

## Kapitel 1: Grundlagen

1

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1   | Zahlenmengen                                    | 2  |
|       | natürliche Zahlen                               |    |
|       | rationale Zahlen                                |    |
|       | irrationale Zahlen                              |    |
|       | reelle Zahlen                                   |    |
| 1.2   | Rechenarten                                     | 4  |
| 1.3   | Rechenregeln                                    | 4  |
| 1.4   | Vorzeichenregeln                                | 5  |
| 1.5   | Teiler und Teilmengen                           | 5  |
| 1.6   | Potenzgesetze                                   | 6  |
| 1.7   | Binomische Formeln                              | 7  |
| 1.8   | Faktorisieren von Termen                        | 8  |
| 1.9   | Bruchrechnung                                   | 9  |
| 1.10  | Wurzelgesetze                                   | 12 |
| 1.11  | Logarithmen                                     | 15 |
| 1.12. | Der Betrag                                      | 17 |
| 1.13  | Intervalle und ihre Schreibweisen               | 19 |
| 1.14  | Summen  | 20 |
| 1.15  | Zahlendarstellung                               | 21 |
| 1.16  | Pascalsches Dreieck und der Binomialkoeffizient | 23 |
|       | <i>Fragen und Antworten</i>                     |    |
|       | <i>Aufgaben mit Lösungen</i>                    |    |

## Kapitel 2: Aussagenlogik und Mengen

33

|       |                            |    |
|-------|----------------------------|----|
| 2.1   | Aussagenlogik              | 34 |
| 2.1.1 | Aussagen und Aussageformen | 34 |
| 2.1.2 | Und/Oder-Verknüpfung       | 34 |
| 2.1.3 | Negation                   | 34 |
| 2.1.4 | Implikationen              | 35 |
| 2.1.5 | Hinreichend und Notwendig  | 37 |
| 2.1.6 | Bijunktionen               | 38 |

|                              |                              |    |
|------------------------------|------------------------------|----|
| 2.2                          | Mengen                       | 38 |
| 2.2.1                        | Darstellung von Mengen       | 39 |
| 2.2.2                        | Leere Menge                  | 39 |
| 2.2.3                        | Vereinigung und Durchschnitt | 40 |
| 2.2.4                        | Mengengesetze                | 42 |
| 2.2.5                        | Produktmengen                | 43 |
| 2.2.6                        | Potenzmengen                 | 43 |
| 2.2.7                        | Venn diagramme               | 44 |
| 2.3                          | Wahrheitstafeln              | 48 |
| 2.3.1                        | Tautologie/Kontradiktion     | 50 |
| 2.3.2                        | Exklusive Disjunktion        | 50 |
| 2.3.3                        | Äquivalenz                   | 51 |
| 2.3.4                        | Morgansche Gesetze           | 52 |
| 2.3.5                        | Implikation                  | 52 |
| <i>Fragen und Antworten</i>  |                              |    |
| <i>Aufgaben mit Lösungen</i> |                              |    |

## **Kapitel 3: Gleichungen 1. Begegnung 58**

|                              |   |    |
|------------------------------|---|----|
| 3.1                          | Polynomgleichungen  | 59 |
| 3.1.1                        | Gleichungen 2. Grades   | 60 |
| 3.1.2                        | Kubische Gleichungen  | 63 |
| 3.1.3                        | Gleichungen, die sich auf quadratisch Gleichungen zurückführen lassen | 66 |
| 3.2                          | Bruchgleichungen  | 67 |
| 3.3                          | Wurzelgleichungen   | 68 |
| 3.4                          | Anwendungen in der Ökonomie   | 69 |
| 3.4.1                        | Parametergleichungen  | 69 |
| <i>Fragen und Antworten</i>  |   |    |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i> |   |    |

## Kapitel 4: Ungleichungen 1. Begegnung

76

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Ungleichungen der Form $ax^{\text{gerade}} < a$   | 77 |
| 4.2 | Ungleichungen der Form $ax^{\text{ungerade}} < a$ | 78 |
| 4.3 | Ungleichungen der Form $ax^2 + bx + c < 0$        | 78 |
| 4.4 | komplexere Ungleichungen                          | 79 |
| 4.5 | Graphisches Lösen von Ungleichungen               | 86 |
| 4.6 | Betragsungleichungen                              | 87 |

*Fragen und Antworten*

*Aufgaben und Lösungen*

## Kapitel 5: Funktionen

100

|                                      |  |     |
|--------------------------------------|--|-----|
| 5.1                                  | Definition, Eigenschaften und Darstellung von Funktionen | 100 |
| 5.1.1                                | Was ist eine Funktion?                                   | 101 |
| 5.1.2                                | Darstellungsarten von Funktionen.                        | 101 |
| <i>Aufgaben, Fragen und Lösungen</i> |  |     |
| 5.2                                  | Wichtige Bezeichnungen bei Funktionen                    | 107 |
| <i>Aufgaben, Fragen und Lösungen</i> |  |     |
| 5.3                                  | Einige wichtige Eigenschaften von Funktionen             | 111 |
| 5.3.1                                | Definitions- und Wertebereiche                           | 111 |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i>         |  |     |
| 5.3.2                                | Beschränktheit   | 116 |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i>         |  |     |
| 5.3.3                                | Spiegelungen, Verschiebungen und Stauchungen             | 118 |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i>         |  |     |
| 5.3.4                                | Verkettung von Funktionen                                |     |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i>         |  |     |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 6.1     | Lineare Funktionen  | 129 |
| 6.1.1   | Einführung  | 129 |
| 6.1.2   | Proportionalitäten  | 129 |
| 6.1.3   | Von der proportionalen Zuordnung zur linearen Funktion    | 131 |
|         | <i>Aufgaben , Fragen und Lösungen</i>                     |     |
| 6.2     | Potenzfunktionen  | 142 |
| 6.2.1   | Eigenschaften   |     |
|         | $y = ax^n$ mit $a \in \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4,5,\dots\}$ |     |
|         | $y = ax^n$ mit $n \in \mathbb{Z}^-$ (Hyperbeln)           |     |
|         | $y = ax^n$ $n \in \mathbb{Q}$                             |     |
|         | <i>Aufgaben und Lösungen</i>                              |     |
| 6.3     | Rationale Funktionen                                      | 149 |
| 6.3.1   | Einführung  | 149 |
| 6.3.2   | Eigenschaften   | 150 |
| 6.3.3   | Quadratische Funktionen                                   | 151 |
| 6.3.3.1 | Scheitelpunktsform der quadratischen Funktion             | 152 |
| 6.3.3.2 | Eigenschaften der quadratischen Funktion                  | 153 |
| 6.3.3.3 | Ökonomische Anwendungen                                   | 156 |
| 6.3.4   | Ermittlung von Funktionsgleichungen                       | 157 |
| 6.3.5   | Gebrochenrationale Funktionen                             | 160 |
|         | <i>Aufgaben, Fragen und Lösungen</i>                      |     |
| 6.4     | Exponentialfunktionen                                     | 162 |
| 6.4.1   | Eigenschaften   | 163 |
| 6.4.2   | Exponentialfunktionen und Wachstum                        | 164 |
| 6.4.3   | Die natürliche Exponentialfunktion $e^x$                  | 167 |
| 6.4.4   | Logarithmusfunktionen                                     | 168 |
|         | <i>Aufgaben, Fragen und Lösungen</i>                      |     |

## Kapitel 7 : Gleichungen und Ungleichungen:

### Begegnung der zweiten Art

173

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 7.1 | Gleichungen der zweiten Art                       | 174 |
|     | Exponential- und Logarithmusgleichungen           |     |
| 7.2 | Ungleichungen, Begegnung der zweiten Art:         | 177 |
|     | Ungleichungen mit Logarithmen und geraden Wurzeln |     |

## Kapitel 8 :Differentialrechnung

181

|     |                                      |     |
|-----|--------------------------------------|-----|
| 8.1 | Hinführung und Motivation            | 182 |
| 8.2 | Differenzen und Differentialquotient | 183 |
| 8.3 | Ableitungsregeln                     | 189 |
|     | 8.3.1 Produktregel                   | 190 |
|     | 8.3.2 Quotientenregel                | 191 |
|     | 8.3.4 Kettenregel                    | 192 |
| 8.4 | Schreibweisen                        | 195 |
| 8.5 | Logarithmisches Differenzieren       | 196 |
|     | <i>Fragen und Antworten</i>          |     |
|     | <i>Aufgaben und Lösungen</i>         |     |

## Kapitel 9: Anwendungen der Differentialrechnung

202

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 9.1 | Tangente an eine Funktion in einem Punkt  | 203 |
| 9.2 | Relative Änderungsrate  | 205 |
| 9.3 | Grenzwerte von Funktionen   | 207 |
|     | 9.3.1 Grenzwert von Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ | 207 |
|     | 9.3.2 Regel von L'Hospital  | 211 |
|     | 9.3.3 Grenzwerte von Betragsfunktionen  | 213 |
|     | 9.3.4 Grenzwerte gegen eine Zahl a  | 214 |
|     | 9.3.5 Grenzwerte von verketteten Funktionen   | 217 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 9.4   | Stetigkeit   | 218 |
| 9.4.1 | Stetigkeit an einer Stelle $x = a$                   | 219 |
| 9.4.2 | Links-und rechtsseitig stetig                        | 220 |
| 9.5   | Differenzierbarkeit                                  | 224 |
| 9.6   | Approximationen                                      | 227 |
|       | Lineare- quadratische- polynomiale Approximationen.  |     |
|       | Das Taylorpolynom                                    |     |
| 9.7   | Anwendungen der Differentialrechnung in der Ökonomie | 232 |
| 9.8   | Das Differential                                     | 235 |
|       | Anschauliche Darstellung                             |     |
|       | Bedeutung und Anwendung                              |     |
| 9.9   | Implizites Differenzieren                            | 237 |
| 9.10  | Differenzieren von Umkehrfunktionen                  | 239 |
| 9.11  | Elastizitäten  | 241 |
|       | Bedeutung  |     |
|       | Berechnung   |     |
| 9.12  | Zwischenwertsatz                                     | 244 |
| 9.13  | Newton Verfahren                                     | 244 |
|       | <i>Fragen und Antworten</i>                          |     |
|       | <i>Aufgaben und Lösungen</i>                         |     |

## **Kapitel 10: Kurvendiskussion**

**253**

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 10.1   | Einführung  | 254 |
| 10.2   | Polstellen  | 254 |
| 10.3   | Nullstellen   | 256 |
| 10.4   | Symmetrie   | 257 |
| 10.5   | Monotonie   | 258 |
| 10.6   | Krümmungsverhalten (konvex, konkav)                           | 262 |
| 10.7   | Hoch- und Tiefpunkte  | 264 |
| 10.7.1 | Notwendige und hinreichende Bedingungen                       |     |
| 10.7.2 | Bestimmung der Art der Extrema mit Hilfe der ersten Ableitung |     |
| 10.7.3 | Lokale und globale Extrema                                    |     |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 10.7.4 | Extrema von Wurzelfunktionen und Betragsfunktionen |     |
| 10.8   | Ökonomische Anwendungen                            | 267 |
| 10.9   | Extrema in Intervallen                             | 269 |
| 10.10  | Wendepunkte  | 270 |
|        | <i>Aufgaben</i>                                    |     |
|        | <i>Fragen und Antworten</i>                        |     |

## **Kapitel 11: Funktionseigenschaften, zweite Begegnung** **280**

|      |                                |     |
|------|--------------------------------|-----|
| 11.1 | Surjektivität und Injektivität | 281 |
| 11.2 | Umkehrfunktion                 | 290 |
|      | <i>Fragen und Antworten</i>    |     |
|      | <i>Aufgaben mit Lösungen</i>   |     |

## **Kapitel 12: Integralrechnung** **304**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 12.1  | Einführung   | 305 |
| 12.2  | Definition   | 306 |
| 12.3  | Stammfunktion  | 306 |
| 12.4  | Unbestimmtes und bestimmtes Integral                                   | 307 |
| 12.5  | Allgemeine Integrationsregeln  | 308 |
| 12.6  | Flächenberechnung zwischen dem Graph einer Funktion<br>und der x-Achse | 309 |
| 12.7  | Flächenberechnung zwischen 2 Funktionen                                | 310 |
| 12.8  | Integration durch Substitution   | 312 |
| 12.9  | Produktintegration   | 314 |
| 12.10 | Uneigentliche Integrale  | 315 |
| 12.11 | Ökonomische Anwendungen  | 316 |
|       | <i>Aufgaben</i>  | 316 |

## Kapitel 13: Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Anwendungen

320

|  |     |
|--|-----|
| 13.1. Darstellung  | 321 |
| 13.2. Höhenlinien  | 322 |
| 13.3 Isoquanten  | 326 |
| 13.4 Definitionsbereiche                                   | 326 |
| 13.5 Partielle Ableitungen                                 | 329 |
| 13.6 Partielle Ableitungen 2. Ordnung und die Hesse-Matrix | 333 |
| 13.7 Totale Ableitung                                      | 334 |
| 13.8 Partielle Elastizitäten                               | 335 |
| 13.9 Umgebung eines Punktes                                | 338 |
| 13.10 Beschränktheit                                       | 338 |
| 13.11 Homogenität  | 339 |
| 13.11.2 Eulersche Homogenitätsrelation                     | 343 |
| 13.12 relative Änderungsrate                               | 344 |
| 13.13 Implizites Differenzieren                            | 346 |
| 13.14 Steigungen von Höhenlinien                           | 347 |
| 13.15 Grenzrate der Substitution                           | 348 |
| 13.16 Substitutionselastizität                             | 349 |
| 13.17 lineare Approximation und Tangentialebenen           | 353 |
| 13.18 totales Differential                                 | 354 |
| 13.18.1 Absoluter und relativer Fehler                     | 357 |
| <i>Fragen und Antworten</i>                                |     |
| <i>Aufgaben und Lösungen</i>                               |     |



## Kapitel 14: Extrema mit und ohne Nebenbedingungen bei Funktionen mit mehreren Variablen

363

|                             |  |     |
|-----------------------------|--|-----|
| 14.1                        | Extrema ohne Nebenbedingungen  | 364 |
| 14.2                        | Extrema mit Nebenbedingungen $g(x) = c$ (Lagrange)                   | 375 |
| 14.2.1                      | Bedeutung des $\lambda$  | 378 |
| 14.3                        | Extremwertsatz   | 380 |
| 14.4                        | Extrema mit Nebenbedingungen $g(x) \leq c$ (Kuhn-Tucker-Bedingungen) | 382 |
| 14.5                        | Envelope Theorem   | 384 |
| <i>Fragen und Antworten</i> |  |     |

## Kapitel 15: Vektoren

387

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 15.1    | Einführung                             | 388 |
| 15.2    | Darstellung von Vektoren               | 389 |
| 15.3    | Rechnen mit Vektoren                   | 390 |
| 15.3.1  | Addition von Vektoren                  | 390 |
| 15.3.2  | S-Multiplikation                       | 392 |
| 15.3.3  | Äquivalenz und Gleichheit von Vektoren | 392 |
| 15.3.4  | Länge von Vektoren                     | 393 |
| 15.3.5  | Linearkombination von Vektoren         | 393 |
| 15.3.6  | Lineare Abhängigkeit                   | 397 |
| 15.3.7  | Einheitsvektoren                       | 400 |
| 15.3.8  | Dimension und Basis                    | 400 |
| 15.3.9  | Skalarprodukt = Inneres Produkt        | 401 |
| 15.3.10 | Normalenvektoren                       | 405 |
| 15.3.11 | Abstand zwischen 2 Punkten             | 405 |
| 15.4    | Kreis-(Kugel) Gleichung                | 406 |
| 15.5    | Die Geradengleichung                   | 408 |
| 15.5.1  | Darstellung                            | 408 |
| 15.5.2  | Gerade durch 2 Punkte                  | 408 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 15.5.3 | Parallele Geraden                         | 409 |
| 15.5.4 | Punkt auf der Geraden                     | 409 |
| 15.5.5 | Lagebeziehung von 2 Geraden               | 410 |
| 15.6   | Die Ebene                                 | 414 |
| 15.6.1 | Von der Koordinatenform zur Parameterform | 417 |
| 15.7   | Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene   | 418 |
| 15.8   | Lagebeziehung zwischen 2 Ebenen           | 421 |
| 15.9   | Schnittwinkel                             | 423 |

## **Kapitel 16:Matrizen**

**424**

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 16.1   | Definition                                   | 425 |
| 16.2   | Arten von Matrizen                           | 426 |
| 16.2.1 | Transponierte                                | 426 |
| 16.2.2 | Nullmatrix                                   | 426 |
| 16.2.3 | Quadratische Matrizen                        | 426 |
| 16.2.4 | spezielle quadratische Matrizen              | 426 |
| 16.2.5 | symmetrische Matrix                          | 427 |
| 16.2.6 | schiefsymmetrische Matrix                    | 427 |
| 16.3   | Rechnen mit Matrizen                         | 429 |
| 16.3.1 | Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar | 429 |
| 16.3.2 | Addition und Subtraktion von Matrizen        | 429 |
| 16.3.3 | Regeln zur Matrizenaddition                  | 429 |
| 16.3.4 | Multiplikation von Matrizen                  | 430 |
| 16.3.5 | Regeln zur Matrizenmultiplikation            | 432 |
| 16.3.6 | Potenzen von Matrizen                        | 434 |
| 16.3.7 | Invertierbare Matrizen                       | 434 |
| 16.3.8 | Elementare Umformungen von Matrizen          | 436 |
| 16.4   | Gaußsches Eliminationsverfahren              | 436 |
| 16.5   | Rang einer Matrix                            | 438 |
| 16.6   | Spur einer Matrix                            | 440 |
| 16.7   | Linearkombination und Matrizen               | 440 |

|      |                                   |     |
|------|-----------------------------------|-----|
| 16.8 | Matrizen als Lösung von Polynomen | 442 |
|      | <i>Fragen und Antworten</i>       |     |
|      | <i>Aufgaben mit Lösungen</i>      |     |

## **Kapitel 17: Determinanten** **447**

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 17.1   | Definition   | 448 |
| 17.2   | Berechnung von Determinanten                         | 448 |
| 17.2.1 | Determinanten von 2x2-Matrizen                       | 448 |
|        | geometrische Bedeutung                               |     |
| 17.2.2 | Determinanten von 3x3-Matrizen (Sarrus)              | 449 |
|        | geometrische Bedeutung                               |     |
| 17.3   | Determinanten höherer Matrizen                       | 451 |
| 17.3.1 | Entwicklung nach Laplace                             | 451 |
| 17.4   | Co-Faktoren  | 452 |
| 17.5   | Determinanten besonderer Matrizen                    | 453 |
| 17.6   | Regeln für Determinanten                             | 455 |
| 17.7   | Invertieren von Matrizen mit Hilfe von Determinanten | 457 |
| 17.8   | Determinantenkriterium zur Definitheit               | 460 |
| 17.9   | Determinanten der Ordnung $n \times n$               | 461 |
|        | <i>Fragen und Antworten</i>                          |     |
|        | <i>Aufgaben</i>                                      |     |

## **Kapitel 18: Gleichungssysteme** **468**

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 18.1   | Darstellung von Gleichungssystemen mit Hilfe von Matrizen | 469 |
| 18.2   | Bezeichnungen   | 469 |
| 18.3   | Freiheitsgrade  | 470 |
| 18.4   | Lösbarkeit von Gleichungssystemen                         | 471 |
|        | Übersicht über die Lösbarkeit                             |     |
| 18.5   | Verfahren zur Lösung von inhomogenen Gleichungssystemen   | 475 |
| 18.5.1 | Gaußsches Eliminationsverfahren                           | 475 |
| 18.5.2 | Cramersche Regel  | 478 |

|                              |   |     |
|------------------------------|---|-----|
| 18.5.3                       | Lösung mit Hilfe der Inversen               | 479 |
| 18.5.4                       | Grafische Bedeutung                         | 479 |
| 18.6                         | Homogene Gleichungssysteme                  | 480 |
| 18.6.1                       | Lösbarkeit von homogenen Gleichungssystemen | 480 |
| <i>Fragen und Antworten</i>  |   |     |
| <i>Aufgaben mit Lösungen</i> |   |     |