1.1 Zahlenmengen

Zunächst stelle ich die **Zahlenmengen** vor:

- **Natürliche Zahlen |N** = {1,2,3,…}, also die positiven ganzen Zahlen.
- **Ganze Zahlen Z**= {…-3,-2,-1,0,1,2,3,…}
- **Rationale Zahlen Q** = $\frac{m}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen sind. Verwandelt man diesen Bruch in eine Dezimalzahl, so erhält man entweder eine periodische (auch nicht abbrechende) oder eine abbrechende (auch nicht periodische) Dezimalzahl = Dezimalbruch.

  Beispiele: $\frac{2}{5}$ = 0,4 endlich, aber nicht periodisch.

  $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ periodisch, aber nicht endlich.
- **irrationale Zahlen** = alle nicht periodischen **und** nicht abbrechenden Dezimalzahlen. Es muss aber beides gleichzeitig gelten, denn sonst wäre es ja eine rationale Zahl, siehe oben.

  Beispiele: Eulersche Zahl e = 2,718…

  Die Zahl π = 3,14…., oder $\sqrt{2} = 1{,}4...$

  Irrationale Zahlen sind: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ usw.

  Hat man eine Zahl vorliegen und soll beurteilen, ob sie irrational ist, dann geben Sie diese in den Taschenrechner ein.Kommt dabei eine Dezimalzahl heraus, die nicht abbricht und die völlig unregelmäßig ist, dann ist es eine irrationale Zahl.

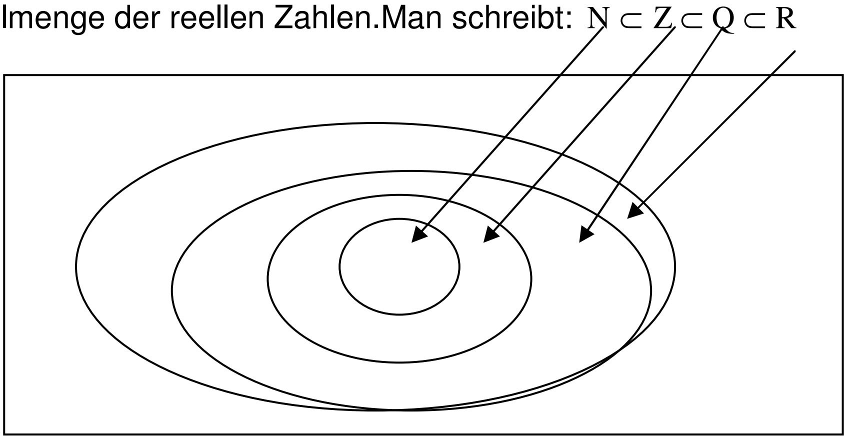
  Aber Vorsicht: Zum Beispiel ist der Ausdruck $3\sqrt{3} - \sqrt{27}$ nicht irrational, denn wenn man es ausrechnet, kommt Null heraus.
- **reelle Zahlen R** : Die Menge, die alle eben genannten Zahlen zusammenfasst.

Grundlagen

Deshalb sind nur bei den reellen Zahlen, wenn man sie auf der Zahlengeraden darstellt keine Lücken. Jedem Punkt auf der Zahlengeraden kann also eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet werden. Zwischen den Zahlen aller anderen Zahlensysteme kann man stets eine weitere finden. Da gibt es Lücken.

Es gilt folglich:

Die Menge der natürlichen Zahlen ist enthalten in den ganzen Zahlen, diese sind wiederum enthalten (Teilmenge) in den rationalen Zahlen und diese sind wiederum Teilmenge der reellen Zahlen.Man schreibt: $N \subset Z \subset Q \subset R$



Die irationalen Zahlen sind dabei eine Teilmenge der reellen Zahlen.

Das bedeutet: Jede Zahl aus einer Zahlenmenge ist auch aus der Zahlenmenge, die rechts von ihr steht.

So ist jede natürliche Zahl auch eine ganze, eine rationale und auch eine reelle Zahl.

Jede ganze Zahl ist auch rational und reell.

Jede rationale Zahl ist auch reell.

Jede irrationale Zahl ist natürlich auch reell.

Es kommt hier auf das Wort "jede" an. Es gibt selbstverständlich auch rationale Zahlen, die wieder ganz sind ($\frac{8}{4} = 2$), aber eben nicht alle.

1.2 Rechenarten

Addition:	Summand + Summand = Summe
Subtraktion:	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation:	Faktor • Faktor = Produkt
Division:	Dividend : Divisor = Quotient

Diese 4 Grundrechenarten sind für alle Paare ≠ 0 definiert.

Beachten Sie: Man darf nie durch Null teilen. Dagegen ist Null geteilt durch eine reelle Zahl immer Null, außer $\frac{0}{0}$, dieser Ausdruck ist nicht definiert.

Wendet man die 4 Grundrechenarten auf reelle Zahlen (≠ 0) an, so erhält man wieder eine reelle Zahl.

Bemerkung: Fehlt bei diesem Satz der Zusatz (≠ 0), so ist er nicht richtig. Sätze müssen in der Mathematik immer so formuliert sein, dass sie allgemeingültig sind. Findet man eine Zahl für die der Satz nicht gilt, so ist diese Zahl auszuschließen, oder der Satz ist falsch.

1.3 Rechenregeln

Kommutativgesetz:

Addition $x+y = y + x$

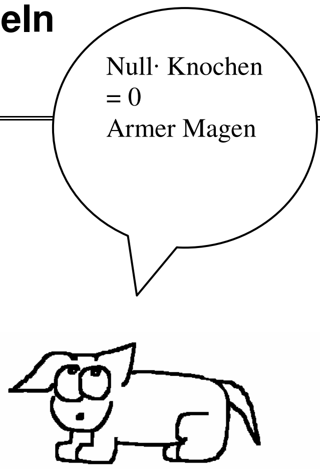
Multiplikation $y\cdot x=x\cdot y$

Assoziativgesetz:

Addition $(x+y)+z = x+(y+z)$

Multiplikation $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$

Distributivgesetz: $x\cdot (y+z) = x\cdot y + x\cdot z$



1.4 Vorzeichenregeln

$+(+x) = +x$

$+(-x) = -x$

$-(+x) = -x$

$-(-x) = +x$

$(+x) \cdot (+y) = + x \cdot y$

$(+x) \cdot (-y) = - x \cdot y$

$(-x) \cdot (+y) = - x \cdot y$

$(-x) \cdot (-y) = + x \cdot y$

$(+x):(+y) = +(x:y)$

$(-x):(+y) = -(x:y)$

$(+x):(-y) = -(x:y)$

$(-x):(-y) = +(x:y)$

1.5 Teiler und Teilermenge

Der Teiler ist eine ganze Zahl, durch die man eine andere Zahl teilen kann, so dass eine **ganze** Zahl herauskommt.

Die Teilermenge einer Zahl ist eine Menge, in der alle Zahlen enthalten sind, durch die man diese Zahl teilen kann, ohne, dass ein Rest bleibt.

Beispiel: Teilermenge von 9

$T_9 = \{-9,-3,-1,1, 3, 9\}$

Hat eine Zahl nur sich selbst und die 1 als Teiler, so nennt man sie **Primzahl**.

Aufgaben:

1) Vereinfachen Sie: $2x \cdot (x-y)-x^2 + 2xy +x + y$

   Lösung: $2x^2 - 2xy - x^2 + 2xy +x + y$

   $= x^2 + x + y$

2) Welche Teilermenge besitzt die Zahl 6?

   Lösung: $\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

1.6 Potenzgesetze

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, also n mal das a hintereinander multipliziert.

$a \in |R$ ist die Basis. $n \in |N$ der Exponent.

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ für alle } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \bullet n}$$

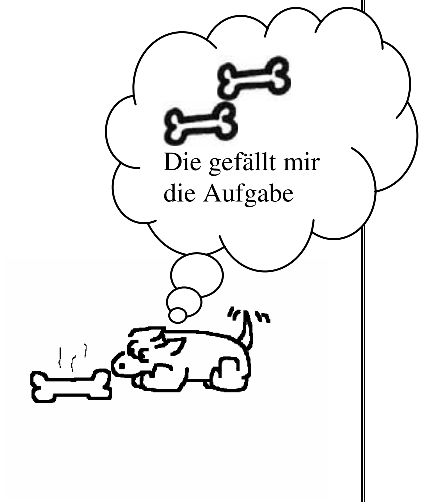
$$(a \bullet b)^m = a^m \bullet b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ für alle } b \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ für alle } a \neq 0$$

$$a^0 = 1 \text{ für alle } a \neq 0$$

$$1^k = 1, \text{ für alle } k$$



Beachten Sie:

☺ 0^0 ist nicht definiert.

☺ Wichtig ist, dass man die Gesetze auch von rechts nach links beherrscht.

☺ Man darf nur Potenzen mit gleichen Basen oder mit gleichen Exponenten miteinander multiplizieren oder dividieren.

☺ $(x+y)^2 \cdot (a-b)^{-10} \cdot (x+y)^{-2} \cdot (a-b)^{12} = (x+y)^0 \cdot (a-b)^2 = (a-b)^2$

☺ $(x+y)^m \neq x^m + y^m$, es sei denn x und y sind beide Null.

☺ $-a^2 = -a^2$, aber $(-a)^2 = a^2$

☺ -a ist nur dann eine negative Zahl, wenn $a > 0$ ist. Ist a aber eine negative Zahl, dann ist -a eine positive Zahl.

Aufgaben:

1) Vereinfachen Sie:

$$\frac{(a^2c^3)^3 \cdot (5c)^4 \cdot b^{-3}}{a^{-5}(b^{-3} \cdot c)^{-5} \cdot c^4}$$

Lösung:

$$\frac{(a^2c^3)^3 \cdot (5c)^4 \cdot b^{-3}}{a^{-5}(b^{-3} \cdot c)^{-5} \cdot c^4} = \frac{a^6c^9 625c^4b^{-3}}{a^{-5}b^{15}c^{-5}c^4} = \underline{\frac{625a^{11}c^{14}}{b^{18}}}$$

2) Wenn $xy = 5$ ist, was ist dann x^3y^3?

Lösung:

Dann muss man auch die rechte Seite hoch 3 nehmen: $x^3y^3 = 5^3 = 125$

1.7 Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Aufgaben:

Vereinfachen Sie:

1)

$$\frac{9x^2 - 64y^2}{3x + 8y}$$

Lösung:

$$\frac{9x^2 - 64y^2}{3x + 8y} = \frac{(3x - 8y)(3x + 8y)}{3x + 8y} = 3x - 8y$$

2)

$$\frac{\mathbf{4x^2 + 12xy + 9y^2}}{\mathbf{4x^2 - 9y^2}}$$

Lösung:

$$\frac{\mathbf{4x^2 + 12xy + 9y^2}}{\mathbf{4x^2 - 9y^2}} = \frac{(2x + 3y)^2}{\mathbf{(2x - 3y)(2x + 3y)}} = \frac{2x + 3y}{2x - 3y}$$

1.8 Faktorisieren:

Faktorisieren bedeutet, man zerlegt einen Term in Faktoren, das sind die Terme links und rechts eines Produktzeichens.
1. Beispiel: $2x-2y = 2(x-y)$
Hier wurde das Faktorisieren also durch Ausklammern herbeigeführt.
2. Beispiel: $3x^2 - 3y^2 = 3(x^2 - y^2) = 3(x-y)(x+y)$
Hier wurde außerdem noch die dritte binomische Formel benutzt.
3. Beispiel:
Man kann auch Ausdrücke wie $ax^2 + bx + c$ in Faktoren zerlegen. Das erfordert allerdings die Kenntis mit Gleichungen umzugehen. Deshalb schauen Sie hierzu in das Kapitel "Quadratische Gleichungen". Dort greife ich dieses Thema noch einmal auf.

Ausklammern geht übrigens so:
Man sucht einen Term, der in jedem Summanden vorkommt. Den schreibt man dann vor die Klammer. Nun teilt man jeden Summanden durch den Term, den man ausgeklammert hat . Das kommt dann in die Klammer.

Beispiele:
1)

$$K^2 + K^3 = K^2\left(\frac{K^2}{K^2} + \frac{K^3}{K^2}\right) = K^2(1 + K)$$

2)

$$K^{-3} - K^{-5} = K^{-5}\left(\frac{K^{-3}}{K^{-5}} - \frac{K^{-5}}{K^{-5}}\right) = K^{-5}(K^2 - 1) = K^{-5}(K-1)(K+1)$$

Wenn man negative Expoenten vorliegen hat, dann klammert man immer den mit dem negativeren Exponenten aus.