



Olaf Weckner (Autor)

**Gegenüberstellung von natürlicher Dispersion und  
durch räumliche Diskretisierung induzierter  
Dispersion bei der Untersuchung von Schwingungen  
und Wellenausbreitung in ausgewählten  
strukturmechanischen Systemen**

Gegenüberstellung von natürlicher Dispersion und  
durch räumliche Diskretisierung induzierter Dispersion  
bei der Untersuchung von Schwingungen und  
Wellenausbreitung in ausgewählten  
strukturmechanischen Systemen

Von der  
Fakultät V für Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaft (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:  
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. HEINZ MERTENS  
Berichter: Prof. Dr.-Ing. GERD BRUNK, Prof. Dr.-Ing. GEORG-PETER OSTERMEYER

Dipl.-Ing. OLAF WECKNER  
geboren am 9. November 1975 in Göttingen

Berlin, Februar 2004

D 83

<https://cuvillier.de/de/shop/publications/2905>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,  
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Prolog</b>	<b>5</b>
1.1	Einleitung . . . . .	5
1.2	Übersicht . . . . .	13
1.3	Nomenklatur . . . . .	14
1.4	Symbolverzeichnis . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Kontinua ohne natürliche Dispersion</b>	<b>16</b>
2.1	Physikalische Beispiele der Wellengleichung . . . . .	17
2.1.1	Stabschwingungen (Skalarwertige 1D-Wellengleichung) . . . . .	17
2.1.2	Membranschwingungen (Skalarwertige 2D-Wellengleichung) . . . . .	20
2.1.3	Schallschwingungen (Skalarwertige 3D-Wellengleichung) . . . . .	21
2.1.4	Elektrodynamische Schwingungen (Vektorwertige 3D-Wellengleichung) . . . . .	21
2.2	Die eindimensionale Wellengleichung . . . . .	22
2.2.1	Analytische Lösungsmethoden . . . . .	22
2.2.1.1	Analytische Lösung nach D’ALEMBERT . . . . .	22
2.2.1.2	Analytische Lösung nach BERNOULLI . . . . .	23
2.2.2	Numerische Lösungsmethoden . . . . .	26
2.2.2.1	Die Methode der Finiten Differenzen (FDM) . . . . .	27
2.2.2.2	Die Methode der Finiten Elemente (FEM) . . . . .	29
2.2.2.3	Die Modellierung mit Mehr-Körper-Systemen (MKS) . . . . .	33
2.2.3	Vergleich der Diskretisierungen . . . . .	42
2.2.3.1	Wellenausbreitung . . . . .	44
2.2.3.2	Eigenfrequenzen und Eigenformen . . . . .	58
2.3	Die zwei- und dreidimensionale Wellengleichung . . . . .	71
2.3.1	Diskretisierung der zweidimensionalen, skalarwertigen Wellengleichung	71
2.3.2	Diskretisierung der dreidimensionalen, skalarwertigen Wellengleichung	77
2.4	Die NAVIER-LAMÉ-Gleichungen . . . . .	80
2.4.1	Diskretisierung . . . . .	81
2.4.2	Dispersionsrelation . . . . .	82

<b>3</b>	<b>Kontinua mit natürlicher Dispersion</b>	<b>86</b>
3.1	Peridynamisches Modell des Stabes . . . . .	86
3.1.1	Die Grundgleichungen des peridynamischen Stabes . . . . .	88
3.1.1.1	Homogene Lösung . . . . .	89
3.1.1.2	Partikuläre Lösung . . . . .	91
3.1.1.3	Gesamtlösung . . . . .	92
3.1.2	Dispersionsrelationen . . . . .	92
3.1.2.1	Dispersionsrelation des lokal elastischen Stabes (Klassische Elastizitätstheorie) . . . . .	92
3.1.2.2	Dispersionsrelation des nicht-lokal elastischen Stabes (Peridynamik) . . . . .	93
3.1.3	Beispiele zur homogenen peridynamischen Lösung . . . . .	104
3.1.3.1	Beispiel 1: Stetige Anfangsbedingungen . . . . .	104
3.1.3.2	Beispiel 2: Unstetige Anfangsbedingungen (RIEMANN-Problem) . . . . .	106
3.1.4	MKS-Interpretation des diskretisierten peridynamischen Stabes . . . . .	112
3.1.5	Einfluß der numerischen Dispersion in der Peridynamik . . . . .	114
3.2	Ebene Biegeschwingungen gerader Balken . . . . .	116
3.2.1	Numerische Lösungsmethoden . . . . .	118
3.2.1.1	Das MKS-Balkenelement . . . . .	118
3.2.1.2	Das FDM-Balkenelement . . . . .	121
3.2.1.3	Das FEM-Balkenelement . . . . .	122
3.2.2	Vergleich der Diskretisierungen . . . . .	126
3.3	Plattenschwingungen . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>142</b>
	<b>Anhang</b>	<b>144</b>
<b>A</b>	<b>Parameterfestlegung des MKS-Modelles des Kreisrings</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>Wellengleichung</b>	<b>148</b>
<b>C</b>	<b>Lineare Materialgleichungen der Elastizitätstheorie</b>	<b>151</b>
<b>D</b>	<b>Navier-Lamé-Gleichungen</b>	<b>152</b>
<b>E</b>	<b>Der eben bewegte gerade Bernoulli-Balken</b>	<b>155</b>
<b>F</b>	<b>Differenzengleichung / dynamische Steifigkeitsmatrix des Biegebalkens</b>	<b>159</b>
<b>G</b>	<b>Integraltransformationen</b>	<b>161</b>
G.1	FOURIER-Transformation . . . . .	161
G.2	Laplacetransformation . . . . .	162

G.3 Z-Transformation . . . . .	163
<b>H Taylor-Reihen</b>	<b>165</b>
<b>I Sprungbedingungen</b>	<b>166</b>
<b>J Variationsrechnung</b>	<b>169</b>
J.1 Variationsprobleme zweiter Ordnung . . . . .	169
J.2 Variationsprobleme höherer Ordnung . . . . .	173
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>174</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>179</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>181</b>