2 Einleitung

2.1 Entwicklung baustatischer Berechnungsverfahren - Problemstellung

Die grundlegenden, noch heute gebräuchlichen Berechnungsmodelle für Biegestäbe entstanden im Bauingenieurwesen zu Anfang des 20. Jahrhunderts und früher. In dieser Zeit entstanden z.B. die Fachwerkmodelle zur Beschreibung der Tragwirkung von Stahlbetonbalken und die Modelle über Herleitung und Bedeutung der Querschnittsverwölbung.

Durch die Beschränkung der damaligen Rechentechnik auf die Handrechnung war es eine Notwendigkeit, diese Modelle soweit zu vereinfachen, dass eine analytische Lösung möglich ist. Die Vereinfachungen bestanden im Wesentlichen in der Linearisierung von Zusammenhängen, der Beschränkung auf ausgewählte Querschnittsgeometrien wie dem Kreis und dem Rechteck, und der Entkoppelung von Zustandsgrößen durch Orthogonalisierung und Verwendung eines linear-elastischen Werkstoffgesetzes. Numerische Verfahren kamen wegen des damals unvertretbar hohem Lösungsaufwandes nicht zur Anwendung.

Aufbauend auf den analytischen Lösungen dieser Zeit entwickelten sich vielfältige Methoden zur Lösung von Berechnungsaufgaben im Bauingenieurwesen. Besondere Bedeutung in der heutigen Bauingenieurpraxis hat die Methode der finiten Elemente (FEM) erlangt. Aufbauend auf den analytischen Lösungen für Teilsysteme, z.B. Stabelemente, dient sie heute der statischen Berechnung von Tragwerken.

Die Weiterentwicklung der Berechnungsverfahren erfolgt zunehmend nur noch durch die Weiterentwicklung von Berechnungsprogrammen nach der Methode der finiten Elemente. Der Anwender kann nur noch das berechnen, was bereits programmiert worden ist. Weil er selbst nicht an der Weiterentwicklung solcher FEM-Programme beteiligt ist, wird es für ihn praktisch unmöglich, sich mit der Berechnung neuer Baustoffe wie beispielsweise hochfestem Beton, Faserverbundwerkstoffen oder Verbundsicherheitsglas, selbständig zu befassen und sie mit vertretbarem Aufwand durchzuführen.

Solange jedoch die Berechnungsverfahren auf einen Baustoff abgestimmt sind, ist der Ingenieur bei der Wiederverwertbarkeit des Wissens und der Werkzeuge eingeschränkt. *Stein (2000)* hat angesprochen, dass die Schere zwischen den Forschungsergebnissen einerseits und dem anwendbaren Wissen in der Praxis andererseits immer weiter auseinander klafft.

Die Forderung, das Grundlagenwissens in der Ausbildung zum Bauingenieur nicht zu vernachlässigen, ist heute schwierig umsetzbar, da die Anwendung dieser Grundlagen dem Nutzer heutiger Programmpakte i.d.R. nicht möglich ist. Das Studieren von Effekten, die durch die Variation einzelner Parameter entstehen, findet nicht statt und das Verständnis der Zusammenhänge wird erschwert.

Durch die erhöhten Anforderungen an die Berechnungsverfahren wird immer häufiger die Berücksichtigung von nichtlinearen Materialgesetzen gefordert. In der Anwendung ist sie jedoch noch eher die Ausnahme. Oftmals handelt es sich bei der Berücksichtigung von nichtlinearen Effekten nur um eine Erweiterung der linear-elastischen Berechnungsverfahren. So werden z.B. Stahlbetonbalken im gerissenen Zustand II häufig mit abgeminderten, linear-elastischen Biegesteifigkeiten berechnet. Dieses Vorgehen lässt jedoch immer nur die Berücksichtigung einzelner nichtlinearer Effekte zu. *Ramm (2000)* meint zu dieser Entwicklung, dass ihr vielfach die Realitätsnähe fehlt und die Entwicklung notwendiger Berechnungsmodelle verhindert wird.

Für die Anwendung im Massivbau sind verschiedene Programme zur Berücksichtigung typischer Nichtlinearitäten entstanden. Beispielsweise Programme zur Berechnung und Bemessung schlanker Stützen. Sie behandeln nur spezielle Fragestellungen. Die Erweiterung zur Berücksichtigung weiterer Nichtlinearitäten ist nicht vorgesehen und ist in der Regel auch nicht möglich. Auch vergleichsweise einfache Aufgaben wie die Berechnung kippgefährdeter Träger im Bauzustand, die Berechnung von Zwangswirkungen bei beanspruchungsbedingter Steifigkeitsabnahme oder die Berechnung nachträglich ergänzter Querschnitte sind nach wie vor noch nicht befriedigend gelöst.

Eine vollständige Darstellung zur Entwicklung und zum Stand des Wissens erfolgt jeweils im Zusammenhang mit der Darstellung der Einzelthemen in den folgenden Unterabschnitten. Insbesondere sind diese zum Themenkomplex des Differenzialgleichungssystems in Kapitel 4, zum Zusammenhang Schnittgrößen und Verzerrungen in Kapitel 5 und zu den mathematischen Methoden in Kapitel 6 zu finden.

2.2 Ziele der Arbeit

Es wird ein konsequenter Ansatz zur Beschreibung des Tragverhaltens von stabförmigen Bauteilen vorgestellt. Im Gegensatz zum üblichen Vorgehen werden bei der Beschreibung der Verformungsgrößen und der Schnittgrößen entlang der Stabachse Vereinfachungen, die über die Modellbildung als Stab hinausgehen, vermieden. Alle geometrischen Effekte werden somit berücksichtigt, unter anderem das Kippen und Einflüsse großer Verformungen. Es soll ein Beitrag zur Vereinheitlichung der Berechnungsgrundlagen der verschiedenen Bauarten leisten.

Der Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrungsgrößen wird herausgelöst aus dem Differentialgleichungssystem des Biegestabes betrachtet. Durch die Definition der Querschnittsverzerrungen als Funktion der Schnittgrößen kann die Berechnung der Zustandsgrößen entlang der Stabachse unabhängig von der Art der Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen erfolgen.

Es wird eine unverformte Bezugsachse für alle Zustandsgrößen verwendet. Durch die Loslösung von der üblicherweise verwendeten verformten Stabachse als Bezugssystem für die Schnittgrößen ergibt sich eine übersichtliche Beschreibung der Zusammenhänge entlang des Stabverlaufs. Durch die Aufstellung einer konsequente Theorie zur Beschreibung der Zustandsgrößen des Stabes können für die nichtlineare Berechnung von Stäben einige übliche Annahmen aufgegeben werden. So ist es zum Beispiel nicht nötig, dass der elastische Schwerpunkt eines Querschnittes mit der Bezugsstabachse zusammenfällt oder dass die lokalen Stabachsen den Querschnittshauptachsen entsprechen.

Durch die Aufgabe derartiger Annahmen wird die einfache Berücksichtigung vielfältiger Nichtlinearitäten ermöglicht. Ziel einer allgemeinen Darstellung ist es, alle das Tragverhalten bestimmenden Einflüsse abzubilden und für den konkreten Fall unbedeutende Einflüsse zu vereinfachen. Es sollte aber nicht auf diesen Vereinfachungen aufgebaut werden, wie in vielen Ansätzen zu beobachten.

Einhergehend mit den erwähnten klassischen Voraussetzungen geht der Verzicht auf die analytische Lösbarkeit des den Biegestab beschreibenden Differentialgleichungssystems (DGL-System). Es wird ein allgemeingültiges DGL-System erster Ordnung für die Beschreibung des Verlaufes der Zustandsgrößen entlang der Stabachse angegeben. Die Lösung erfolgt mit mathematischen Standardalgorithmen, wie sie von gängigen Mathematikprogrammen zur Verfügung gestellt werden. Die notwendigen Beziehungen werden angegeben, um mit einem derartigen Programmsystem Stabzüge zu berechnen. Somit ist durch Verwendung eines Mathematikprogramms die eigenständige Implementierung in einer höheren Programmiersprache nicht erforderlich, und der Anwender kann selber entscheiden, welche Vereinfachungen er vornehmen möchte und welche nicht.

- Wahl einer unverformten Stabachse als Bezugssystem für alle Zustandsgrößen.
- Verzicht auf Linearisierungen bei der Beschreibung der Zustandsgrößen.
- Verwendung einer Funktion zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Verzerrungen und Schnittgrößen.
- Verzicht auf die analytische Lösbarkeit und Verwendung numerischer Verfahren.
- Anwendung eines Mathematikprogramms anstatt einer eigenständigen Programmierung

Bild 2.1: Ziele der Arbeit

2.3 Vorgehen

Zuerst erfolgt eine Begriffsbestimmung der Zustandsgrößen. In der Arbeit wird auf die Nichteindeutigkeit der gebräuchlichen Definitionen der Verdrehungen eingegangen und eine eindeutige Beschreibung der Verdrehungen vorgestellt. Hiernach werden die Beziehungen der Zustandsgrößen, bezogen auf die unverformte Stabachse dargestellt. Zu den genauen Herleitungen der Beziehungen werden grundsätzlich auch die sich durch eine Linearisierung ergebenden Vereinfachungen aufgeführt. Sie ermöglichen den Vergleich zwischen den aus der linearisierten Elastizitätstheorie bekannten Beziehungen. Verwendet werden im weiteren Verlauf grundsätzlich die mathematisch exakten Ausdrücke.

Durch diese Darstellung ergibt sich ein DGL-System, welches frei von Termen zur Bestimmung der Schnittgrößengradienten infolge einer Änderung der Stabverformung ist. Es besitzt dadurch eine besondere Übersichtlichkeit. Die für den bauüblichen Bezug der Schnittgrößen auf die verformte Stabachse erforderlichen Transformation werden angegeben. Hierbei wird das gewählte Bezugssystem mit den üblicherweise verwendeten Bezugssystem der verformten Stabachse verglichen.

Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den zugehörigen Verzerrungsgrößen erfolgt im Rahmen einer Querschnittsbetrachtung und ist als funktionaler Algorithmus im DGL-System berücksichtigt.

Der allgemeingültige Aufbau einer derartigen Funktion auf der Grundlage der Spannungsintegration wird beschrieben. Anschließend wird der Sonderfall eines Querschnitts aus linear-elastischem Material behandelt.

Mangels eines geeigneten allgemeingültigen Modells für den Zusammenhang Schnittgrößen – Verzerrungen von Stahlbetonbalken für eine kombinierte Biege- und Torsionsbeanspruchung wird ein kombiniertes Modell vorgeschlagen. Verschiedene Aspekte der Anwendung auf Stahlbetonquerschnitte werden betrachtet.

Die Lösung des durch die Gradienten der Zustandsgrößen gegebenen DGL-Systems erfolgt auf numerischem Wege. Hierfür werden mathematische Formulierungen des Biegestabes angegeben und die Anwendbarkeit verschiedener Algorithmen untersucht. Es wird eine beispielhafte Implementierung in MATLAB®[1] verwendet.

Zum Abschluss wird die Anwendung anhand von zwei Beispielen dargelegt.

[1] MATLAB®, The Language of Technical Computing, ist ein Produkt der The MathWorks Inc..

3 Berechnung von Stabzügen

Die Berechnung von Tragwerken dient dem Zweck, die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit unter gegebenen Randbedingungen hinreichend genau nachzuweisen. Sie erfolgt nach dem Prinzip der Reduktion auf das wesentliche Tragverhalten des Systems, sowohl hinsichtlich der Systemidealisierung als auch der Wahl des Rechenverfahrens. Für die Durchführung der Berechnung wird die Verhältnismäßigkeit des Aufwandes entscheidend sein für die Wahl des baustatischen Modells[2, 3].

Obwohl eine Baukonstruktion eine dreidimensionale Struktur hat, bildet das Stabtragwerk häufig ein hinreichend genaues Modell, um das Nachweisziel zu erreichen. Neben der Tatsache, dass Stabtragwerke häufig rechnerisch einfacher zu behandeln sind, kommen sie einer ingenieurmäßigen Betrachtungsweise näher, bei der die wesentlichen und maßgeblichen Einflüsse betrachtet und unwesentliche vernachlässigt werden.

Ein Stabwerk setzt sich aus Stäben zusammen. Als Stäbe werden Bauteile bezeichnet, bei denen zwei der drei räumlichen Abmessungen klein gegenüber der dritten sind. *(Bild 3.1)*

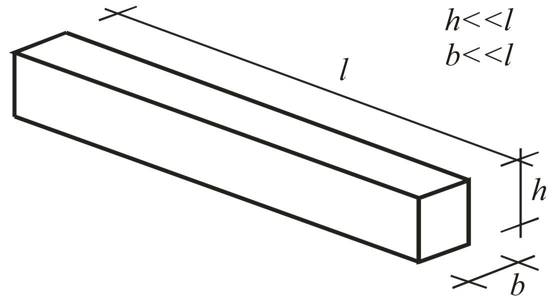

Bild 3.1 Definition eines Stabes über die Verhältnisse der Abmessungen zueinander

Für ein eindimensionales Tragwerk lassen sich die Zustandsgrößen[4] als Einzahlangaben allein in Abhängigkeit von einer Ordinate entlang der Stablängsrichtung zusammenfassen. Ist zudem die räumliche Ausdehnung zu berücksichtigen, liegt ein flächiges, zweidimensionales oder räumliches, dreidimensionales Tragwerksmodell vor.

Werden die Voraussetzungen so gewählt, dass eine weitreichende Linearisierung des den Stabverlauf beschreibenden Differentialgleichungssystems (DGL-System) möglich ist, existiert eine analytische Lösung der Differenzialgleichungen – womit die gesuchten Zustandsgrößen direkt berechnet werden können. Für den allgemeinen Fall gibt es die Möglichkeit der numerischen Lösung des DGL-Systems. Es handelt sich hierbei um mathematische Verfahren, die die Berechnung von Stabzügen in verschiedene Abstraktionsebenen gliedern.

- Das Randwertproblem
- Das Anfangswertproblem
- Das DGL-System erster Ordnung
- Der Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen

Der Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen wird durch die Geometrie des Querschnitts und das Werkstoffverhalten definiert. Die Schnittgrößen sind die über die Querschnittsfläche integrierten Spannungen. Die Spannungen ergeben sich

[2] *Hofmann / Ramm (1995)* Seite 2
[3] *Meskouris / Hake (1999)* Seite 2
[4] z.B. Verschiebungen, Verdrehungen, Momente, Querkräfte Verwölbungen (siehe Kap. 4)

aus der Verzerrung des Querschnittes. Dieser Zusammenhang lässt sich mathematisch als Funktion darstellen

$$\mathbf{R} = f\left(\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\kappa}\\ \boldsymbol{\varepsilon}\end{Bmatrix}\right)$$

Diese Funktion beinhaltet die Nichtlinearitäten des Querschnitts. Alternativ kann die Bestimmung auch über hybride Modelle erfolgen, was bei dieser Art der Definition unerheblich für das Ergebnis ist. Die Umkehrung der Funktion, die für die Aufstellung des DGL-Systems benötigt wird, lässt sich analytisch nur in Sonderfällen angeben. Die Lösung erfolgt daher i.d.R. auf numerischem Wege. *(siehe Kapitel 5+6).*

Die Beschreibung der Zustandsgrößen des Stabzuges erfolgt über **ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung** (DGL-System 1. Ordnung). In diesem werden die Abhängigkeiten der Zustandsgrößen, d.h. Verformungsgrößen und Schnittgrößen, untereinander festgelegt. Hier ist ebenfalls zu definieren, welche geometrischen Effekte vernachlässigt werden und welche berücksichtigt werden *(siehe Kapitel 4).*

In der klassischen technischen Biegelehre wird das DGL-System so weitreichend linearisiert, dass eine analytische Lösung für die üblichen Probleme existiert. Bei der Berücksichtigung vielfältiger nichtlinearer Einflüsse existiert keine analytische Lösung. Die numerische Lösung des DGL-Systems erster Ordnung für den Stab entlang seiner Stabachse ist ein **Anfangswertproblem**. Hierfür wurden durch die Mathematik diverse Lösungsverfahren entwickelt *(siehe Kapitel 6).*

Die Eigenheiten des betrachteten Systems werden z.B. durch Lagerungsbedingungen angegeben. Sie stellen im mathematischen Sinne Randbedingungen dar. Die Berechnung eines baustatischen Systems ist ein allgemeines **Randwertproblem**. Hierbei sind verschiedene Parameter, im mathematischen Sinne Anfangswerte, unbekannt und so zu bestimmen, dass gegebene Randwerte an gegebenen Stellen x eingehalten werden *(siehe Kapitel 6).*

Zwischen den einzelnen Abstraktionsebenen lassen sich allgemeingültige Schnittstellen definieren, durch die es möglich ist, einzelne Ebenen zu modifizieren, sei es in Richtung einer genaueren Berechnung oder eines effizienteren Rechengangs. Die möglichen Vereinfachungen im Rahmen der technischen Biegetheorie lassen sich jeweils einer Abstraktionsebene zuordnen.

Die Einteilung in Abstraktionsebenen wird im Bauwesen seit alters her verwendet. Schon in der linear-elastischen Berechnung von Stabzügen wurden die Querschnittswerte für einen Stab im Vorwege berechnet und normiert. Die Lösung des Stabzugproblems erfolgt nur anhand dieser Querschnittswerte und nicht mit Hilfe der realen Querschnittsgeometrie. Hier stellen die Zahlenwerte der Steifigkeiten die Schnittstelle dar. Für nichtlineare Berechnungen ist diese Schnittstelle jedoch nicht ausreichend und muss erweitert werden. Entgegen einzelnen Ansätzen in der Literatur, bei denen die Lösung des Stabzugproblems nach der linearen Biegetheorie um einzelne Werte erweitert wurde, ist für eine allgemeingültige Lösung eine andere Struktur der Schnittstellen nötig, die abhängig von den gewählten Abstraktionsebenen ist.

4 DGL-System erster Ordnung

In Lehrbüchern findet man die folgende Darstellung für die Differentialgleichung (DGL) des Biegebalkens nach Theorie 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x) = \frac{1}{EI_y}\left(p(x) - N \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x)\right)\right)$$

Für diese inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung lassen sich analytische Lösungen angeben. Bedeutungsgleich zu dieser Differentialgleichung ist das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung (DGL-System):

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x) = \pi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \pi(x) = \frac{1}{EI_y} M(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M(x) = V(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = p(x) - \frac{\partial}{\partial x}\pi(x) \cdot N = p(x) - \frac{1}{EI_y} M(x) \cdot N$$

Die vier Funktionen des DGL-Systems bilden die Zustandsgrößen über den Stabverlauf ab. Die Berücksichtigung von zusätzlichen Effekten erfordert lediglich Ergänzungen der Gleichungen. Z.B. kann eine Schubgleitung des Querschnitts durch folgende Modifikation berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x) = \pi(x) - \frac{1}{GA_S} V(x)$$

Die Berücksichtigung von nichtlinearem Querschnittsverhalten infolge Biegung führt zu folgender Modifikation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \pi(x) = \rho(x) = f(M(x))$$

In diesem Fall ist das nichtlineare Verhalten nicht näher spezifiziert. Durch die Angabe einer Funktion, die zu einem gegebenen Moment die zugehörige Krümmung bestimmt, wird diese Festlegung aus dem DGL-System herausgelöst.

Für die Anwendung im dreidimensionalen Raum entstehen gegenseitige Beeinflussungen der Zustandsgrößen aus den verschiedenen Ebenen im Raum. Auf diese Abhängigkeiten wird im folgenden Kapitel über die Zustandsgrößen eingegangen *(siehe Kapitel 4.1)*. Dabei wird auf die Linearisierung der Zusammenhänge, in Gegensatz zum obigen Beispiel, gänzlich verzichtet.

Des Weiteren erfolgt der Bezug nicht wie in obigen Beispiel auf die verformte Stabachse. Es wird die unverformte Stabachse als Bezugssystem eingeführt. Durch den konsequenten Bezug auf das unverformte Koordinatensystem vereinfacht sich die Beschreibung der Gradienten der einzelnen Zustandsgrößen, insbesondere für die Schnittgrößen, sehr. Für die Behandlung des Zusammenhanges zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen als Querschnittsbetrachtung ist lediglich eine Transformation der Schnittgrößen in das verformte Koordinatensystem und anschließend eine Transformation der Querschnittsverzerrungen in die Gradienten der Zustandsgrößen erforderlich. Einem Vergleich der beiden Bezugssysteme ist das Kapitel 4.2 gewidmet.

Wie im Beispiel erfolgt keine Festlegung in DGL-System über die Art und Weise, nach der der Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen des Querschnitts bestimmt wird.

Die analytische Lösung der Differentialgleichung erfordert für ihre Existenz weitreichende Linearisierungen. Wird jedoch, wie hier geschehen, auf diese frühzeitigen Linearisierungen verzichtet, ergeben sich durch den Bezug der Schnittgrößen auf die verformte Stabachse sehr komplexe Ausdrücke. Diese entfallen beim Bezug auf die unverformte Achse. Hierdurch wird jedoch auf die Möglichkeit der analytischen Lösbarkeit verzichtet. Eine numerische Lösung ist nötig. Auf sie wird in Kapitel 6 eingegangen.