Vorwort

Ausgangspunkt ist eine treue Darstellung $G \hookrightarrow GL(V)$ einer endlichen Gruppe G über einem Körper $\mathbb{F}$. Der Invariantenring $\mathbb{F}[V]^G$ ist eine endlich erzeugte Unteralgebra der Algebra $\mathbb{F}[V]$ von Polynomfunktionen auf dem $\mathbb{F}$-Vektorraum V. Einer der Schwerpunkte in der Invariantentheorie besteht darin, sämtliche Erzeuger eines Invariantenrings zu finden. Ein Standardbeispiel dafür ist eine Darstellung $\Sigma_n \hookrightarrow GL(V)$ einer symmetrischen Gruppe Σ_n mit der Ordung $n!$ auf $V \cong \mathbb{F}^n$. Der Invariantenring $\mathbb{F}[V]^{\Sigma_n}$ ist der Polynomring $\mathbb{F}[e_1, \cdots, e_n]$ mit den elementarsymmetrischen Polynomen $e_1, \cdots, e_n$ als Variablen. Aber das ist leider nur einer der wenigen gefundenen speziellen Fällen. Meistens ist noch nicht bekannt, wieviele Erzeuger $\mathbb{F}[V]^G$ hat.
Für den Fall, daß $\operatorname{Char} \mathbb{F} = 0$, haben R. Steinberg ([28]) und R. Kane ([14]) ein interessantes Kriterium für polynomiale Invariantenringe herausgefunden. Im Folgenden wird ihre Beweismethode grob erläutert :

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik 0. Angenommen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sei eine $\mathbb{F}$-Basis von V und $x_1, \cdots, x_n$ eine $\mathbb{F}$-Basis von $V^* = Hom_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$, die dual zur Basis $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ist. Die graduierten polynomialen Algebren $\mathbb{F}[\mathfrak{A}] := \mathbb{F}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ und $\mathbb{F}[\mathfrak{X}] := \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]$ sind zueinander duale, primitiv endlich erzeugte Hopf-Algebren [1] ($\deg x_i = \deg \alpha_i = 1,\ i = 1, \cdots, n$). Die Arbeit von R. Steinberg basiert auf der Differentialoperation auf einer Polynomalgebra. Wir betrachten die Polynomalgebra $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]$ als die graduierte Hopf-Algebra von Differentialoperatoren auf $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$. Für jedes $\alpha \in V$ ist ein Differentialoperator D_α auf V^* definiert durch

$$\begin{aligned} D_\alpha(x) &= \langle \alpha \, , \, x \rangle \\ D_\alpha(xy) &= D_\alpha(x)y + xD_\alpha(y) \ \text{ für } \alpha \in V,\ x, y \in V^*, \end{aligned}$$

wobei $\langle \ , \ \rangle : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{F}$ das innere Produkt ist. Der Operator $D : \mathbb{F}[\mathfrak{A}] \times \mathbb{F}[\mathfrak{X}] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ ist dann bestimmt durch die Regel $D_{st} = D_s \circ D_t$ für $s, t \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]$. Das innere Produkt wird durch

$$\langle \ s \ , \ f \ \rangle = (D_s(f))(0) \ , \ s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}],\ f \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}] \tag{1}$$

auf die Polynomalgebren erweitert. Die Hopf-Algebra $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]$ bzw. $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ beinhaltet die koalgebraische Struktur Δ bzw. Δ^*.

[1] siehe z.B. M.E. Sweedler, Hopf Algebras, (1969)

Durch die Definiton der dualen algebraischen Struktur erhalten wir $\langle s \ , \ f \cdot h \rangle = \langle \Delta(s) \ , \ f \otimes h \rangle$, $\langle s \cdot t \ , \ f \rangle = \langle s \otimes t \ , \ \Delta^*(f) \rangle$, für $s, t \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]$, $f, h \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$. Die Operation von G auf V induziert eine Operation auf V^* durch

$$\langle \ g \cdot x \ , \ \alpha \ \rangle = \langle \ x \ , \ g^{-1} \cdot \alpha \ \rangle,$$

für alle $x \in V^*, \alpha \in V, g \in G$. Die Operation von G auf V bzw. V^* erweitert sich auf $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]$ bzw. $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$; wir erhalten dann $g(D_s f) = D_{gs}(gf)$, $s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]$, $f \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$, $g \in G$. Ein Element $f \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ heißt G-**harmonisch**, wenn $D_s(f) = 0$ für alle $s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]^G$ ist.

Sei $H := \{f \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}] \mid D_s(f) = 0, \ \forall \ s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]^G\}$ die Menge von harmonischen Elementen. Es ist leicht nachzuweisen, daß es eine bijektive Korrespondenz zwischen dem Untermodul H von $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ und dem Quotienten $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]/(\overline{\mathbb{F}[\mathfrak{A}]^G})$ gibt. [2] Wir setzen $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G := \mathbb{F}[\mathfrak{A}]/(\overline{\mathbb{F}[\mathfrak{A}]^G})$.

Satz 0.1 *(R. Steinberg, R. Kane) Sei $\varrho : G \hookrightarrow GL(n, \mathbb{F})$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G über einem Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik 0 und $x_1, \cdots, x_n$ eine $\mathbb{F}$-Basis von V^*.*
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

1. *Der Invariantenring $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$ ist eine Polynomalgebra.*
2. *Der Untermodul H ist ein zyklischer Modul.*
3. *$\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G$ ist eine Poincarédualitätsalgebra.* [3]

R. Steinberg verwendete den folgenden Satz, um den Erzeuger für H durch Pseudospiegelungen in G zu konstruieren.

Satz 0.2 *(G.C. Shephard-J.A. Todd, C. Chevalley [6][22][25]) Seien $\varrho : G \hookrightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G und V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{F}$. Für $|G| \in \mathbb{F}^\times$ sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

1. *G ist eine Pseudospiegelungsgruppe.*
2. *$\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$ ist eine Polynomalgebra.*
3. *$\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$ wird durch n algebraisch unabhängige Polynome erzeugt.*
4. *$\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ ist ein freie $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$-Modul.*

[2] siehe Definition im Abschnitt 1
[3] siehe Definition im Abschnitt 2

Eine **Pseudospiegelung** ist ein Automorphismus $\sigma : V \longrightarrow V$ mit den Eigenschaften :

1. $\sigma \neq id$;
2. σ hat endliche Ordnung;
3. der Unterraum $V^\sigma := \{v \in V \mid \sigma v = v\}$ hat die Kodimension 1. Der Raum V^σ heißt **Hyperebene** von σ.

Eine **Pseudospiegelungsgruppe** ist eine Gruppe, die durch ihre Pseudospiegelungen erzeugt wird. Eine Pseudospiegelung σ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mathrm{Char}\,\mathbb{F} = 0$ oder $|G| \in \mathbb{F}^\times$ ist. Für jede Pseudospiegelung $\sigma \in Aut(V)$ gibt es einen Vektor $0 \neq a \in \mathrm{Im}(1-\sigma)$, so daß $\sigma(v) = v + l_\sigma(v) \cdot a$, für alle $v \in V$ und $l_\sigma : V \to \mathbb{F}$ eine lineare Funktion mit $\ker l_\sigma = V^\sigma$ ist.
R. Steinberg konstruierte nun ein homogenes Element Ω in $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ aus allen linearen Funktionen l_σ, $\sigma \in s(G)$, nämlich

$$\Omega := \prod_{\sigma \in s(G)} l_\sigma,$$

wobei $s(G)$ die Menge aller Pseudospiegelungen in G ist. In der Tat können aber verschiedene Pseudospiegelungen dieselbe Hyperebene besitzen. Für eine feste Hyperebene $V^{\bar\sigma}$ ist die Menge $C_H := \{\ \sigma \in s(G) \mid V^\sigma = V^{\bar\sigma}\ \} \cup \{id\} \cong \langle\ \sigma_{V^{\bar\sigma}}\ \rangle$ eine zyklische Gruppe mit dem Erzeuger $\sigma_{V^{\bar\sigma}}$, also

$$\Omega \cong \prod_{V^{\bar\sigma}} l_{\sigma_{V^{\bar\sigma}}}^{|\sigma_{V^{\bar\sigma}}|-1}.$$

Ω ist ein homogenes Element in dem Ring $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G_{\det^{-1}}$, das heißt,

$$g \cdot \Omega = \det{}^{-1}(g) \cdot \Omega\ ,\ \forall\, g \in G,$$

und zwar gilt (Satz von R.P. Stanley [26])

$$\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G_{\det^{-1}} = \Omega \cdot \mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G. \tag{2}$$

Sei nun $D\Omega := \{\ D_s(\Omega) \mid s \in \mathbb{F}[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]\ \}$ ein Unterraum von $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$. Mit Hilfe von (2) läßt sich zeigen :

Lemma 0.3 *Ist der Invariantenring $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$ polynomial, dann gilt $H \cong D\Omega$, also H ist zyklisch.*

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, daß $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G) = |G|$ ist. Nun betrachten wir die Algebra $\hat{S}^*$, die durch die Menge $\{ \ e^x := \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{m!} \mid \forall \ x \in V^* \ \}$ und $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ erzeugt wird. Die Differentialoperation von $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]$ auf $\hat{S}^*$ wird zusätzlich durch $D_s(e^x) = s(x)e^x$, für alle $s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]$, definiert. Für $x \in V^*$ definieren wir einen endlichdimensionalen Vektorraum $H_x := \{ \ h \in \hat{S}^* \mid D_s(h) = s(x)h$, für alle $s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]^G \ \}$.
Angenommen $s_1, \cdots, s_k$ seien homogene Elementen in $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]$, die auf eine Basis für $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G$ projiziert werden. Jedes homogene Element $F \in H_x$ läßt sich in der Form

$$F = D_s(\Omega e^x), \quad s = \sum_{i=1}^{k} c_i s_i, \ c_i \in \mathbb{F}$$

schreiben. Nach der Berechnung gilt, daß $F \neq 0$ ist, wenn $s \neq 0$. Das bedeutet, daß die Abbildung

$$\{s | s = \sum_{i=1}^{k} c_i s_i, \ c_i \in \mathbb{F}, \ s_i \text{ ein Basiselement in } \mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G \ \} \longrightarrow H_x$$

injektiv ist. Damit folgt $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G) \leq \dim_{\mathbb{F}} H_x$ für jedes $x \in V^*$, daher ist die Zahl $\dim_{\mathbb{F}}(H_x)$ unabhängig von der Wahl von x. Nun betrachten wir statt der Gruppe G die Isotropiegruppe $G_x := \{ \ g \in G \mid g \cdot x = x \ \}$ von $x \in V^*$. Jedes homogene Element $F \in H_x$ läßt sich dann in der Form

$$F = \sum_{g \in G} g(Pe^x) \text{ mit } \deg(gP) \geq (|G_x| - 1)^n, \text{ für alle } \ g \in G, \tag{3}$$

schreiben, wobei $P \in H$ mit $D_s(P) = 0$, für alle $s \in \mathbb{F}[\mathfrak{A}]^{G_x}$. Da die Zahl $\dim_{\mathbb{F}} H_x$ unabhängig von der Wahl von x ist, wählen wir ein $x \in V^*$, so daß $G_x = \{id\}$. Aus der Formel (3) mit $G_x = \{id\}$ folgt somit, daß F eine lineare Kombination von $\{e^{g(x)}\}_{g \in G}$ über $\mathbb{F}$ ist. Außerdem gilt im Allgemeinen $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G) \geq |G|$ im Sinne der Graduierung. Daraus ist zu schließen :

Lemma 0.4 *Sei $H \cong D\Omega$, dann gilt* $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G) = |G|$.

Mit dem Isomorphismus $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G \cong \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G} \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ läßt sich feststellen, daß $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ als $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$-Modul durch die $k = |G|$ homogenen Elemente $s_1, \cdots, s_k$ endlich erzeugt wird. Um die lineare Unabhängigkeit von $s_1, \cdots, s_k$ über $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ zu zeigen, wurde zuerst eine sogenannte Twisted-Derivation $\triangle_\sigma$ bezüglich einer Pseudospieglung $\sigma \in G$ definiert :

$$\triangle_\sigma(f) := \frac{f - \sigma f}{l_\sigma} \ , \ \forall \ f \in \mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n].$$

Der Grad von $\triangle_\sigma(f)$ unterscheidet sich von dem Grad von f um 1. Dies ist zweckmäßig für die Anwendung von Induktion. Genauere Details für den Beweis befinden sich zum Beispiel in ([25] ab S. 77). Unter der Bedingung, daß $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G) = |G|$ ist, ist nun $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ frei über $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]^G$. Also haben wir (1) $\Leftrightarrow$ (2) im Satz (0.1) gezeigt. Letzlich erbrachte R. Kane den Beweis (2) $\Leftrightarrow$ (3). Er erklärte :

Die zuvor definierte Differentialoperation D induziert eine Differentialoperation, bezeichnet wieder mit D, von $\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G$ auf H, nämlich auf $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G$. Das homogene Element Ω ist dann die Fundamentalklasse in $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G)_i \times (\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G)_{m-i} & \rightarrow & (\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G)_m \cong \mathbb{F} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \langle\ \alpha\beta\ ,\ \Omega\ \rangle, \end{array}$$

für alle $i \geq 0, m = \deg(\Omega)$, ist eine nichtausgeartete Bilinearform. Aus der Dualität zwischen $(\mathbb{F}[\mathfrak{A}]_G)_j$ und $(\mathbb{F}[\mathfrak{X}]_G)_j$, für alle $j \geq 0$, ergibt sich die Eigenschaft der Poincarédualität. Außerdem ist die Bedingung $H \cong D\Omega$ äquivalent zur Bedingung $\langle \alpha\ , D_\beta(\Omega)\rangle \in \mathbb{F} - \{0\}$ für $\alpha \neq 0, D_\beta(\Omega) \neq 0$. Und durch die Gleichung

$$\langle \alpha\beta\ , \Omega \rangle = \langle \alpha\ , D_\beta(\Omega) \rangle$$

ist dann (2) $\Leftrightarrow$ (3) von Satz (0.1) gezeigt.

R. Steinberg und R. Kane haben sich nur mit der Bedingung $\mathrm{Char}\,\mathbb{F} = 0$ beschäftigt. Ihre Beweisführung funktioniert leider in der Charakteristik $p \neq 0$ nicht, da z.B. die dual Hopf-Algebra zu $\mathbb{F}[x_1, \cdots, x_n]$ keine Polynomalgebra ist, sondern eine Algebra von dividierten Potenzen, die kein noetherscher Ring ist. Darüber hinaus gilt das Argument, welches die Unabhängigkeit von $\dim_{\mathbb{F}}(H_x)$ zeigt, auch nicht ohne weiteres in der Charakteristik $p \neq 0$.

Der Anlaß zu dieser Arbeit ist der o.g. Artikel von R. Steinberg. Im ersten Abschnitt werden die Grundlagen, die in den weiteren Abschnitten benötigt werden, eingeführt. In den Abschnitten zwei betrachten wir $\mathbb{F}$-Vektorräume V mit $\dim_{\mathbb{F}}(V) = 2$. Wir zeigen für den modularen Fall (d.h. beliebige Charakteristik):

$$\begin{array}{ll} \mathbb{F}[V]_G & \text{ist genau dann eine Poincarédualitätsalgebra,} \\ \text{wenn} & \mathbb{F}[V]^G \text{ eine Polynomalgebra ist.} \end{array} \qquad (*)$$

Im Abschnitt drei betrachten wir den Fall $\dim_{\mathbb{F}}(V) = 3$, in dem die endlichen p-Gruppen P $(p = \mathrm{Char}(\mathbb{F}))$ eine entscheidene Rolle spielen.

Im Abschnitt vier zeigen wir, daß diese Ergebnisse (*) auch unter den Voraussetzungen $|G| \in \mathbb{F}^\times$ und $\dim_{\mathbb{F}}(V) < \infty$ noch gültig sind.

Zum Schluß gehen wir auf den Satz von C. Chevalley ([7][22]) ein :

$$\text{Seien } |G| \in \mathbb{F}^{\times} \text{ und } \mathbb{F}[V]^G \text{ eine Polynomalgebra,}$$
$$\text{dann ist } \mathbb{F}[V]_G \text{ eine reguläre Darstellung von } G.$$

Für eine beliebige Charakteristik ist der Satz nicht richtig, allerdings ist er auf die sogenannte Grothendieck-Gruppe übertragbar.