1 Einleitung

„Der medizinische Fortschritt wirkt zwangsläufig ausgabensteigernd“ [1]

Unter dieser Überschrift veröffentlichte 2006 der Vorstandsvorsitzende der *Kassenärztlichen Bundesvereinigung* zusammen mit einem Kollegen einen Artikel über die Kosten des deutschen Gesundheitssystems in der *Frankfurter Allgemeinen Zeitung*. In der Tat sind viele der heutigen Diagnosegeräte sehr teuer und aufwendig im Unterhalt. Daher ist die Akzeptanz einer neuen Diagnosemethode eng mit ihrer Wirtschaftlichkeit verknüpft. Dies ist sicherlich ein Grund, weshalb die photoakustischen Abbildungsmethoden, trotz beachtlicher Laborerfolge, noch nicht im medizinischen Alltag angekommen sind. Dabei stellt die Photoakustik eine sinnvolle Erweiterung der in der Medizin vielfach eingesetzten Ultraschalldiagnostik dar. Die Photoakustik kombiniert zwei Teilbereiche der Physik: Die Optik und die Akustik. Durch den photoakustischen Effekt wird auf eine Probe eingestrahltes Licht in eine akustische Welle umgewandelt. Diese Kombination ermöglicht es Probeninformationen zu erhalten, die mit rein optischen bzw. rein akustischen Messmethoden nicht zugänglich wären. Handelt es sich beispielsweise bei der untersuchten Probe um ein optisch streuendes Medium, so ist mit optischen Messmethoden zwar ein guter optischer Kontrast erreichbar, die Auflösung des aufgenommenen Bildes ist jedoch für größere Eindringtiefen durch die Streuung drastisch reduziert. Auf der anderen Seite ermöglicht die Ultraschallbildgebung hochauflösende Bilder von optisch streuenden Proben, ohne jedoch den optischen Kontrast der Probe wiedergeben zu können. Die photoakustische Bildgebung verbindet den optischen Kontrast einer Lichtanregung mit der Auflösung des akustischen Empfangssystems. Trotz dieser für biomedizinische Anwendungen höchst nützlichen Bildgebungseigenschaften wurde die Photoakustik zunächst in erster Linie für Gasuntersuchungen eingesetzt [2]. Seit der Entwicklung leistungsstarker Laserlichtquellen erschließt sich die Photoakustik zunehmend auch biomedizintechnische Anwendungsgebiete. In der Biomedizintechnik besteht ein photoakustisches Messsystem typischerweise aus einem Riesenimpulslaser und einem Ultraschallgerät. Die Abbildung des optischen Kontrastes im Ultraschallbild durch die Photoakustik kann beispielsweise zur Tumordetektion im Gewebe genutzt werden. Insbesondere für Reihenuntersuchungen („Screening“) wären photoakustische Messungen besser geeignet als Röntgenuntersuchungen, da bei der Photoakustik keine ionisierende Strahlung zum Einsatz kommt. Daher sind photoakustische Verfahren deutlich schonender für den Patienten. Die häufigste Krebsart bei Frauen weltweit ist der Brustkrebs [3]. Durch Mammographie-Screenings kann bei dieser Krebsart die Sterblichkeitsrate reduziert werden [4], [5]. Ein erster Prototyp für ein photoakustisches Mammographie-Messgerät wurde bereits in [6] vorgestellt.

Ein Hinderungsgrund für die Nutzbarkeit der biomedizinischen Photoakustik außerhalb von Laboren stellt das üblicherweise verwendete Laseranregungssystem dar: Riesenimpulslaser sind in der Regel sehr groß, nicht transportabel, benötigen eventuell Kühlwasser und Starkstromanschlüsse. Ihr größter Nachteil ist jedoch ihr hoher Anschaffungspreis (in der Größenordnung von 100000 Euro für ein multispektrales System).

Im Rahmen dieser Arbeit werden nun Halbleiterlaser als alternative Lichtquellen für die biomedizinische photoakustische Bildgebung untersucht. Die Vorteile von Halbleiterlasern sind ihre Kompaktheit und ihr relativ geringer Preis. Sie erlauben die Kombination mit einem typischen klinischen Ultraschallsystem und wären daher eine Ergänzung der etablierten Ultraschalldiagnose. Da sich die Eigenschaften von Halbleiterlasern jedoch von den üblicherweise verwendeten Riesenimpulslasern unterscheiden, insbesondere liefern Laserdioden deutlich geringere Lichtpulsenergien, bedarf es neuartiger Strategien, um diese Großlasersysteme durch Halbleiterlasersysteme erfolgreich zu ersetzen.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen des photoakustischen Effekts, die Eigenschaften der in der biomedizinischen Photoakustik üblichen Lichtquellen und die Ultraschalldetektoren vorgestellt. Kapitel 3 beschreibt dann das für die Photoakustik entwickelte Halbleiterlasersystem bevor in Kapitel 4 das Verhalten von Halbleiterlasern im Einsatz als photoakustische Lichtquellen näher beleuchtet wird. Kapitel 5 demonstriert schließlich die biomedizinische Anwendung des halbleiterlasergestützten photoakustischen Messsystems anhand von Blutsauerstoffsättigungsmessungen.

2 Grundlagen

Die Grundlage der photoakustischen Bildgebung bildet der photoakustische Effekt. Dieser von Alexander Graham Bell 1880 entdeckte Effekt [7, 8] beschreibt die Generierung eines Schallsignals durch Lichtabsorption aufgrund von thermoelastischer Expansion. Demzufolge verbindet die Photoakustik die Akustik, die Optik und die Thermodynamik. Die Umwandlung von Licht in Schall kann durch fünf unterschiedliche Mechanismen erfolgen, wobei die generierte Ultraschallwelle nicht der Frequenz des Lichtes, sondern nur der Modulationsfrequenz seiner Amplitudenmodulation folgen kann [9, 10]. Die fünf Mechanismen sind der dielektrische Durchbruch, die Verdampfung oder die Materialabtragung, die Elektrostriktion, der Strahlungsdruck und die thermoelastische Expansion. Hierbei entspricht der dielektrische Durchbruch der Erzeugung eines Plasmas im bestrahlten Medium. Dieser Mechanismus erfordert eine sehr hohe Laserlichtenergie und ist daher in biomedizinischen Anwendungen zum Schutz des Gewebes durch die Begrenzung der Laserleistung auszuschließen. Aus demselben Grund wird die Verdampfung bzw. die Materialabtragung im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter diskutiert, da auch diese Mechanismen nur unter extremen Bedingungen auftreten. Der Effekt der Elektrostriktion beschreibt den Einfluss des elektrischen Lichtfeldes auf die Polarisierbarkeit einer bestrahlten dielektrischen Probe, die beispielsweise eine Umschichtung von Molekülen und somit eine Verformung des Materials zur Folge hat [11]. Dieser Effekt ist nach [9] üblicherweise immer vorhanden. Der Einfluss des Strahlungsdrucks des Lichtes auf den generierten Ultraschalldruck hingegen ist nach [9] so gering, dass er vernachlässigt werden kann. Die thermoelastische Expansion ist schließlich der Mechanismus, der dem photoakustischen Effekt in biomedizinischen Anwendungen zugrunde liegt. Er tritt in optisch absorbierenden Medien auf und beschreibt eine lokale Erwärmung des bestrahlten Absorbermediums, das sich dann aufgrund der Temperaturänderung ausdehnt und somit einen Druck im Medium erzeugt. Nach [10] ist dieser Effekt deutlich stärker als der Elektrostriktionsmechanismus, falls der optische Absorptionskoeffizient des beleuchteten Absorbermaterials $\mu_a > 1\,\mathrm{cm}^{-1}$ ist. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit nur der dominierende Mechanismus der thermoelastischen Expansion näher betrachtet.

Im Folgenden wird nun die photoakustische Wellengleichung für Flüssigkeiten nach [10] dargestellt. Dabei wird davon ausgegangen, dass die generierte akustische Welle ausschließlich auf eine durch Lichtabsorption hervorgerufene thermoelastische Expansion zurückzuführen ist. Diese Annahme ermöglicht es, die Darstellung des photoakustischen Effekts in optische und akustische Vorgänge zu zerlegen. In der akustischen Theorie wird auf diese Weise die Lichtabsorption als Wärmequelle modelliert. Die Darstellung des photoakustischen Effekts startet zunächst mit der Herleitung der akustischen Wellengleichung, bevor der Einfluss der Lichtquelle näher erläutert wird.

2.1 Thermoelastische Wellengleichung

Nach [10] basiert die nicht-stationäre thermoelastische Wellengleichung für Flüssigkeiten, falls in ihnen ausschließlich longitudinale akustische Wellen angeregt werden, auf drei Grund-gleichungen aus der theoretischen Akustik bzw. Thermodynamik: der Kontinuitätsgleichung, der Stokes-Navier-Bewegungsgleichung einer viskosen Flüssigkeit und der Wärmeleitungsgleichung. Hierbei entspricht die Kontinuitätsgleichung dem Masseerhaltungsgesetz, die Stokes-Navier-Bewegungsgleichung dem Impulserhaltungssatz und die Wärmeleitungsgleichung der Diffusionsgleichung für die Wärmeausbreitung. Aus diesen drei Gleichungen ist es möglich, eine thermoelastische Wellengleichung herzuleiten, die eine Beschreibung der photoakustisch erzeugten akustischen Welle erlaubt, um insbesondere die Abhängigkeit des photoakustischen Signals von der Lichtabsorption, der Absorbergeometrie und der Lichtpulsdauer näher untersuchen zu können (vgl. Kapitel 2.2). Nach [12] sind zwei Darstellungsformen für akustische Bewegungsgleichungen üblich: Die Lagrange- und die Euler-Darstellung.

Während die Lagrange-Darstellung die erzeugte Bewegung mit Hilfe der zeitlichen Auslenkung eines Flüssigkeitsanteils beschreibt, soll hier jedoch die Euler-Darstellung verwendet werden, die sich auf die Schallschnellenänderung (der Schallschnellevektor $\vec{u}$ entspricht hierbei der Auslenkungsänderung pro Zeit) an einem festen Ort bezieht.

Diese Darstellung hat unter anderem den Vorteil, dass das Bezugskoordinatensystem an einem festen Ort verbleibt. Die nachfolgend dargestellten Überlegungen basieren auf der Annahme nur kleiner Auslenkungen um eine Ruhelage. Für eine klare Unterscheidung zwischen Größen, die sich auf die Gleichgewichtslage beziehen, gegenüber denjenigen, die die Auslenkungen beschreiben, werden alle Gleichgewichtsgrößen mit dem Index „0“ versehen. So bezeichnet beispielsweise p_0 den Gleichgewichtsdruck während p sich auf die Druckänderung infolge einer Auslenkung bezieht.

Kontinuitätsgleichung

Nach [12] ergibt sich die Kontinuitätsgleichung aus der Überlegung, dass eine zeitliche Änderung der Volumendichte $\frac{\partial(\rho+\rho_0)}{\partial t}$ in einer homogenen Flüssigkeit nur durch eine Dichteflussänderung $-\nabla \cdot ((\rho + \rho_0)\vec{u})$ (Dichte:ρ, Schallschnellevektor: $\vec{u}$) aus dem betrachteten Gebiet heraus (mit umgekehrten Vorzeichen hinein) oder durch eine „Volumendichte-Quelle“ Q, d. h. eine Flüssigkeitserzeugung, entstehen kann. Daraus ergibt sich die folgende Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial(\rho + \rho_0)}{\partial t} = -\nabla \cdot ((\rho + \rho_0)\vec{u}) + Q \tag{2.1}$$

Im üblichen Anwendungsfall der Photoakustik gilt $Q = 0$. Somit reduziert sich Gleichung (2.1) zu:

$$\frac{\partial(\rho + \rho_0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho + \rho_0)\vec{u}) = 0 \tag{2.2}$$

Stokes-Navier-Gleichung

Aus der Impulserhaltung kann nach [12] die Stokes-Navier-Gleichung ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
(\rho+\rho_0)\frac{d\vec{u}}{dt} &\equiv (\rho+\rho_0)\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\rho+\rho_0)\vec{u}\nabla\vec{u} \\
&= -\nabla\left[\rho_0\phi\right]-\nabla\cdot\mathbf{P} \\
&= -\nabla p_0-\nabla\left[\rho_0\phi\right] \\
&\quad +\nabla\left[(\eta+\frac{4}{3}\mu)\nabla\cdot\vec{u}\right]-\mu\nabla\times(\nabla\times\vec{u})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Diese Gleichung setzt die Impulsdichteänderung $(\rho+\rho_0)\frac{d\vec{u}}{dt}$ der Flüssigkeit gleich der Summe aus der Impulsdichteänderung einer von außen wirkenden Kraft pro Masseneinheit (z. B. der Gravitationskraft) mit der Potentialenergie ϕ und der Impulsdichteänderung der Viskosität, beschrieben durch den Spannungstensor $\mathbf{P}$. Dieser Spannungstensor $\mathbf{P}$ kann nach [12] in drei Anteile zerlegt werden: Einen Anteil, der abhängig vom äußeren Druck p_0 auf die Flüssigkeit ist und jeweils einen Anteil für die Volumenviskosität (Volumenviskositätskoeffizient η) und die Scherviskosität (Scherviskositätskoeffizient μ). Das Ergebnis ist in der letzten Zeile von Gleichung (2.3) dargestellt.

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\mu\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)-\mu\nabla\times\nabla\times\vec{u} &= \frac{\mu}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\mu\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)-\nabla\times\nabla\times\vec{u}\right) \\
&= \frac{\mu}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\mu\left(\nabla^2\vec{u}\right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

kann Gleichung (2.3) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
(\rho+\rho_0)\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\rho+\rho_0)\vec{u}\nabla\vec{u} &= -\nabla p_0-\nabla\left[\rho_0\phi\right] \\
&\quad +\nabla\left[(\eta+\frac{\mu}{3})\nabla\cdot\vec{u}\right]+\mu\left(\nabla^2\vec{u}\right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Wärmeleitungsgleichung

Um zur Wärmeleitungsgleichung zu gelangen, wird zunächst die zeitliche Ableitung der inneren Energiedichte nach [12, 10] betrachtet:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dU}{dt}=\frac{1}{\rho_0}\left[-\nabla\cdot\vec{J}_h+\mathbf{D}-p\nabla\cdot\vec{u}-\eta_{th}\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle\right] \tag{2.6}$$

Hierbei bezeichnet U die innere Energie der Flüssigkeit. Ihre zeitliche Änderung pro Volumendichte wird durch einen Wärmeleitungsfluss $\vec{J}_h$, durch den Tensor der viskosen Reibung $\mathbf{D}$, durch einen Volumenexpansionsterm $-p\nabla\cdot\vec{u}$ und durch die Strahlungsintensität des eingestrahlten Lichtes, hier beschrieben durch den zeitlich gemittelten Poyntingvektor $\left\langle\vec{S}\right\rangle$, verursacht [10, 13]. Der letztgenannte Term ist in der Herleitung nach [12] nicht berücksichtigt, da dort keine externen Energiequellen betrachtet werden. Es ist zu beachten, dass das Licht über einen Wirkungsgrad η_{th} in Gleichung (2.6) eingeht, da die absorbierte Lichtenergie nicht vollständig in Wärme umgewandelt wird [14]. η_{th} ist damit abhängig vom optischen Absorptionsverhalten des bestrahlten Absorbers. Für den Wärmeleitungsfluss kann nach [12] auch geschrieben werden:

$$\vec{J}_h = -K\nabla(T_0 + T) \tag{2.7}$$

Dabei handelt es sich bei K um die thermische Leitfähigkeit und bei $T_0 + T$ um die absolute Temperatur (inklusive der Temperaturänderung T). Damit ergibt sich Gleichung (2.6) zu:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\rho_0}\left[\nabla \cdot (K\nabla(T_0 + T)) + \mathbf{D} - p\nabla \cdot \vec{u} - \eta_{th}\nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle\right] \tag{2.8}$$

Des Weiteren gilt nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik nach [15] bzw. [16]:

$$dU = \rho_0(T_0 + T)d\mathcal{S} - pdV \tag{2.9}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{S}$ die Entropie pro Masseneinheit und V das Volumen der Flüssigkeit. Es handelt sich hierbei um eine Näherung für ein thermodynamisches Quasi-Gleichgewicht [12]. Mit $dV = \nabla \cdot \vec{u}$ kann der 1.Hauptsatz der Thermodynamik nach [12] auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dU}{dt} = (T_0 + T)\frac{d\mathcal{S}}{dt} - \frac{1}{\rho_0}p\nabla \cdot \vec{u} \tag{2.10}$$

Durch Gleichsetzen mit Gleichung (2.8) erhält man:

$$(T_0 + T)\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{1}{\rho_0}\left[\nabla \cdot (K\nabla(T_0 + T)) + \mathbf{D} - \eta_{th}\nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle\right] \tag{2.11}$$

Nach [12] kann $(T_0 + T)\frac{d\mathcal{S}}{dt}$ ersetzt werden durch:

$$(T_0 + T)\frac{d\mathcal{S}}{dt} = (T_0 + T)(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \vec{u}\nabla\mathcal{S}) \tag{2.12}$$

Damit ergibt sich Gleichung (2.11) zu:

$$(T_0 + T)(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \vec{u}\nabla\mathcal{S}) = \frac{1}{\rho_0}\left[\nabla \cdot (K\nabla(T_0 + T)) + \mathbf{D} - \eta_{th}\nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle\right] \tag{2.13}$$

Unter der Annahme nur sehr kleiner Auslenkungen und dass keine externen Kräfte auf die Flüssigkeit wirken, werden in den Gleichungen (2.2), (2.5) und (2.13) nur lineare Terme berücksichtigt und man erhält damit die drei folgenden Gleichungen nach [10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.14}$$

$$\rho_0\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla\left[(\eta + \frac{\mu}{3})\nabla \cdot \vec{u}\right] + \mu\left(\nabla^2\vec{u}\right) \tag{2.15}$$

$$T_0\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\left[\nabla \cdot (K\nabla T) - \eta_{th}\nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle\right] \tag{2.16}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass im Gleichgewicht eine homogene Temperaturverteilung vorliegt und somit der Gradient in Gleichung (2.16) nur von der Temperaturänderung T abhängt, wohingegen sonst T gegenüber T_0 zu vernachlässigen ist. Nach [12] ist der Tensor der viskosen Reibung $\mathbf{D}$ nicht-linear (abhängig vom Quadrat des Schallschnellevektors $\vec{u}$), wird also hier vernachlässigt und für die Entropie gilt

$$\mathcal{S} = s_0 + s \tag{2.17}$$

mit der Entropieabweichung s vom Gleichgewichtswert s_0.

Zustandsgleichungen

Um eine geschlossene Darstellung der drei Gleichungen (2.14 - 2.16) und damit die thermoelastische Wellengleichung zu erhalten, bedarf es zweier Zustandsgleichungen, die nach [12] folgendermaßen umgeformt werden können:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_{T_0} p + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T_0}\right)_{p_0} T && (2.18) \\ &= \gamma \rho_0 \kappa_s \left(p - \alpha T\right) \\ s &= \left(\frac{\partial s_0}{\partial T_0}\right)_{p_0} T + \left(\frac{\partial s_0}{\partial p_0}\right)_{T_0} p && (2.19) \\ &= \frac{C_p}{T_0}\left(T - \frac{\gamma - 1}{\alpha\gamma} p\right) \end{aligned}$$

Hierbei ist $\kappa_s = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0}\right)_{s_0}$ die isentrope Kompressibilität, $\alpha = \left(\frac{\partial p_0}{\partial T_0}\right)_V$ die isochore Druckänderung über der Temperatur und $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck (C_p) zur spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen (C_V). Ferner seien die isotherme Kompressibilität κ_T und der thermische Ausdehnungskoeffizient β wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \kappa_T &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p_0}\right)_{T_0} && (2.20) \\ \beta &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T_0}\right)_{p_0} && (2.21) \end{aligned}$$

Die Schallgeschwindigkeit c_0 sei gegeben mit:

$$c_0{}^2 = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s} \tag{2.22}$$

Alle diese Parameter sind üblicherweise abhängig von Druck und Temperatur. Für kleine Auslenkungen können diese jedoch im vorliegenden Fall als näherungsweise konstant angenommen werden. Zwischen den einzelnen Parametern bestehen die folgenden Beziehungen [12]:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta}{\kappa_T} && (2.23) \\ C_V \kappa_T &= C_p \kappa_s \\ \Rightarrow \kappa_T &= \gamma \kappa_s && (2.24) \\ \gamma - 1 &= \frac{T_0 \beta^2}{\kappa_s C_p \rho_0} && (2.25) \end{aligned}$$

Setzt man nun Gleichung (2.19) in Gleichung (2.16) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[T-\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma}p\right]=\frac{K}{\rho_0 C_p}\nabla^2 T-\frac{1}{\rho_0 C_p}\eta_{th}\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle \tag{2.26}$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.18) kann auch Gleichung (2.14) umgeformt werden:

$$\nabla\cdot\vec{u}=-\gamma\kappa_s\frac{\partial}{\partial t}\left(p-\alpha T\right) \tag{2.27}$$

Durch partielle zeitliche Ableitung lässt sich Gleichung (2.27) auch folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)=-\gamma\kappa_s\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p-\alpha T\right) \tag{2.28}$$

Bildet man den Gradienten auf beiden Seiten von Gleichung (2.15) erhält man:

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)=-\nabla^2 p+\nabla^2\left[(\eta+\frac{\mu}{3})\nabla\cdot\vec{u}\right]+\mu\nabla^2\left(\nabla\cdot\vec{u}\right) \tag{2.29}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.27) und (2.28) in Gleichung (2.29) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2-\rho_0\gamma\kappa_s\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p&=-\rho_0\alpha\gamma\kappa_s\frac{\partial^2}{\partial t^2}T-\left(\eta+\frac{4}{3}\mu\right)\gamma\kappa_s\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\left(p-\alpha T\right)\\ \Rightarrow\left[\nabla^2-\frac{\gamma}{c_0{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p&=-\frac{\alpha\gamma}{c_0{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T-\left(\eta+\frac{4}{3}\mu\right)\frac{\gamma}{\rho_0 c_0{}^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\left(p-\alpha T\right)\end{aligned} \tag{2.30}$$

Man erhält also schließlich mit der Expansionsgleichung (2.30) und der Wärmeleitungsgleichung (2.26) zwei miteinander gekoppelte Gleichungen (vgl. [2]). Nach [10] kann $\chi=\frac{K}{\rho_0 C_p}$ als thermisches Diffusionsvermögen beschrieben werden. Wird die Pulslänge des Laserpulses deutlich kleiner als die thermische Diffusionzeit $\tau_{th}=\frac{a^2}{\chi}$ gewählt, wobei a die maßgebliche Dimension der geheizten Zone beschreibt, so ist nach [17] bzw. [10] die thermische Diffusion in der Wärmeleitungsgleichung (2.26) zu vernachlässigen. Diese Bedingung wird allgemein als „thermal confinement"-Bedingung bezeichnet. Die maßgebliche Dimension kann beispielweise der Absorberdurchmesser oder der Strahldurchmesser des Lasers sein, je nachdem welche Größe die geheizte Zone am stärksten eingrenzt. Laut [10] ist die Schallabsorption in der photoakustischen Schallerzeugungszone sehr gering, da diese sich in der Regel lediglich über Distanzen in der Größenordnung der akustischen Wellenlänge erstreckt. Damit können auch die Verluste durch Volumenviskosität und Scherviskosität vernachlässigt werden. Mit diesen Näherungen reduzieren sich beide Gleichungen zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[T-\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma}p\right]=-\frac{1}{\rho_0 C_p}\eta_{th}\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle \tag{2.31}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{\gamma}{c_0{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p=-\frac{\alpha\gamma}{c_0{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T \tag{2.32}$$

Hieraus ergibt sich schließlich die thermoelastische Wellengleichung:

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c_0{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]p=\frac{\beta}{C_p}\frac{\partial}{\partial t}\left[\eta_{th}\nabla\cdot\left\langle\vec{S}\right\rangle\right] \tag{2.33}$$

Die Lösungen dieser thermoelastischen Wellengleichung sind abhängig von der Geometrie des bestrahlten Mediums. Da bisher die optische Anregung des Mediums nur in Form eines externen Wärmeeintrags in der thermoelastischen Wellengleichung modelliert wurde, wird im folgenden Kapitel nun eine Lösung der thermoelastischen Wellengleichung in Abhängigkeit von der optischen Intensitätsverteilung vorgestellt.

2.2 Lösung der photoakustischen Grundgleichung

Ist die Intensitätsverteilung am Ort des optischen Absorbers bekannt, kann diese in die thermoelastische Wellengleichung (2.33) eingesetzt werden. Dies wird nachfolgend für den Einfall einer ebenen Lichtwelle von einem optisch transparenten in ein optisch absorbierendes Medium analog zu [2], [10] und [14] demonstriert. Die zeitliche Abhängigkeit der Intensität soll hierbei durch eine Funktion $f(t)$ beschrieben werden. Berücksichtigt man das Lambert-Beer-Gesetz [14],

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-\mu_a z} \tag{2.34}$$

so erhält man damit folgende Gleichung für die Intensität am Ort des optischen Absorbers:

$$I(z,t) = I_0 \cdot f(t) \cdot e^{-\mu_a z} \tag{2.35}$$

Der Betrag des zeitlich gemittelten Poyntingvektors ist nach [18] gleich der Intensität. Mit Hilfe des normierten Richtungsvektors $\vec{n}_z$ in Lichtausbreitungsrichtung z kann der zeitliche Mittelwert des Poyntingvektors damit folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \left| \left\langle \vec{S} \right\rangle \right| \cdot \vec{n}_z = I_0 \cdot f(t) \cdot e^{-\mu_a z} \cdot \vec{n}_z \tag{2.36}$$

Für die volumetrische Wärmestromdichte (thermische Energieänderung pro Zeit und Einheitsvolumen) $-H(z,t) = \eta_{th} \nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle$ ergibt sich damit [19]:

$$-H(z,t) = \eta_{th} \nabla \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle = \eta_{th} \frac{\partial}{\partial z} S_z = -\eta_{th} \mu_a \cdot I_0 \cdot f(t) \cdot e^{-\mu_a z} \tag{2.37}$$

Hierbei sind der zeitliche Mittelwert des Poyntingvektors und die volumetrische Wärmestromdichte über die Divergenz miteinander verknüpft, da sich der Poyntingvektor auf eine Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bezieht, während die hier verwendete Wärmestromdichte jedoch pro Einheitsvolumen definiert ist.

Zunächst wird nun eine generelle Lösung der thermoelastischen Wellengleichung (2.33) analog zu [14] hergeleitet, ehe auf zwei bestimmte Absorbergeometrien näher eingegangen wird. Der Ansatz für die Lösung der thermoelastischen Wellengleichung (2.33) nach [14] wird mit Hilfe der Green'schen Funktion durchgeführt. Nach [20] kann eine partikuläre Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung aus der Faltung der Green'schen Funktion G mit der inhomogenen Anregungsfunktion ermittelt werden. Für homogene Randbedingungen ist diese partikuläre Lösung dann auch die eindeutige Lösung der Differentialgleichung [20]. Dabei beschreibt die Green'sche Funktion im Grunde die Impulsantwort der Differentialgleichung. In dem vorliegenden Fall ist die Green'sche Funktion durch folgende Gleichung definiert [14]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{{c_0}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(t - t') \tag{2.38}$$