

---

## KAPITEL 1

---

# Einleitung

Die Erforschung der Kugelspaltströmung, also der Strömung eines Fluids im Spalt zwischen zwei konzentrisch angeordneten Kugelschalen, ist häufig durch geophysikalische Fragestellungen motiviert. Die Strömung im Kugelspalt dient in diesen Fällen als Modell für Bewegungen in der Atmosphäre von Planeten oder auch für Strömungen im Erdinnern. Gerade bei der Frage nach der Entstehung des Erdmagnetfelds, das durch Strömungen im äußeren Erdkern hervorgerufen wird, konnten in den letzten Jahren, begünstigt durch die rasante Entwicklung der Rechenleistung von Computern, die mit entsprechend großem Aufwand die volle Simulation der magnetohydrodynamischen Gleichungen bei halbwegs realistischen Parametern bewältigen können, beachtliche Erfolge erzielt werden [24, 63]. Die Strömung wird dabei durch thermische Konvektion aufgrund eines Temperaturgradienten zwischen Innen- und Außenkugel hervorgerufen. Daneben gibt es die isotherme Kugelspaltströmung, bei der die Energiezufuhr, die die Strömung aufrecht erhält, durch Rotation der das Fluid begrenzenden Kugelschalen erfolgt. Kombinationen aus beiden Antriebsarten sind möglich.

Ein allgemeines Problem bei den geophysikalischen Analogien sind jedoch die Stoffparameter und die Antriebsstärke in den realen Systemen, die weder in Experimenten noch bei numerischen Berechnungen exakt nachgebildet werden können.

Unabhängig von eventuellen geophysikalischen Fragestellungen ist das System jedoch auch unter dem grundsätzlicheren Aspekt der Strukturbildung von Interesse. Strukturbildung ist ein Phänomen, das in vielen Bereichen der Natur zu beobachten ist und zu oftmals faszinierenden geometrischen Mustern führt [25, 35]. Grundlage für das Verständnis ist das Konzept der Instabilität. Strukturbildung kann auftreten, wenn ein System durch Veränderung äußerer Parameter in einen instabilen Zustand, d.h. in einen Zustand, der sich als Reaktion auf beliebig kleine Störungen stark verändert, getrieben wird. Weiterhin ist strukturbildenden Systemen gemeinsam, dass ein

nichtlinearer Mechanismus existiert, durch den die anwachsende Störung beschränkt wird und das System in einen neuen stabilen Zustand übergeht.

In vielen fluidmechanischen Systemen treten aufgrund von hydrodynamischen Instabilitäten unterschiedlicher Natur symmetriebrechende Übergänge zu anderen Strömungsformen auf. Die Untersuchung hydrodynamischer Instabilitäten ist, ebenso wie die Theorie der Strukturbildung allgemein, weiterhin ein aktueller Zweig der physikalischen Forschung, wobei sich wegen der Komplexität der Fragestellungen das Interesse besonders auf zwei geometrisch einfache Systeme unterschiedlichen Charakters konzentrierte. An diesen konnten grundsätzliche Erkenntnisse gewonnen und allgemeiner einsetzbare Methoden entwickelt werden.

Zum einen handelt es sich dabei um das Rayleigh-Bénard-System, bei dem die durch einen vertikalen Temperaturgradienten hervorgerufenen Konvektionsströmungen in einer ebenen Flüssigkeitsschicht untersucht werden. Hierbei treten zunächst regelmäßig angeordnete stationäre Konvektionszellen auf. Das andere Modellsystem ist das Taylor-Couette-System, bei dem die Bewegung eines viskosen Fluids im Spalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern betrachtet wird, das durch die Rotation des Innenzylinders in Bewegung gesetzt wird. Bei hinreichend starkem Antrieb bilden sich hier in Folge einer Zentrifugalininstabilität im gesamten Spalt regelmäßig angeordnete Wirbel, die nach G.I. Taylor, dessen experimentelle und theoretische Arbeiten an diesem System grundlegend für den gesamten Forschungszweig wurden, als Taylor-Wirbel bezeichnet werden. In beiden Systemen führt eine weitere Verstärkung des Antriebs, also Erhöhung des Temperaturgradienten bzw. der Rotationsgeschwindigkeit, zu weiteren Instabilitäten, aus denen eine Sequenz räumlich und zeitlich komplizierter Strömungsformen entsteht, bis das System schließlich in Turbulenz übergeht.

Die enge Verwandtschaft zwischen der isothermen Kugelspaltströmung und dem Taylor-Couette-System ist offensichtlich. Als eine Besonderheit hat sich jedoch herausgestellt, dass im Kugelspalt für große relative Spaltweiten nicht die aus dem Taylor-Couette-System bekannten axialsymmetrischen Taylor-Wirbel auftreten, sondern eine komplexere Spiralwellenstruktur als Folge der ersten Instabilität entsteht. Während die in engen Spalten zunächst auftretenden Taylor-Wirbel-Strukturen und auch andere, in Folge weiterer Instabilitäten entstehende Strömungsmuster in den letzten vier Jahrzehnten intensiv untersucht wurden, gibt es im Vergleich dazu beträchtlich weniger Studien, insbesondere von Seiten der Numerik, die sich mit den Verhältnissen in weiten Spalten beschäftigen. Die vorliegende Arbeit soll einen Teil der Lücke schließen und befasst sich numerisch mit der Frage nach der linearen Stabilität des Grundzustands in weiten Kugelspalten und dem Auftreten der Spiralwellen.

---

Die Arbeit ist dabei folgendermaßen aufgebaut:

Zunächst werden in Kapitel 2 die Geometrie des Systems vorgestellt und die Kenngrößen eingeführt. Außerdem werden dort die theoretischen Grundlagen, auf deren Basis die Beschreibung des Systems und seine numerische Behandlung erfolgen, kurz rekapituliert und einige Konzepte der hydrodynamischen Stabilität dargelegt.

Anschließend werden in Kapitel 3 die wichtigsten Strömungsformen, die im konzentrischen Kugelspalt auftreten, vorgestellt. Im Rahmen eines Überblick über bisherige experimentelle und numerische Arbeiten zur Kugelspaltströmung, die für die hier untersuchten Fragestellungen von Bedeutung sind, werden die Unterschiede zwischen engen und weiten Spalten beschrieben.

Mit dem numerischen Verfahren, mit dem die Resultate dieser Arbeit gewonnen wurden, befasst sich Kapitel 4.

Kapitel 5 bildet ein Kernstück dieser Arbeit. Dort werden ausführlich die durchgeführten Untersuchungen zur Stabilität des Grundzustands beschrieben und unter Hinzuziehung aller bekannten Resultate in diesem System kritisch überprüft.

Ein Erklärungsansatz zum Mechanismus der Instabilität im weiten Kugelspalt ist Gegenstand von Kapitel 6.

Simulationen der Spiralwellenstruktur in überkritischen Parameterbereichen werden in Kapitel 7 diskutiert.

Schließlich werden in Kapitel 8 die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.



---

## KAPITEL 2

---

# Grundlagen

## 2.1 System

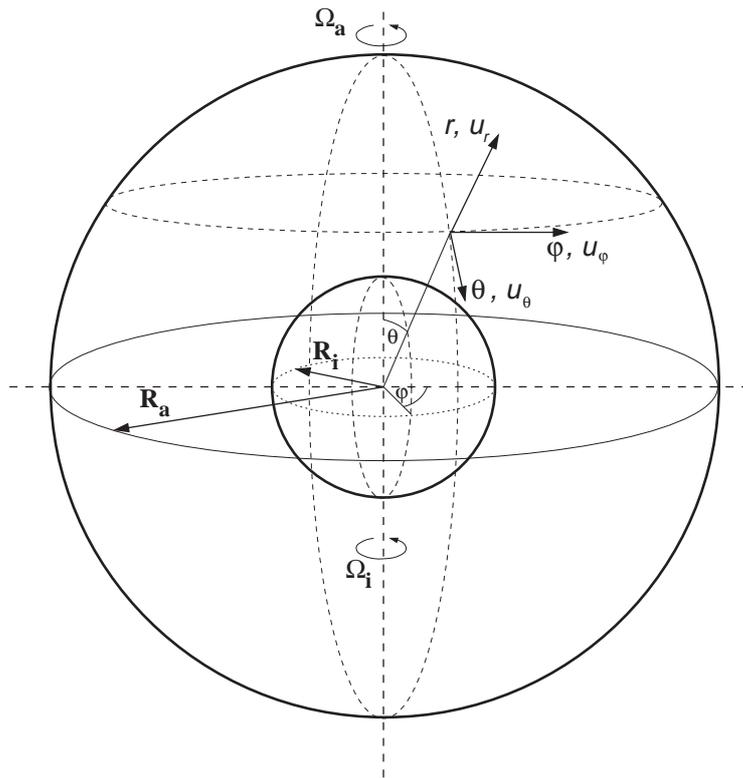
Zunächst wird das Kugelspaltsystem allgemein beschrieben, und die Parameter, die den Zustand des Systems charakterisieren, eingeführt. Strömungsformen, die in dem System auftreten können, werden in Kapitel 3 im Rahmen des Überblicks über bisherige Arbeiten zur Kugelspaltströmung vorgestellt.

### 2.1.1 Geometrie

Untersucht wird die Bewegung eines viskosen, inkompressiblen, Newtonschen Fluids, das durch zwei konzentrisch gelagerte Kugeln begrenzt wird und sich in dem dazwischen befindlichen Raum, dem Kugelspalt, befindet. Es wird stets vorausgesetzt, dass die Kugelschalen sich auf der gleichen, konstanten Temperatur befinden, sodass keine Konvektionsströmung aufgrund eines Temperaturgradienten hervorgerufen wird. Der Antrieb erfolgt ausschließlich durch die Rotation der Kugeln um eine gemeinsame Achse, die das daran angrenzende Fluid in Bewegung setzen. Damit sind diese Untersuchungen abzugrenzen von den oft geophysikalisch motivierten Arbeiten, die in der gleichen Geometrie durch thermischen Auftrieb hervorgerufene Strömungen erforschen. Soll dieser Unterschied besonders betont werden, wird auch der Begriff isotherme Kugelspaltströmung verwendet.

Das System ist eine nahe liegende, wenn auch wesentlich weniger untersuchte Variante des klassischen Taylor-Couette-Systems, das neben dem Rayleigh-Bénard-System (thermische Konvektion in einer ebenen Schicht) zu einem Paradebeispiel für ein strukturbildendes hydrodynamisches System geworden ist. Bei diesem werden die Strömungsformen eines Fluids, das zwischen zwei konzentrischen Zylindern, von denen

der innere oder auch beide rotieren, eingeschlossen ist, erforscht. Besonderes Augenmerk liegt auf den Übergängen von der durch die Rotation hervorgerufenen lamina- ren Strömung senkrecht zur Rotationsachse hin zu komplexeren Zuständen. Einen guten ersten Überblick über die Eigenschaften dieses Systems erhält man beispiels- weise durch die Lektüre der Übersichtsartikel [60] und [72]. Wegen dieser Ähnlichkeit wird das Kugelspaltsystem auch, vor allem in der englischsprachigen Literatur, als sphärisches Couette-System bezeichnet.



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung des Kugelspaltsystems und Einführung der charakterisierenden Parameter.

Die Geometrie des Kugelspaltsystems ist in Abbildung 2.1.1 dargestellt. Die Beschreibung erfolgt mittels eines sphärischen Koordinatensystems mit dem Ursprung im Zentrum der Kugeln; die Koordinaten sind die radiale Koordinate  $r$ , der von der Drehachse gemessene meridionale Winkel  $\theta$  und der azimutale Winkel  $\varphi$ . Die zugehörigen orthonormalen Einheitsvektoren werden als  $e_r$ ,  $e_\theta$ ,  $e_\varphi$  bezeichnet, die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten heißen  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_\varphi$ .

Im allgemeinsten Fall können die Innenkugel mit dem Radius  $R_i$  und die Außenkugel mit dem Radius  $R_a$  unabhängig von einander mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega_i$  bzw.  $\Omega_a$  um die gemeinsame Achse rotieren. Wie die Mehrheit der bisherigen Un-

tersuchungen beschränkt sich auch diese Arbeit auf den Spezialfall, dass die äußere Kugel ruht, also auf den Fall  $\Omega_a = 0$ ; im Folgenden wird daher  $\Omega = \Omega_i$  gesetzt.

### 2.1.2 Kontrollparameter

Die äußeren Bedingungen werden durch zwei dimensionslose Kontrollparameter unterschiedlicher Natur eindeutig bestimmt. Die Geometrie des Systems wird durch die *relative Spaltweite* oder das *Aspektverhältnis*

$$\beta = \frac{R_a - R_i}{R_i} \quad (2.1)$$

beschrieben. Die möglichen Strömungszustände hängen, wie in Kapitel 3 gezeigt wird, wesentlich vom Aspektverhältnis ab. Der zweite Kontrollparameter ist dynamischer Natur und berücksichtigt die Abmessung des Systems, die Stärke des Antriebs und die Eigenschaften des Fluids, dessen Einfluss durch die dynamische Viskosität  $\nu$  charakterisiert ist. Er wird als *Reynolds-Zahl* bezeichnet und hier durch

$$\text{Re} = \frac{\Omega R_i^2}{\nu} \quad (2.2)$$

definiert (siehe auch Abschnitt 2.2.4). Weitere gelegentlich benutzte Kennzahlen, wie z.B. die Taylor-Zahl, sind lediglich Funktionen von  $\beta$  und  $\text{Re}$ .

In dem bei den hier durchgeführten Untersuchungen außen vor gelassenen Fall, dass auch die äußere Kugel unabhängig von der Innenkugel rotieren kann, kommt ein dritter Kontrollparameter hinzu. Dieser wird entweder analog zu (2.2) ebenfalls als Reynolds-Zahl mit  $R_a$  und  $\Omega_a$  definiert, oder als das Verhältnis der Rotationsfrequenzen von Innen- und Außenkugel.

### 2.1.3 Experimentelle Realisierungen

Neben numerischen Untersuchungen an diesem System ist die konzentrische Kugelspaltströmung auch Gegenstand experimenteller Untersuchungen in mehreren Arbeitsgruppen. Ein Experimentaufbau, an dem parallel zu den hier vorgestellten numerischen Untersuchungen Experimente in weiten Spalten durchgeführt wurden, ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

Bei der experimentellen Realisierung eines solchen Systems ist eine Vorrichtung, die Innenkugel zu lagern und anzutreiben, offensichtlich unvermeidlich. Dies erfolgt mechanisch durch eine von außen angetriebene Welle, die mit der Drehachse der Kugel zusammenfällt. Hierbei sind prinzipiell zwei Varianten denkbar, die auch beide in



**Abbildung 2.2:** *Experimentaufbau zur Untersuchung der Strömungszustände im weiten Kugelspalt [44].*

den verschiedenen Aufbauten der Experimentatoren realisiert wurden. Die Welle kann entweder durch beide Pole und den Kugelmittelpunkt oder lediglich durch einen Pol geführt werden. Bei letzterer Variante, beispielsweise ausgeführt bei [31, 80], sind die zentrische Lagerung der Kugel und ein gleichmäßiger Antrieb technisch schwieriger, sodass hier unter Umständen eine mögliche Fehlerquelle liegen kann. Grundsätzlich stellt die mitrotierende Welle stets eine unerwünschte Störung des Systems dar. Daher spricht für diese Variante, dass diese Störung sich so auf eine Halbkugel beschränkt, während in der anderen das ideale System vorliegt. Darüber hinaus wird gleichzeitig das Problem umgangen, dass eine Welle die visuelle Beobachtung im Polbereich erschwert. Für die andere Lösung spricht vom grundsätzlichen Standpunkt, dass eine einseitige Welle die im idealen System vorhandene Symmetrie zwischen den beiden Kugelhälften aufheben würde. Aus technischer Sicht hat eine durch das gesamte System geführte Welle den Vorteil, dass so die Kugel besser gelagert und angetrieben werden kann. Zusätzlich kann eine durchgehende Achse, die im Experiment in der

Regel auch Kanäle für einen Thermostatisierungskreislauf und Elektronik aufzunehmen hat, eventuell dünner realisiert werden, wodurch ihr störender Einfluss verringert wird. Diese Lösung wurde u.a. in dem in Abbildung 2.2 gezeigten Experiment bevorzugt. Über den tatsächlichen Einfluss der Achse und die Frage, welche Variante diesen geringer hält, kann nur spekuliert werden. Ein direkter quantitativer Vergleich beider Möglichkeiten in ansonsten identischen Experimentaufbauten wurde bislang nicht durchgeführt. Ebenso gibt es keine numerische Untersuchung, die eine Achse mit berücksichtigen würde. Auch in dieser Arbeit kann dies nicht in Angriff genommen werden. Teils sehr gute Übereinstimmungen zwischen Experimenten unterschiedlicher Konzeption einerseits und zwischen experimentellen und von einem idealen System ausgehenden numerischen Resultaten andererseits erlauben jedoch die vorsichtige Vermutung, dass die Welle in der Tat, wie meist vorausgesetzt, keinen entscheidenden Einfluss hat.

## 2.2 Grundgleichungen

Im Folgenden werden die hydrodynamischen Gleichungen, die zur theoretischen Beschreibung des oben eingeführten Systems benötigt werden, und die den Ausgangspunkt für die numerische Behandlung des Problems darstellen, vorgestellt.

Im Wesentlichen sind bei der Herleitung die Erhaltungssätze für die Masse und den Impuls in einem kontinuierlichen Medium heranzuziehen, wobei im letzten Fall alle auf ein Flüssigkeitselement wirkenden Kräfte, einschließlich der Reibungskräfte, die durch die Wechselwirkung mit benachbarten Flüssigkeitselementen oder begrenzenden Wänden hervorgerufen werden, zu berücksichtigen sind. Die vollständige Herleitung und Diskussion der Gleichungen findet man beispielsweise in [46] oder [37].

### 2.2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Bilanzgleichung für die Masse ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.3)$$

mit der Dichte  $\varrho$  und der Massenstromdichte  $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{u}$ . Im Fall einer *inkompressiblen Flüssigkeit*, d.h. wenn die Dichte räumlich und zeitlich konstant ist, oder genauer, unter Strömungsbedingungen, in denen die Dichte als konstant angesehen werden kann, vereinfacht sich die Gleichung (2.3) zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.4)$$