1 Mathematische Schreibweisen

Schreibweisen

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & & \text{heißt "daraus folgt"} \\ x & \Rightarrow & y & \text{heißt "aus } x \text{ folgt } y\text{"} \\ & \Leftrightarrow & & \text{heißt "genau dann wenn"} \\ x & : & y & \text{heißt "} x \text{ für das gilt } y\text{"} \end{array}$$

Quantoren

$$\begin{array}{rl} \forall & \text{heißt "für alle"} \\ \exists & \text{heißt "es existiert ein" oder "es gibt ein"} \\ \exists! & \text{heißt "es existiert genau ein"} \end{array}$$

Einschränkung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, $M \subset \mathbb{R}$.

$$f|_M \quad \Leftrightarrow \quad f : M \to \mathbb{R}$$

ist die auf M eingeschränkte Funktion f.

Beispiele

$\forall\ n \in A :\ n < 1$ heißt "für alle n Element von A gilt n kleiner 1"

2 Beweistechniken

Jeder Beweis sollte in drei Teile gegliedert werden:

(1) Voraussetzung Was ist gegeben

(2) Behauptung Was wird behauptet

(3) Beweis Aus den Voraussetzungen folgt die Behauptung

Der eigentliche Beweis kann dabei gut strukturiert werden, indem man auch hier weitere Unterteilungen vornimmt:
zu zeigen (1), zu zeigen (2), zu zeigen (3).
Im gesamten Beweis sollten weder zu viele noch zu wenig Kommentare und Erläuterungen vorkommen.

2.1 Direkter Beweis

Durch ausnutzen bekannter Definitionen kann die Behauptung sofort gezeigt werden:

Voraussetzung	$a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0$
Behauptung	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
Beweis	$(a-b)^2 \geq 0$
	$\vdots$

2.2 Indirekter Beweis

Bei dem indirekten Beweis oder auch Beweis durch Widerspruch wird eine Annahme gemacht, die dem Gegenteil der Behauptung entspricht. Danach wird gezeigt, dass die Annahme stets falsch ist. Daraus folgt, dass das Gegenteil der Annahme gelten muss, was der Behauptung entspricht.

Voraussetzung	$a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0$
Behauptung	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
Beweis	Annahme: $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$
	$\vdots$
	$0 < ab \quad \Rightarrow$ Widerspruch
	$\Rightarrow$ Annahme ist falsch

2.3 Vollständige Induktion

Ausführliche Beschreibung siehe Seite 14.

2.4 Äquivalente Aussagen und Gleichheit

(1) *Aussage* $A \Leftrightarrow$ *Aussage* B Beweis durch $A \Rightarrow B \ \wedge \ A \Leftarrow B$

(2) *Menge* $A =$ *Menge* B Beweis durch $A \subseteq B \ \wedge \ A \subseteq B$

2.5 Widerlegen

Widerlegen heißt ein konkretes Gegenbeispiel zu finden.

3 Vollständige Induktion

3.1 Die Idee

Die Idee der vollständigen Induktion ist die Gültigkeit von Aussagen (in der Regel Gleichungen oder Ungleichungen) mit eine Unbekannten für jeden Wert dieser Unbekannten zu beweisen.

Beispiel einer Gleichung:	$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Beispiel einer Ungleichung:	$n < 2^{n-1}$

Bei der Unbekannten (meistens mit n bezeichnet) handelt es sich immer um eine natürliche Zahl, also $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Das Prinzip

Der Beweis gliedert sich in drei Teile:

Induktionsvoraussetzung (IV)

Hier wird angenommen, dass die Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte.

Induktionsanfang (IA)

Hier wird das kleinste n gesucht, für das die Aussage gilt und dies bewiesen.

Induktionsschritt (IS)

Hier wird zunächst noch einmal die Behauptung aufgeschrieben, nur wird jedes n durch $(n + 1)$ ersetzt. Die Gültigkeit dieser Behauptung ist nun zu zeigen. Es folgt der eigentliche Beweis, dabei wird auf die Induktionsvoraussetzung zurückgegriffen.
Im Induktionsanfang wurde die Gültigkeit für das kleinst mögliche n gezeigt, in der Induktionsvoraussetzung sollte die Behauptung für ein beliebiges n gelten. Nun wird gezeigt, dass die Aussage auch für den Nachfolger von n gilt.

3.3 Erklärendes Beispiel

Behauptung

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{gilt für alle } n \in \mathbb{N}$$

Beweis

Beweis durch Vollständige Induktion:

Induktionsvoraussetzung

Die Behauptung gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang

Die Behauptung gilt für $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Induktionsschritt

Von n auf $(n+1)$ schließen:

$$\begin{aligned}
& 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{n(n+1)}{2} & & \\
& \underbrace{1 + 2 + \ldots + n} + (n+1) & & \Big| \text{ auf (IV) zurückgreifen} \\
= \; & \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) & & \Big| \text{ auf Hauptnenner bringen} \\
= \; & \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} & & \Big| \text{ } (n+1) \text{ ausklammern} \\
= \; & \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} & & \\
= \; & \tfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2} & &
\end{aligned}$$

Die Induktionsannahme gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$