Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Betrachtet wird das folgende mechanische Modell eines Feder-Masse-Dämpfer-Schwingers - ein Translationsschwinger - mit einer permanenten Erregung an der Feder.

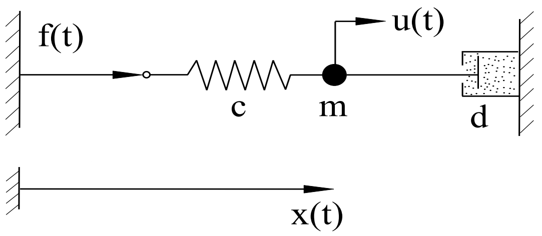


Abbildung 1.1: Feder-Masse-Dämpfer-Schwinger

Die Bewegungsdifferentialgleichung wird gemäß Impulssatz aufgestellt und lautet

$$m\,\ddot{x}(t) + d\,\dot{x}(t) + c\,x(t) = c\,f(t) \;+\; u(t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \dot{x}(0) = x_1\,. \tag{1.1}$$

Die Konstanten $m, c, d > 0$ sind die Masse der Punktmasse, die Federkonstante (Federsteifigkeit) und die Dämpfungskonstante. Die Funktion $f(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist eine von außen auf das System wirkende Erregung (in diesem Fall ein Weg als Verschiebung des freien Federendes) und kann als permanente Störung des Systems angesehen werden. Die Funktion $u(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist eine eingeprägte Kraft, wird als Steuerung gedeutet und ist die einzige Eingriffsmöglichkeit in das System, die von außen gezielt verändert werden kann. Die Aufgabe soll sein, eine geeignete Steuerung $u(\cdot)$ derart zu finden, daß die bewegte Masse eine gewünschte Bewegung ausführt. Mögliche Forderungen sind:

- Das System soll nach einer beliebigen Auslenkung stabilisiert werden, d.h. die Lösung $x(\cdot)$ von (1.1) soll asymptotisch gegen Null konvergieren.
- Die Lösung $x(\cdot)$ von (1.1) soll einer vorgegebenen Bahnkurve (mit eventuell vorgegebener Genauigkeit) folgen.

In der Steuerungstheorie gibt es zu diesen Zwecken zwei grundsätzliche Entwurfsmöglichkeiten von Steuerungen, die sogenannten 'open loop'-Steuerungen und die 'closed loop'-Steuerungen (Regler). In den meisten Fällen setzen derartige Steuerungen eine *vollständige*

Kenntnis des Systems bzw. der Systemparameter voraus.
Bei dem hier in der Motivation betrachteten System sei dies *nicht* der Fall: zum einen sei die permanente Störung unbekannt, zum anderen läge eine erhebliche Unkenntnis der reellen, konstanten Systemparameter vor. Es lassen sich lediglich strukturelle Annahmen über das Systemverhalten treffen.
Aus diesem Grund eignet sich zur Regelung dieses Systems die *adaptive Regelung*.

1.2 Aufgabenstellung und Zielsetzung der Arbeit

Die Aufgabe in der adaptiven Regelung ist, einen möglichst einfachen Regler zu entwerfen, der aus einem Adaptionsgesetz und einer Rückführung besteht. Dieser Regler soll sich selbständig im Sinne der Erfüllung einer Funktionsvorschrift (Adaptionsgesetz) an unvorhersehbare Systembedingungen anpassen ('Lernen') und seine Informationen dem System über eine Rückführung übermitteln.
Durch diese Wahl des Reglers kann gewährleistet werden, daß der Ausgang eines Systems einer vorgegebenen Referenztrajektorie, die einer bestimmten Signalklasse angehört, mit einer beliebig vorgegebenen Genauigkeit $\lambda > 0$ folgt. Diese Art der adaptiven Regelung wird **adaptive $\boldsymbol{\lambda}$-Regelung** oder auch **adaptive $\boldsymbol{\lambda}$-Bahnverfolgung** genannt, welche in den letzten Jahren entwickelt wurde ([43], [44], [45] oder [49]) und sich schon als praxisrelevant bei biotechnologischen Anwendungen ([47]) und bei der Anwendung auf Regelungsprobleme der Anästhesie ([18]) erwiesen hat.

Das zentrale Ziel dieser Arbeit ist die Beherrschung komplexer Systeme und Prozesse, die durch konkurrierende Einflußgrößen, durch unvorhersehbare Systemstörungen, durch unbekannte Systemparameter und somit durch veränderliche Einsatzbedingungen gekennzeichnet sind. Es werden technische Systeme nach biologischem Vorbild betrachtet, bei denen sich zur adaptiven Regelung bzw. zur Prozeßplanung die adaptive λ-Regelung eignet. Sowohl wegen der Einwirkung von Störgrößen auf die Systeme als auch wegen der teilweise erheblichen Unkenntnis der System- und Umgebungsparameter lassen sich nur strukturelle Annahmen treffen.

Basierend auf der Hochverstärkungseigenschaft dieser Systeme werden adaptive λ-Regler entworfen, die die Zielsetzung der λ-Bahnverfolgung gewährleisten. Es ist in dieser Arbeit nicht die Aufgabe, durch die adaptive Regelung Informationen aus dem System zurückzugewinnen (Parameter des Systems zu identifizieren). Vielmehr soll ein universeller Regler für ein betrachtetes System entworfen werden, der auch auf eine Vielzahl von Systemen einer Systemklasse, der das betrachtete System angehört, anwendbar ist. In der englischsprachigen Literatur wird dieser Ansatz als 'Non-Identifier-Based High-Gain Adaptive Control' ([44]) bezeichnet. Für eine Übersicht wird auf [43] verwiesen.

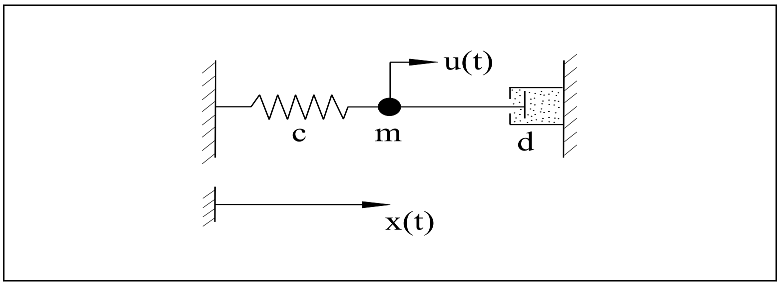
Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in der Hinsicht neu, daß Resultate zur adaptiven λ-Regelung von Systemen mit striktem Relativgrad[2] 1, z.B. aus [43], [44], [45] oder [49], genutzt werden, um diese auf Systeme mit striktem Relativgrad 2 zu übertragen. Es gibt eine Vielzahl von Ergebnissen zur adaptiven Regelung für die Spezialklasse der Systeme mit striktem Relativgrad 1 (siehe oben genannte Referenzen). Die meisten technischen

[2]Der Relativgrad ist eine wichtige charakteristische Größe eines Steuersystems, der in Abschnitt 2.5 definiert und erklärt wird.

Systeme sind jedoch Systeme mit striktem Relativgrad 2. Vereinzelte Literaturquellen zur Regelung von Systemen mit striktem Relativgrad 2 werden mit ihren Ergebnissen mit den Resultaten dieser Arbeit verglichen. Dabei sind die in dieser Arbeit entworfenen Regler einfacher in ihrer Struktur als die in der Literatur. Außerdem werden in dieser Arbeit verallgemeinerte Systemklassen betrachtet (es werden stärkere Nichtlinearitäten zugelassen).
Computersimulationen (mit dem Mathematikprogrammpaket ‘MATLAB’, Version 6.5, Release 13, von ‘The MathWorks, Inc.’) des dynamischen Verhaltens der ausgewählten technischen Systeme nach biologischem Vorbild festigen die Ergebnisse dieser Arbeit.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die folgende Übersicht soll einen Überblick über das Zusammenwirken der einzelnen Kapitel mit ihren Unterkapiteln vermitteln. Dem Leser wird der Aufbau der Arbeit erklärt, indem anhand eines ausgewählten Beispiels aus der Technischen Schwingungslehre methodisch gezeigt wird, wie die einzelnen Kapitel und Abschnitte genutzt werden, die Resultate zur Regelung von mechanischen Systemen herzuleiten und zu beweisen.



$\downarrow$ Impulssatz

$$
\begin{aligned}
& m\,\ddot{x}(t) + d\,\dot{x}(t) + c\,x(t) = u(t)\,, && \text{Bewegungsgleichung}\\
& y(t) = x(t)\,, && \text{Ausgangsgleichung (‘Output’)}
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ Transformation aufgrund des strikten Relativgrades 2 (**Kapitel 2**) in ein System einer Systemklasse aus **Kapitel 4.2**

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}^{\bullet} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)\,, \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \text{ Normalform}\\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\downarrow$ Regelungsaufgabe aus **Kapitel 4.3**

mögliches Regelungsziel - λ-Bahnverfolgung: Der Ausgang $y(\cdot)$ des Systems soll mit einer gegebenen Genauigkeit $\lambda > 0$ einer vorgegebenen Bahnkurve $y_{\mathrm{ref}}(\cdot)$ folgen.

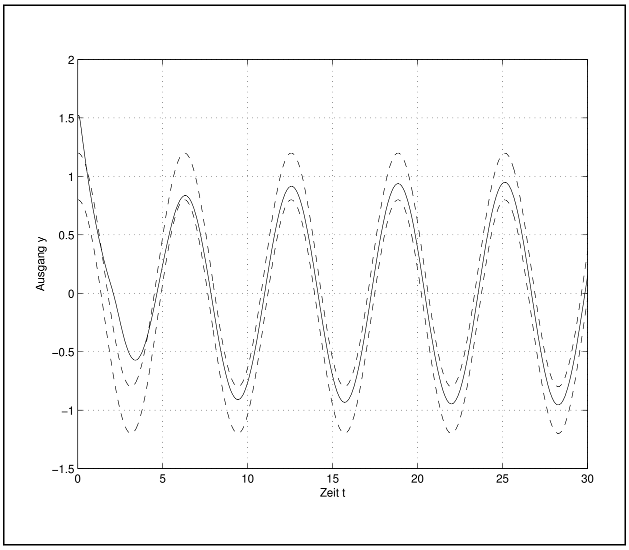
$\swarrow$ Reglerstrategie aus **Kapitel 4.5** $\searrow$

Reglerentwurf **unter** Verwendung der Ableitung des Ausgangs $y(\cdot)$	Reglerentwurf **ohne** Verwendung der Ableitung des Ausgangs $y(\cdot)$
$\downarrow$ **Kapitel 4.5.1**	$\downarrow$ **Kapitel 4.5.2**
$\begin{aligned} e(t) &:= y(t) - y_{\mathrm{ref}}(t)\,, \\ u(t) &= -k(t)\,e(t) - \tfrac{d}{dt}\big(k(t)\,e(t)\big)\,, \\ \dot{k}(t) &= \max\Big\{0\,, \big\vert\, e(t)\big\vert - \lambda\Big\}^2, k(0) = k_0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} e(t) &:= y(t) - y_{\mathrm{ref}}(t)\,, \\ u(t) &= -k(t)\,\theta(t) - \tfrac{d}{dt}\big(k(t)\,\theta(t)\big)\,, \\ \dot{\theta}(t) &= -k(t)^2\,\big(\theta(t) - y(t)\big)\,, \theta(0) = \theta_0\,, \\ \dot{k}(t) &= \max\Big\{0\,, \big\vert\, e(t)\big\vert - \lambda\Big\}^2, k(0) = k_0 \end{aligned}$
$\downarrow$ **Kapitel 4.6**	$\downarrow$ **Kapitel 4.6**
Der vorgestellte Regler angewendet auf das System erzielt - für beliebige Anfangswerte, für beliebige Genauigkeit $\lambda > 0$ und für die Bahnkurve $y_{\mathrm{ref}}(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ - die λ-Bahnverfolgung.	Der vorgestellte Regler angewendet auf das System erzielt - für beliebige Anfangswerte mit $k_0 > 0$, für beliebige Genauigkeit $\lambda > 0$ und für die Bahnkurve $y_{\mathrm{ref}}(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ - die λ-Bahnverfolgung.

(Beweise in **Anhang A** mittels Grundlagen aus **Kapitel 2**)

$\searrow$ Simulationen in **Kapitel 5** $\swarrow$

Anwendung der Regler auf Systeme nach biologischem Vorbild



(dargestellt sind der Ausgang $y(\cdot)$ und der λ-Streifen um die als Beispiel gewählte Referenzkurve $t \mapsto \cos(t)$ über der Zeit t)

Kapitel 2

Mathematische und regelungstechnische Grundlagen

2.1 Einführende Bemerkung

In diesem Kapitel werden ausgewählte mathematische und regelungstechnische Grundlagen aus den für die Arbeit relevanten Gebieten wie 'Gewöhnliche Differentialgleichungen', 'Lineare Algebra' und 'System- und Regelungstheorie' vorgestellt.

Dazu werden in vier Abschnitten grundlegende Sachverhalte dargestellt.
Im ersten Abschnitt wird die Norm für einen Vektor, für eine Matrix und für eine Funktion definiert.
Im zweiten Abschnitt werden Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen (nicht-) linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt. Dies ist von besonderer Bedeutung, um in den folgenden Kapiteln 3 und 4 die Existenz (und eventuell die Eindeutigkeit) einer Lösung eines betrachteten, adaptiven Regelkreises in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu gewährleisten.
Um bestimmte Eigenschaften der Lösungen der in Kapitel 3 und 4 betrachteten, adaptiven Regelkreise nachzuweisen, ist der dritte Abschnitt dieses Kapitels von Nutzen. Nach Vorstellung zweier Ungleichungen, die die wichtigen und nötigen Ungleichungen aus dem ersten Abschnitt ergänzen, werden in Anlehnung an die Ergebnisse über $\mathcal{L}^p$-Funktionen wichtige Lösungseigenschaften von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen charakterisiert.
Im letzten Abschnitt wird der Leser mit regelungstechnischen und systemtheoretischen Definitionen und Sätzen vertraut gemacht. In vier zusätzlichen Unterabschnitten werden dort wichtige Eigenschaften von linearen Systemen vorgestellt, die in den folgenden Kapiteln 3 und 4 benötigt werden.

2.2 Normen und normierte Räume

Der Begriff der Norm stellt eine Verallgemeinerung des natürlichen Längenbegriffes auf Elemente eines beliebigen Vektorraumes dar. Diese Elemente können dabei auch Matrizen oder Funktionen sein.
Normen spielen eine wichtige Rolle in der Stabilitätstheorie/-analyse, indem sie ein Maß

für die Größe verschiedener Objekte bereitstellen. Um in einem rein algebraischen Konzept, wie dem des Vektorraumes, analytische Begriffe wie Konvergenz oder Stetigkeit einzuführen, wird der Begriff der Norm und der des linearen, normierten Raumes eingeführt, siehe hierzu auch die zahlreiche Literatur, von der nur auswahlweise [2], [37], [38], [39], [40] und [102] genannt seien.

2.2.1 Normen

Definition 2.2.1. [40] Sei X ein Vektorraum[3] über einem Körper[4] $\mathbb{R}$ (der Körper der reellen Zahlen). Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{2.1}$$

mit folgenden Eigenschaften

(N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall\, x \in X$, und $\|x\| = 0 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \in X$,

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall\, x \in X$,

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in X$ (Dreiecksungleichung),

heißt **Norm**.
Ein Paar $\big(X, \|\cdot\|\big)$, bestehend aus einem Vektorraum bezüglich eines Körpers $\mathbb{K}$ und einer Norm, heißt **normierter linearer Vektorraum** oder einfach **normierter Raum**. $\diamond$

Bemerkung 2.2.2. Sei x ein Vektor des normierten, linearen Raumes $\big(X, \|\cdot\|\big)$. Axiom (N1) besagt, daß lediglich der Nullvektor die Länge Null besitzt, und daß jeder andere Vektor eine positive Länge besitzt. Axiom (N2) besagt, daß, wenn ein Vektor um das Körperelement $\alpha \in \mathbb{R}$ gestaucht/gestreckt wird, die Länge des Vektors um den Betrag des Körperelementes gestaucht/gestreckt wird. Bedingung (N3) ist bekannt als Dreiecksungleichung und beinhaltet, daß die Summe zweier Vektoren nicht länger ist als die Summe der einzelnen Längen. Die Dreiecksungleichung nach unten lautet: $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$, $\forall\, x, y \in X$. $\diamond$

Viele Abbildungen der Form (2.1) können mit den Eigenschaften (N1)-(N3) gestaltet werden. Drei werden in den folgenden Unterabschnitten erklärt.

Beispiel 2.2.3. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wird mit $\|x\| := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ ein normierter Raum. Der Raum aller konvergenten Zahlenfolgen $x := (x_1\,, x_2\,, \ldots)$, $x_i \in \mathbb{R}$, wird durch $\|x\| := \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \big\{|x_1|\,, |x_2|\,, \ldots\big\}$ ein normierter Raum. $\diamond$

Bemerkung 2.2.4. Für verschiedene Objekte wird dasselbe Symbol $\|\cdot\|_p$ (der Index p wird im laufenden Text erklärt) verwendet. Als Vorgriff sei das folgende Beispiel genannt. Es wird die 'Unendlichkeitsnorm' $\|\cdot\|_\infty$ betrachtet:

- Ist x ein Vektor, dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Vektornorm, und $\|x\|_\infty$ ist das betragsgrößte Element (Komponente) des Vektors x.

[3] Für eine Erklärung bzw. Definition wird auf [2, Abschnitt I.8] verwiesen.
[4] Für eine Erklärung bzw. Definition wird auf [2, Abschnitt I.12] verwiesen.

- Ist x eine Matrix, dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Matrixnorm, und $\|x\|_\infty$ ist der maximale Zeilensummenwert der Matrix x: $\|x\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
- Ist x eine Funktion auf dem Intervall (a,b), dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Funktionennorm, und $\|x\|_\infty$ ist das essentielle Supremum der Funktion x auf einem gegebenen Intervall (a,b).

Die hier angeführten Begriffe werden in den folgenden Unterabschnitten der unterschiedlichen Normen erklärt und beschrieben. ◇

2.2.1.1 Vektornormen

In der ganzen Arbeit werden Vektornormen genutzt, die **auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind**.
Betrachtet wird ein Vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Definition 2.2.5. [102] Eine Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N},$$

definiert und **l_p-Norm** (oder nur **p-Norm**) im $\mathbb{R}^n$ genannt. ◇

Dadurch wird jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ eine bestimmte, nichtnegative Zahl zugeordnet. Drei wichtige Spezialfälle dieser p-Norm im $\mathbb{R}^n$, die am häufigsten in dieser Arbeit genutzt werden, sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(Betragssummennorm, } l_1\text{-Norm)}\,,\\
\|x\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \quad \text{(Euklidische Norm, } l_2\text{-Norm)}\,,\\
\|x\|_\infty &:= \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i| \quad \text{(Betragsmaximumnorm, Maximumnorm, } l_\infty\text{-Norm)}\,.
\end{aligned}$$

Ein wichtiges Resultat ist der folgende Satz.

Satz 2.2.6. [39] Alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. ◇

Zwei Normen $\|\cdot\|_{p_1}$ und $\|\cdot\|_{p_2}$ heißen äquivalent [59], wenn zwei positive Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ existieren, so daß $\alpha_1\|x\|_{p_1} \le \|x\|_{p_2} \le \alpha_2\|x\|_{p_1}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dies impliziert für eine Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$: $\|x_i - \tilde{x}\|_{p_1} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_i - \tilde{x}\|_{p_2} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (Folgenkonvergenz[5]).
Infolgedessen kann diejenige Norm herangezogen werden, die für die jeweilige Untersuchung am besten geeignet ist. Deshalb wird oft nur das Symbol $\|\cdot\|$ benutzt, ohne daß eine exakte Spezifikation vorgenommen wird, welche Norm gemeint ist (d.h. ohne einen Index p für die Art der Vektornorm anzugeben).

Definition 2.2.7. [38] Ein normierter Raum $\big(X, \|\cdot\|\big)$ heißt **vollständiger, normierter Raum** oder **Banach-Raum**, wenn jede Cauchy-Folge[6] in $\big(X, \|\cdot\|\big)$ (gegen ein Element aus X) konvergiert. ◇

[5] [37] Eine Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ eines normierten Raumes $\big(X, \|\cdot\|\big)$ **konvergiert gegen ein Element** $\tilde{x} \in X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $i_0 = i_0(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle $i \ge i_0(\varepsilon)$ gilt: $\|x_i - \tilde{x}\| < \varepsilon$.

[6] [37] Eine Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ eines normierten Raumes $\big(X, \|\cdot\|\big)$ heißt **Cauchy-Folge**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $i_0 = i_0(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle $i_1, i_2 \ge i_0(\varepsilon)$ gilt: $\|x_{i_1} - x_{i_2}\| < \varepsilon$.