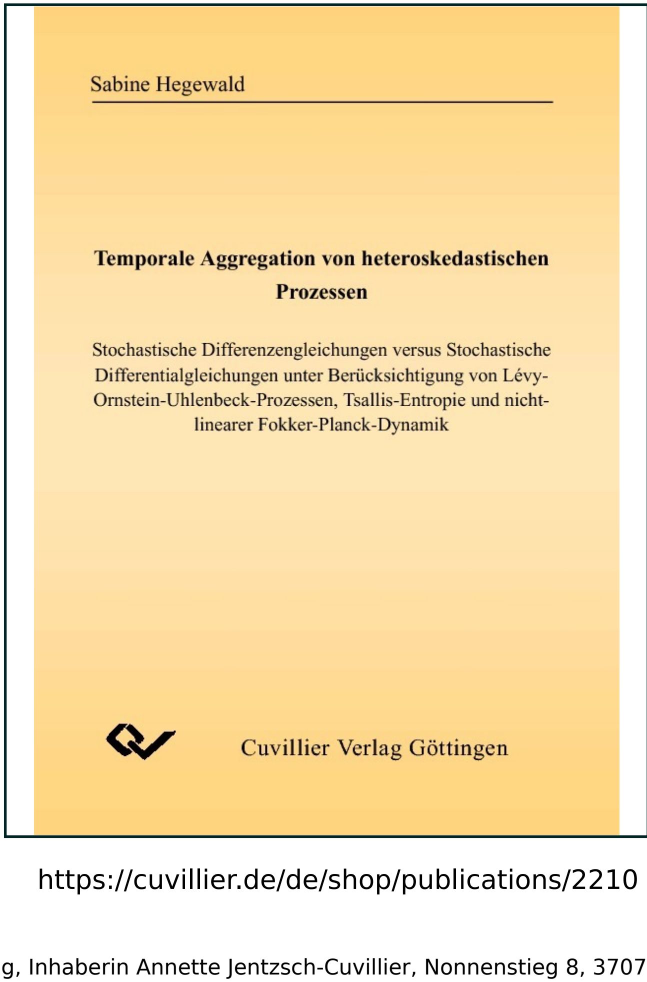
Sabine Hegewald (Autor)

# Temporale Aggregation von heteroskedastischen Prozessen

Stochastische Differenzengleichungen versus Stochastische Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von Lévy-Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen, Tsallis-Entropie und nichtlinearer Fokker-Planck-Dynamik




https://cuvillier.de/de/shop/publications/2210

Germany
Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: https://cuvillier.de

# 1 Temporale Aggregation von Zeitreihen

Wie die meisten Dinge auf der Welt haben auch Finanztitel wie Aktien und deren Derivate, Währungen und sonstige Wertpapiere aller Art ihre Preise. All diesen Preisen ist gemein, daß sie sich im Zeitverlauf zufällig entwickeln und somit Käufern wie auch Verkäufern dieser Titel Gewinne, aber auch Verluste bescheren können. Daher ist es von eminenter Bedeutung, Preisschwankungen möglichst genau zu beschreiben, um darauf aufbauend für Investitionsentscheidungen unerläßliche Prognosen über zukünftige Preisentwicklungen treffen zu können. Leider ist es trotz jahrzehntelanger intensiver Bemühungen bisher nicht gelungen, ein „Idealmodell“ zu finden. Dennoch existieren Modelle, welche in der Lage sind, die stilisierten Fakten hinreichend genau abzubilden, und dennoch Parameter enthalten, welche mit nicht unvertretbar großem Aufwand geschätzt werden können.

Für die Parameterschätzung eines Modells bedarf es unter anderem Preisdaten, welche heutzutage in vielen verschiedenen Erhebungsfrequenzen erhältlich sind. Daher gibt es auch zwei grundsätzliche Herangehensweisen (vgl. Meddahi/Renault, 2000, S. 1), Preisentwicklungen zu modellieren, zum einen die etwas heuristische Unterstellung, das Modell sei das Richtige für die Erhebungsfrequenz, zu der Daten vorhanden sind. Eine andere Argumentation besagt, daß alle Preisentwicklungen ihrer Natur nach zeitstetige Prozesse sind – für welche ein passendes Modell gefunden werden muß – und die typischen stündlichen, täglichen, monatlichen, Quartals- oder jährlichen Daten einem Prozeß genügen, der das Ergebnis einer *temporalen Aggregation* des Ausgangsprozesses ist. An dieser Stelle erhebt sich natürlich die Frage, ob die grundsätzliche Struktur des ursprünglichen Prozesses auch nach der Aggregation erhalten bleibt. Ist dies für beliebige Erhebungsfrequenzen der Fall, heißt die Klasse dieser Prozesse *abgeschlossen unter der temporalen Aggregation*. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Struktur, geänderte Werte der Parameter sind durchaus zugelassen.

Neben der temporalen Aggregation ist natürlich auch die *kontemporäre Aggregation* von Prozessen möglich, welcher beispielsweise bei der Betrachtung von Portfolios Bedeutung zukommt. Sie erlaubt insbesondere die Analyse von Korrelationen zwischen Variablen verschiedener Prozesse.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit den theoretischen Grundlagen der *temporalen* Aggregation, speziell mit der Aggregation von ARMA-Prozessen. In Kapitel 2 wird gezeigt, daß diese Prozesse sowohl für Niveauvariablen, d.h. Beobachtungen aus dem Ausgangsprozeß, als auch für Änderungsvariablen, d.h. Summen von Beobachtungen aus dem Ausgangsprozeß, unter der temporalen Aggregation abgeschlossen sind. Das anschließende Kapitel zeigt, daß die Ergebnisse des zweiten Kapitels – unter gewissen Regularitätsbedingungen – auf alle Prozesse übertragen werden können, welche sich als ARMA-Prozeß darstellen lassen. Dies gilt insbesondere für die im Rahmen der Modellierung zeitveränderlicher Varianzen so populären Modelle der GARCH-Klasse.

Kapitel 4 beinhaltet für das GARCH(1,1)-Modell von Bollerslev (1986) die exakten, von Drost und Nijman (1993) hergeleiteten Abhängigkeiten der Parameter von aggregierten Prozessen in Abhängigkeit vom Aggregationsgrad. Da das GARCH-Modell zwar in der Lage ist, die empirisch festgestellten Volatilitätscluster in Renditezeitreihen zu generieren, weitere stilisierte Fakten wie Leverage-Effekte, d.h. die stärkere Reaktion der bedingten Varianz auf negative Schocks als auf positive vergangene Renditen gleichen Ausmaßes, und eine leichte Linksschiefe der unbedingten Renditeverteilung im GARCH(1,1)-Modell aber ausgeschlossen sind, wird die Analyse von Drost und Nijman in der vorliegenden Arbeit auf das GJR(1,1)-Modell von Glosten, Jagannathan und Runkle (1989) übertragen. Dieses Modell generiert auf sehr einfache Weise Leverage-Effekte, und es wird gezeigt, wie sich die Parameter der bedingten Varianzgleichung bei $m$-facher Aggregation verhalten. Darüber hinaus wird die Abhängigkeit der Leverage-Korrelation und, im Fall von Änderungsvariablen, der dadurch bedingten Linksschiefe der unbedingten Renditeverteilung vom Grad der temporalen Aggregation hergeleitet. Des weiteren werden im Rahmen von Simulationsstudien qualitative Aussagen über das Verhalten von allgemeineren Modellen der GARCH-Klasse bei temporaler Aggregation getroffen, darunter auch von einem Modell, welches die empirisch festgestellte Persistenz der bedingten Varianzen abzubilden in der Lage ist.

Das fünfte Kapitel behandelt eine Alternative zur Generierung von bedingten Varianzen mittels der klassischen GARCH-Modelle, denn die zunehmende Verfügbarkeit von hochfrequenten Preisdaten erlaubt eine sehr einfache Schätzung von sogenannten realisierten Volatilitäten über bestimmte Zeitintervalle. Die Verteilung der realisierten Volatilität führt in Verbindung mit der Mischverteilungshypothese von Clark (1973) zu einer Normal-inversen Gauß-Verteilung, welche zur Familie der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen gehört. Damit ist eine theoretisch fundierte Annahme für die unbedingte Verteilung der Renditen gegeben, welche zuvor aus der Theorie der GARCH-Prozesse oder der klassischen Mischverteilungshypothese nicht abgeleitet werden konnte.

Der Übergang zu den zeitstetigen Modellen erfolgt im sechsten Kapitel, in welchem die theoretischen Grundlagen und klassische Prozesse in stetiger Zeit, wie z.B. die Geometrische Brownsche Bewegung und Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse, dargelegt werden. Diese bereiten aber Schwierigkeiten bei der praktischen Implementierung, und selbst als theoretische Modelle, bspw. bei der Optionspreisbestimmung, ist ihre praktische Relevanz für die Beschreibung von physikalischen Phänomenen – für die sie entwickelt worden sind – größer als für Assetpreise.

Eine Alternative zu den klassischen Modellen, deren stochastische Komponente eine Brownsche Bewegung ist, bilden zeitstetige Prozesse mit Lévy-Rauschquellen, welche einen gewissen Sprungcharakter besitzen und in Verbindung mit Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen Volatilitätscluster generieren können. Darüber hinaus ist eine Einbindung von Leverage-generierenden Komponenten in das Modell möglich.

Wurde mit der Normal-inversen Gauß-Verteilung schon eine mögliche unbedingte Renditeverteilung gefunden, so beschreibt Kapitel 8 alternativ eine verallgemeinerte $t$-Verteilung, welche in der Art über verschiedene Zeitintervalle, d.h. über unterschiedliche Aggregationsgrade von Renditen, erhalten bleibt und dabei nur einen Parameter ändert. Dies geschieht gemäß den Gesetzmäßigkeiten, welche durch eine nichtlineare Fokker-Planck-Gleichung gegeben sind. Damit können für Renditen über beliebige Zeitintervalle deren unbedingte Verteilungen bestimmt werden. In dieser Arbeit wird außerdem die Verbindung zwischen GARCH- und GJR-Modellen mit dieser verallgemeinerten $t$-Verteilung hergestellt, wobei letztere sowohl als unbedingte Verteilung der Basisinnovationen als auch der GARCH- bzw. GJR-Prozeßvariablen dient.

Im Hinblick auf die Simulation von Prozessen in stetiger Zeit behandelt das anschließende Kapitel numerische Diskretisierungsverfahren und ihre Anwendung auf ausgewählte Prozesse.

Kapitel 10 stellt die Verbindung zwischen zeitstetigen Prozessen und den Modellen der GARCH-Klasse her. Die Grundlagen wurden von Nelson (1990) durch die Herleitung des stetigen Prozesses geschaffen, gegen den zeitdiskrete GARCH(1,1)-Prozesse unter gewissen Regularitätsannahmen konvergieren, wenn das Zeitintervall immer kleiner gewählt wird. Auch diese Analyse wird in der vorliegenden Arbeit durch die Betrachtung des Konvergenzverhaltens von GJR(1,1)-Prozessen erweitert.

Im abschließenden Kapitel werden 1-Minuten-Daten von ausgewählten Aktien des Dow Jones Industrial Average dahingehend untersucht, inwieweit sich die Erkenntnisse der vorangegangenen Abschnitte, welche insbesondere bei täglichen Daten (Modelle der GARCH-Klasse), hochfrequenten Wechselkursdaten (Lévy-Prozesse) und hochfrequenten Aktienindexwerten (zeitabhängige Renditeverteilung) erfolgreich angewendet werden konnten, auch auf Beobachtungen von einzelnen Aktien übertragen lassen.

# 2 Theoretische Grundlagen der temporalen Aggregation

Zunächst werden die beiden Arten der temporalen Aggregation vorgestellt, zum einen die Aggregation von nicht transformierten, zum anderen die von transformierten Realisationen eines stochastischen Prozesses. Anschließend wird grundlegend geklärt, daß *lineare* ARMA-Prozesse unter gewissen Regularitätsbedingungen unter der temporalen Aggregation abgeschlossen sind, und wie sich in diesem Fall die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion (AKF) des Prozesses in Abhängigkeit vom Aggregationsgrad verhält. Da in der AKF sehr viele Informationen über die Struktur des stochastischen Prozesses enthalten sind, wird durch die AKF des aggregierten Prozesses – bzw. deren Fouriertransformierte – das Verhalten des Prozesses nach $m$-facher temporaler Aggregation charakterisiert.

## 2.1 Powerspektrum des aggregierten Prozesses bei Niveauvariablen

Niveauvariablen sind solche Daten, die direkt beobachtet werden können und sich nicht aus irgendeiner Transformation von beobachteten Daten ergeben. Ihre Aggregation über $m$ Perioden erfolgt dermaßen, daß nur die $m$-te, $2m$-te, $3m$-te etc. Beobachtung des Originalprozesses $\{x_t\}$ betrachtet wird (vgl. Drost, 1994, S. 12). Das Resultat ist ein Prozeß niedrigerer Frequenz, also $y_t = x_{mt}$.

Es ist bekannt, daß sich stochastische Prozesse zunächst durch ihre unbedingten Momente charakterisieren lassen. Die reichhaltigste Quelle für Informationen über die dem stochastischen Prozeß eigene Struktur sind jedoch die Autokovarianz- oder Autokorrelationsfunktion. Diese lassen zumeist eindeutige Schlüsse darüber zu, um welche Art von Prozeß es sich handelt. Will man nun feststellen, ob sich nach einer temporalen Aggregation wieder ein Prozeß mit den gleichen Strukturen wie der Ausgangsprozeß ergibt, sollte man die entsprechenden Autokovarianzfunktionen vergleichend analysieren. Offenbaren diese die gleichen Charakteristika, läßt sich schlußfolgern, daß der betreffende Prozeß unter der temporalen Aggregation abgeschlossen ist.

Wegen ihrer analytischen Eigenschaften ist es sinnvoll, anstelle der Autokovarianz- die Spektraldichtefunktion zu untersuchen, welche in der Literatur auch als Powerspektrum bezeichnet wird. Die Spektraldichtefunktion, d.h. die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(k)|\, dk < \infty$, ist laut Spektralsatz von

Herglotz (vgl. Zeidler, 1996, S. 1082):

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{-i\lambda k}\,dk. \tag{2.1}$$

Diese Funktion ist unter obiger Bedingung stetig, und für die Autokovarianzfunktion gilt die Darstellung

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda)d\lambda. \tag{2.2}$$

Allgemein existiert für eine schwach stationäre Zeitreihe eine monoton wachsende, beschränkte Funktion $F : [-\pi,\pi] \to I\!R$, so daß das Lebesque-Stieltjes-Integral

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

zur Verfügung steht. Sind die Autokorrelationskoeffizienten absolut summierbar, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma(k)| < \infty$, existiert fast überall die Ableitung $F'(\lambda) =: f(\lambda)$, was die Ersetzung $dF(\lambda)$ durch $f(\lambda)d\lambda$ erlaubt.

Der Originalprozeß mit der Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$ sei nun der Ausgangspunkt für die Herleitung der Autokovarianzfunktion $\gamma^{(m)}(k)$ des aggregierten Prozesses,

$$\gamma^{(m)}(k) = \gamma(mk) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda mk} f(\lambda)d\lambda, \quad \lambda \in (-\pi,\pi]. \tag{2.3}$$

Es handelt sich um ein Integral über einen Bereich der Länge $2\pi$, was völlig ausreicht, da es sich um eine $2\pi$-periodische Funktion handelt. Da wir nur jede $m$-te Beobachtung des Originalprozesses betrachten und somit alle Informationen über die Autokorrelationsstruktur des Prozesses, welche von den eliminierten Beobachtungen bereitgestellt werden, verloren gehen, liegt es nahe, die $m$ Teilintervalle der Länge $2\pi/m$ zu betrachten:

$$\gamma^{(m)}(k) = \sum_{j=0}^{m-1}\int_{(2j-1)\pi/m}^{(2j+1)\pi/m} e^{i\lambda mk} f(\lambda)d\lambda.$$

Eine „Rücktransformation“ auf die ursprünglichen Intervallgrenzen wird durch die Variablentransformation $\lambda = (\varphi + 2\pi j)/m$ erreicht:

$$\begin{aligned}
\gamma^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\varphi+2\pi j)k} f((\varphi+2\pi j)/m)d\varphi \\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi k}\cdot e^{(i2\pi)jk} f((\varphi+2\pi j)/m)d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi k}\sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{\varphi}{m}+\frac{2\pi j}{m}\right)d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi k} f^{(m)}(\varphi)d\varphi, \quad \text{für } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{m}\right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Da aber Frequenzen des Intervalls $(-\pi, \pi]$ betrachtet werden, was einer Ver-$m$-fachung des Intervalls $(-\pi/m, \pi/m]$ entspricht, gilt für die Spektraldichtefunktion des aggregierten Prozesses

$$f^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f((\lambda + 2\pi j)/m) \tag{2.5}$$

(vgl. Drost, 1994, S. 13).

## 2.2 Powerspektrum des aggregierten Prozesses bei Änderungsvariablen

Änderungsvariablen oder auch Bewegungsmassen entstehen durch Transformationen von Niveauvariablen. Sie treten allgemein bei differenzierten Zeitreihen auf, insbesondere als Renditen, welche Differenzen von logarithmierten Kursen sind. Zu dieser Art von Variablen gehören bspw. auch Wechselkursänderungen. Die Transformation erfolgt so, daß jede Beobachtung des transformierten Prozesses der Summe von $m$ Beobachtungen des Originalprozesses entspricht, d.h.

$$\bar{y}_t = x_{mt} + x_{mt-1} + x_{mt-2} + \ldots + x_{mt-m+1} = \sum_{j=0}^{m-1} x_{mt-j}. \tag{2.6}$$

Letzteres ist eine Darstellung des Prozesses als zeitinvarianter linearer Filter (vgl. Drost, 1994, S. 12).

Mit der Autokovarianzfunktion $\gamma_{\bar{y}_t}(k)$ folgt für die Spektraldichtefunktion des transformierten Prozesses (vgl. Schlittgen/Streitberg, 1999, S. 164)

$$\begin{aligned}
f_{\bar{y}_t}(\lambda) &= \sum_k \gamma_{\bar{y}_t}(k)\, e^{i\lambda k} \\
&= \sum_k \sum_j \sum_l \gamma_x(k+j-l)\, e^{i\lambda k} \\
&= \sum_k \sum_j \sum_l \gamma_x(k+j-l)\, e^{i\lambda(k+(j-l)-(j-l))} \\
&= \sum_j \sum_l e^{-i\lambda(j-l)} \sum_k \gamma_x(k+j-l)\, e^{i\lambda(k+j-l)} \\
&= \sum_j e^{-i\lambda j} \sum_l e^{i\lambda l} \sum_k \gamma_x(k+j-l)\, e^{i\lambda(k+j-l)} \\
&= \overline{B(\lambda)}\, B(\lambda)\, f_x(\lambda) \\
&= |B(\lambda)|^2 f_x(\lambda).
\end{aligned}$$

Die Transferfunktion $B(\lambda)$ in diesem Fall lautet (vgl. Koopmans, 1995, S. 18, S. 93)

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\lambda j} = e^{-i\lambda(m-1)/2} \frac{\sin(m\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)}.$$

Der Beweis ist recht einfach und beruht auf der Tatsache, daß die Transferfunktion die Teilsumme einer geometrischen Reihe ist:

$$\begin{aligned}
B(\lambda) &= e^{-i\lambda(m-1)/2}\frac{\sin(m\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)} = e^{-i\lambda(m-1)/2}\frac{e^{i\lambda m/2}-e^{-i\lambda m/2}}{e^{i\lambda/2}-e^{-i\lambda/2}} \\
&= \frac{e^{i\lambda(m-m+1)/2}-e^{-i\lambda(m+m-1)/2}}{e^{i\lambda/2}-e^{-i\lambda/2}} \\
&= \frac{e^{i\lambda/2}-e^{-i\lambda m}\cdot e^{i\lambda/2}}{e^{i\lambda/2}-e^{-i\lambda/2}} \qquad \Big|\cdot\frac{e^{-i\lambda/2}}{e^{-i\lambda/2}} \\
&= \frac{e^{i\lambda/2+i\lambda/2}-e^{-i\lambda m+i\lambda/2-i\lambda/2}}{e^{i\lambda/2-i\lambda/2}-e^{-i\lambda/2-i\lambda/2}} = \frac{1-e^{-i\lambda m}}{1-e^{-i\lambda}} \\
&= \sum_{j=1}^{m} e^{-i\lambda(j-1)} = \sum_{j=0}^{m-1} e^{-i\lambda j} \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Die zugehörige quadrierte Gainfunktion (vgl. Koopmans, 1995, S. 93) ist somit

$$|B(\lambda)|^2 = \frac{\sin^2(m\lambda/2)}{\sin^2(\lambda/2)}.$$

Dies hilft insofern weiter, daß sich nach Aggregation der transformierten Daten unter Berücksichtigung der Variablentransformation $\lambda = (\varphi + 2\pi)/m$ die Spektraldichtefunktion

$$\bar{f}^{(m)}(\varphi) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f((\varphi + 2\pi j)/m)\frac{\sin^2(\varphi/2 + \pi j)}{\sin^2((\varphi/2 + \pi j)/m)} \tag{2.7}$$

ergibt (vgl. Drost, 1994, S. 13).

## 2.3 Temporale Aggregation von ARMA-Prozessen

Die Klasse schwach stationärer ARMA(p,q)-Prozesse läßt sich allgemein schreiben als

$$P(L)x_t = Q(L)\varepsilon_t \qquad \text{mit } \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma^2). \tag{2.8}$$

Dabei sind $P(L) = (1 - \varrho_1 L - \ldots - \varrho_p L^p)$ und $Q(L) = (1 + \vartheta_1 L + \ldots + \vartheta_q L^q)$ zeitinvariante lineare Filter ohne gemeinsame Nullstellen und ohne Einheitswurzeln, d.h. Nullstellen auf dem komplexen Einheitskreis.

Die Spektraldichtefunktion eines ARMA(p,q)-Prozesses lautet gemäß Theorem 4.4.2 von Brockwell/Davis (1991)

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|1 + \sum_{k=1}^{q}\vartheta_k \exp(-ik\lambda)|^2}{|1 - \sum_{l=1}^{p}\varrho_l \exp(-il\lambda)|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\vartheta(\lambda)|^2}{|\varrho(\lambda)|^2}, \quad \lambda \in [-\pi,\pi].$$

Da sie das Verhältnis zweier trigonometrischer Polynome, also rationaler Funktionen, ist, wird sie oft als rationale Spektraldichte bezeichnet. Daraus ergeben sich unmittelbar die Spektraldichten der aggregierten ARMA-Prozesse im Fall von Niveauvariablen,

$$f^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{m}\frac{\sigma^2}{2\pi}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{|\vartheta((\lambda+2\pi j)/m)|^2}{|\varrho((\lambda+2\pi j)/m)|^2}, \tag{2.9}$$

und im Fall von Änderungsvariablen mit $|B(\lambda)|^2 = \sin^2(m\lambda/2)/\sin^2(\lambda/2)$

$$\bar{f}^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{m}\frac{\sigma^2}{2\pi}\sum_{j=0}^{m-1}|B((\lambda+2\pi j)/m)|^2\frac{|\vartheta((\lambda+2\pi j)/m)|^2}{|\varrho((\lambda+2\pi j)/m)|^2}. \tag{2.10}$$

Da sich in Zähler und Nenner ausschließlich $2\pi$-periodische Funktionen befinden, die sich wegen der Beziehung

$$g(\lambda) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \exp(-ij\lambda/m) = \sum_{j=[n/m]}^{[n/m]} a_{jm}\exp(-ij\lambda) \quad \text{mit } [x] = \text{mod}(x)$$

als rationale Funktionen von $\exp(-i\lambda)$ schreiben lassen, ist auch die Summe von rationalen Spektraldichten wieder eine rationale Spektraldichte, woraus sich folgern läßt, daß die Klasse der schwach stationären ARMA-Prozesse unter der temporalen Aggregation abgeschlossen ist (vgl. Drost, 1994, S. 15).

Die Konzepte von strengen, semi-strengen und schwachen ARMA-Prozessen werden an anderer Stelle noch genau charakterisiert. Sie unterscheiden sich in erster Linie durch die stochastischen Eigenschaften des „Fehlerprozesses" $\{\varepsilon_t\}$. Weiterhin sei auf die Tatsache hingewiesen, daß Verteilungsannahmen – gemeint ist die Art der Verteilung – unter der temporalen Aggregation i.d.R. nicht abgeschlossen sind. Eine Ausnahme bilden sogenannte $\alpha$-stabile Verteilungen, zu denen mit $\alpha = 2$ auch die Normalverteilung gehört. Vereinfachend ausgedrückt sind Summen von normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt. Da überdies MA-Prozesse Linearkombinationen von *iid*-Prozessen sind, stimmen im Fall von Homoskedastie und Normalverteilung strenge, semi-strenge und schwache ARMA-Prozesse überein und sind allesamt unter der temporalen Aggregation abgeschlossen (vgl. Meddahi/Renault, 2000).

# 3 Aggregation von Prozessen in Zustandsraum-Darstellung

Gemäß den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts sind schwach stationäre ARMA-Prozesse sowohl für Niveau- als auch für Änderungsvariablen abgeschlossen unter der temporalen Aggregation. Demzufolge sollte jeder stochastische Prozeß, welcher sich als schwacher ARMA-Prozeß schreiben läßt, von diesen Aggregationseigenschaften profitieren. Überdies stellt sich die Frage, ob dies wirklich ausschließlich für *schwache* ARMA-Prozesse gilt, oder ob sich diese Annahme durch eine spezielle Art der Modelldarstellung des Prozesses abschwächen läßt. Daher wird in diesem Kapitel zunächst eine alternative Modellierung von ARMA-Prozessen eingeführt. Basierend auf dieser Darstellung werden die temporalen Aggregationseigenschaften untersucht und die Verbindung zu Modellen der GARCH-Klasse hergestellt, deren bedingte Varianzgleichung sich jeweils als ARMA-Prozeß in den quadrierten Beobachtungen schreiben läßt. Die Frage, inwieweit sich nichtlineare bedingte Varianzprozesse durch lineare ARMA-Prozesse approximieren lassen und damit ebenfalls unter der temporalen Aggregation abgeschlossen sind, wird am Ende des Kapitels geklärt.

Zeitabhängige Prozesse lassen sich in der Regel so umformen, daß die Beobachtungen von einer oder mehreren latenten Zustandsvariablen abhängen, bei welchen man einen bestimmten Generierungsmechanismus unterstellt. Dies ist auch bei ARMA-Modellen der Fall, so daß sich eine Darstellung von Modellen der GARCH-Klasse finden läßt, in der die bedingte Varianz als latente Zustandsvariable aufgefaßt wird. Die Ausführungen dieses Kapitels lehnen sich, soweit nicht anders indiziert, eng an die Arbeit von Meddahi/Renault (2000) an.

Der Vektor beobachtbarer Variablen zum Zeitpunkt $t$, $y_t \in I\!R^{n\times 1}$, ist durch folgende Beobachtungsgleichung mit einem Vektor $G_t \in I\!R^{r\times 1}$ verbunden (vgl. Harvey, 1995, S. 101f.):

$$y_t = g_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad g_t = E'G_t.$$

$G_t$ wird oft als Zustandsvektor bezeichnet und enthält Elemente, die in der Regel nicht beobachtbar sind. Es wird aber unterstellt, daß dieser Vektor durch einen multivariaten AR(1)-Prozeß generiert wird, welcher sich in der sogenannten Zustandsgleichung wiederfindet:

$$G_t = A + \Gamma G_{t-1} + V_t.$$