

1. Einleitung

Bereits 1971 zeigte FETTWEIS in seiner Veröffentlichung "Digital Filter Structures Related to Classical Filter Networks" [6], dass sich eine neue Klasse von Filtern, die so genannten Wellendigitalfilter dazu eignen, Übertragungsfunktionen klassischer LC -Filter im Diskreten nachzubilden. Hierzu wird jedes Bauelement sowie das gesamte Verbindungsnetz durch entsprechende, so genannte Wellendigitaläquivalente ersetzt. Dabei gehen insbesondere die Wellendigitaläquivalente der Bauelemente aus einer Frequenztransformation hervor. Neben den klassischen LC -Filtern können auch andere passive Schaltungen als Referenznetz verwendet werden. Eine ganz wesentliche Eigenschaft der Wellendigitalfilter ist, dass sich die Unempfindlichkeit passiver Schaltungen gegenüber Bauteileschwankungen auch auf die entsprechenden Wellendigitaläquivalente überträgt. Hierdurch lässt sich ein Algorithmus gewinnen, der sich auch bei endlicher Wortlänge robust verhält [8]. Darüber hinaus besitzen Wellendigitalfilter Stabilitätseigenschaften, die unmittelbar aus der Passivität des zu Grunde liegenden Referenznetzes resultieren.

Da sich das Verhalten von Schaltungen u.a. mit Hilfe von Differentialgleichungen beschreiben lässt, ist es nahe liegend, dass sich Wellendigitalfilter auch zur numerischen Berechnung von Differentialgleichungen eignen. Auf diese Möglichkeit wird erstmalig von FISCHER in seiner Arbeit [18] hingewiesen. Viele Probleme aus der Technik und den Naturwissenschaften können insbesondere durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Diese in der Regel sehr komplizierten Differentialgleichungen sind von mehreren so genannten unabhängigen Variablen abhängig. Die Lösung von partiellen Differentialgleichungen besitzt einen extrem hohen Stellenwert, da hierdurch das Verhalten anspruchsvoller Systeme studiert sowie eventuell vorhergesagt werden kann. Für die meisten Probleme ist jedoch keine geschlossene analytische Lösung vorhanden, so dass die numerische Berechnung solcher Probleme eine sehr große Bedeutung einnimmt. Viele unterschiedliche Fachgebiete, wie z.B. die Mathematik, die Physik, sowie auch die Ingenieurwissenschaften beschäftigen sich deswegen mit der Entwicklung sowie der Anwendung von numerischen Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen.

Speziell für die Anwendung der mehrdimensionalen (MD)-Wellendigitalprinzipien sind partielle Differentialgleichungen geeignet, die zur Beschreibung passiver physikalischer Systeme dienen. Diese Differentialgleichungen sind in der Regel außer von der Zeit noch zusätzlich vom Ort abhängig. Unter der Voraussetzung endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit lässt sich dann mit Hilfe einer Koordinatentransformation ein System gewinnen, welches die Eigenschaft der MD-Kausalität besitzt. Findet man hierzu ein MD-passives Referenznetz, welches aus so genannten MD-Bauelementen aufgebaut ist, so stellt die in diesem Referenznetz gespeicherte Energie eine vektorielle LIAPUNOV-Funktion dar. Die resultierenden Eigenschaften der Stabilität, Robustheit und des massiven Parallelismus lassen sich dann auch auf das entsprechende MD-Wellendigitalfilter übertragen. Erste Arbeiten, die sich mit

der Lösung partieller Differentialgleichungen unter Anwendung von Wellendigitalprinzipien beschäftigen, gehen auf FETTWEIS und NITSCHKE zurück [11]. Hier wurden insbesondere die Telegraphengleichungen, die MAXWELL-Gleichungen sowie die TIMOSHENKO-Gleichung untersucht. In weiteren Arbeiten [33],[22] wurden u.a. die Gruppendiffusionsgleichungen und die EULER- Gleichungen betrachtet.

Die vorliegende Arbeit setzt sich speziell mit der Anwendung der Wellendigitalprinzipien zur Berechnung der NAVIER-STOKES-Gleichungen sowie auch der EULER-Gleichungen auseinander. Beide stellen komplizierte, nichtlineare, partielle Differentialgleichungen der Strömungsmechanik dar. Diese Gleichungen gehen insbesondere durch Spezialisierung des Ansatzes für die Reibungskräfte aus allgemeinen Bilanzgleichungen hervor. Basierend auf Referenznetzen, die auf FETTWEIS (s. [15],[16]) zurückgehen, werden in dieser Arbeit vor allem Standardprobleme der Strömungsmechanik betrachtet. Deswegen steht in dieser Arbeit vor allem die Modellierung und Implementierung sowie der Entwurf von Algorithmen zur Berechnung strömungsmechanischer Probleme im Vordergrund.

Im Kapitel (2) werden dem uneingeweihten Leser zunächst die wesentlichen physikalischen Grundlagen, die vor allem strömungsmechanischer Natur sind, dargestellt. Hier wird insbesondere die in [15] angegebene alternative Form der Bilanzgleichungen hergeleitet. Die für die Arbeit notwendigen Grundlagen der Wellendigitalprinzipien werden in Kapitel (3) zusammengefasst. Da es in den Arbeiten von FRIES [22] und ZHU [41] zu widersprüchlichen Ergebnissen in der Nähe von Unstetigkeitsstellen kam, wird in Kapitel (4) auf das GIBBS'sche Phänomen genauer eingegangen. Insbesondere wird hier an Hand eines einfachen Beispiels gezeigt, wie es zu Oszillationen in der Nähe von Unstetigkeitsstellen kommen kann. Die Herleitungen der von FETTWEIS angegebenen Referenznetze für die NAVIER-STOKES- bzw. EULER-Gleichungen erfolgten allgemein unter Betrachtung dreier Ortsvariablen sowie der Zeit ((3+1)-D Fall). In Kapitel (5) erfolgt zunächst eine Spezialisierung auf den (1+1)-D Fall. Nach der Herleitung eines Referenznetzes für die EULER-Gleichungen, wird dieses sukzessive erweitert und damit Reibungskräfte sowie Wärmeleitung berücksichtigt. Desweiteren werden in diesem Kapitel Möglichkeiten der Initialisierung sowie der Berücksichtigung von Randbedingungen (insbesondere harte Randbedingungen) angegeben. Die Simulationsergebnisse werden in Kapitel (6) dargestellt. Hierbei steht vor allem ein klassisches Benchmark Problem der Strömungsmechanik, das so genannte Stoßwellenrohr-Problem im Vordergrund der Betrachtungen. Ferner werden unterschiedliche Abtastgitter untersucht sowie die daraus resultierenden Ergebnisse interpretiert. In Kapitel (7) erfolgt die Herleitung der Referenznetze für den (2+1)-D Fall. Die hieraus resultierenden Simulationsergebnisse sind in Kapitel (8) zusammengefasst. Auch hier werden die hergeleiteten Referenznetze anhand von Standardproblemen untersucht. Da die Lösungen der untersuchten strömungsmechanischen Probleme häufig vereinzelte Bereiche enthalten, in denen steile Gradienten vorhanden sind, ist es insbesondere sinnvoll, diese Bereiche feiner aufzulösen. Aus diesem Grund wird in Kapitel (9) ein Ansatz für eine zeitlich bzw. räumlich variable Abtastung untersucht. Die Zusammenfassung der Ergebnisse erfolgt in Kapitel (10).

2. Physikalische Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es, die wesentlichen physikalischen Grundlagen dieser Arbeit darzulegen. Insbesondere sollen dabei die getroffenen und den Berechnungen zugrundeliegenden Modellannahmen vergegenwärtigt werden. Da sich diese Arbeit mit der Untersuchung der EULER- bzw. NAVIER-STOKES-Gleichungen auseinandersetzt, stammen die wesentlichen physikalischen Grundlagen vor allem aus der Strömungslehre.

Die Strömungslehre ist die Lehre von der Bewegung flüssiger und gasförmiger Medien und beinhaltet deren experimentelle sowie theoretische Untersuchung. Da sich das flüssige sowie gasförmige Medium in ähnlicher Weise behandeln lässt, werden beide auch unter dem Oberbegriff Fluid zusammengefasst.

Speziellere Teilgebiete der Strömungslehre sind die Aerodynamik, die Gasdynamik und die Hydrodynamik. Die Aerodynamik beschäftigt sich vor allem mit strömenden Gasen und deren Umströmung von festen Körpern. Hierbei sind vor allem die an den Körpern auftretenden Kräfte von großem Interesse. Die Gasdynamik beschäftigt sich ebenfalls mit strömenden Gasen. Hierbei werden insbesondere sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten berücksichtigt. Das Gas stellt dabei ein kompressibles Medium dar, welches starke Dichteänderungen beinhalten kann. Das zuletzt genannte Teilgebiet, die Hydrodynamik, beschäftigt sich hingegen mit inkompressiblen Medien wie es z.B. Flüssigkeiten in guter Näherung darstellen. Hierbei werden insbesondere kleine Geschwindigkeiten und kleine Dichteänderungen betrachtet. Falls das Medium im Ruhezustand betrachtet wird, so geht die Hydrodynamik in die Hydrostatik über.

Eine wesentliche Modellannahme der Strömungslehre und ihrer Teilgebiete ist, dass das betrachtete Medium bzw. Fluid als ein Kontinuum angesehen wird. Diese Annahme wird auch als Kontinuumshypothese bezeichnet. Das Fluid wird dann als homogenes Medium betrachtet und der atomare Aufbau damit vernachlässigt. Diese Modellannahme ist nur dann gerechtfertigt, wenn die makroskopischen Abmessungen groß gegenüber der mittleren freien Weglänge der Moleküle ist. Für die meisten in der Praxis vorkommenden Strömungen ist dies in der Regel erfüllt. Die die Strömung charakterisierenden physikalischen Größen sind im Wesentlichen thermodynamische Zustandsgrößen. Diese werden im nachfolgenden Abschnitt näher behandelt. Um den Bewegungszustand eines Fluids vollständig zu beschreiben, ist jedoch noch eine weitere Größe, nämlich die Geschwindigkeit, erforderlich. Unter der Annahme des Kontinuums werden dann für die zu berechnenden physikalischen Größen in Abschnitt 2.2.4 so genannte Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie aufgestellt. Man erhält damit ein System von partiellen Differentialgleichungen, was jedoch noch nicht die Materialeigenschaften des betrachteten Fluids berücksichtigt. Hierzu sind weitere Modellannahmen erforderlich, aus denen dann weitere Gleichungen, so genannte Materialgleichungen, resultieren. Diese Materialgleichungen können z.B. festlegen, auf welche Weise Viskositätskräfte innerhalb des Fluids Berücksichtigung finden.

Auch die in dieser Arbeit zu untersuchenden EULER- bzw. NAVIER-STOKES-Gleichungen gehen aus den oben genannten Bilanzgleichungen hervor. Das Charakteristische für die jeweiligen Gleichungen resultiert dann aus den entsprechenden Materialannahmen. Für die EULER-Gleichungen wird z.B. angenommen, dass das Fluid nicht viskos ist. Diese Annahme stellt für Gase eine gute Näherung dar, da die einzelnen Gasmoleküle nur in geringer Wechselwirkung zueinander stehen. Die NAVIER-STOKES-Gleichungen hingegen berücksichtigen zusätzlich Viskositätskräfte und stellen damit weitaus kompliziertere Differentialgleichungen dar. Die dabei getroffenen Annahmen für die materiellen Eigenschaften des betrachteten Fluids entsprechen denen eines NEWTON'schen Fluids.

Insgesamt erfolgt die Darstellung des Stoffes in den folgenden Abschnitten in einer etwas ausführlicheren Form. Dies soll zum einen deswegen geschehen, da einem großen Teil der Leserschaft die hier vorgestellten Grundlagen eher unbekannt sein dürften. Zum anderen ist die Wellendigitalmethode selbst stark an physikalische Sachverhalte angelehnt, so dass eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen als notwendig erscheint.

2.1 Thermodynamik

2.1.1 Einige Grundbegriffe

Die wesentlichen physikalischen Größen, die eine Strömung charakterisieren, entstammen aus der Thermodynamik. Die Thermodynamik, die auch als Wärmelehre bekannt ist, ist das Teilgebiet der Physik, welches sich mit der Umwandlung von verschiedenen Energieformen auseinandersetzt. Neben der klassischen mechanischen Arbeit wird hier insbesondere Energie in Form von Wärme berücksichtigt.

Wesentlich für die Thermodynamik ist der so genannte Systembegriff. Ein System stellt ein Volumen dar, welches ein Medium enthält und durch so genannte Systemgrenzen von einem Außenraum getrennt ist. Dieser Außenraum wird auch als Umgebung des Systems bezeichnet. Je nach Art der Systemgrenzen unterteilt man Systeme in offene, geschlossene und abgeschlossene Systeme. Ein offenes System beinhaltet Systemgrenzen, die sowohl den Austausch von Materie als auch den Austausch von Wärme mit der Umgebung ermöglichen. Ein geschlossenes System hingegen enthält Systemgrenzen, die nur den Austausch von Wärme ermöglichen. Bei einem abgeschlossenen System ist weder der Austausch von Materie noch von Wärme mit der Umgebung möglich.

Da es nicht möglich ist, das Verhalten jedes einzelnen Teilchens innerhalb des Systems exakt zu berücksichtigen, ist man vielmehr an einer makroskopischen Beschreibungsweise interessiert. Die den Zustand eines Systems charakterisierenden physikalischen Größen stellen entsprechend makroskopische Größen dar und werden auch als Zustandsgrößen bezeichnet. Diese besitzen die Eigenschaft, dass ihr aktueller Wert unabhängig davon ist, auf welche Weise der Zustand des Systems erreicht wurde.

Die Zustandsgrößen lassen sich auf unterschiedliche Weise in verschiedene Kategorien einteilen. Man unterscheidet z.B. zwischen äußeren und inneren Zustandsgrößen. Äußere Zustandsgrößen sind Größen, die von einem außen stehenden Beobachter wahrgenommen werden. Dies kann beispielsweise die Geschwindigkeit im Schwerpunkt des Systems sein. Innere Zustandsgrößen hingegen sind Größen, die das Verhalten innerhalb des Systems charakterisieren. Z.B. stellen die Größen Volumen V , Druck p , Dichte ρ , Temperatur Θ sowie die innere Energie, die hier mit U bezeichnet werden soll, innere Zustandsgrößen des Systems

dar. Desweiteren lassen sich Zustandsgrößen in thermische sowie kalorische Zustandsgrößen unterteilen. Die Größen Volumen V , Druck p , Dichte ρ sind thermische Zustandsgrößen und lassen sich direkt messen. Hingegen lassen sich die kalorischen Zustandsgrößen nur indirekt über Messungen von Wärmemengen bestimmen (s. [32]). Beispielsweise stellen die Größen innere Energie U , Enthalpie H , und Entropie S kalorische Zustandsgrößen dar.

Ein System kann auf unterschiedliche Weise von einem Zustand in einen anderen Zustand überführt werden. Der für diese Zustandsänderung verantwortliche Ablauf wird auch als Prozess bezeichnet. Je nach Art des Prozesses unterscheidet man im Wesentlichen zwischen isochoren, isothermen und adiabatischen Prozessen. Während isochore bzw. isotherme Prozesse Zustandsänderungen bei konstantem Volumen bzw. Temperatur darstellen, handelt es sich bei den adiabatischen Prozessen um Prozesse, bei denen kein Austausch von Wärme mit der Umgebung erfolgt.

Eine weiterer wesentlicher Begriff der Thermodynamik stellt das thermodynamische Gleichgewicht dar. Ein System befindet sich genau dann im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn von außen keine Änderung der Zustandsgrößen beobachtbar ist.

2.1.2 Thermodynamische Zustandsgleichungen

Die ein System beschreibenden Zustandsgrößen sind nicht unabhängig voneinander und lassen sich über so genannte Zustandsgleichungen miteinander verknüpfen. Befindet sich ein System im thermodynamischen Gleichgewicht, so lässt es sich durch zwei thermodynamische Zustandsgrößen vollständig beschreiben. Sämtliche thermodynamischen Zustandsgrößen sind dann über eine so genannte thermodynamische Zustandsgleichung miteinander verknüpft. Diese lässt sich allgemein in der Form

$$F(p, \rho, \Theta) = 0 \quad (2.1)$$

angeben. Der genaue funktionale Zusammenhang ergibt sich dann aus der Modellannahme des betrachteten Mediums. Das ideale Gas setzt beispielsweise voraus, dass die betrachteten Gasteilchen nicht in Wechselwirkung zueinander stehen. Die einzelnen Teilchen werden dabei als punktförmig angesehen. Mit Hilfe dieser Annahmen lässt sich die thermodynamische Zustandsgleichung

$$pV = nR\Theta \quad \text{mit} \quad R = 8.3144 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (2.2)$$

gewinnen. Hierbei entspricht R der allgemeinen Gaskonstante und n gibt die Anzahl der Mole des Gases an. Die Teilchenzahl, die in einem Mol eines Stoffes enthalten ist, entspricht der Avogadrokonstante

$$N_A = 6.022141510^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (2.3)$$

Neben der Zustandsgleichung für das ideale Gas gibt es noch weitere Zustandsgleichungen, die in der Regel aus einer erweiterten Modellannahme hervorgehen.

2.1.3 Kalorische Zustandsgleichungen

Die kalorischen Zustandsgleichungen stellen u.a. eine Beziehung zwischen der inneren Energie U sowie den thermodynamischen Zustandsgrößen her. Die innere Energie umfasst dabei die thermische, chemische sowie die nukleare Energie der einzelnen Teilchen des Systems.

Im thermodynamischen Gleichgewicht lassen sich je nach Abhängigkeit von den Zustandsvariablen die folgenden kalorischen Zustandsgleichungen in allgemeiner Form angeben

$$U = U(V, \Theta) \quad , \quad U = U(p, \Theta) \quad , \quad U = U(p, V). \quad (2.4)$$

Betrachtet man insbesondere ein ideales Gas, so lässt sich zeigen, dass die innere Energie U nur eine Funktion der Temperatur Θ ist und damit gilt

$$U = U(\Theta). \quad (2.5)$$

Konkret ergibt sich dann der folgende Zusammenhang für die innere Energie U

$$U = C_V \Theta + U_0. \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet C_V die isochore Wärmekapazität. Sie entspricht dem Verhältnis aus zugeführter Wärmemenge zu der daraus resultierenden Temperaturerhöhung bei konstantem Volumen. In ähnlicher Weise lässt sich die isobare Wärmekapazität C_p definieren. Diese stellt dann das Verhältnis aus zugeführter Wärmemenge zu der daraus resultierenden Temperaturerhöhung bei konstantem Druck dar. Beide Wärmekapazitäten sind insbesondere abhängig von der Temperatur Θ . Bildet man das Verhältnis der beiden Wärmekapazitäten

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \quad (2.7)$$

zueinander, so wird damit der so genannte Adiabatenexponent definiert. Ferner lässt sich für ein ideales Gas der folgende Zusammenhang

$$nR = C_p - C_V \quad (2.8)$$

zwischen den Wärmekapazitäten und der idealen Gaskonstante herleiten (s. [32]).

Betrachtet man ein kalorisch ideales Gas bzw. das perfekte Gas, so sind die Wärmekapazitäten unabhängig von der Temperatur und als Konstanten anzusehen. Diese Annahme stellt für einatomige Gase eine sehr gute Näherung dar (s. [32]) und wird im Rahmen dieser Arbeit vorausgesetzt.

Setzt man die Konstante in Gleichung (2.6) zu null und benutzt die Zustandsgleichung des idealen Gases (2.2), so erhält man für die innere Energie

$$U = C_V \frac{pV}{nR}. \quad (2.9)$$

Hieraus ergibt sich nach Einführung der inneren Energiedichte e_i unter Verwendung der Gleichungen (2.7) und (2.8) der Zusammenhang

$$e_i = \frac{p}{\gamma - 1}. \quad (2.10)$$

Die innere Energiedichte stellt hier die auf das Volumen bezogene innere Energie dar. Dies steht im Gegensatz zu sonst üblichen Darstellungen, bei denen die innere Energiedichte als eine auf die Masse bezogene Energiedichte eingeführt wird. Die hier verwendete Definition erfolgt allerdings aus Konsistenzgründen zu [16]. Die Gleichung (2.10) stellt damit einen Zusammenhang zwischen der inneren Energiedichte e_i sowie dem Druck p her. Sie wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich verwendet.

Führt man zusätzlich die auf die Masse bezogene spezifische Wärmekapazität c_V ein, so kann man unter Verwendung von (2.6) und (2.10) den folgenden Zusammenhang angeben

$$\Theta = \frac{p}{c_V(\gamma - 1)\rho}. \quad (2.11)$$

2.1.4 Der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Die ersten beiden Hauptsätze der Thermodynamik stellen ganz wesentliche Axiome der Thermodynamik dar. Der erste Hauptsatz entspricht einem Energieerhaltungssatz, der neben den klassischen mechanischen Energieformen zusätzlich Energie in Form von Wärme berücksichtigt. Dieser lautet

$$dU = dQ + dW. \quad (2.12)$$

Er besagt, dass die infinitesimale Änderung dU der inneren Energie eines Systems der zugeführten Wärmemenge dQ bzw. der an dem System verrichteten mechanischen Arbeit dW entspricht.

Zur Angabe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik muss zunächst die Entropie S eingeführt werden. Diese ist durch das Differential

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{\Theta} \quad (2.13)$$

definiert. Dabei stellt Q_{rev} die bei einem reversibel geführten Prozess zugeführte Wärmemenge dar. Der zweite Hauptsatz ist dann durch die Ungleichung

$$dS \geq \frac{dQ}{\Theta} \quad (2.14)$$

gegeben. Hieraus lässt sich folgern, dass die Entropie in einem geschlossenen System nur zunehmen und nicht abnehmen kann. Die Entropie S ist insbesondere dann zur Beschreibung eines Systems erforderlich, wenn es sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Aus Gründen der Komplexität wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings stets thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt, so dass die Entropie im Folgenden nicht weiter betrachtet wird.

2.1.5 Anwendung auf strömende Fluide

Die in den vorherigen Abschnitten angestellten Überlegungen lassen sich nun auch auf strömende Fluide übertragen. Hierzu denkt man sich an einem Ort innerhalb der Strömung ein infinitesimales Volumenelement herausgeschnitten. Dieses Volumenelement lässt sich dann als separiertes System betrachten. Geht man von der Voraussetzung des thermodynamischen Gleichgewichts aus, so lässt sich der Zustand des Systems eindeutig durch zwei Zustandsgrößen beschreiben. Man kann diese Vorgehensweise nun an jedem Ort innerhalb der Strömung durchführen und erhält damit die so genannten lokalen Zustandsgrößen. Zur Berücksichtigung des Bewegungszustandes der Strömung muss zusätzlich noch ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} eingeführt werden.

2.2 Kontinuumsmechanik

2.2.1 Allgemeines

Die bereits zu Anfang dieses Kapitels erwähnte Kontinuumshypothese stellt für die Kontinuumsmechanik eine ganz wesentliche Annahme dar. Jede in der Kontinuumsmechanik

betrachtete Materie wird damit als ein Kontinuum angesehen. Dieses kann man sich aus einer unendlichen Anzahl von kleinsten Bausteinen aufgebaut denken. Diese Bausteine werden in [4] auch als materielle Punkte bezeichnet und besitzen ein sehr kleines aber endlich ausgedehntes Volumen. Möchte man nun die Strömung eines Fluids mit Hilfe der Kontinuumsmechanik beschreiben, so lassen sich zwei wesentliche Betrachtungsweisen unterscheiden. Dieses stellt zum einen die LAGRANGE'sche und zum anderen die EULER'sche Betrachtungsweise dar. Bei der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise ist man an dem Verlauf bzw. an den Bahnen interessiert, die die einzelnen materiellen Punkte durchlaufen. Jedem einzelnen materiellen Punkt wird dabei ein Ortsvektor \mathbf{r} zugeordnet. Da sich der Aufenthaltsort eines materiellen Punktes ständig ändert, ist dieser insbesondere von der Zeit t abhängig. Zur genauen Festlegung der Bahn eines materiellen Punktes ist jedoch noch ein Referenzort \mathbf{r}_0 , an dem sich der materielle Punkt zu einer festen Referenzzeit t_0 befindet, erforderlich. Es ergibt sich damit die folgende Abhängigkeit für den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t_0, t).$$

Betrachtet man nun die Gesamtheit aller materiellen Punkte und ihre zugehörigen Verläufe, so lässt sich eine Strömung auf diese Weise vollständig beschreiben. Man spricht dann auch von einer materiellen Bescheidungsweise.

Eine andere Möglichkeit die Strömung eines Fluids zu beschreiben, stellt die EULER'sche Betrachtungsweise dar. Auch hier denkt man sich die Strömung aus unendlich vielen kleinen Teilvolumina aufgebaut. Diese sind jedoch im Gegensatz zur LAGRANGE'schen Betrachtungsweise als ortsfest definiert. Der Zustand der Strömung innerhalb eines solchen Teilvolumens wird dann durch entsprechende Zustandsgrößen beschrieben. Betrachtet man auch hier die Gesamtheit aller Teilvolumina, so erhält man vom Ort und von der Zeit abhängige Funktionen, die die Strömung vollständig beschreiben. Diese werden häufig auch als Feldfunktionen bzw. Felder bezeichnet. Z.B. wird der Bewegungszustand der Strömung durch ein Geschwindigkeitsfeld

$$(v_x, v_y, v_z)^T = \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

beschrieben. Falls dieses Feld unabhängig von der Zeit ist, spricht man auch von einer stationären Strömung.

2.2.2 Die materielle Zeitableitung

Ausgangspunkt ist zunächst eine skalare Feldfunktion $\Phi(x, y, z, t)$. Befindet sich ein Beobachter an einem festen Ort im Strömungsfeld, so nimmt er die durch die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, y, z, t + \Delta t) - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

gegebene Änderung der Größe Φ wahr. Bewegt sich der Beobachter hingegen innerhalb des Feldes, so ist die von ihm wahrgenommene Änderung durch die gewöhnliche Ableitung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

gegeben. Nach Anwenden der Kettenregel erhält man für diese

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Bewegt sich der Beobachter nun wie ein materieller Punkt innerhalb der Strömung, so stimmt seine Geschwindigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit überein. Man erhält damit

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \text{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \nabla \Phi. \quad (2.15)$$

die so genannte materielle Ableitung, wobei der Nabla-Operator ∇ verwendet wurde. Der erste Term entspricht dabei der lokalen Änderung von Φ , während der zweite Term die durch die Bewegung des Teilchens verursachte Änderung von Φ widerspiegelt. Der zuletzt genannte Anteil wird auch als konvektiver Anteil bezeichnet. Die Überlegungen lassen sich auch auf eine vektorielle Größe \mathbf{a} übertragen und man erhält für die materielle Ableitung einer vektoriellen Größe

$$\frac{D\mathbf{a}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}^T \nabla) \mathbf{a}. \quad (2.16)$$

2.2.3 Volumen- und Oberflächenkräfte

Im Folgenden soll nun ein beliebiges aus einer Strömung herausgeschnittenes Volumen V näher betrachtet werden, wie es in Bild 2.1 beispielhaft dargestellt ist. Hier sind insbesondere die an dem Volumen V angreifenden Kräfte von Interesse. Diese lassen sich in Volumen- und Oberflächenkräfte unterteilen. Die Volumenkräfte stellen Kräfte dar, die

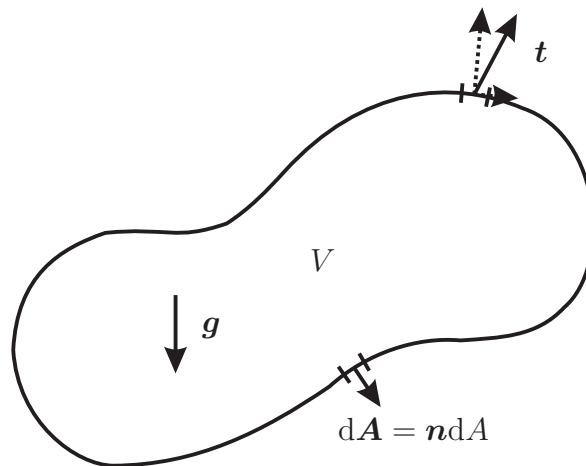


Bild 2.1: An einem Volumen angreifende Kräfte

an jedem Ort des Volumens wirken. In der Regel sind dies Kräfte, die sich aufgrund der Gravitation ergeben. Es können aber durchaus auch Kräfte sein, die aus elektrischen oder magnetischen Feldern resultieren. Sie lassen sich durch die Einführung einer Feldfunktion, der Volumenkraftdichte

$$(g_x, g_y, g_z)^T = \mathbf{g} = \mathbf{g}(x, y, z, t)$$

geeignet beschreiben. Die auf ein infinitesimales Volumenelement dV einwirkende Kraft ist dann durch den Ausdruck $\mathbf{g}dV$ gegeben. Durch Integration resultiert daraus für die auf das Volumen wirkende Kraft

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{g}dV. \quad (2.17)$$

Die Oberflächenkräfte ergeben sich aus dem Schnittprinzip und stellen die Kräfte zwischen der Oberfläche des betrachteten Volumens und seiner Umgebung dar. Zur geeigneten Beschreibung der Oberflächenkräfte lässt sich der Spannungsvektor

$$(t_x, t_y, t_z)^T = \mathbf{t} = \mathbf{t}(x, y, z, t)$$

eingeführen. Die auf ein Flächenelement dA wirkende Kraft ist dann durch den Ausdruck $\mathbf{t}dA$ gegeben. Die aus den Oberflächenkräften resultierende Gesamtkraft ergibt sich zu

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{t}dA. \quad (2.18)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} ist insbesondere von der Richtung der Normalen des betrachteten Flächenelementes abhängig. Betrachtet man ein Flächenelement an einem festen Ort mit Orientierung \mathbf{n} , wie es in Bild 2.1 gegeben ist, so lässt sich der Spannungsvektor mit Hilfe der CAUCHY'schen Spannungsformeln wie folgt berechnen

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Kompakt geschrieben lautet diese Gleichung

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{n}. \quad (2.20)$$

Dabei stellt \mathbf{S} den so genannten CAUCHY'schen Spannungstensor dar. Bei den innerhalb eines Fluids wirkenden Kräften unterscheidet man zwischen Druckkräften und Reibungskräften, so dass der Spannungstensor \mathbf{S} zweckmäßigerweise auch in die zwei Anteile

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

zerlegt wird. In kompakter Form lautet die Gleichung

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}, \quad (2.22)$$

wobei \mathbf{T} den so genannten Tensor der Reibungs- bzw. Extraspannungen repräsentiert und $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix darstellt.

Ferner lässt sich eine mittlere Druckspannung \bar{p} wie folgt definieren

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p - \frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}). \quad (2.23)$$

2.2.4 Integrale Bilanzgleichungen

Ähnlich wie in vielen anderen physikalischen Teilgebieten ergeben sich auch in der Strömungslehre wesentliche Zusammenhänge entsprechender physikalischer Größen durch die Betrachtung so genannter Bilanzgleichungen. Hierzu wird die Änderung einer physikalischen Größe innerhalb eines beliebigen Volumens V betrachtet. Die Änderung setzt sich dabei aus einem Fluss über die Oberfläche des betrachteten Volumens sowie aus einem Beitrag im Inneren des Volumens zusammen.

Im Folgenden werden nun die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls sowie für die Energie eines Fluids hergeleitet. Hierzu wird zunächst ein materielles Volumen betrachtet, welches sich damit zu jedem Zeitpunkt aus den gleichen materiellen Punkten zusammensetzt (s. Bild 2.2). Das Volumen bewegt sich dann innerhalb einer Strömung entsprechend

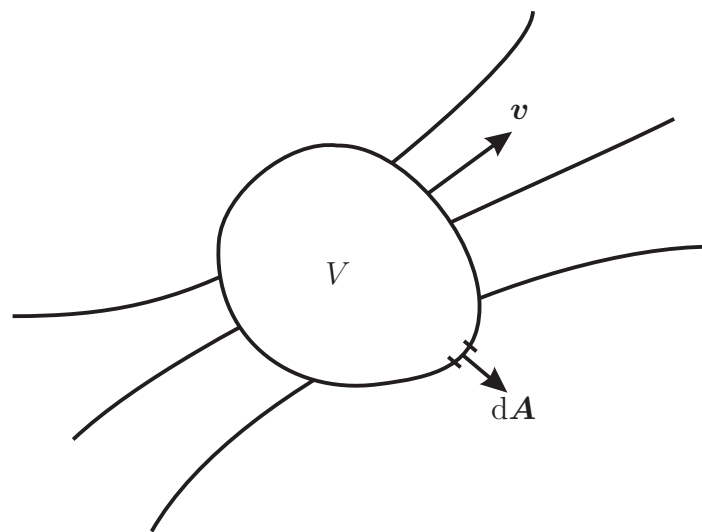


Bild 2.2: materielles Volumen

seiner materiellen Punkte. Die Gestalt des Volumens ändert sich dabei in der Regel und ist damit insbesondere von der Zeit abhängig. Die Masse hingegen ist konstant. Damit ergibt sich für die Massenbilanz eines materiellen Volumens die Bilanzgleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (2.24)$$

Eine solche Bilanzgleichung lässt sich auch für den Impuls angeben. Stellt man die Impulsbilanz für einen Körper auf, so besagt diese, dass sich die Impulsänderung aus der Summe der angreifenden Kräfte ergibt. Wendet man diese Bilanz auf ein materielles Volumen an, so erhält man

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \mathbf{v} \rho dV = \int_{A(t)} \mathbf{S} d\mathbf{A} + \int_{V(t)} \mathbf{g} dV. \quad (2.25)$$

Die an das Volumen angreifenden Kräfte ergeben sich aus Volumen- und Oberflächenkräften, deren Beschreibung bereits im vorangegangenen Abschnitt erfolgte.

Auch für die Energie des betrachteten, materiellen Volumens lässt sich eine Bilanzgleichung angeben. Die Energie setzt sich dabei aus der inneren und der kinetischen Energie zusammen. Zur Beschreibung der inneren Energie wurde in Abschnitt 2.1.3 bereits die auf das