ein Streuproblem zu lösen, das sich, abhängig von der Komplexität des Problems, oft auch nur näherungsweise lösen läßt. Zur Lösung des Streuproblems müssen sowohl die aktiven Komponenten bzw. Quellen als auch die passiven Komponenten, wie bspw. Spiegel oder Gitter, modelliert werden. Da es nun zweckmäßig ist, diese Komponenten bezüglich ihrer räumlichen Ausdehnung und Struktur zu charakterisieren, wird diesem Umstand durch eine Aufteilung in zwei Kapitel Rechnung getragen.

In Kapitel 2 werden zunächst *endliche* Komponenten betrachtet, so daß die aus ihnen resultierenden quasioptischen Systeme in der Praxis auch nur eine endliche Ausdehnung aufweisen

können. Zur Modellierung von Aperturstrahlern wird dabei das Konzept der *komplexen Punktquelle* aufgegriffen. Anhand des *Rayleigh-Sommerfeld-Integrales* und dessen numerischer Umsetzung wird anschließend die Wellenausbreitung der elektromagnetischen Felder im Freiraum behandelt. Im zweidimensionalen Fall wird zur hochgenauen Analyse von Spiegelsystemen das *Verfahren der diskreten Singularitäten* erläutert. Dieses Kapitel abschließend, wird ein neues Analyseverfahren vorgestellt, mit dem sich Spiegelsysteme im Dreidimensionalen schnell berechnen lassen. Es basiert auf der *Physikalischen Optik* und vor allem deren effizienter numerischer Umsetzung mittels des *Verfahrens der schnellen Fernfeldnäherung*.

In Kapitel 3 werden dann *periodische* Komponenten betrachtet. Die resultierenden Systeme weisen somit eine unendliche Ausdehnung auf. Die herausragende periodische Komponente ist sicherlich das Gitter, dessen allgemeine Eigenschaften deshalb in diesem Kapitel zuallererst zusammengetragen werden. Anschließend wird das zur Analyse von Rechteckgittern ideal geeignete *Verfahren der verkoppelten Wellen* behandelt. Im speziellen wird auf das Konvergenzproblem dieses weitverbreiteten Analyseverfahrens in *H-Polarisation* eingegangen und dessen Behebung durch die korrekte Anwendung der *Invertierungsregeln* von Li. Schließlich wird ein neues *Integrales Verfahren für Volumengitter* vorgestellt, das auf einer korrekten Formulierung der Maxwellschen Gleichungen im Fourier-Bereich basiert und folglich kein Konvergenzproblem aufweist. Zu den in diesem Verfahren auftretenden Integralgleichungssystemen lassen sich spezielle Rekursionsformeln finden, deren Anwendung sowohl eine rechen- als auch speichereffiziente Lösung ermöglicht.

Der zweite Teil der Arbeit handelt von der Synthese. In Kapitel 4 wird zunächst das Grundprinzip des Syntheseverfahrens anhand eines quasioptischen Systems dargelegt. Anschließend werden einige benötigte Definitionen aus der Variationsrechnung angeführt sowie auf die Klassifizierung inverser Probleme eingegangen. Der weitverbreitete *Gerchberg-Saxton-Algorithmus* und die *Analytische Strahlformung* stellen spezielle Syntheseverfahren dar, die in der Optik wohlbekannt sind. Daher sollen diese Verfahren kurz erläutert werden, bevor dann ausführlich auf die verwendeten Gradientenverfahren zur Lösung des im Syntheseverfahren formulierten Optimierungsproblems eingegangen wird. Bei den Verfahren handelt es sich zum einen um das *BFGS-Verfahren*⁴ für klein- und mitteldimensionierte Probleme und zum anderen um dessen Abänderung zum *LBFGS*⁵-Verfahren zur Behandlung von Optimierungsproblemen mit einer sehr großen Anzahl von Variablen.

In Kapitel 5 werden zur quasioptischen Strahlformung u. a. die für das Syntheseverfahren benötigten *analytischen Gradienten* in einigen Anwendungsfällen hergeleitet. Als Anwendungsfälle werden ideale Phasengitter sowie ein versetztes Doppelspiegelsystem ausgewählt. Zur Herleitung der analytischen Gradienten wird dazu auf die jeweiligen, in den Kapiteln 2

⁴Die Abkürzung BFGS rührt von den Erfindern des Verfahrens her: Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno.

⁵Das L in LBFGS steht für Limited-Memory.

und 3 behandelten, Analyseverfahren zurückgegriffen. Des weiteren wird gezeigt, wie sich Rechteckgitter als Strahlteiler und Sternkoppler auslegen lassen.

In Kapitel 6 werden die Meßergebnisse zu einigen der aufgebauten quasioptischen Strahlformer, d. h. zu einem 4×4 -Leistungsaddierer bei 65 GHz sowie zu einem 3×3 -Leistungsaddierer bei 150 GHz, geliefert. Zur Erlangung der Meßdaten ist dabei ein vektorielles Feldmeßsystem verwendet worden, dessen Aufbau, das Kapitel einleitend, kurz erläutert wird.

Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 2

Analyse endlicher Komponenten

In diesem Kapitel werden Grundlagen und Verfahren zur Analyse von Komponenten behandelt, die eine endliche räumliche Ausdehnung aufweisen. Die Komponenten, die es zu modellieren und zu analysieren gilt, sind zum einen Aperturstrahler und zum anderen Modulatoren, die bspw. in Form von Spiegeln eine Wellenfrontumwandlung vornehmen. Ein weiterer wichtiger Punkt, den es zu behandeln gilt, ist die Berechnung der Wellenausbreitung von Feldern im Freiraum unter Einhaltung Dirichletscher Randbedingungen.

2.1 Skalare Wellenausbreitung

In der elektromagnetischen Theorie werden die Komponenten des elektrischen Vektorfeldes \mathbf{E} und des magnetischen Vektorfeldes \mathbf{H} durch die Maxwell'schen Gleichungen verkoppelt. Unter skalarer Wellenausbreitung soll hier die skalare Näherung der elektromagnetischen Theorie verstanden werden. Demzufolge wird der vektorielle Charakter des elektromagnetischen Feldes vernachlässigt. Die einzelnen Komponenten des elektrischen und magnetischen Vektorfeldes werden daher unabhängig voneinander behandelt und gehorchen jeweils der Helmholtz-Gleichung in einem isotropen, homogenen Medium.

2.1.1 Komplexe Punktquelle

In quasioptischen Systemen werden Aperturstrahler häufig als Quellen elektromagnetischer Felder verwendet. Aperturstrahler weisen einen hohen Richtfaktor auf, wodurch die Beugungsverluste der quasioptischen Strahlen auf ihrem Weg zwischen den einzelnen Komponenten des Systems möglichst gering gehalten werden. Um Beugungseffekte bei der Wellenausbreitung innerhalb der quasioptischen Systeme zumindest näherungsweise zu erfassen, wird hierzu weitverbreitet die paraxiale Näherung eingeführt [Gol98]. Ferner werden anhand der paraxialen Näherung in Lehrbüchern typischerweise Gaußstrahlen behandelt. Dabei ist die Gaußstrahl-

Analyse insofern von großer Bedeutung, als daß es eine große Vielfalt an Millimeterwellen-Hornantennen gibt, die in guter Näherung Strahlen gaußförmigen Profils aussenden. Die elektromagnetische Wellenausbreitung solcher Hornantennen bzw. Aperturstrahler läßt sich aber andererseits auch sehr genau mit komplexen Punktquellen modellieren, die im Gegensatz zu den Gaußstrahlen exakte Lösungen der Helmholtz-Gleichung bilden. Es sei angemerkt, daß analytische Formelausdrücke für Gaußstrahlen durch Näherungen einfach aus den Formelausdrücken für komplexe Punktquellen abgeleitet werden können.

Das Konzept der komplexen Punktquelle geht ursprünglich auf Deschamps zurück. Bereits 1964 regte Deschamps an, zwei einen Strahlquerschnitt charakterisierende reelle Zahlen in einer komplexen Zahl zu vereinen [Des64]. Ferner zeigte er den Bezug der komplexen Punktquelle zu den Gaußstrahlen auf und formalisierte die analytische Fortsetzung der Greenschen Funktion in den komplexen Raum [Des71]. In den siebziger Jahren knüpfte Felsen an das Konzept zu den komplexen Punktquellen an [Fel73], während in den achtziger Jahren Gaußstrahlen bei vielen Forschern das Interesse weckten und komplexe Punktquellen zunehmend in Vergessenheit gerieten. In den neunziger Jahren hingegen griff die Gruppe um Gago-Ribas das Konzept komplexer Punktquellen wieder auf, mit dem Ziel, deren Analyse im komplexen Raum zu vervollständigen [Gag02a], [Gag02b], [Gon02].

Mathematische Formulierung

Eine ideale Punktquelle befinde sich am Ort $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)^T$, und der Beobachtungspunkt werde mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$ bezeichnet. Die skalare Greensche Funktion G des Freiraumes wird nun durch ein Randwertproblem definiert, in dem die Greensche Funktion die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung [Nie91]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - jkG \right) = 0, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (2.1)$$

sowie die inhomogene Helmholtz-Gleichung erfüllen muß:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.2)$$

Hierin bezeichnet δ die Dirac-Distribution. Eine bekannte Lösung zur Gl. (2.2) im zweidimensionalen Fall ist die Hankelfunktion zweiter Art zum Index Null, d. h.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|), \quad (2.3)$$

wobei

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (2.4)$$

den reellen euklidischen Abstand bezeichne. Das zu einer infinitesimalen Ladung gehörende Feld wird also durch eine Hankelfunktion beschrieben, die bedingt durch das reelle Argument

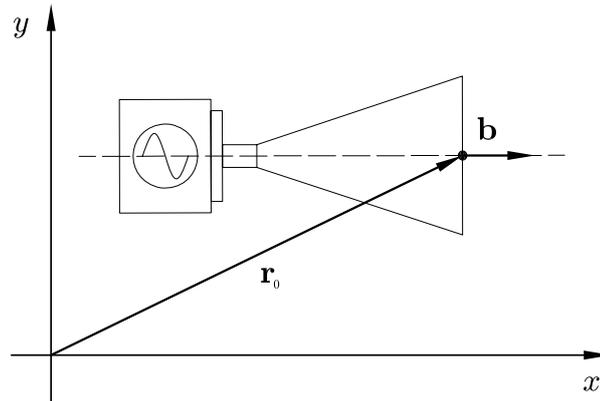


Bild 2.1: Veranschaulichung der definierenden Parameter einer komplexen Punktquelle

ein isotropes Verhalten aufweist. Für den Fall, daß $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ist, weist die Hankelfunktion singuläres Verhalten auf.

Interessant ist es nun zu untersuchen, was passiert, wenn man die Punktquelle an Stelle des reellen Ortes \mathbf{r}_0 am komplexen Ort

$$\mathbf{r}_Q = (x_Q, y_Q)^T = \mathbf{r}_0 + j\mathbf{b} \quad (2.5)$$

plaziert.

Wie weiter unten gezeigt werden wird, gibt der Vektor \mathbf{b} die Richtung des entstehenden Strahles an, und dessen Betrag $b = |\mathbf{b}| > 0$ ist ein Maß für die Stärke dieses Strahles. In Bild 2.1 werden die eingeführten Parameter veranschaulicht. Der Übergang von \mathbf{r}_0 auf \mathbf{r}_Q in Gl. (2.3) führt zu einer erweiterten Lösung [Gag02a]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|) \quad (2.6)$$

der Helmholtz-Gleichung mit dem nun komplexen Abstand

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| := \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)} = \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 - b^2 - j2\mathbf{b}^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}. \quad (2.7)$$

Mit dieser Definition ist die euklidische Abstandsfunktion von \mathbb{R} nach \mathbb{C} analytisch fortgesetzt worden. Daß $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q)$ eine exakte Lösung ist, sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, daß der aufaddierte Imaginärteil \mathbf{b} in \mathbf{r}_Q konstant ist und daher die partiellen Ableitungen in der Helmholtz-Gleichung nicht beeinflußt.

Gaußstrahlen

Bei Einhaltung der komplexen Strahlungsbedingung

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| \geq 1 \quad (2.8)$$

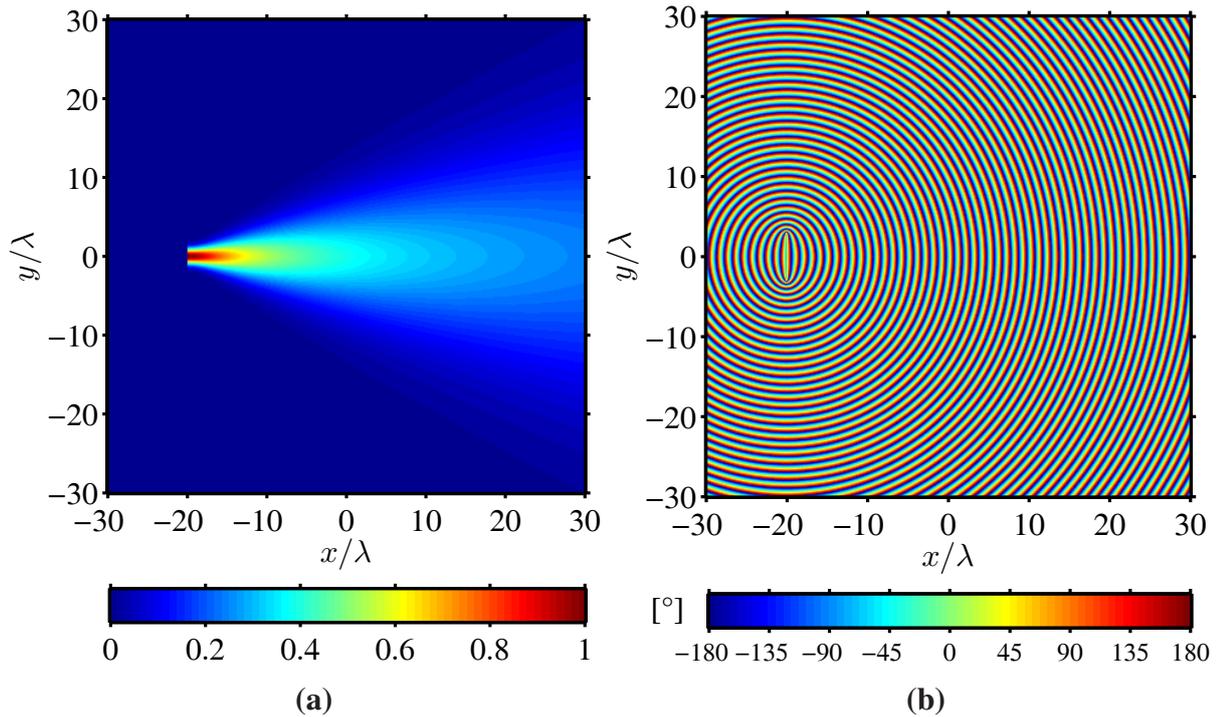


Bild 2.2: Normierter Betrag **(a)** und Phase **(b)** des Feldes einer komplexen Punktquelle am Ort $\mathbf{r}_0 = (-20\lambda, 0)^T$, die mit $b = 3\lambda$ entlang der x -Achse abstrahlt.

erhält man unter Ausnutzung der asymptotischen Näherung für die Hankelfunktion in Gl. (2.6) den folgenden Ausdruck:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q) \approx \frac{1}{2\sqrt{-j2\pi}} \frac{\exp(jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|)}{\sqrt{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}}. \quad (2.9)$$

Führt man darüber hinaus noch die paraxiale Näherung ein und behält nur die ersten beiden Terme der Taylor-Entwicklung des komplexen Abstandes $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|$ in Gl. (2.7) bei, so erhält man schließlich nach dem Einsetzen in Gl. (2.9) einen Ausdruck für einen Gaußstrahl. Zusätzlich stellt sich heraus, daß die Rayleigh-Länge bzw. konfokale Länge z_k durch den Parameter b gegeben ist. Es gilt daher [Gag02b]

$$z_k = b = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (2.10)$$

wobei mit w_0 die Strahltaile des Gaußstrahls bezeichnet wird. Mit Hilfe der bekannten Rayleigh-Länge z_k und w_0 lassen sich die Gaußstrahlen besonders einfach parametrisieren. Für weitere Eigenschaften der Gaußstrahlen wird an dieser Stelle auf deren umfangreiche Literatur verwiesen, wie bspw. [Go198].

Fernfeld

Für das Fernfeld ist die folgende Bedingung erfüllt:

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg kb. \quad (2.11)$$

Der komplexe Abstand in Gl. (2.7) läßt sich somit wie folgt gut nähern:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| \approx |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - jb \cos \phi, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{b}^T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = b|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos \phi. \quad (2.12)$$

Entsprechend dem Skalarprodukt wird der Winkel ϕ von den beiden Vektoren \mathbf{b} und $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ eingeschlossen. Durch Einsetzen dieser Näherung in Gl. (2.9) erhält man

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q) \approx \frac{1}{2\sqrt{-j2\pi}} \frac{\exp(jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\sqrt{k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}} \exp(kb \cos \phi). \quad (2.13)$$

Anhand dieser Form läßt sich nun leicht ablesen, daß die komplexe Punktquelle $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)$ mit $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_Q)$ einen Strahl erzeugt, dessen Richtung in der reellen (x, y) -Ebene durch den Vektor \mathbf{b} gegeben ist, und dessen Betrag b ein Maß für die Stärke dieses Strahles bzw. die Breite der Apertur ist. Dieser Sachverhalt wird in Bild 2.2 veranschaulicht. Setzt man $\mathbf{b} = 0$, erhält man wieder die isotrope Lösung für G aus Gl. (2.3).

Aus dem Ergebnis in Gl. (2.13) lassen sich zusätzliche Größen, wie die Richtcharakteristik oder die abgestrahlte Leistung einer komplexen Punktquelle, bestimmen. Für weitere Ergebnisse sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [Gag02a], [Gag02b], [Gon02]. Ferner sei angemerkt, daß sich das Konzept des komplexen Argumentes auf den höherdimensionalen Fall verallgemeinern läßt.

2.1.2 Rayleigh-Sommerfeld-Beugungsintegral

Häufig werden in quasioptischen Systemen spezielle Lösungen der Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.14)$$

unter Einhaltung Dirichletscher Randbedingungen benötigt. Dabei ist das skalare Feld U in einer Ebene $z = 0$ vorgegeben und für den Halbraum $z \geq 0$ unter Einhaltung der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung zu bestimmen.

Die Lösung zu diesem grundlegenden Randwertproblem ist bekannt und läßt sich in Form des Rayleigh-Sommerfeld-Beugungsintegrals (RS-Beugungsintegral bzw. RS-Integral)

$$U(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') dF', \quad z \geq 0, \quad (2.15)$$

formulieren, für dessen Herleitung auf [Nie91] oder [Goo88] verwiesen sei. Bei Kenntnis von U auf der Ebene F , für die $z = 0$ gilt, liefert dieses Beugungsintegral die exakte Lösung für U im Halbraum $z \geq 0$. Ferner werden in (2.15) mit \mathbf{n} der Einheitsvektor in z -Richtung und mit G die Greensche Funktion des Freiraumes bezeichnet.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß es ein weiteres RS-Beugungsintegral gibt, das die exakte Lösung unter Einhaltung der Neumannschen Randbedingung liefert. Dieses Integral erhält man aus (2.15), in dem man die Normalenableitung nicht auf G , sondern auf U anwendet.

Ebenenwellenspektrum

Ebene Wellen $\exp(j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ mit $|\mathbf{k}| = k$ bilden Lösungen der homogenen Helmholtz-Gleichung. Eine in z -Richtung sich fortpflanzende, monochromatische Welle $U(\mathbf{r})$ endlichen Energiegehalts bildet ebenfalls eine Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung. Infolgedessen muß sich die Welle $U(\mathbf{r})$ aber als Linearkombination von ebenen Wellen in der Form

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(+j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{U}(\mathbf{k}_{\perp}) d\mathbf{k}_{\perp} \quad (2.16)$$

darstellen lassen. Um die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung zu erfüllen, muß bei einer Zeitabhängigkeit von $e^{j\omega t}$ darüber hinaus noch

$$\text{Im} \{k_z\} = \text{Im} \left\{ \sqrt{k^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} \right\} \geq 0 \quad (2.17)$$

gelten. Das Ebenenwellenspektrum $\hat{U}(\mathbf{k}_{\perp})$ über $-\infty \leq k_x, k_y \leq +\infty$ in (2.16) gewichtet die jeweiligen ebenen Wellen in Richtung des Wellenzahlvektors \mathbf{k} . Das in Gl. (2.16) benötigte Spektrum läßt sich nun leicht bestimmen, wenn das Feld U in einer beliebigen Ebene mit festem z bekannt ist. Sei hierzu das Feld U in der Ebene $z = 0$ gegeben. Dementsprechend erhält man durch Invertierung des Fourier-Integrales (2.16) sofort

$$\hat{U}(\mathbf{k}_{\perp}) := \hat{U}(\mathbf{k}_{\perp}, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}'_{\perp}) U(\mathbf{r}'_{\perp}, 0) d\mathbf{r}'_{\perp}. \quad (2.18)$$

Aus der Systemtheorie ist bekannt, daß sich eine Faltungsoperation, wie sie mit dem RS-Integral in (2.15) vorgenommen wird, durch die Fourier-Transformation diagonalisieren läßt. Dabei entspricht der Faltungsoperation zwischen der Impulsantwort $2\partial G/\partial \mathbf{n}$ und dem Feld $U(\mathbf{r}_{\perp}, 0)$ in (2.15) im Ortsbereich eine Multiplikation zwischen der Übertragungsfunktion $e^{jk_z z}$ und dem Ebenenwellenspektrum $\hat{U}(\mathbf{k}_{\perp}, 0)$ im Spektralbereich, wie der Vergleich

von (2.15) mit (2.16) und (2.18) zeigt. Die Freiraumausbreitung wird folglich durch das Fourier-Transformationspaar $2\partial G/\partial \mathbf{n}$ und $e^{jk_z z}$, d. h. im Dreidimensionalen

$$-2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{jkr}}{4\pi r} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-j \left(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp} + \sqrt{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} |z| \right) \right) d\mathbf{k}_{\perp}, \quad (2.19)$$

charakterisiert. Hieraus erhält man durch einmalige Integration nach z die häufig nützlich anzuwendende Weyl-Darstellung bzw. Ebenenwellendarstellung der Greenschen Funktion des Freiraumes [Ung89]:

$$\frac{e^{jkr}}{4\pi r} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left(-j \left(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp} + \sqrt{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} |z| \right) \right)}{j 2\sqrt{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2}} d\mathbf{k}_{\perp}. \quad (2.20)$$

Dabei ist sowohl in (2.19) als auch in (2.20) darauf zu achten, daß $\text{Im} \{k_z\} \geq 0$ gilt.

Fresnel- und Fraunhofer-Näherung

In Abhängigkeit des Feldpunktes \mathbf{r} lassen sich unter gewissen Bedingungen zweckmäßige Näherungen des RS-Integrales vornehmen. Für $r \gg r'$ läßt sich der Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ in eine binomische Reihe entwickeln:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \left[1 + \frac{1}{2r^2} (r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \frac{1}{8r^4} (r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 + \dots \right]. \quad (2.21)$$

Befindet man sich in einem Bereich, bei dem die Entwicklung (2.21) nach dem zweiten Glied abgebrochen und ferner $r \approx z$ gesetzt werden darf, so erhält man unter Verwendung dieser Näherungen aus (2.15) erneut ein Faltungsintegral:

$$U(\mathbf{r}) = -j2kG(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[j \frac{k}{2z} (\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp})^2 \right] U(\mathbf{r}'_{\perp}, 0) dF'. \quad (2.22)$$

Die Näherungen, die zu diesem Integral führen, werden auch als Fresnel-Näherung bezeichnet. Das Beugungsintegral (2.22) läßt sich auch direkt als ein Fourier-Transformationsintegral angeben, indem man in (2.22) den quadratischen Term ausmultipliziert:

$$U(\mathbf{r}) = -j2kG(z) \exp \left[j \frac{k}{2z} \mathbf{r}_{\perp}^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-j \frac{k}{z} \mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{r}'_{\perp} \right] \exp \left[j \frac{k}{2z} \mathbf{r}'_{\perp}^2 \right] U(\mathbf{r}'_{\perp}, 0) dF'. \quad (2.23)$$

Gilt über die bisherigen Näherungen hinaus noch $kr'_{\perp}^2/2 \ll z$, so erhält man die Fraunhofer-Näherung. Folglich vereinfacht sich der Integrand in (2.23), da der quadratische Phasenfaktor näherungsweise zu eins gesetzt werden darf.

Entsprechend der jeweils gültigen Näherungsform des RS-Integrals spricht man in diesem Zusammenhang auch von dem Bereich der Fresnel- und Fraunhofer-Beugung [Goo88].

Numerische Umsetzung

Die Ausdrücke in (2.15), (2.22) und (2.23) stellen Faltungsintegrale dar und lassen sich daher besonders effizient durch eine SFT¹ berechnen. Im folgenden wird kurz skizziert, wie die numerische Umsetzung der Faltungen der Form $h(x, y) = \int G(x - x', y) f(x', 0) dx'$ im Zweidimensionalen verwirklicht worden ist.

1. Zunächst wird eine äquidistante Diskretisierung in den planparallelen Ebenen $y = 0$ und $y = \text{konst} > 0$ mit jeweils N Punkten vorgenommen. Das Faltungsintegral wird somit in ein Matrix-Vektor-Produkt $\mathbf{h} = \mathbf{G}\mathbf{f}$ überführt, bei dem die Matrix \mathbf{G} des Kernes eine Töplitz-Struktur besitzt.
2. Anschließend wird die Töplitz-Matrix \mathbf{G} zyklisch in eine Matrix \mathbf{G}_z eingebettet. Die zyklische Matrix \mathbf{G}_z wird dabei vollständig durch ihre erste Spalte \mathbf{g}_z definiert. Diese zyklische Einbettung ist für eine Töplitz-Matrix immer möglich. Entsprechend dieser Einbettung wird der Vektor \mathbf{f} mit Nullen aufgefüllt und der resultierende Vektor mit \mathbf{f}_z bezeichnet.
3. Im nächsten Schritt wird die für zyklische Matrizen nützliche Eigenschaft verwendet, daß sich deren Diagonalisierung durch die unitäre Fourier-Transformationsmatrix \mathbf{F} vornehmen läßt: $\mathbf{G}_z = \mathbf{F}^* \text{diag}(\mathbf{F}\mathbf{g}_z)\mathbf{F}$. Demzufolge wird unter Anwendung einer SFT das Produkt $\mathbf{h}_z = \mathbf{F}^*((\mathbf{F}\mathbf{g}_z) \circ (\mathbf{F}\mathbf{f}_z))$ berechnet. Mit \circ wird dabei das Hadamard-Produkt bezeichnet, in dem die Matrizen bzw. Vektoren elementweise zu multiplizieren sind [Zha99].
4. Schließlich erhält man für $h(x, y)$ die Näherung \mathbf{h} , indem die ersten N Werte des Vektors \mathbf{h}_z verwendet werden, d. h. $\mathbf{h} = \mathbf{h}_z(1 : N)$ gesetzt wird.

In Bild 2.3 ist die angeführte numerische Umsetzung auf das RS-Beugungsintegral beispielhaft angewendet worden. Bei der Verallgemeinerung zum dreidimensionalen Fall geht man analog vor, so daß anstelle der oben angeführten Matrizen Blockmatrizen treten. Des weiteren läßt sich das RS-Integral auch mittels SFT durchaus berechnen, falls die Ebenen nicht planparallel sein sollten. In [Del98] wird gezeigt, wie die Wellenausbreitung zwischen zwei zueinander geneigten und auch versetzten Ebenen effizient mittels SFT anhand des RS-Integrale berechnet werden kann.

Abschließend soll noch auf die Rechenkomplexität eingegangen werden. Bezeichne N die Anzahl der Diskretisierungspunkte, so daß die Vektoren \mathbf{h} und \mathbf{f} die Länge N aufweisen, und bezeichne N_z die Länge der Vektoren \mathbf{g}_z , \mathbf{h}_z und \mathbf{f}_z . Damit sich die Anwendung der Fourier-Transformationsmatrix \mathbf{F} in Punkt 3 nun vorteilhaft durch eine SFT berechnen läßt, wählt man

¹Schnelle Fourier-Transformation