



Olaf Weckner (Autor)

**Gegenüberstellung von natürlicher Dispersion und
durch räumliche Diskretisierung induzierter
Dispersion bei der Untersuchung von Schwingungen
und Wellenausbreitung in ausgewählten
strukturmechanischen Systemen**

Gegenüberstellung von natürlicher Dispersion und
durch räumliche Diskretisierung induzierter Dispersion
bei der Untersuchung von Schwingungen und
Wellenausbreitung in ausgewählten
strukturmechanischen Systemen

Von der
Fakultät V für Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaft (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:
Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. HEINZ MERTENS
Berichter: Prof. Dr.-Ing. GERD BRUNK, Prof. Dr.-Ing. GEORG-PETER OSTERMEYER

Dipl.-Ing. OLAF WECKNER
geboren am 9. November 1975 in Göttingen

Berlin, Februar 2004

D 83

<https://cuvillier.de/de/shop/publications/2905>

Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

Kapitel 1

Prolog

1.1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit unterschiedlichen Erscheinungen von Dispersion. Unter Dispersion versteht man nach [32] die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle, der Phasengeschwindigkeit, von der Frequenz in einem Kontinuum. Dabei gibt es eine wichtige Klasse von Systemen, bei denen die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz ist. Beispielsweise sind hier diejenigen Systeme zu nennen, die sich durch die Wellengleichung beschreiben lassen. Der Mehrzahl der physikalischen Systeme ist jedoch dispersiv, wobei die physikalischen Ursachen dafür verschieden sind. Oft ist eine räumliche Begrenzung des Systems für die Dispersion verantwortlich, wie z. B. bei elektromagnetischen Wellen in Hohlleitern. Es gibt aber auch zahlreiche andere Ursachen für Dispersion, wie z. B. die Berücksichtigung von Reibungserscheinungen oder von nicht-lokalen Effekten.

Bei der Berechnung kontinuierlicher Systeme sind i. a. komplizierte Systeme partieller Differentialgleichungen zu lösen, deren Lösungen bestimmten Rand- und Anfangsbedingungen genügen müssen. Dabei existieren i. a. keine geschlossenen analytischen Lösungen, oder ihre Bestimmung ist sehr aufwendig. Es wurden zahlreiche numerische Methoden entwickelt, um Näherungslösungen für solche Probleme zu bestimmen. Beispielsweise sind hier die Finite-Differenzen-Methode (FDM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM) zu nennen. Gemeinsam ist diesen numerischen Verfahren, daß sie die Lösung des kontinuierlichen Problems auf die Lösung eines diskontinuierlichen Problems zurückführen. Es findet also eine Diskretisierung statt, d. h. eine Projektion eines Systems mit unendlich vielen Unbekannten auf ein System mit endlich vielen Unbekannten mit Hilfe einer bestimmten Abbildungsvorschrift.¹ Die zur Diskretisierung benutzte Abbildung muß so beschaffen sein, daß sie im Grenzfall unendlich vieler Unbekannter (Freiheitsgrade) die exakte analytische

¹Es stellt sich dabei die interessante Frage, ob diese durch Projektion erzeugten, diskreten Systeme auch als *reale* physikalische Systeme gedeutet und z. B. als Mehr-Körper-System (MKS) oder als elektrisches Netzwerk *materialisiert* werden können. Sowohl das Konzept des Kontinuums als auch des Diskontinuums ist als *Modell* eines realen physikalischen System zu verstehen. Beide Modelle sind innerhalb eines bestimmten Betriebsbereichs (z. B. bezüglich der auftretenden Frequenzen oder Wellenlängen) in der Lage, das reale System hinreichend genau abzubilden.

Lösung liefert (Konvergenz). Bei einer konkreten Rechnung können aber immer nur endlich viele Gleichungen betrachtet werden, so daß ein systematischer Abschneidefehler auftritt, der unabhängig von Rundungsfehlern vorhanden ist. Die Situation ist vergleichbar mit einer experimentellen Untersuchung: Neben den Ablesefehlern, die den Rundungsfehlern entsprechen, gibt es auch hier systematische Fehler, die durch die Art der eingesetzten Meßgeräte und -verfahren bedingt sind. In der Dynamik kontinuierlicher Systeme wirkt sich dieser systematische Diskretisierungsfehler u. a. auf die Wellenausbreitung aus.² Dabei wird ein ursprünglich nicht-dispersives Kontinuum durch die Diskretisierung dispersiv. Diese durch Diskretisierung induzierte, künstliche Dispersion wird in dieser Arbeit als „numerische Dispersion“ bezeichnet.³ Bei natürlich dispersiven Kontinua findet eine Überlagerung von natürlicher und numerischer Dispersion statt. Darüber hinaus werden mehrdimensionale, *isotrope* Kontinua durch die Diskretisierung *anisotrop*.

In dieser Arbeit wird anhand ausgewählter strukturmechanischer Systeme untersucht, welchen Einfluß unterschiedliche Diskretisierungsmethoden auf die Wellenausbreitung einerseits und auf die modalen Größen andererseits haben. Ziel der Arbeit ist es, die „numerische Dispersion“ analytisch zu berechnen und so genauer zu verstehen. Zum einen gelingt es dadurch, bestimmte Erscheinungen numerischer Simulationen besser beurteilen zu können. Zum anderen können konkrete Handlungsanweisungen für die Wahl des verwendeten numerischen Verfahrens und der Elementzahl der Diskretisierung abgeleitet werden, um so bei vorgegebener Genauigkeit möglichst effizient rechnen zu können.

Eine wichtige Motivation zur Beschäftigung mit dem Thema der numerischen Dispersion waren eine Reihe offen gebliebener Fragen meiner Diplomarbeit [37]. Darin wurden die „antimetrischen bzw. asymmetrischen Eigenschwingungszustände eines MKS-Modelles eines Kreisrings bei verschiedenen Lagerungen“ untersucht. Die auf numerischem Wege gefundenen Frequenzspektren wiesen dabei unabhängig von den untersuchten Randbedingungen eine Verdichtung der Frequenzlinien direkt unterhalb der höchsten Eigenfrequenz des Modelles auf. Auch die Eigenformen, die zu diesen höchsten Schwingungsmoden gehören, waren auffällig. Sie erinnerten in ihrem Aussehen an Interferenzmuster, wie sie u. a. bei Schwebungen beobachtet werden können. Beide Erscheinungen werden im folgenden kurz illustriert. Eine Erklärung dieser Phänomene wird im Rahmen dieser Arbeit gegeben.

²Die Störung der Dispersionsbeziehung wirkt sich auch auf die Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen aus, die als „stehende Wellen“ aufgefaßt werden können.

³In der englischsprachigen Literatur findet man auch die Bezeichnung *grid dispersion*.

Ein MKS-Modell des Kreisrings

In der Diplomarbeit [37] wurde der längshomogene Kreisring mit vernachlässigbarer radialer Ausdehnung durch das in Abbildung 1.1 dargestellte MKS-Modell modelliert.

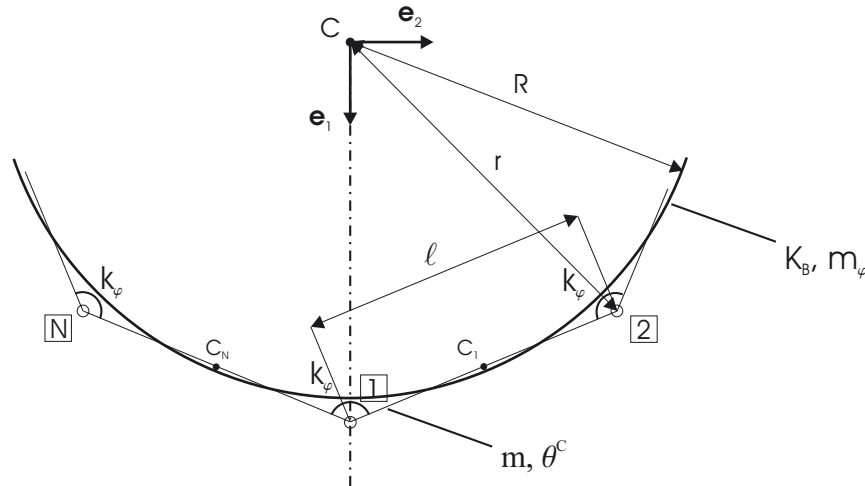


Abb. 1.1: MKS-Modell eines Kreisrings

In der Abbildung bezeichnet R den Radius, $m_\varphi := dm/d\varphi$ den Massenbelag und K_B die Biegesteifigkeit des Kreisringkontinuums. Das Modell besteht aus zwei wesentlichen Elementen: Die N starren, homogenen, massebehafteten Stäbe (Länge $l = 2r \sin(\pi/N)$, Masse m , Massenträgheitsmoment bezüglich des Stab-Massenmittelpunkts θ^C) sind gelenkig miteinander in Form eines regelmäßigen N -Ecks verbunden. Sie sind Träger der kinetischen Energie. In den Gelenkpunkten verbinden Drehfedern der Steifigkeit k_φ zwei angrenzende Stäbe. Diese idealen, d. h. masselosen und linear-elastischen Federn repräsentieren die potentielle (hier: rein elastische) Energie des Kontinuums. Das System sei reibungsfrei und auch frei von äußeren Feldern oder Kräften angenommen. Es werden also die Eigenschwingungen des Systems untersucht. Im Rahmen der Modellierung werden die Kenngrößen des Diskontinuums in Abhängigkeit von der Stabzahl N an die Kenngrößen des Kontinuums angepaßt:

$$\begin{aligned} l &= R \sqrt{\frac{12}{1 + 3 \cot^2(\pi/N)}}, \\ m &= 2\pi m_\varphi / N, \\ k_\varphi &= NK_B / 2\pi R. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei erfolgt die Festlegung der Stabmasse und der Stablänge aus der Forderung, daß die Momente des Kreisringkontinuums ($\mathbf{M}_i^C|_{KR}$) bis zur zweiten Stufe gleich den Momenten des MKS-Modelles ($\mathbf{M}_i^C|_{MKS}$) seien sollen, wobei als Bezugspunkt der gemeinsame

Massenmittelpunkt gewählt wird, der mit dem (geometrischen) Kreismittelpunkt C übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^C|_{KR} &\stackrel{!}{=} \mathbf{M}_i^C|_{MKS}, \quad i = 0, 1, 2 \text{ mit} \\ \mathbf{M}_i^A[\rho] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)^i dV. \end{aligned} \quad (1.2)$$

In (1.2) bezeichnet \mathbf{x} den Ortsvektor zum Konvergenzpunkt des Massenelements $dm = \rho dV$, $\rho(\mathbf{x})$ ist die Massendichte und \mathbf{x}_A den Bezugspunkt der Momente. Eine Auswertung dieser Forderungen findet sich im Anhang A.

Zunächst soll die Konvergenz des Modelles für den Fall des freien Kreisrings gezeigt werden, da in diesem Fall exakte analytische Lösungen des Kontinuums existieren, siehe [24]. In der Tabelle 1.1 sind die Ergebnisse für die niedrigsten, normierten Deformationseigenfrequenzen bei einer Modellierung mit $N = 255$ Stäben den analytischen Werten gegenübergestellt.

Modus	Numerisch	Analytisch
i	$\eta_{i,n}$	$\eta_{i,a} = \sqrt{\frac{i^2(1+i)^2(2+i)^2}{2+i(2+i)}}$
1	2,68304	2,68328
2	7,58877	7,58947
3	14,5507	14,5521
4	23,5316	23,5339
5	34,5204	34,5238
6	47,5128	47,5176

Tabelle 1.1: Eigenfrequenzen des freien Kreisrings

Die Normierung der Frequenzen erfolgte bei dieser Rechnung mit der charakteristischen Frequenz $\omega_c^2 = \frac{K_B}{m_\varphi R^3}$, so daß $\eta = \omega/\omega_c$. Es wird deutlich, daß diese niedrigsten sechs Deformationseigenfrequenzen sehr gut durch das Modell wiedergegeben werden. Anhand der angegebenen analytischen Lösungen erkennt man weiter, daß für hohe Moden die Eigenfrequenzen näherungsweise proportional zum Quadrat des Modus i sind.⁴

⁴Das gleiche Verhalten findet man auch bei den Biegeeigenfrequenzen des streng geraden, längshomogenen, schubstarrten Balkens, unabhängig von speziellen Randbedingungen. Der Grund hierfür ist, daß der Einfluß der Randbedingungen sich im wesentlichen in einem Nahfeld zeigt. Dieses Nahfeld wird mit wachsendem Modus immer kleiner und hat für hohe Moden praktisch keine Bedeutung mehr in bezug auf die gesuchten Eigenzustände. Daher kann man annehmen, daß auch bei den untersuchten Biegeschwingungen des Kreisringes die höheren Eigenfrequenzen unabhängig von speziellen Randbedingungen stets proportional zum Quadrat des Modus sind. Hierbei spielt auch die (in beiden Fällen angenommene) Schub- und Längsstarrheit eine Rolle. Denn schon vom geraden Balken ist (z. B. nach [13]) bekannt, daß die Eigenfrequenzen beim Aufheben dieser zusätzlichen inneren Zwangsbedingungen nur noch linear mit dem Modus ansteigen.

Die ebenfalls numerisch gewonnenen, ersten sechs Eigenformen des MKS-Modelles des freien Kreisrings sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

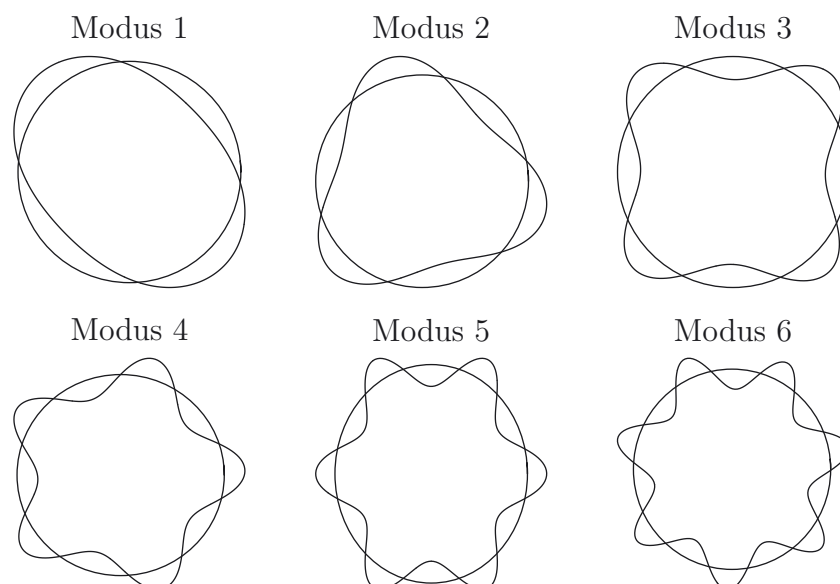


Abb. 1.2: Deformationseigenformen des freien Kreisrings, Modus 1 - 6

Auch diese Eigenformen werden durch das Modell richtig dargestellt, siehe [24].

Im Fall des beliebig gelagerten Kreisrings sind i. a. keine analytischen Lösungen mehr möglich. Als Beispiel für einen nicht freien Kreisring wird der in einem Punkt gelagerte Kreisring (siehe Abbildung 1.3) untersucht.

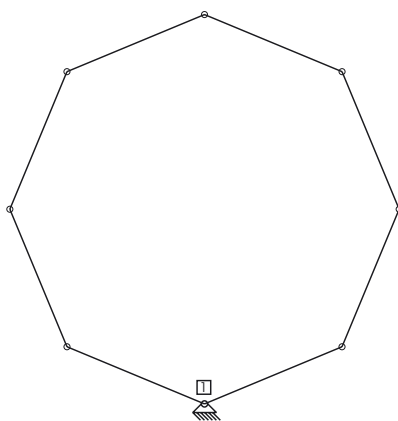


Abb. 1.3: Gelagerter Kreisring, $N = 8$

Bei diesen Randbedingungen kann der Kreisring noch eine Starrkörperbewegung durchführen, die Rotation um das Lager. Daher verschwindet die niedrigste Eigenfrequenz. Die Abbildung 1.4 zeigt (von oben nach unten) die Frequenzspektren für die Stabzahlen $N = 155, 193$ und $N = 255$.

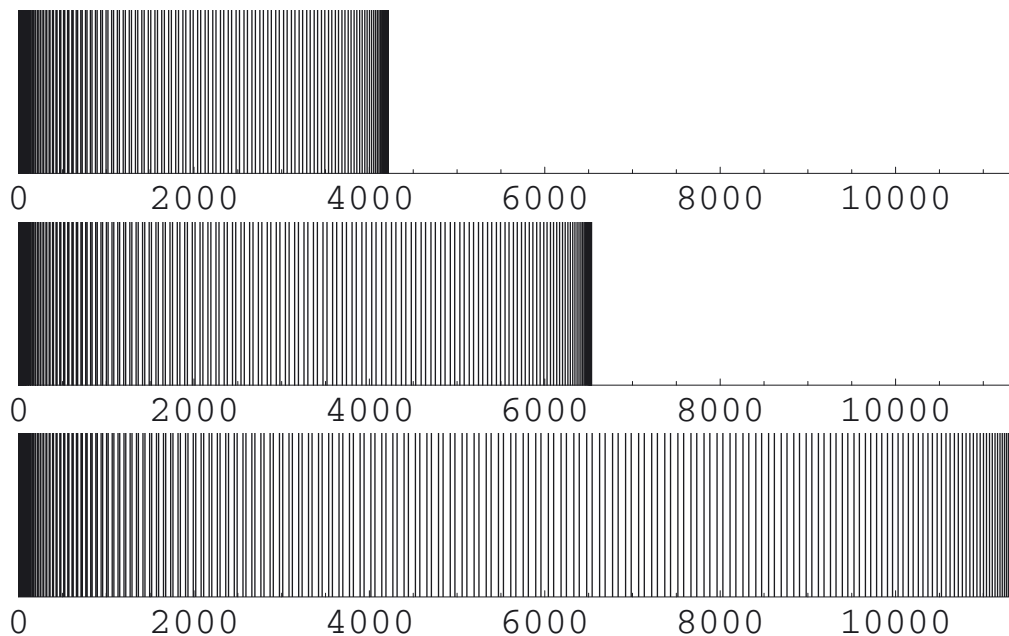


Abb. 1.4: Frequenzspektren des gelagerten Kreisrings

Man erkennt, daß das Modell mit einer wachsender Anzahl an Freiheitsgraden F (hier: $F = N - 2$) natürlich auch mehr und höhere Eigenfrequenzen besitzt. Weiter zeigt sich eine deutliche Verdichtung der Frequenzlinien an den Rändern des Spektrums. Die Verdichtung am linken Rand, d. h. zu kleinen Frequenzen hin, ist für den betrachteten Fall der Biegeschwingungen des Kreisringkontinuums „natürlich“ und entspricht der Beobachtung, daß für hohe Moden eine quadratische Abhängigkeit zwischen Eigenfrequenz und Modus besteht. Für die höchsten Eigenfrequenzen des MKS-Modells ist diese Verdichtung dagegen unnatürlich.