



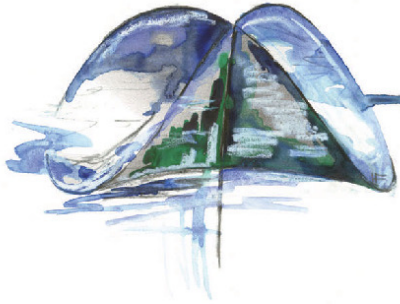
Thorsten Warmt (Autor)  
**Gorenstein-Dualität und topologische Invarianten  
von Singularitäten**

---

**Gorenstein-Dualität und  
topologische Invarianten  
von Singularitäten**

---

Thorsten Warmt



Cuvillier Verlag Göttingen

<https://cuvillier.de/de/shop/publications/3333>

Copyright:  
Cuvillier Verlag, Inhaberin Annette Jentsch-Cuvillier, Nonnenstieg 8, 37075 Göttingen,  
Germany  
Telefon: +49 (0)551 54724-0, E-Mail: [info@cuvillier.de](mailto:info@cuvillier.de), Website: <https://cuvillier.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>I Eine Signatur für nicht-isolierte Singularitäten</b>	<b>1</b>
<b>1 Signatur isolierter reeller Singularitäten</b>	<b>3</b>
1.1 Frobenius-Algebren . . . . .	3
1.2 Nulldimensionale vollständige Durchschnitte . . . . .	4
1.2.1 Der klassische Zugang . . . . .	4
1.2.2 Lokale Dualität für nulldimensionale vollständige Durchschnitte . . . . .	7
1.2.3 Berechnung der Signatur . . . . .	10
1.3 Signatur isolierter Singularitäten . . . . .	10
1.4 Einige Beispiele für topologische Interpretationen von Sig- naturen . . . . .	12
1.4.1 Der Satz von Eisenbud und Levine . . . . .	12
1.4.2 Reelle Zweige von Kurvensingularitäten . . . . .	13
1.4.3 Eulercharakteristik reeller Milnorfasern . . . . .	15
1.4.4 Eulercharakteristik reeller Hyperflächen mit iso- lierten Singularitäten . . . . .	16
<b>2 Signatur nicht-isolierter reeller Singularitäten</b>	<b>19</b>
2.1 $m$ -Torsionsmodul fast-vollständiger Durchschnitte . . . . .	20
2.2 Eine Homologie-Kohomologie-Spektralfolge . . . . .	21
2.3 Eine Paarung für den $m$ -Torsionsmodul . . . . .	24
2.3.1 Lokale Dualität für den $m$ -Torsionsmodul . . . . .	24

2.3.2	Alternative Konstruktion der Paarung auf dem $m$ -Torsionsmodul . . . . .	26
2.4	Nicht-isolierte Singularitäten mit einem eindimensionalen kritischen Ort . . . . .	29
2.5	Berechnung der Paarung und ihrer Signatur . . . . .	30
2.6	Singularitäten mit Ringstruktur auf dem Jacobimodul . . . . .	42
2.7	Eine Paarung auf dem Jacobimodul durch Einbettung in eine Serie . . . . .	44
2.7.1	Serien isolierter Singularitäten . . . . .	44
2.7.2	Eine Paarung durch Einbettung in eine Serie . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Topologische Bedeutung der Signatur</b>	<b>49</b>
3.1	Paarung über flache Deformationen . . . . .	49
3.2	Deformationen nicht-isolierter Singularitäten . . . . .	50
3.3	Symmetrie der Paarung . . . . .	54
3.4	Topologie komplexer nicht-isolierter Singularitäten . . . . .	54
3.5	Interpretation der Signatur reeller nicht-isolierter Singularitäten . . . . .	55
3.6	Singularitäten ohne Morsifikation . . . . .	62
3.7	Anwendung auf ebene algebraische Kurven . . . . .	64
3.7.1	Klassische Nullstellenlokalisierung . . . . .	64
3.7.2	Signatur für Kegel . . . . .	66
<b>II</b>	<b>Deformationen und Jacobifaktoren isolierter Kurvensingularitäten</b>	<b>69</b>
<b>4</b>	<b>Cohen-Macaulay-Moduln auf Kurven und ihre Extensionen</b>	<b>71</b>
4.1	Cohen-Macaulay-Moduln auf Hyperflächen . . . . .	71
4.1.1	Kurvensingularitäten endlichen Darstellungstyps . . . . .	72
4.1.2	Matrixfaktorisierungen und periodische Auflösungen von Cohen-Macaulay-Moduln . . . . .	72
4.1.3	Cohen-Macaulay-Moduln vom Rang Eins . . . . .	74
4.2	Extensionen von Cohen-Macaulay-Moduln . . . . .	74
4.3	Extensionen $\text{Ext}^i(M, M)$ . . . . .	77
4.4	Selbstdualität der Extensionen auf Kurven . . . . .	79
4.5	Deformation von Matrizen, Moduln und Ringen . . . . .	85

4.5.1	Deformationen von Moduln . . . . .	85
4.5.2	Deformationen von Matrizen . . . . .	86
4.5.3	Zusammenhänge zwischen den Deformationen . .	87
4.6	Beispiele von Moduln auf Kurven . . . . .	90
4.6.1	Einfache gewichtet homogene irreduzible Singu- laritäten . . . . .	90
4.6.2	Unimodale gewichtet homogene Singularitäten . .	93
4.6.3	Eine bimodale Singularität . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Jacobivarietäten und Deformationen von Moduln</b>	<b>101</b>
5.1	Kompaktifizierte Jacobivarietäten . . . . .	103
5.2	Lokale Struktur kompaktifizierter Jacobivarietäten . . . . .	104
5.3	Die Modulvarietät . . . . .	106
5.4	Lokale Struktur der Jacobifaktoren . . . . .	107
5.5	Eulerzahlen der Jacobifaktoren einiger Klassen von Sin- gularitäten . . . . .	109
5.5.1	Reduktion auf den rationalen einzweigen Fall . .	109
5.5.2	Eulerzahl der Jacobifaktoren zu $x^p - y^q$ . . . . .	109
5.5.3	Eulerzahl der Jacobifaktoren einfacher Singulari- täten . . . . .	110
5.6	Bettizahlen der Jacobifaktoren monomialer Singularitäten	111
5.7	Stratifikation der Modulvarietät einfacher Singularitäten .	112
5.8	Singularitäten positiver Modalität . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Reelle Morsifikationen und das <math>\delta</math>-konstante Stratum</b>	<b>117</b>
6.1	Multiplizität des $\delta$ -konstanten Stratums . . . . .	117
6.2	Reelle Morsifikationen einfacher irreduzibler Singularitäten	119
6.2.1	Die $A_{2k}$ -Singularitäten . . . . .	119
6.2.2	Die $E_6$ -Singularität . . . . .	122
6.2.3	Die $E_8$ -Singularität . . . . .	127
6.3	Problematik für Singularitäten höherer Modalität . . . . .	128
<b>A</b>	<b>Algebraische Grundlagen</b>	<b>131</b>
A.1	Lokale Kohomologie und lokale Dualität . . . . .	131
A.1.1	Definition des lokalen Kohomologiefunktors . . . . .	131
A.1.2	Der lokale Kohomologiefunktor als direkter Limes von Extensionsfunktoren . . . . .	132

---

A.1.3	Čech-Komplexe zur Berechnung lokaler Kohomologie . . . . .	133
A.1.4	Verschwindungssätze . . . . .	137
A.1.5	Lokale Dualität . . . . .	138
A.2	Koszul-Komplexe . . . . .	142
A.3	Auflösung von Komplexen . . . . .	144
<b>B</b>	<b>Singular-Bibliotheken</b>	<b>147</b>
B.1	Bibliothek zur Berechnung der Signatur . . . . .	147
B.1.1	Die Bibliothek <code>paarung.lib</code> . . . . .	147
B.1.2	Die Bibliothek <code>iso.lib</code> . . . . .	151
<b>C</b>	<b>Ein Signaturkatalog</b>	<b>157</b>
C.1	Einige Klassen von Geradensingularitäten . . . . .	157
C.2	Kegel über Quartiken . . . . .	162