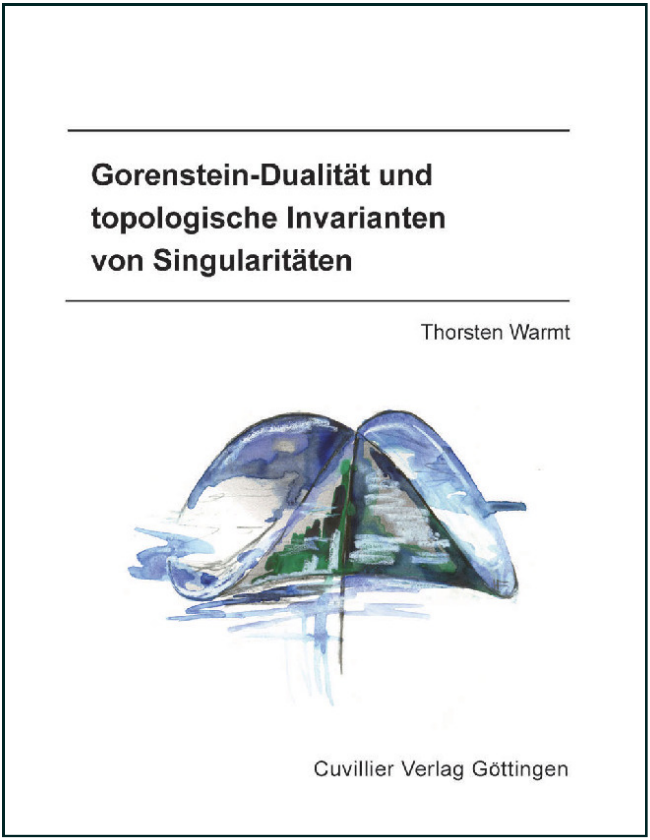
Thorsten Warmt (Autor)

Gorenstein-Dualität und topologische Invarianten von Singularitäten



https://cuvillier.de/de/shop/publications/3333

Signatur isolierter reeller Singularitäten

In diesem Kapitel wird zunächst der klassische Zugang erläutert, auf einem nulldimensionalen vollständigen Durchschnitt die Struktur einer Frobenius-Algebra zu definieren. In Abschnitt 1.2.2 wird die entsprechende multiplikationsinvariante reguläre Bilinearform mit Blick auf eine Verallgemeinerung im zweiten Kapitel erneut durch lokale Dualität konstruiert. Besonderes Augenmerk wird dann auf das Beispiel des Milnorringes einer isolierten Singularität gelegt. Abschließend werden Beispiele für reelle Frobenius-Algebren und die Bedeutung ihrer Signatur angeboten.

1.1 Frobenius-Algebren

Definition 1.1.1. Eine *Frobenius-Algebra* über einem Körper k ist eine kommutative und assoziative k-Algebra A mit Eins, zusammen mit einer nichtentarteten symmetrischen Bilinearform $\beta : A \times A \to k$, die invariant bezüglich Multiplikation ist, welche also $\beta(ab, c) = \beta(a, bc)$ für alle $a, b, c \in A$ erfüllt.

Ist A speziell eine Frobenius-Algebra über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so besitzt die zugehörige Bilinearform eine Signatur. Im geometrischen Kontext gestattet eine solche Signatur oft eine topologische Interpretation. Beispiele dafür werden im abschließenden Abschnitt dieses Kapitels gegeben.

1.2 Nulldimensionale vollständige Durchschnitte

Nulldimensionale vollständige Durchschnitte tragen eine natürliche Struktur als Frobenius-Algebren. Die zugehörige Bilinearform wird in (EISENBUD und LEVINE 1975), (EISENBUD und LEVINE 1977) und (ARNOLD et al. 1985, Abschnitt 5.11) beschrieben. Die Ansätze dieser Arbeiten werden im Folgenden kurz erläutert. Schließlich wird ein weiterer Zugang über Dualitätstheorie geboten, der für eine Verallgemeinerung auf fast-vollständige Durchschnitte im zweiten Kapitel geeignet ist.

Es werden im Weiteren die folgenden Notationen genutzt: Der Ring der holomorphen Keime wird mit $\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^n,0)}$ notiert. Für den Körper der reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{K}$ bezeichne $P := \mathbb{K}[\![x_1, \ldots x_n]\!]$ den Ring der formalen Potenzreihen. Für eine Formulierung des Satzes von Eisenbud und Levine wird zusätzlich der Ring $C^\infty_{(\mathbb{R}^n,0)}$ der C^∞-Keime bei Null im $\mathbb{R}^n$ benötigt. Es sei R einer der genannten Ringe mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $f_1, \ldots, f_n$ eine reguläre Folge mit $f_i \in R$ für $i = 1, \ldots, n$. Das von den f_i erzeugte Ideal sei $J := (f_1, \ldots, f_n)$.

1.2.1 Der klassische Zugang

Ist M ein R-Modul, so heißt

$$\operatorname{Soc} M := (0 :_M \mathfrak{m}) := \{n \in M : \mathfrak{m}n = 0\}$$

Sockel von M. Zentrale Tatsache ist, dass der Sockel des endlich-dimensionalen vollständigen Durchschnittes R/J eindimensional ist. Genauer gilt der

Satz 1.2.1. *Es sei* $\underline{f_1, \ldots}, f_n \in R$ *eine reguläre Folge. Dann ist der Sockel von* P/J *gleich* $\mathbb{K}\,\overline{\mathrm{Jac}(f)}$*, wobei*

$$\mathrm{Jac}(f) := \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

die Jacobische von $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *ist.*

Bewiesen wird dies in (EISENBUD und LEVINE 1975, Proposition 2.1), der wesentliche Satz dazu ist bereits in (BERGER 1964) und (SCHEJA und STORCH 1975) zu finden.
Der Sockel des vollständigen Durchschnittes ist das eindeutig bestimmte minimale Ideal des Ringes. Betrachtet werden nun speziell Bilinearformen auf dem vollständigen Durchschnitt, die durch Komposition der Ringmultiplikation mit einer Linearform $P/J \to \mathbb{K}$ definiert sind. Ist also $\varphi \in (P/J)^*$ eine Linearform, so sei

$$\begin{array}{rccc} \beta_\varphi : & P/J \times P/J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (m_1, m_2) & \longrightarrow & \varphi(m_1 \cdot m_2). \end{array}$$

Satz 1.2.2. *Es seien* φ *und* ψ *zwei Linearformen auf P/J. Die Bilinearform* β_φ *ist genau dann entartet, wenn* φ *auf dem Sockel verschwindet. Sind die beiden Bilinearformen* β_φ *und* β_ψ *nicht-entartet und haben* φ *und* ψ *gleiches Vorzeichen auf* $\overline{\mathrm{Jac}(f)}$*, so sind die beiden Bilinearformen* β_φ *und* β_ψ *äquivalent.*

Beweis. Der Sockel Soc P/J bildet ein Ideal, es gilt

$$\beta_\varphi(\mathrm{Soc}\, P/J, P/J) = \varphi(\mathrm{Soc}\, P/J).$$

Verschwindet φ also auf dem Sockel, ist die Bilinearform β_φ singulär.
Ist umgekehrt β_φ singulär, so existiert $m \in P/J$, so dass

$$0 = \beta_\varphi(m, P/J) = \varphi(mP/J).$$

Da das Ideal mP/J das eindeutig bestimmte minimale Ideal Soc P/J enthält, folgt die Behauptung. Der Beweis der zweiten Aussage ist (EISENBUD und LEVINE 1977, Proposition 3.5) zu entnehmen. ⊡

Eine weitere Möglichkeit, die zweite Aussage zu beweisen, ist die Konstruktion einer konkreten Linearform l^0 nach (ARNOLD et al. 1985) und (VARCHENKO 1985), die nun erörtert wird. Die Beweise sind in (ARNOLD et al. 1985) zu

finden. Diese Konstruktion erfolgt im holomorphen Kontext. Sie fördert das Verständnis der Signatur der definierten Bilinearform als mit Vorzeichen der Jacobischen gezählte Anzahl der Lösungen von $f_\varepsilon = 0$ für eine kleine Störung f_ε von f. Idee bei diesem Vorgehen ist es, die Linearform zunächst für nicht-entartete kritische Punkte zu definieren und dann durch Grenzwertbildung über Deformationen fortzusetzen.
Es sei $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ holomorph, die Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ mögen eine reguläre Folge bilden. Bei einer Störung des Systems $f = 0$ zu $f = \varepsilon$ zerfällt die ursprüngliche Wurzel im Allgemeinen in $\mu = \dim_{\mathbb{K}} P/J$ Lösungen $a_1, \ldots, a_\mu$. Sei h eine Funktion auf den Punkten a_i, $i = 1, \ldots, \mu$. Dazu wird eine Linearform l^ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, auf dem Vektorraum der Funktionen auf den a_i, $i = 1, \ldots, \mu$, durch

$$l^\varepsilon(h) := \sum_{i=1}^{\mu} \frac{h(a_i)}{\mathrm{Jac}(f)(a_i)}$$

definiert. Die Linearform l^ε besitzt für $\varepsilon \to 0$ einen Grenzwert l^0. Die Existenz dieses Grenzwertes folgt aus dem

Satz 1.2.3. (Inverse der Jacobischen) *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand und $f : U \to \mathbb{C}^n$ holomorph. Die Gleichung $f = 0$ habe Lösungen in U, 0 liege nicht in $f(\partial U)$ und V bezeichne die Zusammenhangskomponente von 0 in $\mathbb{C}^n \setminus f(\partial U)$.*
Dann existiert auf V eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion φ, so dass für jeden regulären Wert y gilt

$$\varphi(y) = l^y(h).$$

Die Linearform l^0 verschwindet auf dem Jacobiideal J_f und definiert somit eine Linearform auf P/J. Daraus entsteht wie zuvor eine Bilinearform

$$\begin{array}{cccc} \beta_{l^0} : & P/J \times P/J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f, g) & \longmapsto & l^0(fg) \end{array}$$

auf dem nulldimensionalen Ring P/J.

Satz 1.2.4. *Die Bilinearform β_{l^0} ist nicht-entartet.*

Beweisidee. Der Beweis erfolgt in (ARNOLD et al. 1985, Abschnitt 5.15). Die Regularität von β_{l^0} wird zunächst für die Pham-Abbildung Φ^m, $m \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{array}{cccc} \Phi^m : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}) \end{array}$$

nachgerechnet. Da zu jedem Keim f mit isolierter Singularität eine holomorphe Familie $A(x)$ mit $A(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ existiert, so dass $A(x)f$ eine kleine Störung einer Pham-Abbildung ist, folgt die Regularität von β_{l^0} für beliebige isolierte Singularitäten. ⊡

Damit kann Satz 1.2.2 auf Seite 5 erneut bewiesen werden:
Beweis. Eine beliebige Linearform φ auf P/J ist für geeignetes $\varphi^* \in P/J$ von der Form

$$\varphi(\bullet) = \beta_{l^0}(\bullet, \varphi^*),$$

da β_{l^0} nicht-entartet ist. Damit gilt

$$\beta_\varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \beta_{l^0}(g_1 g_2, \varphi^*) = \beta_{l^0}(g_1, g_2 \varphi^*).$$

Die Form $\beta_{l^0}(\bullet, \bullet\, \varphi^*)$ ist genau dann nicht-entartet, wenn φ^* invertierbar ist. Zusätzlich gilt nach Konstruktion von l^0, dass

$$\varphi\left(\overline{\mathrm{Jac}(f)}\right) = \beta_{l^0}\left(\overline{\mathrm{Jac}(f)}, \varphi^*\right) = \mu\varphi^*(0).$$

Also ist φ^* genau dann invertierbar, wenn $\varphi\left(\overline{\mathrm{Jac}(f)}\right) \neq 0$. ⊡

1.2.2 Lokale Dualität für nulldimensionale vollständige Durchschnitte

In diesem Abschnitt wird die nicht-entartete Bilinearform auf dem nulldimensionalen vollständigen Durchschnitt P/J aus lokaler Dualität gewonnen. Die Paarung ist bereits nach Konstruktion nicht-entartet. Mit diesem Ansatz wird im nächsten Kapitel eine Paarung für fast-vollständige Durchschnitte definiert. Die hierzu benötigten Definitionen und Fakten über Koszul-Komplexe, lokale Kohomologie und lokale Dualität werden im Anhang A bereitgestellt.
Es seien $(f_i)_i := f_1, \ldots, f_n \in P$ und $J = (f_1, \ldots, f_n)$. Der zugehörige Koszul-Komplex ist

$$K_\bullet((f_i)_i) : \cdots \longrightarrow \bigwedge^p P^n \longrightarrow \bigwedge^{p-1} P^n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^1 P^n \longrightarrow P,$$