Einleitung

Die Modulgruppe:

$$\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

der $2\times 2-$Matrizen über $\mathbb{Z}$ mit Determinante 1 operiert als Fuchssche Gruppe erster Art auf der oberen Halbebene:

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

mittels Möbiustransformationen.Vermutlich war Gauss der erste, der diese Gruppe studierte und mit seinen Untersuchungen die klassische Periode der Theorie der automorphen Funktionen begründete, die ein großes Interesse an dieser Theorie hervorrief und in Arbeiten von Klein, Fricke und Poincaré gipfelte.
Einen zweiten Aufschwung erlebte die Theorie der automorphen Funktionen durch einen Artikel von Selberg [Sel56], der den Begriff der automorphen Funktion verallgemeinerte auf Funktionen, die automorph bezüglich einer endlichdimensionalen unitären Darstellung einer diskreten Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sind. Unabhängig davon erschien ein Artikel von Maass [Maa49], der ähnliche nicht-analytische automorphe Formen, sogenannte Maass-Wellenformen, definierte. Durch diese Ideen wurden neue, bisher nicht in der Theorie der automorphen Funktionen verwendete Techniken herangezogen und dies führte zu der Spektraltheorie der automorphen Funktionen.

In dieser Arbeit wollen wir spezielle $\Gamma-$automorphe Funktionen untersuchen und geben dazu im ersten Kapitel dieser Arbeit einen Einstieg in die klassische Theorie. Der Bahnenraum $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ ist eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, die wir folgendermaßen kompaktifizieren können: Wir betrachten die projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, wobei wir $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ als die Menge:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} / \sim .$$

der gekürzten Brüche modulo ± 1 von $\mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ modulo der Äquivalenzrelation $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] \sim \left[\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right] :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Q}^\star : \lambda \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right]$ auffassen, und $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ als Rand von $\mathbb{H}$ ansehen. Die Modulgruppe Γ operiert dann in natürlicher Weise auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ und die unipotenten (parabolischen) Elemente aus Γ haben Fixpunkte auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, die *Spitzen*. Γ permutiert die Menge der Spitzen $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ transitiv und die Vereinigung $\Gamma\backslash\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ läß sich mit der horosphärischen Topologie zu einer kompakten Fläche machen. Bezüglich der in dieser Arbeit betrachteten Untergruppen $\Delta < \Gamma$ von endlichem Index zerfällt die projektive Gerade in $r < \infty$ Spitzenklassen, so daß wir Δ einen *Spitzenvektor* $S(\Delta) := [s_1, \ldots, s_r] \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))^r$ als vollständiges Repräsentantensystem der Spitzenklassen zuordnen können und einen kompakten Bahnenraum $\Delta \setminus \mathbb{H} \cup \{s_1, \ldots, s_r\}$ erhalten. Der *Stabilisator*

$$\Delta(s_i) := \mathrm{Stab}_\Delta(s_i) := \{\delta \in \Delta \colon \delta s_i = s_i\}$$

eines Repräsentanten $s_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ einer Spitzenklasse von Δ läßt sich durch eine Matrix $g_i \in \Gamma$ mit $g_i\infty = s_i$ in den Stabilisator $\Gamma_\infty = \Gamma(\infty)$ der vollen Modulgruppe einbetten:

$$g_i^{-1}\Delta(s_i)g_i \subset \Gamma_\infty,$$

wobei wir den Index $w_i := [\Gamma(s_i) : \Delta(s_i)]$ als *Spitzenbreite* von s_i definieren und Δ den *Vektor der Spitzenbreiten* $S(\Delta) \in \mathbb{N}^r$ zuordnen. In obiger Inklusion können wir die Gleichheit erreichen, wenn wir statt $g_i \in \Gamma$ eine Matrix aus $h_i \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ wählen mit $h_i := g_i\hat{w}_i$ für:

$$\hat{w}_i := \begin{pmatrix} \sqrt{w}_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{w}_i} \end{pmatrix}.$$

Ein Ziel dieser Arbeit war es, ein Programm zu entwickeln, das zu einer gegebenen Untergruppe $\Delta <_f \Gamma$ den Spitzenvektor $S(\Delta)$ und den Vektor $W(\Delta)$ der Spitzenbreiten bestimmt. Die meisten Programme wurden in GAP (Groups, Algorithms, Programming [GAP]) realisiert, einem frei verfügbaren Computeralgebrasystem mit dem Schwerpunkt Gruppentheorie. Wenn nötig, wurden zusätzliche Programmteile in MAGMA oder Maple implementiert. Die wichtigsten im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programme sind im Anhang angefügt.

Im zweiten Kapitel ordnen wir einer Untergruppe $\Delta <_f \Gamma$ eine Familie von Eisensteinreihen zu, indem wir die *Eisensteinreihe* $E_i(z,s)$ zu einer Spitze s_i für $z \in \mathbb{H}, s \in \mathbb{C}$ definieren als:

$$E_i(z,s) := \sum_{\delta \in \Delta(s_i)\backslash\Delta} \mathrm{Im}(h_i^{-1}\delta z)^s.$$

Die Eisensteinreihen konvergieren absolut für $\mathrm{Re}\, s > 1$ und sind Δ-automorphe Funktionen. Selberg [Sel89, Sel91] hat gezeigt, daß sie eine Fortsetzung auf die ganze obere Halbebene besitzen und über eine Funktionalgleichung $E_i(z,s)$ und $E_i(z, 1-s)$ miteinander in Beziehung setzen, genau wie viele Zetafunktionen. Die Fourierentwicklung der Eisensteinreihe $E_i(z,s)$ in der Spitze s_j ist für $\mathrm{Re}\, s > 1$ ist definiert als:

$$E_i(h_j z, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ij,m}(y,s)e^{2\pi i m x}$$

mit $a_{ij,m}(y,s) := \int_0^1 E_i(h_j z, s) e^{-2\pi i m x} dx$, die sich in expliziterer Form angeben lassen und für die konstanten Terme der Fourierentwicklung folgende Gestalt haben:

$$a_{ij,0}(y,s) = \delta_{ij} y^s + \varphi_{ij}(s) y^{1-s}$$

mit:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(s) &= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\tilde{c}^{2s}} \sum_{\substack{d \bmod \tilde{c} \\ \left(\begin{smallmatrix} \star & \star \\ \tilde{c} & d \end{smallmatrix}\right) \in h_i^{-1} \Delta h_j}} 1 \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\tilde{c}^{2s}} \left| \left\{ [\left(\begin{smallmatrix} \star & \star \\ \tilde{c} & \star \end{smallmatrix}\right)] \in \Gamma(\infty) \setminus h_i^{-1} \Delta h_j / \Gamma(\infty) \right\} \right|, \end{aligned}$$

die wir in der *Streumatrix*:

$$\Phi(\Delta, s) := (\varphi_{ij}(s))_{1 \le i,j \le r}$$

für $\operatorname{Re} s > 1$ zusammenfassen. Die Streumatrix ist eine symmetrische Matrix, die sich wegen der Fortsetzbarkeit der Eisensteinreihen auf ganz $\mathbb{H}$ fortsetzen läßt und von der Selberg [Sel89, Sel91] gezeigt hat, daß sie folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$\Phi(\Delta, s)\Phi(\Delta, 1-s) = \mathrm{Id}_r.$$

Damit ergibt sich für die Determinate der Streumatrix die Funktionalgleichung:

$$\det(\Phi(\Delta, s)) \det(\Phi(\Delta, 1-s)) = 1.$$

Für $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$ läßt sich die Anzahl der entsprechenden Doppelnebenklassen von Matrizen mit festem Eintrag $\tilde{c}$ links unten:

$$a_{ij}(\tilde{c}) := \left| \left\{ [\left(\begin{smallmatrix} \star & \star \\ \tilde{c} & \star \end{smallmatrix}\right)] \in \Gamma(\infty) \setminus h_i^{-1} \Delta h_j / \Gamma(\infty) \right\} \right|$$

umformulieren zu einer entsprechenden Anzahl über $c \in \mathbb{N}$:

$$b_{ij}(c) := \left| \left\{ [\left(\begin{smallmatrix} \star & \star \\ c & \star \end{smallmatrix}\right)] \in \{T^{w_i n} : n \in \mathbb{Z}\} \setminus g_i^{-1} \Delta g_j / \{T^{w_j n} : n \in \mathbb{Z}\} \right\} \right|$$

mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und:

$$a_{ij}(\tilde{c}) = \sqrt{w_i}\sqrt{w_j}\, b_{ij}(c).$$

Ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Programm berechnet zu einer beliebigen Untergruppe $\Delta <_f \Gamma$ diese Anzahlen b_{ij} der Doppelnebenklassen und damit die Einträge der Streumatrix bis zu einer beliebigen Grenze.

Im dritten Kapitel konstruieren wir die Streumatrix einer beliebigen Untergruppe $\Lambda <_f \Gamma$ aus der Streumatrix einer Untergruppe $\Delta < \Lambda$. Dazu führen wir den Begriff der *relativen Spitzenbreite* einer Spitze s_i^j von Δ in Λ ein, indem wir ein Repräsentantensystem der Spitzen von Δ bezüglich eines Repräsentantensystems $S(\Lambda) := [s_1, \ldots, s_{r(\Lambda)}]$ der Spitzen von Λ ein Repräsentantensystem der Spitzen von Δ nach unter Λ äquivalent werdenden Spitzen sortieren:

$$S(\Delta) = [\underbrace{s_1^1 = s_1, s_1^2, \ldots, s_1^{r_1}}_{\sim_\Lambda s_1}, \underbrace{s_2^1 = s_2, s_2^2, \ldots, s_2^{r_2}}_{\sim_\Lambda s_2}, \ldots, \underbrace{s_{r(\Lambda)}^1 = s_{r(\Lambda)}, s_{r(\Lambda)}^2, \ldots, s_{r(\Lambda)}^{r_{r(\Lambda)}}}_{\sim_\Lambda s_{r(\Lambda)}}].$$

Die *relative Spitzenbreite* einer Spitze s_i^j von $\Delta < \Lambda$ in Λ wird definiert als:

$$v_i^j := [\Lambda(s_i^j) : \Delta(s_i^j)].$$

Der bisherige Begriff der Spitzenbreite gibt die relative Spitzenbreite einer Spitze in Bezug auf die ganze Modulgruppe Γ an und wird hier in Bezug auf eine Gruppe $\Lambda < \Gamma$ erweitert. Dann bestimmen wir die Anzahl b_{ik} der Doppelnebenklassen von Λ aus den entsprechenden Anzahlen b_{ik}^{jl} der Doppelnebenklassen von Δ:

1. Satz: *Für $c \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$v_i^j b_{ik}(c) = \sum_{l=1}^{r_k} b_{ik}^{jl}(c).$$

Dieser Satz ermöglicht ein weites Feld von Anwendungen:
Für *Kongruenzuntergruppen*, das sind solche Gruppen Δ, die für ein $n \in \mathbb{N}$ eine *Hauptkongruenzuntergruppe*

$$\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod n \right\}$$

enthalten, können wir mit Satz 1 die Streumatrix von Δ durch die Einträge der Streumatrix von $\Gamma(n)$ angeben. Daher untersuchen wir im vierten Kapitel dieser Arbeit die Streumatrix von $\Gamma(p)$ für eine Primzahl p und bestimmen die Einträge der Streumatrix, indem wir zunächst ihre Spitzen nach den Fasern folgender Abbildung anordnen:

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \Gamma(p) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ & \overline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_p := \begin{bmatrix} x \bmod p \\ y \bmod p \end{bmatrix} \end{array}$$

und anschließend für die Spitzenklassen jeder Faser die Anzahl der Doppelnebenklassen für $c \in \mathbb{N}$ durch einfache Kongruenzen angeben. Wir erhalten so weitreichende Informationen über die Streumatrix. Insbesondere können wir die

Gesetze zur Bestimmung der Anzahl der Doppelnebenklassen aufzählen und damit eine Abbildung konstruieren:

$$F : \Delta \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \times \Delta \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{F}_p/\{\pm 1\},$$

die jeweils zwei Spitzen die Nummer ihres zugehörigen Gesetzes zuordnet.
Im nächsten Kapitel erweitern wir diese Überlegungen in zwei Schritten zunächst auf $\Gamma(p^k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und dann auf beliebiges $n \in \mathbb{N}$, indem wir eine ähnliche Abbildung λ konstruieren und für die Elemente ihrer Fasern explizite Bildungsgesetze für die Anzahl der entsprechenden Doppelnebenklassen bestimmen. In anderer Form sind diese Ergebnisse teilweise schon bekannt, so gibt Hejhal [Hej83] allgemeine Formeln für Hauptkongruenzgruppen an, ohne auf die Struktur der Streumatrix näher einzugehen.
Die tiefergehende Kenntniss über die Struktur der Streumatrix ermöglicht uns Untersuchungen ihrer Determinante. In Kapitel 6 zeigen wir diese Überlegungen an dem Beispiel $\Gamma(p)$ zunächst für eine durch spezielle Zuordnungen reduzierte Matrix und übertragen die dabei gefundenen Ergebnisse auf die Streumatrix.

2. Satz: *Die Determinante der Streumatrix von $\Gamma(p)$ hat die Gestalt:*

$$\det(\Phi(\Gamma(p), s))$$

$$= G(s)C\left(\frac{p^2 - p^{2s}}{p^{2s} - 1}\right)^{p-1}\left(\frac{p^{2s+1} - 2p + p^2}{p^{2s} - 1}\right)^2\left(\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\right)^{p+1}\left(\prod_{\chi_j \in V}\frac{L_{\chi_j}(2s-1)}{L_{\chi_j}(2s)}\right)^{p+1}$$

wobei das Produkt über alle Charaktere $\chi \in V := \{\chi \in \widehat{\mathbb{F}}_p^\star/\{\pm 1\} : \chi \neq \chi_0\}$ läuft mit:

$$G(s) := \left(\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\right)^{(p+1)\frac{p-1}{2}}$$

und:

$$C = \begin{cases} \left(\sqrt{p}\; p^{\frac{p-5}{2}}\right)^{p-1} & \textit{für } p \equiv 1 \bmod 4 \\ \left(p^{\frac{p-3}{2}}\right)^{p-1} & \textit{für } p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}.$$

Für Kongruenzgruppen vermuten wir ausgehend von Satz 1 einfache Formulierungen für die Anzahlen der entsprechenden Doppelnebenklassen, die aber allen bisherigen Beweisversuchen widerstanden haben und von denen wir einige im letzten Kapitel als Vermutungen angeben. Unter anderem vermuten wir für Kongruenzgruppen Δ mit zwei Spitzen unterschiedlicher Breite folgendes Gesetz für die Anzahl der Doppelnebenklassen, durch das die Streumatrix von Δ bereits vollständig beschrieben wird:

3. Vermutung: *Sei Δ eine Kongruenzuntergruppe mit genau zwei Spitzen, Spitzenvektor $S(\Delta) = [s_1 = \infty, s_2 = g_2\infty]$ und Spitzenbreiten $W(\Delta) = [w_1, w_2]$. Dann gilt:*

$$b_{11}(c) = \begin{cases} w_1\varphi(c) & c \equiv 0 \bmod \frac{w_1}{w_2} \\ (w_1 - w_2)\varphi(c) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Auch für gewisse Typen von Nichtkongruenzuntergruppen können wir die Streumatrix bestimmen, indem wir in Kapitel 3 einige Folgerungen aus Satz 1 herleiten. Erste Beobachtungen dieser Art gibt es von Petersson [Pet82] für Kongruenzuntergruppen mit einer Spitze und allgemeiner von Venkov [Ven81] für sogenannte zykloide Untergruppen, das sind Untergruppen mit genau einer Spitzenklasse, aber nicht notwendig Kongruenzuntergruppen. Wir erweitern dies in Kapitel 3 auf solche Untergruppen Δ von Λ, für die wir das gleiche Repräsentantensystem von Spitzenklassen wählen können:

4. Satz: *Seien $\Delta < \Lambda$ zwei Untergruppen von Γ mit $S(\Delta) = S(\Lambda) = [s_1, \ldots, s_r]$. Die Streumatrix von Δ ergibt sich aus der Streumatrix von Λ durch Multiplikation mit dem Index $[\Lambda : \Delta]$:*

$$\Phi(\Delta, s) = [\Lambda : \Delta]\Phi(\Lambda, s)$$

für $s \in \mathbb{C}$.

Darüberhinaus gibt es weitere Nichtkongruenzgruppen, für die wir mit Satz 1 zumindest Teile der Streumatrix konstruieren können: Sobald eine Spitzenklasse $[s_i]$ von Δ und Λ übereinstimmt, also keine Spitzen von Δ aus dieser Klasse unter Λ zueinander äquivalent werden, lassen sich die Anzahlen der Doppelnebenklassen der $i-$ten Spalte und $i-$ten Zeile der Streumatrix von Δ aus den Anzahlen von Λ bestimmen:

5. Satz: *Seien $\Delta < \Lambda$ Untergruppen von Γ mit zugehörigen Spitzenvektoren $S(\Lambda) := [s_1, \ldots, s_{r(\Lambda)}]$ und*

$$S(\Delta) = [s_1^1 = s_1, s_1^2, \ldots, s_1^{r_1}, s_2^1 = s_2, s_2^2, \ldots, s_2^{r_2}, \ldots, s_{r(\Lambda)}^1 = s_{r(\Lambda)}, s_{r(\Lambda)}^2, \ldots, s_{r(\Lambda)}^{r_{r(\Lambda)}}].$$

Darüberhinaus existiere ein $r_k \in \{r_1, \ldots, r_{r(\Lambda)}\}$ mit $r_k = 1$. Dann ergeben sich für $i \in \{1, \ldots, r(\Lambda)\}$:

$$v_i^j b_{ik}(c) = b_{ik}^{j1}(c).$$

Wenn für eine Nichtkongruenzuntergruppe Δ, die Untergruppe einer Kongruenzuntergruppe Λ ist, eine übereinstimmende Spitzenklasse $[s_i]$ beider Gruppen existiert, sind nach Satz 5 die Anzahlen von Δ in der $i-$ten Zeile und in der $i-$ten Spalte Vielfache der Euler'schen $\varphi-$Funktion. In Kapitel 3 finden sich einige Beispiele solcher Gruppen.

Die Bedeutung dieser Überlegungen können wir an der Determinante der Streumatrix zu einer Gruppe Δ verdeutlichen, die eine analytische Invariante zur Kontrolle der Spektraltheorie des Laplace-Operators von $\mathrm{L}^2(\Delta \setminus \mathbb{H}, \mathbb{C})$ liefert. Dieser Zusammenhang ist in Terras, Band 1 [Ter85] ausführlich dargestellt. Dazu sei für ein $T \in \mathbb{R}^{\geq 0}$:

$$N_\Delta(T) := |\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T, \mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}, \det(\Phi(\Delta, s)) = 0\}|.$$

Selberg [Sel89, Sel91] hat gezeigt, daß das Weyl'sche asymptotische Gesetz für die Eigenwerte des Laplace-Operators gilt, falls es zu einem $\epsilon > 0$ eine Konstante $c_\epsilon \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gibt mit:

$$N_\Delta(T) \ll c_\epsilon T^{2-\epsilon}$$

Für Kongruenzgruppen Δ und ein $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gilt:

$$N_\Delta(T) \leq c\, T \log T,$$

so daß das Weyl'sche Gesetz immer erfüllt ist. Mit Satz 5 können wir diese Abschätzung jetzt auch für gewisse Nichtkongruenzgruppen beweisen.