Kapitel 1

Einführung

Ein Großteil naturwissenschaftlicher und technischer Prozesse wird mithilfe von partiellen Differentialgleichungen (PDGLn) beschrieben. Da für PDGLn i.Allg. keine Verfahren zur analytischen Lösung bekannt sind, setzt man numerische Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen mittels eines Digitalrechners ein. Sowohl die weiter ansteigende Rechenleistung der Digitalrechner, als auch neue, effizientere Algorithmen erschließen weitere Anwendungsgebiete dieses wachsenden Teilbereichs der Mathematik. Die numerischen Verfahren sollten dabei die wesentlichen Eigenschaften des ursprünglichen Systems auf das digitale System übertragen, insbesondere die Stabilität, die Lokalität und die Passivität. Die Übertragung dieser Eigenschaften leisten die von Fettweis entwickelten Wellendigitalfilter (WDF), die ursprünglich zur digitalen Nachbildung analoger Filter dienten [Fett70], [Fett86]. Es hat sich gezeigt, dass diese Filter hervorragende Stabilitätseigenschaften auch unter realen Bedingungen (endliche Wortlänge) besitzen. Diese günstigen Eigenschaften übertragen sich auch auf die mehrdimensionalen Wellendigitalfilter. Die mehrdimensionalen Wellendigitalfilter sind digitale Nachbildungen analoger(auch nichtlinearer) mehrdimensionaler Kirchhoffscher Schaltungen und wurden erstmals in [Fisc84] zur numerischen Integration von Differentialgleichungen vorgeschlagen. Bekanntermaßen kann eine mehrdimensionale Kirchhoffsche Schaltung äquivalent durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Somit lässt sich die Wellendigitalmethode, welche in dieser Arbeit ausschließlich verwendet wird, zur numerischen Integration von partiellen Differentialgleichungen nutzen, [FN90a], [FN90b], [FN91a], [FN91b], [Nits93], [Heme95], [Feld95], [Frie95], [Krau97], [Pott98]. Mittlerweile existiert eine Vielzahl weiterer Arbeiten, die über die erfolgreiche Anwendung des Verfahrens berichten. Eine zusammenfassende Darstellung in englischer Sprache findet sich in [Bilb01] und [Bilb04]. Die praktische Anwendbarkeit der Wellendigitalmethode erfordert aber die effiziente Erzeugung eines Codes zur Simulation des Wellendigitalfilters. Der Ausgangspunkt der Erzeugung eines Codes sollte das Ausgangsproblem selber sein, also die zu lösende PDGL. In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur automatischen Codeerzeugung vorgestellt, welches auf PDGLn anwendbar ist, die lineare, zeitinvariante, symmetrisch hyperbolische Systeme beschreiben.

Eine automatische Codeerzeugung hat nicht nur den Vorteil geringeren Herstellungsaufwands, sondern liefert auch -geeignete Implementierung vorausgesetzt- eine höhere Qualität der erzeugten Software, da der Anteil der manuellen Software-Herstellung reduziert wird. Es eröffnet sich zudem die Möglichkeit des Einsatzes der Algorithmen in sicherheitskritischen Bereichen. Wie oben bereits angedeutet, sind für eine derartige Anwendung auch strengere Qualitätsansprüche an die Implementierung zu stellen. Um diesen nachzukommen, verwenden wir die so genannten formalen Methoden der Softwaretechnik zur Verifikation der entwickelten Codes gegenüber der Spezifikation. Die Theorie der Programmverifikation wurde durch McCarthy angeregt, [McCa62], [McCa63]. Seine Intention war es, die gewünschten Eigenschaften von Programmen mittels mathematischer Methoden nachzuweisen, anstatt die Programme durch Testläufe auf Fehlerlosigkeit zu prüfen. Floyd nahm die Idee auf und schlug ein Verfahren vor mit dem ein gegebenes Software-System analysiert werden konnte, [Floy67]. Dieses Konzept wurden in

[Dijk68] erweitert und zur Synthese beweisbarer korrekter Programme genutzt. In den weiteren Jahren folgten Arbeiten, die im Wesentlichen auf den zuvor genannten Artikeln aufbauen. Hervorzuheben hieraus ist [Hoar69], in der eine Programmanweisung bzw. eine zusammengesetzte Anweisung als Transformation von Prädikaten aufgefasst wird. Weiterhin sind dort die wichtigsten Semantikregeln zu finden. Auf dieser Basis wird auch der in dieser Arbeit angegebene Beweis geführt.

Die wesentlichen Ziele dieser Arbeit sind zum einen die Entwicklung eines Verfahrens zur Synthese einer Referenzschaltung und anschließender Umsetzung in ein mehrdimensionales Wellendigitalfilter, welches die formale Spezifikation der Software festgelegt. Zum anderen wird ein Code angegeben, der das mehrdimensionale Wellendigitalfilter simuliert und mittels eines formalen Korrektheitsbeweises gegenüber der Spezifikation verifiziert. Der Code soll dabei so beschaffen sein, dass er sich in das -für Steuerungs- und Regelungsfunktionen mit sicherheitsrelevanter Bedeutung in Kernkraftwerken entwickelte- digitale Leitsystem TELEPERM XS einbinden lässt.

Intention des Kapitels 2 ist es, die notwendigen Grundlagen der Theorie mehrdimensionaler Wellendigitalfilter zu rekapitulieren und zwar in einer auf unsere Aufgabenstellung angepassten Form.

Anschließend erfolgt im Kapitel 3 eine Einarbeitung in das Programmpaket SPACE und zwar einerseits aus Sicht des Benutzers (i.d.R. der Leittechniker) und andererseits aus Sicht des Entwicklers. Nach Analyse und Darstellung der erarbeiteten Erkenntnisse wird die Möglichkeit der Einbindung der Wellendigitalfilter in das Programmpaket SPACE untersucht. Dabei auftretende Probleme und deren Lösung werden aufgezeigt.

Kapitel 4 bildet den ersten Hauptteil dieser Arbeit. Dort werden wir zunächst die Klasse der in dieser Arbeit behandelten Systeme einschränken und daraus Eigenschaften der PDGLn ableiten. Im Anschluss daran werden wir das neu entwickelte Syntheseverfahren zur Gewinnung einer mehrdimensional passiven Referenzschaltung vorstellen. Ferner werden wir zu der systematisch gewonnenen Referenzschaltung ein mehrdimensionales Wellendigitalfilter angegeben und deren Berechenbarkeit aufzeigen.

In Kapitel 5 werden die aus der Literatur bekannten Grundlagen zur Anwendung formaler Methoden in der Softwaretechnik behandelt. Dabei werden wir uns auf die Inhalte beschränken, die für den weiteren Verlauf der Arbeit relevant sind. Zudem werden in diesem Kapitel die für den Algorithmus notwendigen Programmanweisungen axiomatisch definiert.

Kapitel 6 beinhaltet den zweiten Hauptteil dieser Arbeit. In diesem Kapitel werden wir den Übergang zur formalen Spezifikation des Algorithmus durchführen. Zudem wird die Implementierung des Algorithmus in der Programmiersprache C unter ausschließlicher Verwendung der axiomatisch definierten Programmanweisungen durchgeführt. Weiterhin führen wir den formalen Korrektheitsbeweis in diesem Kapitel. In formalen Korrektheitsbeweisen für Algorithmen der Signalverarbeitung kommt der Verhinderung eines Überlaufs des Darstellungsbereiches eine besondere Bedeutung zu, die ebenfalls in diesem Kapitel Berücksichtigung findet.

Die Ergebnisse der Kapitel 4 und 6 werden mit eigenen Zusammenfassungen gewürdigt. Die Zusammenfassung der gesamten Arbeit befindet sich im Kapitel 7.

Kapitel 2

Mehrdimensionale Wellendigitalfilter

In diesem Kapitel werden wir die für das Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen der Theorie mehrdimensionaler Wellendigitalfilter zusammenfassen. Die Zusammenfassung der Grundlagen beginnt mit der Einführung von unabhängigen und abhängigen Variablen, wobei die unabhängigen Variablen danach einer Koordinatentransformation unterworfen und diskretisiert werden. Anschließend werden die Form des Berechnungsgebietes, also der Bereich der unabhängigen Variablen für die die Lösung der PDGL erfolgen soll, festgelegt. In diesem Zusammenhang wird zudem die Lage der Abtastpunkte diskutiert.

Nachdem in den ersten Unterkapiteln die unabhängigen Variablen im Vordergrund standen, widmet sich der weitere Teil den abhängigen Variablen. Diese abhängigen Variablen einer PDGL werden als Spannungen und Ströme von Toren eines Kirchhoff'schen Netzes interpretiert. Ähnlich den unabhängigen Variablen erfolgt bei den abhängigen Variablen eine Koordinatentransformation. Diese Transformation vollzieht sich in der Form, dass anstelle von Spannung und Strom Wellengrößen genutzt werden. Von zentraler Bedeutung für Stabilitätsfragen Kirchhoff'scher Netze sind die energetischen Eigenschaften ihrer Bauelemente. Aufbauend auf der torweisen Betrachtung der Bauelemente, werden aus Energiebetrachtungen heraus Eigenschaften wie MD-Passivität und MD-Energieneutralität erläutert. Gemäß diesen Eigenschaften werden dann typische Bauelemente der Theorie elektrischer Netze, die in dieser Arbeit Verwendung finden, eingeführt, qualifiziert und in MDWDF-Bauelemente überführt. Auf den Nachweis der Übertragung der Eigenschaften der elektrischen Bauelemente auf die WD-Elemente verzichten wir und verweisen auf die existierende Literatur, [Meer79], [MF92], [Fett92].

Weiterhin wird von den bekannten Verfahren zur Randwertbehandlung eines, welches sich besonders gut in die Zielsetzung dieser Arbeit einpasst und auch später Verwendung findet, ausführlich erläutert und kompakt beschrieben.

Ergänzend wird für die torweise Verschaltung der einzelnen WD-Elemente eine übersichtliche Darstellung, in Form eines Differenzen-Gleichungssystems, angegeben und mit dessen Hilfe die Berechnungsreihenfolge der einzelnen Wellengrößen systematisch bestimmt.

Zum Abschluss wird eine Transformation der unabhängigen Variablen dargelegt, die es ermöglicht, die endliche Anzahl örtlicher Abtastpunkte auf eine natürliche Zahl eineindeutig abzubilden. Dieses Konzept wird später bei der Einbindung der MDWDF in das Programmpaket SPACE angewendet.

Um eine einfachere Recherche zu ermöglichen, findet man die Quellenangaben in den einzelnen Unterkapiteln.

2.1 Abhängige und unabhängige Variablen

Die Variablen eines Differentialgleichungssystems unterscheiden wir nach abhängigen und unabhängigen Größen. Die unabhängigen Größen sind die Ortsvariablen und die Zeit. Die abhängigen Größen werden wir als die Feldgrößen bezeichnen. Beispiele hierfür sind Druck oder Temperatur. Die Feldgrößen sind proportional zu einer Zweigspannung oder einem Zweigstrom der Referenzschaltung. Wir fassen die unabhängigen Variablen in dem Vektor

$$\boldsymbol{x} = [x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_{k-1}\ ,\ v_k t]^{\mathrm{T}} \quad , \quad v_k > 0\ , \tag{2.1}$$

zusammen. Hierin ist t die physikalische Zeit und die restlichen Variablen sind beispielsweise physikalische Ortskoordinaten. Die mit der Einheit einer Geschwindigkeit behaftete Größe v_k kann eine Funktion der Zeit sein, wird aber in dieser Arbeit als konstant vorausgesetzt. Somit sind die Einheiten aller Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{x}$ gleich. Mit $\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}$ bezeichnen wir den Vektor, der die partiellen Ableitungen bzgl. x_κ enthält, d. h.

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_k}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial}{\partial x_{k-1}}\ ,\ \frac{1}{v_k}\frac{\partial}{\partial t}\right]^{\mathrm{T}}\ . \tag{2.2}$$

Weiterhin definieren wir einen Vektor, der als Koordinaten die komplexen Frequenzen enthält

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{x}} = [p_{x_1}\ ,\ \ldots\ ,\ p_{x_k}]^{\mathrm{T}} \quad , \quad p_{x_k} = p_t / v_k . \tag{2.3}$$

2.2 Koordinatentransformation

Die in der Theorie der mehrdimensionalen Wellendigitalfilter oft verwendete Koordinatentransformation werden wir zunächst durch Überlegungen zur Passivität[1] stützen. Die wesentlichen Quellen sind [FN91b] und [Nits93]. Im eindimensionalen Fall bezieht sich die Passivität nur auf die Zeit als unabhängige Variable. In der klassischen Literatur zu mehrdimensionalen elektrischen Schaltungen und in der mehrdimensionalen Signalverarbeitung werden alle unabhängigen Variablen als untereinander gleichberechtigt aufgefasst [Koga69], [Rao69], [Bose79], [Fett79], [Huan81], [Bose82], [FB87], [BF87], [Kumm88]. Die Passivität muss bezüglich aller unabhängigen Variablen gewährleistet sein. Diese Passivität wird auch als mehrdimensionale Passivität bezeichnet. Die durch Energiebetrachtungen abgeleitete Definition der Passivität physikalischer Systeme bezieht sich hingegen nur auf die Zeit. Die Ortskoordinaten finden hierbei keine Berücksichtigung. Insofern ist zu erwarten, dass eine mehrdimensionale elektrische Schaltung, die aus einer partiellen Differentialgleichung eines passiven Systems direkt hergeleitet wurde, i.Allg. nicht mehrdimensional passiv ist.

Nichtsdestotrotz ist es wünschenswert, eine mehrdimensional passive elektrische Schaltung aus der partiellen Differentialgleichung eines passiven Systems anzugeben. Dies hat den Vorteil, dass die Erkenntnisse der mehrdimensionalen elektrischen Schaltungen und der mehrdimensionalen Signalverarbeitung genutzt werden können. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir eine Transformation der unabhängigen Variablen durch.

Im engen Zusammenhang mit der Passivität steht die Kausalität. Im eindimensionalen Fall ist die Kausalität so definiert, dass der aktuelle Zustand nur von Zuständen zurückliegender Zeitpunkte und vom Eingangssignal des aktuellen Zeitpunktes und zurückliegender Zeitpunkte abhängt.

In der mehrdimensionalen Signalverarbeitung wird ebenfalls eine Ablaufrichtung festgelegt. Diese Ablaufrichtung teilt das Gebiet der unabhängigen Variablen in einen Abhängigkeitsbereich (Ursachenbereich), einen Wirkungsbereich und einen Bereich, der zu keinem der beiden gehört. Bei einer bestimmten Ablaufrichtung könnte beispielsweise der Zustand im Punkt $\boldsymbol{t}_0$ nur von Zuständen und Eingangssignalen des Abhängigkeitsbereiches $\boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{t}_0$ abhängen. Der Zustand im Punkt $\boldsymbol{t}_0$ hingegen beeinflusst nur Zustände im Wirkungsbereich $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{t}_0$.

[1] Die Passivitätsbegriffe werden im Kapitel 2.7 genau definiert.