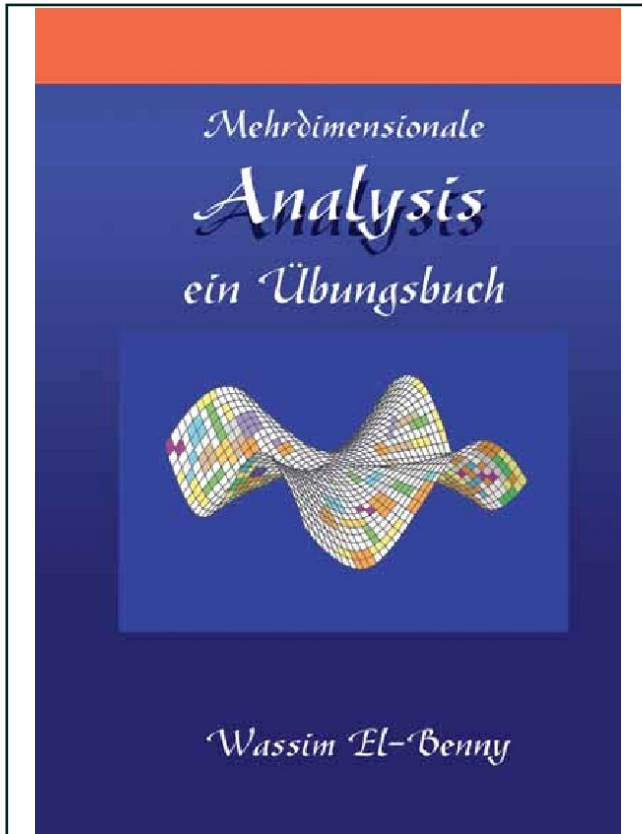




Wassim El-Benny (Autor)
Mehrdimensionale Analysis



<https://cuvillier.de/de/shop/publications/3221>

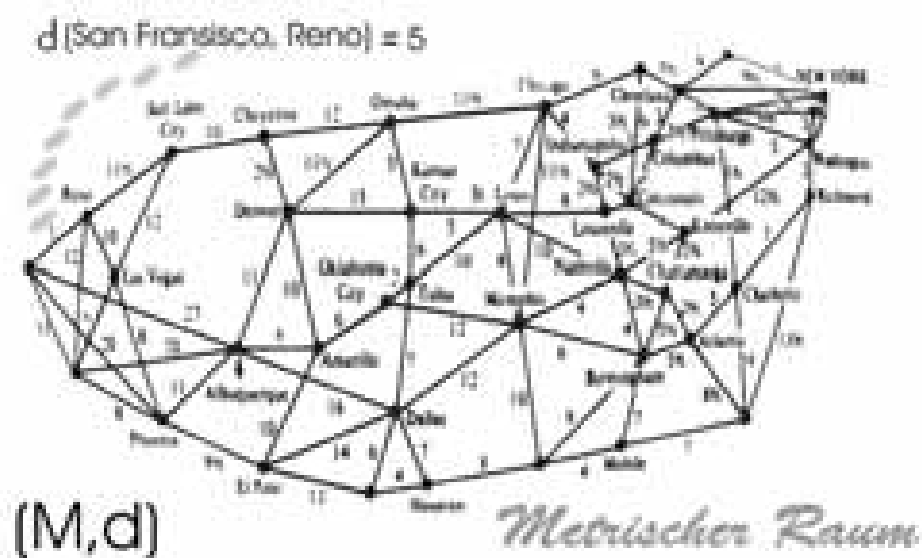
Copyright:

Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentzsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,
Germany

Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: info@cuvillier.de, Website: <https://cuvillier.de>

Kapitel 1

Metrische Räume



Der Metrische Raum ist ein Begriff aus der Topologie. In der Topologie studiert man topologische Räume, die eine Verallgemeinerung der metrischen Räume sind. Meistens reicht es, nur metrische Räume zu betrachten.

1.1 Abstand und Norm

Den zwei dimensionalen Raum \mathbb{R}^2 kann man als eine Ebene, mit x_1 und x_2 als kartesischen Komponenten darstellen. Der Abstand zwischen zwei

Punkten $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist laut dem Satz von Pythagoras

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

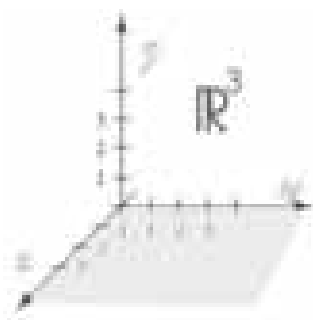
Dieser Abstand hängt nur von der Differenz $y - x$ ab und wird also mit

$$\|y - x\|_2$$

beschrieben, wobei

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{falls } z = (z_1, z_2)$$

Im dreidimensionalen Raum ist der Abstand zwischen



$x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \|y - x\|_2$$

wobei

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad \text{falls } z = (z_1, z_2, z_3)$$

Im n -dimensionalen Raum definieren wir

$$\|z\|_2 := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2}$$

falls $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ist. Der Abstand zwischen $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(x, y) = \|y - x\|_2$$

Man nennt $\|z\|_2$ die Euklidische Norm.

1.2 Metrische Räume

1.2.1 Definition

Sei M eine nicht leere Menge. Eine Abbildung

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Metrik** oder **Abstand** auf M , falls für alle $x, y, z \in M$ gilt :

- $d(x, y) \geq 0$ (Positivität)
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecks-Ungleichung)

Auf \mathbb{R}^n definiert man die **Standardmetrik**

$$d(x, y) = \langle x, y \rangle := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Wir werden die Menge \mathbb{R}^n fast immer mit der Standardmetrik versehen.

1.3 Offene Mengen

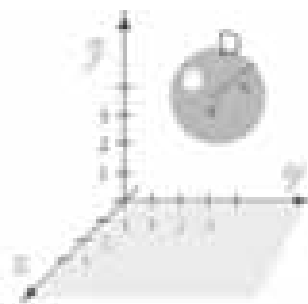
Offene Mengen sind eine Verallgemeinerung von offenen Intervallen. Um offene Mengen zu definieren, möchten wir zuerst den Begriff von ϵ -Kugeln einführen.

1.3.1 Definition

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für jedes $x \in M$ und $\epsilon > 0$, heißt die Menge

$$D(x, \epsilon) := \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die ϵ -**Kugel** oder ϵ -**Umgebung** um x .



2. Eine **Umgebung** eines Punktes in M ist eine offene Menge, die diesen Punkt enthält.
3. Sei $A \subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt A **offen**, falls es für jedes $x \in A$ eine ϵ -Umgebung $D(x, \epsilon)$ gibt, die ganz in A liegt.



1.3.2 Beispiel 1

- Offene Intervalle (a, b) sind in \mathbb{R} offen, aber nicht in \mathbb{R}^2 .
- Das Intervall $[0, 1)$ ist in \mathbb{R} nicht offen.
- Eine endliche oder sogar abzählbar unendliche Menge von Punkten in \mathbb{R}^n ist stets nicht offen. Also sind offene Mengen in \mathbb{R}^n bis auf die leere Menge überabzählbar.
- Die Menge $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ ist offen.
- Die Menge $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ ist nicht offen.

1.3.3 Beispiel 2

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Wir definieren

$$A + B := \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$$

und wir wollen zeigen dass $A + B$ offen ist. Dafür sei $w \in A + B$ beliebig gewählt. Es gibt $x \in A$ und $y \in B$ mit $w = x + y$. Da A offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass

$$D(x, \epsilon) \subset A$$

gilt. Wir wollen zeigen dass $D(w, \epsilon) \subset A + B$ ist. Sei $z \in D(w, \epsilon)$. Dann gilt

$$\|z - w\| = \|z - (x + y)\| < \epsilon$$

Aber

$$\|z - (x + y)\| = \|(z - y) - x\|$$

Also

$$z - y \in D(x, \epsilon) \subset A$$

Da $y \in B$, gilt $z = (z - y) + y \in A + B$. Damit gilt $D(w, \epsilon) \subset A + B$, und somit ist $A + B$ offen.

1.3.4 Satz

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gilt :

- Jede ϵ -Kugel ist offen.
- Die Durchschnittsmenge endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigungsmenge beliebiger Anzahl von offenen Mengen ist offen.
- Die leere Menge \emptyset und die Menge M sind offen.
- Die Produktmenge $A \times B$ ist in \mathbb{R}^2 offen, falls A und B offen in \mathbb{R} sind.

1.3.5 Bemerkung

Die Durchschnittsmenge unendlich vieler offener Mengen ist nicht unbedingt offen. Zum Beispiel

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

Dabei sind alle Mengen $(-1/n, 1/n)$ offen, aber ihre Durchschnittsmenge $\{0\}$ ist nicht offen.



1.4 Innerer Kern

1.4.1 Definition

1. Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$. Ein Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von A falls es eine offene Umgebung U von x gibt die ganz in A liegt.
2. Der **innere Kern** A° von A ist die Menge aller inneren Punkte von A . Diese kann auch leer sein.

1.4.2 Beispiele

- Der Punkt 1 ist ein innerer Punkt von $[0,2]$.
- Der Punkt 2 ist kein innerer Punkt von $[0,2]$.
- Der Punkt $(0,0)$ ist ein innerer Punkt von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.
- Der Punkt $(1,1)$ ist kein innerer Punkt von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

1.4.3 Satz

Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$ dann gilt

$$A^\circ = \bigcup \{G \subset M \mid G \subset A \text{ und } G \text{ offen}\}$$

mit anderen Worten, A° ist die größte offene Teilmenge von A .

1.4.4 Beispiel 1

Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ dann gilt

$$S^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$$

1.4.5 Beispiel 2

Wir wollen wissen ob $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

Dafür betrachten wir in \mathbb{R}

$$A := [0, 1] \quad \text{und} \quad B := [1, 2]$$

Dann gilt $A^\circ = (0, 1)$ und $B^\circ = (1, 2)$, und damit

$$A^\circ \cup B^\circ = (0, 1) \cup (1, 2)$$

während

$$(A \cup B)^\circ = (0, 2)$$

Also ist $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ im Allgemeinen falsch.

1.5 Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen sind eine Verallgemeinerung von abgeschlossenen Intervallen.

1.5.1 Definition

Eine Menge B in einem metrischen Raum M heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $M \setminus B$ offen ist.