Notation

Die in dieser Arbeit verwendete Notation ist im Wesentlichen Standard, so wie sie beispielsweise in [As] zu finden ist. Einige Abweichungen hiervon, Klarstellungen und zusätzliche Notationen (sofern sie nicht im weiteren Verlauf der Arbeit eingeführt werden) werden im Folgenden vorgestellt.

Zuvor vereinbaren wir: Alle in dieser Arbeit betrachteten Vektorräume seien endlichdimensional. Körper seien kommutativ.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen schließt die 0 ein. Für $a, b \in \mathbb{N}$ ist $a \mid b$ als „a teilt b" und $a \nmid b$ als „a teilt nicht b" zu lesen. Den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b bezeichnen wir stets mit $\mathrm{ggT}(a, b)$, so dass also (a, b) im Falle natürlicher Zahlen a und b stets für ein geordnetes Paar steht. Unter δ_{ij} mit $i, j \in \mathbb{N}$ ist das „Kronecker-Delta" zu verstehen, das heißt, $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, und $\delta_{ij} = 0$, falls $i \neq j$.

Ist A eine beliebige Menge, so steht id_A für die identische Abbildung von A auf A. Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung einer Menge A in eine Menge B und $A' \subseteq A$, so bezeichne $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$ die Einschränkung von f auf A'.

Für den Rest dieses Abschnitts seien G eine Gruppe, K ein Körper und V und W zwei K-Vektorräume.

Die Schreibweise $U \leqslant G$ (bzw. $U < G$) bedeutet, dass U eine (echte) Untergruppe von G ist, und $U \leqslant V$ (bzw. $U < V$), dass U ein (echter) K-Teilraum von V ist. Mit den Klammern $\langle \ \dots \ \rangle$ bezeichnen wir sowohl Gruppenerzeugnisse als auch Vektorraumerzeugnisse. Im Falle einer multiplikativ geschriebenen Gruppe steht 1 für das neutrale Element bezüglich der Multiplikation wie auch für die aus diesem Element bestehende Untergruppe $\{1\}$, und im Falle einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe (also auch eines Körpers oder Vektorraumes) steht 0 für das neutrale Element bezüglich der Addition wie auch für die aus diesem Element bestehende Untergruppe (bzw. den aus diesem Element bestehenden Teilraum) $\{0\}$.

Für die Kommutatorgruppe von G schreiben wir G'.

Unter K^+ ist K, als additive Gruppe betrachtet, und unter $K^\times$ ist $K \setminus 0$, als multiplikative Gruppe betrachtet, zu verstehen.

Mit $\mathfrak{P}(V, K)$ bezeichnen wir den projektiven Raum, das heißt die Menge aller K-Teilräume, von V und mit $\mathfrak{P}_k(V, K)$ die Menge aller k-dimensionalen Teilräume von V für $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant k \leqslant \dim_K V$. Falls klar ist, welcher Körper K zugrunde liegt, schreiben wir auch $\mathfrak{P}(V)$ und $\mathfrak{P}_k(V)$ anstelle von $\mathfrak{P}(V, K)$ und $\mathfrak{P}_k(V, K)$.

Es sei $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W und $\mathrm{End}_K(V)$ der Ring aller K-linearen Abbildungen von V nach V, ferner sei $\mathrm{GL}(V, K)$ die allgemeine, $\mathrm{PGL}(V, K)$ die projektive allgemeine, $\mathrm{SL}(V, K)$ die spezielle und $\mathrm{PSL}(V, K)$ die projektive spezielle lineare Gruppe des K-Vektorraums V. Hat V die K-Dimension $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und K die endliche Ordnung der Primzahlpotenz $q \neq 1$, so seien $\mathrm{GL}(n, q)$, $\mathrm{SL}(n, q)$ und $\mathrm{PSL}(n, q)$ die zu $\mathrm{GL}(V, K)$, $\mathrm{SL}(V, K)$ bzw. $\mathrm{PSL}(V, K)$ korrespondierenden Matrizengruppen.

Ist $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V, K)$ eine K-lineare Darstellung von G auf V, so bezeichne $\operatorname{grad} \varphi$ den Grad von φ, also die K-Dimension von V.

Das Symbol $\square$ kennzeichnet das Ende oder auch (in Kapitel 2) die Auslassung eines Beweises.

Kapitel 1

Minimale Darstellungen, Kommutator- und Fixräume, projektive Geometrie

In diesem vermischten Kapitel definieren wir den Begriff der minimalen Darstellung sowie Kommutator- und Fixräume linearer Abbildungen und führen einige vorbereitende Resultate hierzu an. Darüber hinaus bringen wir zwei Sätze aus der projektiven Geometrie in Erinnerung.

1.1. Definition. Es seien $G \neq 1$ eine Gruppe, V ein Vektorraum über dem Körper K und $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V, K)$ eine nichttriviale lineare Darstellung von G über K auf V. Die Darstellung φ heißt eine *minimale (lineare) Darstellung von G über K*, falls gilt: Für jede nichttriviale lineare Darstellung $\psi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W, K)$ über K auf einem K-Vektorraum W ist der Grad von ψ größergleich dem Grad von φ. Der Grad von φ heißt dann *minimaler Grad* oder *Minimalgrad* der Gruppe G über K, abgekürzt $\mathrm{mingrad}(G, K)$, und der KG-Modul V heißt ein *minimaler KG-Modul.*

1.2. Lemma. *Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K, es seien $G \leqslant \mathrm{GL}(V, K)$ und U ein KG-Teilmodul von V.*

(i) *Operiert G trivial auf U und auf V/U, so ist G eine abelsche Gruppe.*

(ii) *Ist G eine nichtabelsche Gruppe, so ist die Dimension von U oder die Codimension von U größergleich dem Minimalgrad von G über K.*

Beweis. (i) Es operiere G trivial auf U und auf V/U und es seien $g, h \in G$. Für alle $v \in V$ gilt dann $v^g + U = (v + U)^g = v + U$ und $v^h + U = (v + U)^h = v + U$, das heißt $v^g - v \in U$ und $v^h - v \in U$. Damit folgt

$$v^{gh} \;=\; (v^g - v)^h + v^h \;=\; (v^g - v) + v^h \;=\; (v^h - v) + v^g \;=\; (v^h - v)^g + v^g \;=\; v^{hg}$$

für alle $v \in V$.

(ii) Ist die Gruppe G nichtabelsch, so operiert sie nach (i) nichttrivial auf U oder V/U, daher ist der Minimalgrad von G größergleich der Dimension von U oder der Dimension von V/U. $\square$

1.3. Satz. *Jede minimale Darstellung einer nichttrivialen perfekten Gruppe ist irreduzibel.*

Beweis. Ist $G \neq 1$ eine perfekte Gruppe und φ eine nichttriviale Darstellung von G, so ist G^φ eine nichtabelsche Gruppe. Aus Lemma 1.2 (ii) folgt daher die Behauptung. $\square$

1.4. Definition. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $G \leqslant \mathrm{GL}(V, K)$. Wir definieren für $v \in V$ und $g, h \in G$ die Kommutatoren $[v, g] := v^g - v$ und $[v, g, h] := [[v, g], h]$ und dann die Kommutatorräume

$$[V, g] \;:=\; \{[v, g] \mid v \in V\} \quad \text{für } g \in G$$

und

$$[V, g, h] \;:=\; [[V, g], h] \quad \text{für } g \in G \text{ und } h \in \mathrm{C}_G(g)$$

sowie

$$[V, G] \;:=\; \langle [V, g] \mid g \in G \rangle$$

und

$$[V, G, G] \;:=\; [[V, G], G].$$

Definiere außerdem die Fixräume (Zentralisatoren)

$$\mathrm{C}_V(g) \;:=\; \{v \in V \mid v^g = v\} \quad \text{für } g \in G$$

und

$$\mathrm{C}_V(G) \;:=\; \{v \in V \mid v^g = v \text{ für alle } g \in G\}.$$

Solche Kommutator- und Fixräume, insbesondere von bestimmten p-Gruppen, werden eine wesentliche Rolle in unseren Betrachtungen spielen. Von Bedeutung ist dabei das folgende, einfache Lemma.

1.5. Lemma. *Es sei $V \neq 0$ ein Vektorraum über dem endlichen Körper K der Charakteristik p und $G \leqslant \mathrm{GL}(V, K)$ eine p-Gruppe. Dann gilt:*
(i) *$[V, G] < V$;*
(ii) *$0 < \mathrm{C}_V(G)$;*
(iii) *$[V, G] \cap \mathrm{C}_V(G) \neq 0$, falls $G \neq 1$.*

Beweis. (ii) Ist $G = 1$, so ist $\mathrm{C}_V(G) = V$. Es sei also $G \neq 1$. Wäre $\mathrm{C}_V(G) = 0$, so ergäbe sich aus der Bahnengleichung, da G eine nichttriviale p-Gruppe ist, dass $|V| - 1$ von p geteilt würde im Widerspruch zu $\operatorname{char} K = p$.

(i) Ist U ein echter KG-Teilmodul von V, so folgt analog $0 < \mathrm{C}_{V/U}(G)$. Es sei nun $U < V$ ein maximaler KG-Teilmodul von V. Dann ist V/U ein irreduzibler KG-Modul, folglich $\mathrm{C}_{V/U}(G) = V/U$, das heißt, G operiert trivial auf V/U, und wir erhalten $[V, G] \leqslant U < V$.

(iii) Ist $G \neq 1$, so ist der Fixraum $\mathrm{C}_V(G)$ ein echter KG-Teilmodul von V, daher gilt ebenso $0 < \mathrm{C}_{V/\mathrm{C}_V(G)}(G)$. Somit existiert ein $v \in V \setminus \mathrm{C}_V(G)$ mit $(v + \mathrm{C}_V(G))^g = v + \mathrm{C}_V(G)$ für alle $g \in G$ beziehungsweise $v^g - v \in \mathrm{C}_V(G)$ für alle $g \in G$. Wegen $v \notin \mathrm{C}_V(G)$ existiert ein $g_0 \in G$ mit $v^{g_0} - v \neq 0$, also $0 \neq v^{g_0} - v \in [V, G] \cap \mathrm{C}_V(G)$. □

1.6. Lemma. *Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $G, H \leqslant \mathrm{GL}(V, K)$. Dann gilt:*
(i) $[V, \langle G, H\rangle] = [V, G] + [V, H]$;
(ii) $\mathrm{C}_V(\langle G, H\rangle) = \mathrm{C}_V(G) \cap \mathrm{C}_V(H)$.

Beweis. (i) Es sei $v \in V$ und $x \in \langle G, H\rangle \setminus 1$. Dann existieren ein $0 \neq k \in \mathbb{N}$ und $y_1, \ldots, y_k \in G \cup H$ mit $x = \prod_{i=1}^{k} y_i$. Damit folgt

$$[v, x] = v^x - v = v^{\prod_{i=1}^{k} y_i} - v = \sum_{j=0}^{k-1} \Big(v^{\prod_{i=1}^{j+1} y_i} - v^{\prod_{i=1}^{j} y_i} \Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{k-1} [v^{\prod_{i=1}^{j} y_i}, y_{j+1}] \in [V, G] + [V, H].$$

Als Vektorraumerzeugnis aller solcher Kommutatoren $[v, x]$, die, wie gesehen, jeweils in dem Vektorraum $[V, G]+[V, H]$ enthalten sind, ist auch $[V, \langle G, H\rangle]$ in $[V, G]+[V, H]$ enthalten. Umgekehrt liegen natürlich $[V, G]$ und $[V, H]$ in $[V, \langle G, H\rangle]$.

(ii) Wird ein Vektor aus V von allen Elementen aus G und H fixiert, so auch von allen Elementen aus $\langle G, H\rangle$. Umgekehrt ist natürlich $\mathrm{C}_V(\langle G, H\rangle)$ in $\mathrm{C}_V(G)$ und $\mathrm{C}_V(H)$ enthalten. □

1.7. Satz. *Es sei V_i ein Vektorraum über dem Körper K_i für $i \in \{1, 2\}$ und $\dim_{K_1} V_1 = \dim_{K_2} V_2 \geqslant 3$. Jede Kollineation $\gamma : \mathfrak{P}(V_1, K_1) \longrightarrow \mathfrak{P}(V_2, K_2)$ wird von einer bijektiven semilinearen Abbildung $f : V_1 \longrightarrow V_2$ induziert, das heißt, es gilt*

$$U^\gamma = U^f \quad \textit{für alle } U \in \mathfrak{P}(V_1, K_1).$$

Beweis. Dieser Hauptsatz der projektiven Geometrie findet sich in solcher oder ähnlicher Form in jedem Buch über (projektive) Geometrie, siehe z. B. [Ar_2], Theorem 2.26 oder [Lin], S. 142. □

1.8. Satz. *Es sei V ein Vektorraum über dem endlichen Körper K und $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ die K-Dimension von V. Eine Gruppe von Kollineationen von $\mathfrak{P}(V)$ operiert transitiv auf $\mathfrak{P}_1(V)$ genau dann, wenn sie transitiv auf $\mathfrak{P}_{n-1}(V)$ operiert.*

Beweis. Siehe [De], 1.4.14, S. 32. □

1.9. Literaturhinweise. Zu 1.2, 1.3 und 1.5 (i), (ii) siehe auch [St], Lemmata 6.1–6.4.

Kapitel 2

Klassische Gruppen und Polaritäten

In diesem Kapitel definieren wir insbesondere die Gruppen, die im Zentrum unserer Betrachtungen stehen werden, also die symplektischen und unitären Gruppen, führen einige ihrer Eigenschaften an und stellen mittels der Polaritäten eine Beziehung zur projektiven Geometrie der zugrunde liegenden Vektorräume her. Dabei werden wir zu den zumeist wohl bekannten Aussagen aus 2.2 bis 2.4 keine Beweise geben – der interessierte Leser sei hierzu beispielsweise auf [Ta], Kapitel 7, 8, 10, [KL], Kapitel 2, [Hup], §§ II.9 und II.10 oder auch [As], Kapitel 7 verwiesen. Darüber hinaus ist die klassischen Gruppen betreffend [Di] ein „Klassiker“, [Gr] ist ein sehr neues Lehrbuch, und [O'M] behandelt ausschließlich symplektische Gruppen.

2.1 Transvektionen in linearen Gruppen

Voraussetzungen für Abschnitt 2.1. Es sei V ein Vektorraum der Dimension $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ über dem Körper K.

2.1.1. Definition. Ein Element $\tau \in \mathrm{GL}(V, K)$ ist eine *Transvektion*, falls entweder $\tau = \mathrm{id}_V$ ist oder falls gilt $\mathrm{C}_V(\tau) \in \mathfrak{P}_{n-1}(V)$ und $[V, \tau] \leqslant \mathrm{C}_V(\tau)$. Der Kommutatorraum $[V, \tau]$ heißt dann *Zentrum* von τ und der Fixraum $\mathrm{C}_V(\tau)$ *Achse* von τ.

2.1.2. Lemma. *Ein Element* $\mathrm{id}_V \neq \tau \in \mathrm{GL}(V, K)$ *ist eine Transvektion genau dann, wenn* $[V, \tau] \in \mathfrak{P}_1(V)$ *gilt und* τ *die Determinante* 1 *hat.*

Beweis. Es sei $\mathrm{id}_V \neq \tau \in \mathrm{GL}(V, K)$ eine Transvektion. Betrachte $\tau - \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$. Wegen $\mathrm{C}_V(\tau) = \mathrm{Kern}(\tau - \mathrm{id}_V)$ hat dann $[V, \tau] = \mathrm{Im}(\tau - \mathrm{id}_V)$ die Dimension 1. Ferner operiert τ auf $\mathrm{C}_V(\tau)$ und $V/\mathrm{C}_V(\tau)$ trivial, folglich hat τ die Determinante 1.

Sei nun $\tau \in \mathrm{GL}(V, K)$ mit $[V, \tau] \in \mathfrak{P}_1(V)$ und $\det \tau = 1$. Wegen $[V, \tau] = \mathrm{Im}(\tau - \mathrm{id}_V)$ hat dann $\mathrm{C}_V(\tau) = \mathrm{Kern}(\tau - \mathrm{id}_V)$ die Dimension $n - 1$. Da die