1 Algebraische Strukturen

1.1 Mengen

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzem.

1.2 Gruppen

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Abbildung $\circ : G \times G \to G$, für die gilt:

(GRP1) Assozialtivgesetz: $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k) \quad \forall\, g, h, k \in G$

(GRP2) Linkseins: $\exists\, e \in G : e \circ g = g \quad \forall\, g \in G$

(GRP3) Linksinverses: $\exists\, g' \in G : \; g' \circ g = e \quad \forall\, g \in G$

1.3 Ringe

Ein Ring $(R, +, \cdot\,)$ ist eine Menge R mit zwei Abbildungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) für die gilt:

(RNG1) $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe

(RNG2) AG: $(rs)t = r(st) \quad \forall\, r, s, t \in R$

(RNG3) DG: $r(s + t) = rs + rt$ und $(r + s)t = rt + st \quad \forall\, r, s, t \in R$

1.4 Körper

Ein Körper $K = (K, +, \cdot\,)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen "+" (Addition) und "·" (Multiplikation) für die gilt:

(KRP1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit Einselement 0

(KRP2) $(K, \cdot\,)$ ist eine kommutative Gruppe mit Einselement 1

(KRP3) Es gilt: $1 \neq 0$

(KRP4) Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in K$

Ring und Körper

Ein Ring ist also ein "bisschen weniger" als ein Körper.

Ein Ring ist nicht invertierbar und hat auch keine Bruchrechnung (Inverses der Multiplikation).

1.5 Vektorräume

Ein Vektorraum ist eine Menge V, deren Elemente Vektoren mit Einträgen aus einem Körper K sind, zusammen mit einer *Vektoraddition*

$$\text{"}+\text{"} : V \times V \to V$$

und einer *skalaren Multiplikation*

$$\text{"}\cdot\text{"} : K \times V \to V$$

für die gilt:

(VTR1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

(VTR2) Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \quad \forall\, a, b \in K,\ x \in V$

(VTR3) Für das Einselement $1 \in K$ gilt: $1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in V$

(VTR4) Distributivgesetze: $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ und
$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y \quad \forall\, a, b \in K,\ x, y \in V$

Körper und Vektorräume

Jeder Körper ist also ein Vektorraum über sich selber.

2 Abbildungen zwischen Strukturen

2.1 Homomorphismus

Vektorräume

Seien X, Y zwei Vektorräume, $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist ein Homomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\varphi \text{ ist linear}$$

Gruppen

Seien X, Y zwei Gruppen, $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist ein (Gruppen-)Homomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\varphi(a \circ b) \;=\; \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad \forall\, a, b \in X$$

Ringe

Seien X, Y zwei Ringe, $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist ein (Ring-)Homomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall\, a, b \in X \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \forall\, a, b \in X \end{aligned}$$

teilweise geordnete Mengen

Seien X, Y zwei teilweise geordnete Mengen, $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist ein Homomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$a \leq b \;\Rightarrow\; \varphi(a) \leq \varphi(b) \quad \forall\, a, b \in X$$

topologische Räume

Seien X, Y zwei topologische Räume, $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

φ ist ein Homomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\varphi \text{ ist stetig} \\ &a \text{ offen } \Rightarrow \ \varphi(a) \text{ offen } \quad \forall\, a \in X \end{aligned}$$

2.2 Endomorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Endomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\varphi \text{ ist ein Homomorphismus und } X = Y$$

2.3 Isomorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Isomorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\varphi \text{ ist ein Homomorphismus und } \varphi \text{ ist bijektiv}$$

2.4 Automorphismus

$\varphi : X \to Y$ ist ein Automorphismus $:\Leftrightarrow$

$$\varphi \text{ ist ein Homomorphismus, } X = Y \text{ und } \varphi \text{ ist bijektiv}$$