

# Einleitung

Die wichtigste Form menschlicher Kommunikation ist durch die Verwendung von Ausdrucksmitteln der Umgangssprache gekennzeichnet. Die mit diesen Ausdrucksmitteln gebildeten Aussagen sind in der Regel nicht in objektiv feststellbarer Weise wahr oder falsch, sondern ihnen wird durch das menschliche Denken ein zwischen diesen beiden Polen liegender und zumeist subjektiv eingeschätzter *Grad ihrer Gültigkeit* zugeordnet. Der Umgang mit solchen *unscharfen* Aussagen und ihre Auswertung ist eine geistige Leistung, die den Menschen erst dazu befähigt, sich in komplexen Situationen zu orientieren und auch auf der Basis unvollständiger Informationen Entscheidungen zu treffen. Er ist dabei im allgemeinen nicht auf die Kenntnis genau definierter Quantitäten oder exakter mathematischer Formeln angewiesen. Vielmehr genügen ihm oft rein qualitative, in ihrer Bedeutung nur unscharf begrenzte Begriffe wie „hoch“, „schnell“, „wenig“, „fast“ oder „ungefähr“, um ein reales Problem zu beurteilen und angemessen zu reagieren.

Im Gegensatz dazu bereitet die mathematische Behandlung realer Probleme, wie sie etwa im Zusammenhang mit natürlichen Vorgängen oder technischen Prozessen anzutreffen sind, durch klassische mathematische Methoden häufig große Schwierigkeiten. Aufgrund der zweiwertigen Logik dieser Methoden, die nur wahre und falsche Aussagen unterscheidet, sind viele dieser Probleme wegen ihrer Komplexität entweder gar nicht oder nur unter besonderem Aufwand einer mathematischen Modellierung zugänglich. Vor diesem Hintergrund schlug *L. A. Zadeh* 1965 vor, menschliche Denkweisen mathematisch nachzubilden und so der Handhabung realer Probleme einen neuen Weg zu eröffnen. Das Kernstück seines zu diesem Zweck entwickelten Verfahrens besteht in der Darstellung unscharfer Aussagen durch sog. *Fuzzy-Mengen*. Unter einer Fuzzy-Menge in einer Grundmenge  $G$  versteht man dabei eine Abbildung  $A: G \rightarrow [0, 1]$ , die jedem Element  $u \in G$  den Grad  $A(u) \in [0, 1]$  zuordnet, in dem es eine gegebene Eigenschaft  $E$  erfüllt. Trifft  $E$  auf ein Element  $u \in G$  vollständig zu, so wird dies durch  $A(u) = 1$  gekennzeichnet, während der Fall, daß  $u$  die Eigenschaft  $E$  nicht erfüllt, durch  $A(u) = 0$  charakterisiert wird. Der dazwischenliegende „Graubereich“ hängt im allgemeinen von subjektiven Beurteilungen ab.

Von Zadehs Konzept der Fuzzy-Mengen ist es ein natürlicher Schritt, unscharfen Aussagen allgemein einen *Fuzzy-Wahrheitswert* aus dem Intervall  $[0, 1]$  zuzuordnen. In diesem Gedanken liegt der Ausgangspunkt zum Aufbau einer Fuzzy-Logik, zu dem sich in der Literatur gewisse Ansätze finden. So macht etwa *Böhme* in [2] einige Ausführungen zur Fuzzy-Aussagenlogik, während bei *Novák* in [16] und [17] eine Fuzzy-Prädikatenlogik umrissen wird, die sich stark am Vorbild der klassischen mathematischen Logik orientiert.

Die vorliegende Arbeit hat den Aufbau einer Fuzzy-Prädikatenlogik erster Stufe zum Gegenstand. In diese Fuzzy-Prädikatenlogik werden insbesondere einige *fuzzy-spezifische* Komponenten eingeführt, welche dort an die Stelle entsprechender Konstrukte der klassischen Logik treten und deren Funktion erweitern. Im einzelnen handelt es sich hierbei um:

1. *Fuzzy-Ähnlichkeit*. Durch die Fuzzy-Ähnlichkeit lassen sich verschiedene fuzzy-logische Modellierungen ein und desselben Problems miteinander in Beziehung setzen. Sie ist eine Verallgemeinerung der klassischen Gleichheitsbeziehung „=“ und ermöglicht es, den Einfluß subjektiver Beurteilungen im Fuzzy-Kalkül zu berücksichtigen.
2. *Defuzzifizierung*. Die Defuzzifizierung beschreibt den Übergang von einer unscharfen Aussage über die Objekte eines gegebenen Grundbereichs zu einem Element dieses Grundbereichs. In den technischen Anwendungen der Fuzzy-Theorie, z. B. beim Fuzzy-Control, bildet sie stets die Endstufe der dort implementierten Systeme. Ihr klassisches Pendant ist der in der Mathematik als grundlegend angesehene *Auswahlprozeß*.
3. *Fuzzy-Implikationsalgebren*. Diese auf dem Intervall  $[0, 1]$  aufbauenden algebraischen Strukturen bilden die *Wahrheitswertalgebren* der hier behandelten Fuzzy-Prädikatenlogik. Sie sind allgemeiner als die vielfach verwendeten *Verbände mit Residuation* und können an so verschiedene Anwendungen wie *Fuzzy-Control* oder *Expertensysteme* angepaßt werden.

In Kapitel 1 werden die mathematischen Grundlagen für den in dieser Arbeit durchgeführten Aufbau einer Fuzzy-Prädikatenlogik erster Stufe bereitgestellt. Dabei werden in den Abschnitten 1.1 bis 1.3 sog. *Relational-, Funktional- und Peano-Algebren* diskutiert und in Abschnitt 1.4 eine kurze Darstellung der Fuzzy-Mengenlehre gegeben.

Kapitel 2 hat die Konstruktion formaler Sprachen der Fuzzy-Prädikatenlogik zum Thema. Diese Sprachen dienen der formalen Darstellung unscharfer Aussagen und der Objekte, auf die sich diese Aussagen beziehen. Ihre Konstruktion verläuft dabei ganz auf der Basis der im ersten Kapitel beschriebenen Funktional- und Peano-Algebren. Zusammen mit bestimmten, über die verwendeten Sprachalphabete zu treffenden Voraussetzungen, welche in Abschnitt 2.1 formuliert werden, wird hierdurch erreicht, daß die gewonnenen Sprachen diejenigen strukturellen Eigenschaften besitzen, die zur Einführung einer *Semantik*, d. h. einer Bewertung der Sprachelemente durch Fuzzy-Wahrheitswerte und Fuzzy-Mengen, zwingend erforderlich sind. Mit der Darstellung eines *Substitutionskalküls* für die betrachteten Sprachen in Abschnitt 2.3 wird der Aufbau des syntaktischen Teils der Fuzzy-Prädikatenlogik abgeschlossen.

Im dritten und letzten Kapitel steht der semantische Teil der Fuzzy-Prädikatenlogik im Zentrum der Betrachtungen. Dort werden die oben erwähnten *Bewertungen* der Elemente der in Kapitel 2 konstruierten Sprachen eingeführt und behandelt. Nach der Darstellung ihrer wichtigsten Eigenschaften in Abschnitt 3.1, sind die nötigen Voraussetzungen geschaffen, um in Abschnitt 3.2 die Beziehung der Fuzzy-Ähnlichkeit zur Fuzzy-Prädikatenlogik zu untersuchen. Dabei zeigt sich, daß die Fuzzy-Ähnlichkeit als fuzzy-spezifische Vergleichsrelation geeignet ist und in der Fuzzy-Logik an Stelle der klassischen Gleichheitsbeziehung „=“ verwendet werden kann.

## Symbole und Schreibweisen

1. Es bezeichne  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen. Die 0 wird hierbei ausdrücklich ausgeschlossen. Weiter wird  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  als die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen definiert.
2. Es sei  $\mathfrak{S}$  ein nichtleeres Mengensystem. Dann setzt man

$$\bigcup \mathfrak{S} := \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M = \{x \mid \text{es existiert ein } M \in \mathfrak{S} \text{ mit } x \in M\}$$

und

$$\bigcap \mathfrak{S} := \bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M = \{x \mid \text{für alle } M \in \mathfrak{S} \text{ gilt } x \in M\}.$$

3. Es seien  $G$  und  $M$  beliebige Mengen. Dann definiert man  $G^M := \{f \mid f : M \rightarrow G\}$  als die Menge aller Abbildungen von  $M$  in  $G$ .
4. Es seien  $I$  und  $G$  nichtleere Mengen. Dann wird eine Abbildung  $f : I \rightarrow G$  auch als *Familie von Elementen in  $G$  mit der Indexmenge  $I$*  bezeichnet. Man verwendet in diesem Zusammenhang anstelle der Schreibweise  $f : I \rightarrow G$  gewöhnlich die Notationen  $(f(i) \mid i \in I)$  oder  $(f_i \mid i \in I)$ .



# Kapitel 1

## Grundlegende Strukturen und Begriffe

Dieses Kapitel ist der abstrakten Behandlung derjenigen Strukturen, Begriffe und Methoden gewidmet, die für die vorliegende Arbeit von grundlegender Bedeutung sind. Im Vordergrund stehen hierbei die in den Abschnitten 1.1 und 1.2 diskutierten Relational- und Funktionalalgebren und das für diese Konstrukte ableitbare Induktionsprinzip. Im dritten Abschnitt werden dann spezielle Funktionalalgebren, die sog. *Peano-Algebren*, untersucht, auf die sich das von den natürlichen Zahlen her bekannte Prinzip der rekursiven Definition übertragen läßt.

Abschnitt 1.4 gibt eine kurze Einführung in die Fuzzy-Mengenlehre und die sie motivierenden Probleme. Der Aufbau dieser Theorie wird jedoch nur so weit verfolgt, wie dies für die später durchgeführten Untersuchungen erforderlich ist.

Zum Abschluß dieses Kapitels werden sog. *Fuzzy-Relationalalgebren* als Verallgemeinerung der in Abschnitt 1.1 beschriebenen klassischen Relationalalgebren vorgestellt. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Frage, wie sich der Begriff der *ableitbaren Elemente* für diese neuen Strukturen adäquat definieren läßt.

### 1.1 Relationalalgebren

Allgemein versteht man unter einer mathematischen Struktur auf einer Grundmenge  $U$  ein System von *Beziehungen* zwischen bestimmten Elementen dieser Grundmenge. Solche Beziehungen können beispielsweise durch *Vergleiche*, wie Ordnungen oder Äquivalenzrelationen, *funktionale Zusammenhänge* oder *Regeln*, welche gewisse Elemente der Grundmenge (Prämissen) durch andere Elemente (Konklusionen) „ersetzen“, wie dies etwa in einem Beweiskalkül geschieht, gegeben sein. Mathematisch werden derartige Strukturen durch Systeme von *Relationen* auf der Grundmenge  $U$ , d. h. durch Teilmengen von  $U^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  repräsentiert.

**Definition 1.1.1 (Relationalalgebren).** Es sei  $I$  eine nichtleere Indexmenge. Dann heißt das Tripel  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  eine *Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$* , wenn  $U \neq \emptyset$ ,  $(R_i \mid i \in I)$  eine Familie von Relationen auf  $U$  und  $(\kappa_i \mid i \in I)$  eine Familie natürlicher Zahlen mit  $R_i \subseteq U^{\kappa_i}$  für alle  $i \in I$  ist. Die Familie  $(\kappa_i \mid i \in I)$  heißt die *Signatur der Relationalalgebra*  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$ .

**Bezeichnung.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{R}_n(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I)) := \{R_i \mid i \in I \text{ und } \kappa_i = n\}$  die Menge der  $n$ -stelligen Relationen und  $\mathcal{R}(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I)) := \{R_i \mid i \in I\}$  die Menge aller Relationen der Relationalalgebra  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$ . Für alle  $i \in I$  mit  $\kappa_i = 1$  gilt insbesondere  $R_i \subseteq U$ , woraus unmittelbar  $\bigcup \mathcal{R}_1(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I)) \subseteq U$  folgt.

Hat die Indexmenge  $I$  die Gestalt  $\{1, \dots, k\}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , so schreibt man anstelle von  $(U, (R_i \mid i \in \{1, \dots, k\}), (\kappa_i \mid i \in \{1, \dots, k\}))$  auch  $(U, (R_1, \dots, R_k), (\kappa_1, \dots, \kappa_k))$ .

**Hinweis.** Zum Begriff der Relationalalgebren vergleiche man auch [20] und [26]. Allerdings wird in diesem Text eine andere Darstellung als in den genannten Quellen verwendet.

**Anmerkung.** Im folgenden wird eine Relationalalgebra  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  häufig mit  $U$ , also mit ihrer Grundmenge bezeichnet, obwohl  $U$  nur eine ihrer Komponenten darstellt. Diese etwas unpräzise Schreibweise ist jedoch allgemein üblich und immer dann gerechtfertigt, wenn über die zu der betrachteten Relationalalgebra gehörende Relationenfamilie  $(R_i \mid i \in I)$  und ihre Signatur  $(\kappa_i \mid i \in I)$  vollständige Klarheit besteht und keinerlei Mißverständnisse zu befürchten sind. Man denke in diesem Zusammenhang auch an die in der Algebra gebräuchliche Notation einer Gruppe  $(G, \cdot)$  mit  $G$ , eines Körpers  $(K, +, \cdot)$  mit  $K$  oder eines Vektorraumes  $(V, +, \cdot, K)$  mit  $V$ .

Die folgenden Beispiele vermitteln einen Eindruck der verschiedenen Modifikationen, in denen Relationalalgebren in der Mathematik vorkommen.

### Beispiel 1.1.1.

1. Es sei  $I := \{1\}$ ,  $R_1 := \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$  und  $\kappa_1 := 2$ . Dann stellt  $(\mathbb{N}, (R_1), (\kappa_1)) = (\mathbb{N}, (\{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}), (2))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $\mathbb{N}$  mit der Signatur  $(2)$  dar, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbb{N}, (R_1), (\kappa_1)) &= \{R_1\} = \{\{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}\} = \mathcal{R}_2(\mathbb{N}, (R_1), (\kappa_1)), \\ \mathcal{R}_n(\mathbb{N}, (R_1), (\kappa_1)) &= \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq 2. \end{aligned}$$

2. Mit  $I := \{1, 2\}$ ,  $R_1 := \{1\} \subseteq \mathbb{N}$ ,  $R_2 := \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ,  $\kappa_1 := 1$  und  $\kappa_2 := 2$  ist  $(\mathbb{N}, (R_1, R_2), (\kappa_1, \kappa_2)) = (\mathbb{N}, (\{1\}, \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}), (1, 2))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $\mathbb{N}$  mit der Signatur  $(1, 2)$  und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbb{N}, (R_1, R_2), (1, 2)) &= \{R_1, R_2\} = \{\{1\}, \{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}\}, \\ \mathcal{R}_1(\mathbb{N}, (R_1, R_2), (1, 2)) &= \{R_1\} = \{\{1\}\}, \\ \mathcal{R}_2(\mathbb{N}, (R_1, R_2), (1, 2)) &= \{R_2\} = \{\{(m, m+1) \mid m \in \mathbb{N}\}\}, \\ \mathcal{R}_n(\mathbb{N}, (R_1, R_2), (1, 2)) &= \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 3. \end{aligned}$$

Durch diese Relationalalgebra wird ein Teil der Struktur der Menge der natürlichen Zahlen ausgedrückt, die neben der 1 zu jedem Element  $m$  den Nachfolger  $m+1$  enthält. In Abschnitt 1.2 wird eine weitere Beschreibung dieser Struktur gegeben.

3. Es sei  $U \neq \emptyset$  und  $\leq$  eine Ordnungsrelation in  $U$ , d. h. es ist  $\leq \subseteq U \times U$  und für alle  $u, v, w \in U$  gilt:

- a)  $u \leq u$  (Reflexivität).
- b) aus  $u \leq v$  und  $v \leq u$  folgt  $u = v$  (Antisymmetrie).

c) aus  $u \leq v$  und  $v \leq w$  folgt  $u \leq w$  (Transitivität).

Dann ist  $(U, (\leq), (2))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$  mit der Signatur  $(2)$ , die nur die zweistellige Relation  $\leq$  enthält. Als Indexmenge kann beispielsweise  $\{1\}$  oder jede andere einelementige Menge verwendet werden.

4. Es sei wieder  $(U, \leq)$  eine geordnete Menge und  $A_u := \{v \in U \mid v \leq u\}$  der zu  $u \in U$  bezüglich  $\leq$  gehörende Abschnitt. Dann ist  $(U, (A_u \mid u \in U), (1 \mid u \in U))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$ . Ihre Signatur ist durch die Familie  $(\kappa_u \mid u \in U)$  mit  $\kappa_u = 1$  für alle  $u \in U$  gegeben. Für die Menge ihrer ausschließlich einstelligen Relationen gilt  $\mathcal{R}_1(U, (A_u \mid u \in U), (1 \mid u \in U)) = \{A_u \mid u \in U\} = \mathcal{R}(U, (A_u \mid u \in U), (1 \mid u \in U))$ . In diesem Beispiel fallen insbesondere Grund- und Indexmenge der betrachteten Relationalalgebra zusammen.
5. Es sei  $U \neq \emptyset \neq A \subseteq U$  und  $f : A \rightarrow U$  eine Abbildung. Dann ist  $\emptyset \neq \mathcal{G}_f := \{(u, f(u)) \mid u \in A\} \subseteq U \times U$  und  $(U, (\mathcal{G}_f), (2))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$  mit der Signatur  $(2)$ . Sie besitzt lediglich die zweistellige Relation  $\mathcal{G}_f$ , d. h. es gilt  $\mathcal{R}(U, (\mathcal{G}_f), (2)) = \mathcal{R}_2(U, (\mathcal{G}_f), (2)) = \{\mathcal{G}_f\}$  und  $\mathcal{R}_n(U, (\mathcal{G}_f), (2)) = \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 2$ .

Im Zusammenhang mit Relationalalgebren und im Hinblick auf ihre Anwendungen sind die Begriffe der *abgeschlossenen Teilmenge*, der *homomorphen Abbildung*, der *Kongruenzrelation* und der *Ableitung* von besonderer Bedeutung. Dabei stellen die abgeschlossenen Teilmengen, die homomorphen Abbildungen und die Kongruenzrelationen einer Relationalalgebra Objekte dar, die mit dem System der Elementbeziehungen, das durch die Relationenfamilie auf der Grundmenge gegeben ist, in gewissem Sinne „*verträglich*“ sind. Durch das Konzept der Ableitungen wird die endlichmalige *Hintereinanderausführung* von Relationen beschrieben.

**Definition 1.1.2 (Abgeschlossenheit).** Es sei  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$ . Dann heißt  $V \subseteq U$  *abgeschlossen in*  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$ , wenn für alle  $i \in I$  und alle  $(u_1, \dots, u_{\kappa_i}) \in R_i$  die Implikation

$$\{u_1, \dots, u_{\kappa_i-1}\} \subseteq V \implies u_{\kappa_i} \in V \quad (1.1.1)$$

gilt.

**Anmerkung.** Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß für alle  $u \in U$  das 1-Tupel  $(u) := u$  gesetzt wird. Für ein  $i \in I$  mit  $\kappa_i = 1$  ist demnach  $(u_1, \dots, u_{\kappa_i}) = (u_1) = u_1$  und  $(u_1, \dots, u_{\kappa_i}) \in R_i$  gleichbedeutend mit  $u_1 \in R_i$ .

**Bemerkung 1.1.1.** Es sei  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  eine Relationalalgebra auf der Grundmenge  $U$  und  $V \subseteq U$ .  $V$  ist genau dann in  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  abgeschlossen, wenn die Inklusion

$$R_i \subseteq V \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } \kappa_i = 1 \quad (1.1.2)$$

und die Implikation

$$\{u_1, \dots, u_{\kappa_i-1}\} \subseteq V \implies u_{\kappa_i} \in V \quad \text{für alle } i \in I \text{ mit } \kappa_i > 1 \text{ und alle } (u_1, \dots, u_{\kappa_i}) \in R_i \quad (1.1.3)$$

gilt. Ist nämlich  $V$  in  $(U, (R_i \mid i \in I), (\kappa_i \mid i \in I))$  abgeschlossen, dann gilt nach Definition 1.1.2 zum einen die Beziehung (1.1.3) und zum anderen besteht für alle  $i \in I$  mit  $\kappa_i = 1$  und