

2 Grundlagen

2.1 Der zweiseitig angetriebene Rechteckbehälter

Das hier untersuchte System besteht aus einem rechteckigen Behälter, der mit einem inkompressiblen Newtonschen Fluid gefüllt ist (Abbildung 2.1). Der Behälter hat dabei die Maße $d \times h \times l$ in x -, y - und z -Richtung. Die gegenüberliegenden Wände bei $x^* = \pm d/2$ bewegen sich tangential zu einander mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}^*(x^* = \mp d/2) = \pm V_{1,2} \mathbf{e}_y$ in y -Richtung. Die anderen Wände sind fest ($\mathbf{u}^* = 0$). Im Grenzfall eines unendlich langen Behälters entfallen die Wände in z -Richtung und es werden periodische Randbedingungen angenommen. Die Geschwindigkeiten \mathbf{u}^* und der Druck p^* der Strömung werden durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \nu \Delta^* \mathbf{u}^* \quad (2.2)$$

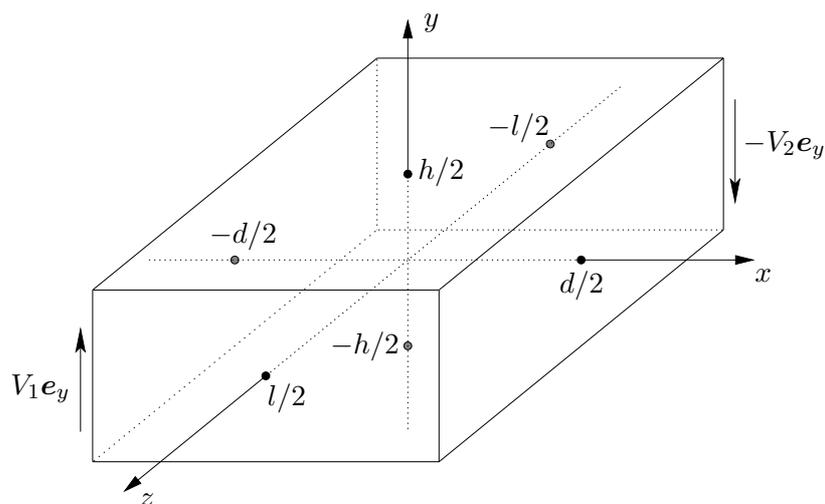


Abbildung 2.1: Geometrie des zweiseitig angetriebenen Rechteckbehälters.

2 GRUNDLAGEN

beschrieben, wobei ρ und ν die Dichte bzw. die kinematische Viskosität des Fluids sind. Durch die Skalierung

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{h}, \quad t = \frac{\nu}{h^2} t^*, \quad \mathbf{u} = \frac{h}{\nu} \mathbf{u}^*, \quad p = \frac{h^2}{\rho \nu^2} p^* \quad (2.3)$$

ergeben sich aus (2.1) und (2.2) die entdimensionalisierten Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u} \quad (2.5)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u}(x = \mp \Gamma/2) = \pm \text{Re}_{1,2} \mathbf{e}_y, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}(y = \pm 1/2) = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}(z = \pm \Lambda/2) = 0 \quad (2.8)$$

für feste Wände in z -Richtung bzw.

$$\mathbf{u}(z = -\Lambda/2) = \mathbf{u}(z = \Lambda/2), \quad p(z = -\Lambda/2) = p(z = \Lambda/2) \quad (2.9)$$

anstatt Gleichung (2.8) für periodische Randbedingungen in z -Richtung. Die resultierenden dimensionslosen Parameter sind die beiden Reynoldszahlen

$$\text{Re}_{1,2} = \pm \frac{V_{1,2} h}{\nu}, \quad (2.10)$$

das Querschnitts-Aspektverhältnis

$$\Gamma = \frac{d}{h} \quad (2.11)$$

und das Span-Aspektverhältnis

$$\Lambda = \frac{l}{h}. \quad (2.12)$$

Aus der Definition folgt, daß sich die Wände für $\text{Re}_1 \cdot \text{Re}_2 > 0$ entgegengesetzt bzw. für $\text{Re}_1 \cdot \text{Re}_2 < 0$ in gleicher Richtung bewegen. Die Gleichungen besitzen eine Invarianz gegenüber Spiegelung $y \rightarrow -y$ und $(\text{Re}_1, \text{Re}_2) \rightarrow (-\text{Re}_1, -\text{Re}_2)$, sowie gegenüber einer Rotation um 180° mit $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ und $(\text{Re}_1, \text{Re}_2) \rightarrow (\text{Re}_2, \text{Re}_1)$. Für periodische Randbedingungen in z -Richtung folgt zudem, daß zweidimensionale stationäre Lösungen existieren.

Im Spezialfall $|\text{Re}_1| = |\text{Re}_2|$ sind die Randbedingungen punktsymmetrisch ($\text{Re}_1 \cdot \text{Re}_2 > 0$) bezüglich des Koordinatenursprungs $\mathbf{x} = 0$ bzw. spiegelsymmetrisch ($\text{Re}_1 \cdot \text{Re}_2 < 0$)

bezüglich der Ebene $x = 0$. Im Fall mit periodischen Randbedingungen sind daher für betragsmäßig kleine Reynoldszahlen zweidimensionale, eindeutige Lösungen zu erwarten, die zudem die Symmetrie der Randbedingungen erfüllen (Leray, 1933). Bei höheren Reynoldszahlen existieren jedoch zweidimensionale, mehrdeutige Lösungen (Kuhlmann *et al.*, 1997). Einige der Lösungen sind zudem symmetriebrechende Lösungen (Albensoeder *et al.*, 2001a).

Im Verlauf der Arbeit werden zur Darstellung und zur Analyse des zweidimensionalen Grundzustandes die Stromfunktion ψ mit $\Delta\psi = -(\omega_0)_z$ benutzt. Die Vortizität ist dabei allgemein gegeben durch $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$.

2.2 Instabilität und Transition

In dieser Arbeit wird die erste Instabilität im zweiseitig angetriebenen Rechteckbehälter untersucht, d.h. der Zerfall der stationären zweidimensionalen Grundströmung bei Veränderung der Parameter Re_1 , Re_2 , Γ und Λ . Die resultierende Strömung ist normalerweise dreidimensional und kann zeitabhängig sein.

Zur Untersuchung der Instabilität werden sogenannte Störungen $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ auf dem Grundzustand (\mathbf{u}_0, p_0) addiert, die eine kinetische Energie $E_D = \int_V \tilde{\mathbf{u}}^2 dV$ besitzen. Das zeitliche Wachstumsverhalten der Störung $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ bzw. der Störungsenergie E_D entscheidet dann, ob die Lösung stabil oder instabil ist¹. In Abbildung 2.2 ist das Wachstumsverhalten der Störungsenergie E_D als Funktion eines Kontrollparameters μ schematisch dargestellt, der in diesem Fall einer Funktion $\mu = f(Re_1, Re_2, \Gamma, \Lambda)$ entspricht. Aus der Betrachtung ergeben sich vier charakteristische Abschnitte, die auf den Weg zur ersten Instabilität in Abhängigkeit des Kontrollparameters μ existieren können.

Für $0 \leq \mu < \mu_E$ ist die Strömung gegenüber allen Störungen $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$, auch mit hoher Energie E_D , stabil. Die Störungen klingen alle monoton und exponentiell mit der Zeit ab. Dies ist identisch mit der Aussage von Leray (1933), nach dem die Strömung für kleine Reynoldszahlen eindeutig sein muß.

Überschreitet μ den Wert der Energiestabilitätsgrenze μ_E , kann die Störungsenergie E_D temporär durch einen Energietransfer aus dem Grundzustand verstärkt werden, ehe sie wieder exponentiell abklingt. Eine Voraussetzung für ein solches transientes Wachstum können z.B. nicht-orthogonale Eigenmoden sein, die stark unterschiedliche Abklingraten

¹Ein weiterer Ansatz zur Untersuchung von Instabilitäten ergibt sich aus der Betrachtung des räumlichen Wachstums einer Störung. Diese Methode kommt bei Strömungen in offenen Gebieten zum Einsatz, bei der keine Resonanz durch geschlossene Stromlinien entstehen kann, da die Stromlinien im allgemeinen offen sind.

2 GRUNDLAGEN

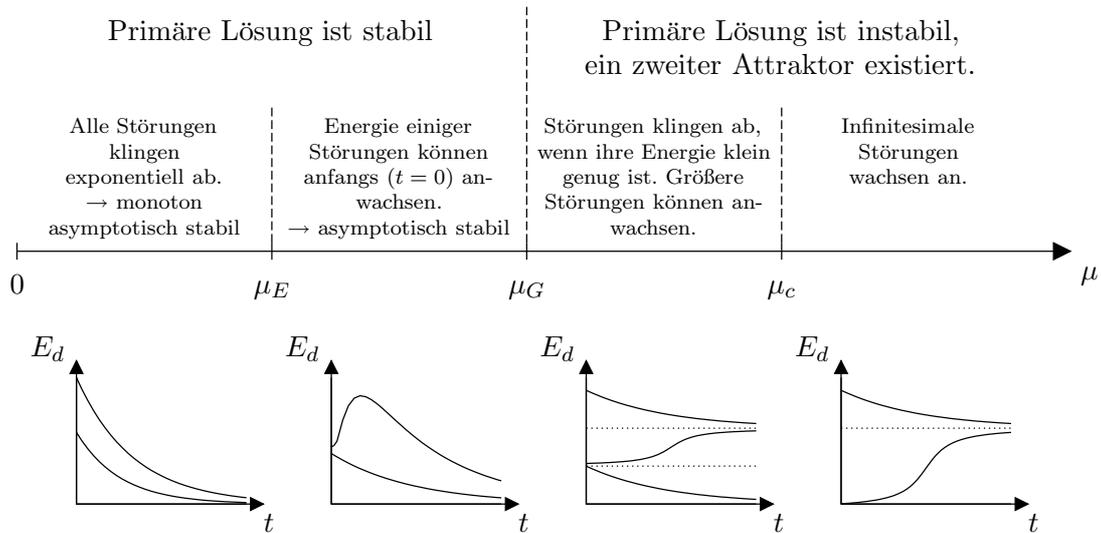


Abbildung 2.2: Stabilitätsszenario einer stationäre Strömung als Funktion eines Kontrollparameters μ (aus Busse, 2003).

haben. Eine weitere Möglichkeit ist, daß die vorher eindeutige Strömung ab μ_m ($\mu_E \leq \mu_m < \mu_G$) mehrdeutig wird, die zusätzlichen Lösungen allerdings alle instabil sind und die Energie der Störung im Limes $t \rightarrow \infty$ vollständig dissipiert wird (Busse, 2003). Die Verstärkung der Störung durch transientes Wachstum kann unter Umständen sehr stark sein, wie bei der ebenen Poiseuille-Strömung (Trefethen *et al.*, 1992, 1993). Hier führen kleine, aber endlich große Störungen durch das transiente Wachstum im Zusammenwirken mit zusätzlichen nicht-trivialen instabilen Lösungen zu einem vorzeitigen Übergang zur Turbulenz.

Die Grenze zur Instabilität liegt bei μ_G , dem globalen Stabilitätslimit. Im Bereich $\mu_G < \mu < \mu_c$ klingen Störungen mit $E_D < E_1$ weiterhin ab. Es existieren jedoch Störungen mit einer finiten Energie, die für $t \rightarrow \infty$ zu einer anderen Lösung konvergieren können. Das heißt, daß weitere stabile Strömungsformen, sogenannte stabile sekundäre Lösungen, existieren. Die sekundären Lösungen müssen aber nicht notwendigerweise stabil sein. Der Fall von instabilen sekundären Lösungen ist jedoch in Abbildung 2.2 nicht dargestellt. Im Fall der ebenen Couette-Strömung ist der Übergang zur Turbulenz z.B. auf die Zunahme von instabilen sekundären Lösungen mit steigender Reynoldszahl zu erklären (Schmiegel, 1999). Die instabile Mannigfaltigkeit wirkt dabei als Repellor und führt zu einem turbulenten Zustand.

Serrin (1959) hat eine konservative Abschätzung der globalen Stabilitätsgrenze einer allgemeinen Strömung in einem begrenztem endlichen Gebiet berechnet. Das unterste globale Stabilitätslimit ist $\text{Re}_G = \pi\sqrt{3} \approx 5.4$, wobei die Reynoldszahl $\text{Re} = U_{\max}L/\nu$ aus dem ma-

ximalen Durchmesser L des Gebietes sowie der maximalen Geschwindigkeit der primären Strömung innerhalb des Gebietes definiert ist.

Im letzten Limit $\mu \geq \mu_c$ können selbst infinitesimale Störungen mit der Zeit exponentiell anwachsen. Der primäre Zustand kann aufgrund seiner Instabilität nicht mehr angenommen werden. Eine Störung, die bei $\mu_N (\geq \mu_c)$ ein zeitliches Nullwachstum besitzt, d.h. sie besitzt eine neutrale Stabilität, nennt man eine neutrale Mode. Die lineare Stabilitätsgrenze ist durch $\mu_c = \min(\mu_N)$ gegeben. Bei ihr gibt es im allgemeinen nur eine oder wenige gefährliche Moden, die neutral stabil sind. Diese gefährlichen Moden werden als kritische Moden bezeichnet. Für $\mu_G < \mu_c$ gilt desweiteren, daß die Verzweigung hysteresebehaftet ist und als subkritisch bezeichnet wird. Im Gegensatz dazu wird eine Verzweigung mit $\mu_G = \mu_c$ als superkritisch bezeichnet, d.h. ein gesättigter sekundärer Zustand zerfällt bei einer quasistatischen Reduzierung des Kontrollparameters unterhalb der linearen Stabilitätsgrenze ($\mu \leq \mu_G = \mu_c$) wieder in den Grundzustand.

Die für die Verzweigungsart entscheidene globale Stabilitätsgrenze μ_G ist aber im allgemeinen schwer zu bestimmen, so daß nur über das physikalisch unbedeutendere Energiestabilitätslimit μ_E und der linearen Stabilitätsgrenze μ_c die globale Stabilitätsgrenze über $\mu_G \in [\mu_E, \mu_c]$ eingegrenzt werden kann. Im Fall des Rayleigh-Bénard-Problems (Joseph, 1976) oder im Fall der thermischen Konvektion in einem zylindrischen Behältnis (Yamaguchi *et al.*, 1984) ist μ_G sogar eindeutig bestimmt, da in diesen Systemen die Energie- und die lineare Stabilitätsgrenze identisch sind ($\mu_E = \mu_c \Rightarrow \mu_G = \mu_E = \mu_c$).

Das Energiestabilitätslimit und die lineare Stabilitätsgrenze können aus einem Eigenwertproblem bestimmt werden. Bei der energetischen Untersuchung wird der Eigenwert durch ein lineares Randwertproblem (Joseph, 1976) bestimmt. In dieser Arbeit wird jedoch eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt, die das zeitliche Anwachsen einer Störung betrachtet. Das Konzept der zeitlichen linearen Stabilitätsanalyse basiert auf der Betrachtung eines stationären Grundzustandes (\mathbf{u}_0, p_0) , wie z.B. hier die primäre zweidimensionale Strömung, der durch infinitesimale Beiträge in der Geschwindigkeit sowie des Druckes $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ gestört wird. Die Geschwindigkeit und der Druck werden dann geschrieben als

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad p = p_0 + \tilde{p}. \quad (2.13)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes in die Kontinuitätsgleichung (2.4) und die Impulstransportgleichung (2.5) ergeben sich unter Berücksichtigung der für den Grundzustand gültigen Gleichungen die linearen Gleichungen

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_0 = -\nabla \tilde{p} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.15)$$

2 GRUNDLAGEN

Der nichtlineare Term $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$ kann aufgrund der infinitesimalen Amplitude der Störungen in erster Ordnung vernachlässigt werden und es ergibt sich ein lineares System. Betrachtet man ein System mit unendlicher Ausdehnung in einer Raumrichtung, wie in diesem Fall der z -Koordinate ($\Lambda \rightarrow \infty$), können die Störungen in Form von Normalmoden

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikz} + \text{k.k.} \quad (2.16)$$

geschrieben werden. Dabei stellt $k \in \mathbb{R}$ die Wellenzahl und $\lambda = \sigma + i\Omega \in \mathbb{C}$ die komplexe Wachstumsrate der Störung dar. Durch Einsetzen dieser Normalmoden in (2.14) und (2.15) ergibt sich das komplexe verallgemeinerte Eigenwertproblem der Form

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

mit λ als Eigenwert des Eigenvektors $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})^T$. Für $\sigma < 0$ und $\sigma > 0$ ist die Strömung linear stabil bzw. instabil. Neutrales Wachstum ergibt sich für $\sigma = 0$, wobei die neutrale Mode durch den Eigenvektor gegeben ist. Das zeitliche Verhalten der neutralen Mode wird durch den Imaginärteil der komplexen Wachstumsrate, der Oszillationsfrequenz Ω , bestimmt. Dabei existieren in diesen System aufgrund der Invarianz gegenüber der Spiegelsymmetrie $z \rightarrow -z$ nur reelle Eigenwerte ($\lambda = \sigma$) und konjugiert komplexe Paare von Eigenwerten ($\lambda = \sigma \pm i\Omega$). Somit ergeben sich für $\Omega \neq 0$ eine laufende oder stehende Welle als Störströmung. Stabile gemischte Zustände, d.h. die Phase sowie die Amplitude der Mode sind instationär, sind im leicht überkritischen Bereich für dieses translationsinvariante System nicht möglich (§5.1.1; Crawford und Knobloch, 1991).

Im kontinuierlichen System gibt es unendlich viele Eigenmoden, im numerisch diskreten Fall dagegen endlich viele. Um die kritische Mode $(\tilde{\mathbf{u}}_c, \tilde{p}_c)$ zu erhalten, gilt es in beiden Fällen, die Mode aus dem Raum der möglichen Moden mit $\sigma(\mu, k) = 0$ zu finden, bei der der Kontrollparameter μ minimal ist und die Wachstumsrate σ bezüglich der Wellenzahl k maximal ist. In dem hier untersuchten Fall $\Lambda \rightarrow \infty$ existieren innerhalb der linearen Stabilitätsanalyse drei Kontrollparameter $(\text{Re}_1, \text{Re}_2, \Gamma)$. Die Suche nach der kritischen Mode besteht in diesem Fall nicht mehr aus einer Minimierung eines einzigen Kontrollparameters, sondern der Minimierung des Volumens der stabilen Lösungen $V|_{\max_k \sigma < 0}$ im dreidimensionalen Parameterraum, der durch $\text{Re}_1 \times \text{Re}_2 \times \Gamma$ aufgespannt wird.

Um das nichtlineare Verhalten oberhalb der ersten Instabilität zu studieren, wird die Untersuchung durch eine dreidimensionale Simulation vervollständigt. Diese Berechnungen sind allerdings um ein vielfaches zeitintensiver als die der linearen Stabilitätsanalyse. Die nichtlineare Analyse erfolgt daher nur für ausgewählte Parameterkombinationen.

2.3 Energieanalyse

Zur Analyse des Instabilitätsmechanismus einer kritischen Mode ist es sinnvoll, den Energietransfer zwischen dem Grundzustand und dieser Mode zu betrachten. Die Änderungsrate der kinetischen Energie wird dabei durch die Reynolds–Orr–Gleichung

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \int_V \tilde{\mathbf{u}} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} dV = \int_V \tilde{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{u}} dV \quad (2.18)$$

beschrieben. Sie ergibt sich aus der zeitlichen Ableitung der kinetischen Energie der Störung $E_{kin} = 1/2 \int \tilde{\mathbf{u}}^2 dV$. Durch Einsetzen der linearisierten Impulsbilanz² (2.15) und unter Berücksichtigung der hier gewählten Randbedingungen $\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial V} = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\partial V} = 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{D^*} \frac{dE_{kin}}{dt} = -1 + \sum_{i=1}^4 \int_V I_i dV \quad (2.19)$$

mit

$$I_1 = -\frac{1}{D_*} \tilde{u}^2 \partial_x u_0, \quad (2.20)$$

$$I_2 = -\frac{1}{D_*} \tilde{u} \tilde{v} \partial_y u_0, \quad (2.21)$$

$$I_3 = -\frac{1}{D_*} \tilde{u} \tilde{v} \partial_x v_0, \quad (2.22)$$

$$I_4 = -\frac{1}{D_*} \tilde{v}^2 \partial_y v_0. \quad (2.23)$$

Die Energietransferrate und die Integranden I_i sind mit der Dissipationsrate

$$D^* = \int_V D dV = \int_V (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}})^2 dV \quad (2.24)$$

normiert.

Die Energieanalyse erfolgt *a posteriori* und ist somit auch eine Kontrolle der linearen Stabilitätsanalyse, da

$$\left. \frac{dE_{kin}}{dt} \right|_{\sigma=0} = 0 \quad (2.25)$$

erfüllt sein muß. Andererseits kann der numerische Fehler in der Energietransferrate durch

$$\left. \frac{dE_{kin,num.}}{dt} \right|_{\sigma=0} = \delta E_{kin,num.} \quad (2.26)$$

abgeschätzt werden.

²Der nichtlineare Anteil $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$, der in (2.15) vernachlässigt worden ist, ergibt bei der Energieanalyse keinen Beitrag, da er energieerhaltend ist.